Πρότασις κγ'.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔςωσαν ἰσογώνια τὰ παραλληλόγραμμα Μ, καὶ Ν, τότε λέγω ὅτι Μ:Ν, ὡς ΑΒ:ΒΔ καὶ ΒΕ:ΒΓ εἴτε $M:N::\frac{AB}{B\Delta}\cdot\frac{BE}{B\Gamma}$ εἴτε $\frac{M}{N}=\frac{AB}{B\Delta}\times\frac{B\Gamma}{BE}$. σχ. 158.

Τίθημι τὴν ΒΔ ἐπ' εὐθείας μὲ τὴν ΑΒ, καὶ οὕτω καὶ ἡ ΒΕ θέλει εὑρεθείη ἐπ' εὐθείας μὲ τὴν ΒΓ, ἀλλέως ἡ γων. ΑΒΓ οὖσα κατὰ κορυφὴν μὲ τὴν γων. ΕΒΔ, δὲν θέλει εἶναι ἴση μὲ αὐτὴν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν.. ἐκπληρῶ τὸ παραλληλόγραμμον Ξ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ παραλληλόγραμμα Μ, καὶ Ξ εἶναι ἰσοϋψῆ, διὰ τοῦτο $M:\Xi::AB:B\Delta$ (πρ. α'.).. ὅθεν $\Xi=\frac{M\times B\Delta}{AB}$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ $N:\Xi::BE:B\Gamma$:: ὅθεν $\Xi=\frac{N\times \Gamma B}{BE}$, καὶ ἐχομένως $\frac{M\times B\Delta}{AB}=\frac{N\times \Gamma B}{BE}$ (ἀξ. α'.), εἴτε $\frac{M}{N}=\frac{AB}{B\Delta}\times\frac{B\Gamma}{BE}$, ὥςε $M:N::\frac{AB}{B\Delta}\cdot\frac{BE}{B\Gamma}$.

Ἂν δηλ. $AB=10$, καὶ $\Gamma B=8$, καὶ $B\Delta=5$, καὶ $BE=12$, τότε $\frac{M}{N}=\frac{10}{5}\times\frac{8}{12}=\frac{80}{60}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

Πόρισμα α'.

Ὥςε καὶ τὰ ἰσογώνια τρίγωνα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, ὡς ὄντα ὑποδιπλάσια τῶν παραλληλογράμμων.

Πόρισμα β'.

Ὥςε τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμά τε καὶ τρίγωνα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὸ γινόμενον τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου πρὸς τὸ γινόμενον τῶν πλευρῶν τοῦ δευτέρου τῶν περιεχόντων τὴν ἴσην γωνίαν δηλονότι. Καθότι ἐπειδὴ $M : N :: \frac{AB}{B\Delta} : \frac{BE}{B\Gamma}$. καὶ ἐπειδὴ $\frac{AB}{B\Delta} : \frac{BE}{B\Gamma} = \frac{AB}{B\Delta} \times \frac{B\Gamma}{BE}$ $= \frac{AB \times B\Gamma}{B\Delta \times BE} = AB \times B\Gamma : B\Delta \times BE$, διὰ τοῦτο $M : N :: AB \times B\Gamma : B\Delta \times BE$.

Π ό ρ ι σ μ α γ΄.

Ὥϛε ἂν $B\Gamma = BE$, τότε $M : N :: AB : B\Delta$, ἥτις εἶναι ἡ πρώτη πρότασις τούτου τοῦ βιβλίου.

Π ό ρ ι σ μ α δ΄.

Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι μόνον μίαν γωνίαν ἴσην, καὶ μὴ ἀναλόγους τὰς πλευρὰς, τότε τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν ἕξουσι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν πλευρῶν τῶν περὶ τὴν ἴσην γωνίαν. Καθότι ἂν $M : N :: AB \times B\Gamma : B\Delta \times BE$, ἔϛαι καὶ $\frac{M}{2} : \frac{N}{2} :: AB \times B\Gamma : B\Delta \times BE$.

Π ό ρ ι σ μ α. ε΄.

Ἐκ τριῶν μεγεθῶν τὸ πρῶτον ἔχει πρὸς τὸ τρίτον λόγον συγκείμενον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μέγεθος, καὶ τὸ δεύτερον πρὸς τὸ τρίτον. Ἔϛωσαν τρία μεγέθη ὁποιαδήποτε, ὡς τὰ A, B, Γ, τότε λέγω ὅτι ἔξει $A : \Gamma :: \frac{A}{B} : \frac{\Gamma}{B} :: AB : B\Gamma$. Καθότι ὄντος $\frac{A}{\Gamma} = \frac{A}{B}$ $\times \frac{B}{\Gamma}$, καὶ διὰ τοῦτο $A : \Gamma :: \frac{A}{B} : \frac{\Gamma}{B}$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κδ΄.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα εἶναι ὅμοια καὶ ἀλλήλοις καὶ μὲ τὸ ὅλον.

Ἔςω ΑΓ τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον, τότε λέγω ὅτι τὰ ΗΔ, ΗΒ, ΑΓ εἶναι ὅμοια. σχ. 159.

Τὰ τρίγωνα ΒΓΔ, ΗΚΔ, ΒΖΗ εἶναι ἰσογώνια (πρ. κθ΄. βιϐ. α΄.), καὶ διὰ τοῦτο ὅμοια (πρ. δ΄.).. ὥςε ἔξω ΓΒ : ΓΔ : : ΗΚ : ΚΔ : : ΒΖ : ΖΗ.. ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ = ΔΑ, ἡ δὲ ΚΗ = ΔΘ, ἡ δὲ ΖΒ = ΗΛ, διὰ τοῦτο ἔξω καὶ ΔΑ : ΔΓ : : ΔΘ : ΔΚ : : ΗΛ : ΗΖ : τουτέςι τὰ παραλληλόγραμμα ΗΔ, ΗΒ, ΑΓ ἔχουσι περὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀναλόγους τὰς πλευράς, καὶ διὰ τοῦτο ὅμοια (ὅρ. α΄.).

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥςε ἂν ἐντὸς παραλληλογράμμου ἐγγραφῇ ὅμοιον παραλληλόγραμμον μὲ κοινὴν γωνίαν, αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἐπεκτανθεῖσαι μέχρι τῶν πλευρῶν τοῦ ὅλου παραλληλογράμμου θέλουσιν ἐκτελέσει ἄλλο παραλληλόγραμμον ὅμοιον καὶ μὲ τὸ μέρος καὶ μὲ τὸ ὅλον. Οὕτως ὄντος τοῦ παραλληλογράμμου ΗΔ ὁμοίου μὲ τὸ ΑΓ, ἂν ἡ ΘΗ καὶ ΚΗ ἐπεκτανθῶσι μέχρι τῶν σημείων Ζ, καὶ Λ, τὸ γενησόμενον παραλληλόγραμμον ΗΒ θέλει εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΗΔ.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κε΄.

Νὰ συςήσῃ τις εὐθύγραμμον ὅμοιον μὲ τὸ δοθὲν, καὶ ἴσον μὲ ἕτερον δοθέν.

Ἔςω Μ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, οὗτινος ζητεῖται ὅμοιον.. καὶ Ν, οὗτινος ζητεῖται ἴσον.. σχ. 160.

Παρὰ μὲν τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἀναγράφω ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓΔ = Μ (πρ. με΄. βιϐ. α΄.).. παρὰ δὲ τὴν ΑΔ εὐθεῖαν, τὸ ὀρθ. ΑΔΕΖ = Ν,, μετὰ δὲ τὴν ΑΒ, καὶ

ΑΖ εὐθεῖαν εὑρίσκω μέσην ἀνάλογον τὴν ΗΘ, καὶ ἐπ' αὐτὴν γράφω τὸ εὐθύγραμμον Ξ ὅμοιον μὲ τὸ Μ (πρ. ιη'.), καὶ λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὰ εὐθύγραμμα Ξ καὶ Μ εἶναι ὅμοια, διὰ τοῦτο $Μ : Ξ :: ΑΒ^2 : ΗΘ^2$ (πρ. ιθ').. ἐπειδὴ πάλιν καὶ τὰ ὀρθογώνια ΑΒΓΔ, ΑΔΕΖ εἶναι ἰσοϋψῆ, διὰ τοῦτο $ΑΒΓΔ : ΑΔΕΖ :: ΑΒ : ΑΖ$ (πρ. α').. ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὸ μὲν $ΑΒΓΔ = Μ$, τὸ δὲ $ΑΔΕΖ = Ν$, διὰ τοῦτο $Μ : Ν :: ΑΒ : ΑΖ :: ΑΒ^2 : ΗΘ^2$ (ὅρ. ϛ'. βιϐ. ε'.).. ὥστε $Μ : Ν :: Μ : Ξ$ (πρ. ια'. βιϐ. ε'.), καὶ διὰ τοῦτο $Ξ = Ν$ (πρ. θ'. βιϐ. ε'.) : ὅ ἐστι τὸ εὐθύγραμμον Ξ εἶναι καὶ ὅμοιον μὲ τὸ Μ καὶ ἴσον μὲ τὸ Ν, ὡς ἐζητεῖτο.

Πρότασις κϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου ἀφαιρεθῇ παραλληλόγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον μὲ τὸ μειωτέον, ἔχον κοινὴν γωνίαν μὲ αὐτὸ, ἕξουσιν ἀμφότερα κοινὴν τὴν διάμετρον.

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ μειωτέον καὶ ΔΕΖΗ τὸ ἀφαιρετέον, καὶ $ΔΑ : ΔΓ :: ΔΕ : ΔΗ$, τότε λέγω ὅτι ἡ διάμετρος ΔΒ θέλει διέλθει διὰ τοῦ σημείου Ζ. σχ. 161.

Εἰδὲ μὴ, ἂς διέλθῃ δι' ἑνὸς ἄλλου σημείου, ὡς διὰ τοῦ Θ.. ἄγω τὴν ΚΘ παράλληλον μὲ τὴν ΔΓ, καί μοι προκύπτουσι δύο ὅμοια παραλληλόγραμμα τὰ ΔΚΘΗ, ΔΑΒΓ (πρ. κδ'.), καὶ διὰ τοῦτο $ΔΚ : ΔΗ :: ΔΑ : ΔΓ$.. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, καὶ $ΔΑ : ΔΓ :: ΔΕ : ΔΗ$, ὅθεν $ΔΕ : ΔΗ :: ΔΚ : ΔΗ$ (πρ. ια'. βιϐ. ε'.).. ὥστε $ΔΕ = ΔΚ$ (πρ. ια'. βιϐ. ε'.), ὅπερ εἶναι ἄτοπον. Ὥστε...

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥςε φυλαττομένης τῆς αὐτῆς γωνίας ΑΔΓ: ὅ ἐςὶ τῆς αὐτῆς ἀναφορᾶς δύο δυνάμεων ἐνεργουσῶν πρὸς ἓν σῶμα κατὰ τὴν ΔΑ καὶ ΔΓ, τὸ σῶμα ἔχει νὰ διέλθῃ τὴν ΔΓ διαγώνιον.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κζ.

Ἐκ πάντων τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀναγραφομένων ἐλλειπῶν παραλληλογράμμων, ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων μὲ τὸ ἐπὶ τῆς ἡμισείας, τὸ ἐπὶ τῆς ἡμισείας εἶναι τὸ μέγισον.

Ἔςω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, τετμημένη δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον. σχ. 162.

Ἐπὶ τῆς ἡμισείας ΓΒ ἀναγράφω τὸ παραλληλόγραμμον ΓΔ, καὶ μὲ αὐτὸ ὅμοιον τὸ ΗΘ: ὅ ἐςι περὶ τὴν ΒΕ διάμετρον (πρ. κδ΄.).. ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῆς ἡμισείας ΑΓ τὸ ΑΕ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΗ οὔσης μείζονος τῆς ἡμισείας τὸ ΑΖ, ὄντων ὁμοίων μὲ τὸ ΗΘ, καὶ λέγω ὅτι τὸ ΑΕ $>$ ΑΖ καὶ παντὸς ἄλλου, πλὴν τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ.

Καθότι τὸ ΓΖ $=$ ΖΔ, καθὸ παραπληρώματα.. προςίθημι κοινῶς τὸ ΗΘ, καὶ ἔχω ΓΘ $=$ ΗΔ.. ἀλλὰ τὸ ΓΘ $=$ ΑΚ (πρ. λς΄. βιβ. α΄.).. ὥςε ΑΚ $=$ ΗΔ.. καὶ προςιθέμενος κοινῶς τὸ ΓΖ, ἔξω ΑΖ $=$ ΗΔ $+$ ΓΖ $=$ γνωμ. αβγ.. ἀλλὰ γνωμ. αβγ $<$ ΓΔ, ὡς μέρος καὶ ὅλον, ὅθεν καὶ ΑΖ $<$ ΓΔ.. ἀλλὰ ΓΔ $=$ ΑΕ, διὰ τοῦτο καὶ ΑΕ $>$ ΑΖ. Ὥςε τὸ παρ. ΑΕ: τὸ ἐπὶ τῆς ἡμισείας δηλ. τῆς δοθείσης ΑΒ, καὶ ὂν ὅμοιον μὲ τὸ ἔλλειμμα ΓΔ: τὸ ἐπὶ τῆς ἡμισείας, εἶναι μεῖζον τοῦ ΑΖ, τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΗ καὶ ἔχοντος ὅμοιον τὸ ἔλλειμμα τὸ ΗΘ μὲ τὸ ΓΔ (πρ. κδ΄.), ὡς ἐζητεῖτο.

Πρότασις. κη΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀναγράψῃ τις παραλληλόγραμμον ἴσον μὲ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον καὶ ἐλλεῖπον κατὰ παραλληλόγραμμον ὅμοιον μὲ τὸ δοθέν.. πλὴν τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, οὗ τινος ζητεῖται ἴσον, νὰ μὴ ἦναι μεῖζον τοῦ ἐπὶ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου μετὰ ἐλλείμματος ὁμοίου μὲ τὸ ἐπὶ τῆς ἡμισείας.

Ἔςω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἐφ' ἣν ζητεῖται νὰ ἀναγραφῇ τὸ παραλληλόγραμμον, Μ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, οὗ τινος ζητεῖται ἴσον, καὶ Ν τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ τινος ζητεῖται ὅμοιον. σχ. 163.

Τέμνω δίχα τὴν ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Γ.. ἀναγράφω ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔ ὅμοιον μὲ τὸ δοθὲν Ν (πρ. ιη΄.).. ἐκπληρῶ τὸ παραλ. ΑΕ. Ἂν λοιπὸν καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔ ἦναι ἴσον μὲ τὸ Μ, τὸ ζητούμενον ἔλαβε πέρας (πρ. κε΄.), διότι τὸ παραλ. ΑΔ εἶναι ἴσον μετὰ τοῦ ἐλλείματος ΓΕ, τοῦ ὄντος ὁμοίου καὶ μὲ τὸ ΑΔ καὶ μὲ τὸ Ν. εἰδὲ καὶ εἶναι ἄνισον, ἐπειδὴ ἕνεκα τῆς ὑποθέσεως, ἀδυνατεῖ νὰ ἦναι ἔλασσον, θέλει εἶναι μεῖζον. Ὥςε εὑρίσκω τὴν ὑπεροχὴν αὐτοῦ (πόρ. πρ. με΄. βιβ. α΄.).. καὶ τότε ἴσον μὲ αὐτὴν καὶ ὅμοιον μὲ τὸ παραλ. ΓΕ γράφω τὸ παραλ. ΔΗ (πρ. κε΄.).. ἄγω τὴν διαγώνιον ΔΒ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Η ἄγω παραλλήλους μὲ τὴν ΑΒ καὶ ΒΕ τὰς ΚΖ, ΘΘ.

Τὸ παραλ. ΓΕ $=$ παραλ. ΔΗ $+$ γνωμ. αβγ $=$ παραλ. ΔΗ $+$ Μ, ἐκ τῆς κατασκευῆς.. ἀλλ' ὁ γνωμ.

αβγ = παραλ. ΑΗ, ὡς εἶναι γνωςόν.. ὥςε τὸ παραλ. ΑΗ = Μ, καὶ ἐπιγέγραπται καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ μετὰ ἐλλείμματος τοῦ ΘΖ, ὄντος ὁμοίου μὲ τὸ ἐπὶ τῆς ἡμισείας ΓΒ (πρ. κδ΄.).. ὥςε τὸ παραλ. ΑΗ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥςε ἂν τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον, οὗτινος ζητεῖται ὅμοιον ἐλλεῖπον, ἦναι τετράγωνον, τότε αὕτη ἡ πρότασις τρέπεται εἰς τὴν ε΄. τοῦ β΄. βιβλίου: τουτέςι τό, ἂν εὐθεῖα γραμμὴ (ἡ ΑΒ) τμηθῇ εἰς ἴσα (κατὰ τὸ Γ), καὶ εἰς ἄνισα (κατὰ τὸ Θ), τὸ ἐκτῶν ἀνίσων μερῶν ὀρθογώνιον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμισείας ἀποθέσει τοῦ τετραγώνου τοῦ μεταξὺ τῶν τομῶν: ὅ ἐςιν $ΑΘ \times ΘΒ = ΓΒ^2 - ΓΘ^2$: τουτέςιν ἐπειδὴ καὶ ὑπετέθη τὸ ΑΔ (= ΓΕ) $>$ Μ, διὰ τοῦτο ὑπῆρξε χρεία νὰ ἀφαιρεθῇ ἐξ' αὐτοῦ ἡ ὑπεροχή: τουτέςι τὸ ΗΔ ($= ΓΘ^2$), καὶ οὕτως ἡ διαφορά: τουτέςιν ὁ γνωμ. αβγ (= ΑΗ) θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον, ὡς ἔχουσα ἔλλειμμα τὸ ΘΖ τὸ ὂν ὅμοιον μὲ τὸ ΓΕ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ μὲ τὸ Ν.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κθ΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀναγράψῃ τις παραλληλόγραμμον ἴσον μὲ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, καὶ ὑπερβάλλον κατὰ τὸ παραλληλόγραμμον ὅμοιον μὲ τὸ δοθέν.

Ἔςω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἐφ ἧς ζητεῖται νὰ ἀναγραφῇ τὸ παραλληλόγραμμον.. Μ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, οὗτινος ζητεῖται ἴσον, καὶ Ν τὸ παραλληλόγραμμον, οὗτινος ζητεῖται ὅμοιον ὑπερβάλλον. σχ. 164.

Τέμνω δίχα τὴν ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Γ,. αναγράφω ἐπὶ τῆς ΓΒ τὸ παραλ. ΒΕ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον μὲ τὸ Ν.. ἐκτελῶ τὸ παραλ. ΕΘ ὅμοιον μὲ τὸ παραλ. ΒΕ καὶ ἴσον μὲ τὸ παραλ. ΒΕ + Μ (προ. με΄. βιϐ. α΄.).. ἐπεκτείνω τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΖΒ μέχρι τοῦ Δ καὶ Η σημείου.. ἐκπληρῶ τὸ παραλ. ΑΘ, καὶ λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον.

Καθότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, παραλ. ΕΘ = παραλ. ΕΒ + Μ.. ἀλλὰ παραλ. ΕΘ = παραλ. ΕΒ + γνωμ. αβγ.. ὥςε γνωμ. αβγ = Μ.. ἀλλὰ γνωμ αβγ = παραλ. ΑΘ, ὥςε τὸ παραλ. ΑΘ = Μ, ἐπιγέγραπται δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ δοθείσης εὐθείας καὶ μετὰ ὑπερϐάλλοντος παραλληλογράμμου τοῦ ΒΘ τοῦ ὄντος ὁμοίου μὲ τὸ ΕΒ. (πρ. κδ΄.), διὰ τοῦτο καὶ μὲ τὸ δοθὲν Ν.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥςε ἂν τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον, οὗτινος δηλονότι ζητεῖται ὅμοιον ὑπερϐάλλον, ἦναι τετράγωνον, τότε αὕτη ἡ πρότασις τρέπεται εἰς τὴν ς΄. τοῦ β΄. βιϐλίου τὸ, ἂν εὐθεῖα γραμμὴ (ἡ ΑΒ) τμηθῇ εἰς ἴσα (κατὰ τὸ Γ), καὶ εἰς αὐτὴν προςεθῇ εὐθεῖά τις ἐπ᾽ εὐθείας (ἡ ΑΔ), τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἐκ τῆς δοθείσης καὶ τῆς προσκειμένης εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμισείας μετὰ τῆς προσκειμένης ἀποθέσει τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας· τουτέςιν $ΑΔ \times ΒΔ = ΓΔ^2 - ΓΒ^2$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. λ΄.

Τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν νὰ τάμῃ τις κατὰ μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Ἔςω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. σχ. 165.

Τέμνω τὴν ΑΒ εὐθεῖαν οὕτω πως κατὰ τὸ Γ, ὥςε ὀρθογώνιον τὸ ἐκ τῆς ὅλης ΑΒ καὶ τοῦ τμήματος ΓΒ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἑτέρου τμήματος ΑΓ (πρ. ια΄. βιβ. β΄.): τουτέστιν $ΑΒ \times ΓΒ = ΑΓ^2$.. ἀλλὰ πᾶσα ἐξίσωσις τρέπεται εἰς ἀναλογίαν, διὰ τοῦτο ΑΒ : ΑΓ :: ΑΓ : ΓΒ.. ὥστε ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸν μέσον καὶ ἄκρον λόγον (ὅρ. γ΄.), ὡς ἐζητεῖτο.

Πρότασις. λα΄.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης σχῆμα εἶναι ἴσον μὲ τὰ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἀναγραφόμενα ὁμοίως σχήματα.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, καὶ ὅμοια σχήματα τὰ Μ, Ν, Ξ, τότε λέγω ὅτι $Μ = Ν + Ξ$. σχ. 166.

Καθότι ἐπειδὴ $Μ : ΒΓ^2 :: Ν : ΑΓ^2 :: Ξ : ΑΒ^2$ (πρ. κ΄.).. καὶ ἐπειδὴ $Μ + Ν + Ξ : ΒΓ^2 + ΑΓ^2 + ΑΒ^2 :: Μ : ΒΓ^2$ (πρ. α΄. βιβ. ε΄.), διὰ τοῦτο καὶ ἐναλλὰξ $Μ + Ν + Ξ : Μ :: ΒΓ^2 + ΑΓ^2 + ΑΒ^2 : ΒΓ^2$.. καὶ ἀφαιρέσει $Ν + Ξ : Μ :: ΑΓ^2 + ΑΒ^2 : ΒΓ^2$.. ἀλλὰ $ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2$ (πρ. μζ΄. βιβ. α΄.).. ὥστε καὶ $Μ = Ν + Ξ$ (πρ. θ΄. βιβ. ε΄.).

Πόρισμα.

Ὥστε ἐπειδὴ καὶ οἱ κύκλοι εἶναι ὅμοια σχήματα (πόρ. β΄. πρ. β΄.), ἐξ οὗ καὶ τὰ τούτων ἡμίσεα, εἴτε ἡμικύκλια (ὅρ. ι΄. βιβ. γ΄.), διὰ τοῦτο ἡμικ. ΒΓΔ = ἡμικ. ΑΓΔ + ἡμικ. ΑΒΕ. σχ. 167.

Ὥστε ἀφαιρεθέντων κοινῶς τῶν κοινῶν χωρίων, μένει τριγ. ΑΒΓ ἴσον μὲ τὰς δύο μηνοειδεῖς: τουτέστιν $α = β + γ$.

Ὥςε ἂν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἦν ἰσοσκελὲς, τότε ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἤθελεν εἶναι διπλάσιον ἑκατέρας τῶν μηνοειδῶν, καὶ διὰ τοῦτο αὗται ἴσαι ἀλλήλαις, ὅπερ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος πρῶτος ἀπέδειξεν.

Πρότασις λβ′.

Ἐὰν δύο τριγώνων ἦναι ἀνάλογοι τε αἱ δύο πλευραὶ καὶ παράλληλοι αἱ ὁμόλογοι, ταῦτα τὰ τρίγωνα θέλουσιν εἶναι ὅμοια.

Ἔςω ΑΒ : ΑΓ : : αΓ : αγ.. καὶ ἡ μὲν ΑΒ παράλληλος μὲ τὴν αΓ, ἡ δὲ ΑΓ μὲ τὴν αγ, τότε λέγω ὅτι συντεθέντων τῶν τριγώνων ΑΒΓ, αΓγ κατὰ τὴν Γ γωνίαν, ἡ Γγ εὐθεῖα θέλει εἶναι ἐπ' εὐθείας μὲ τὴν ΒΓ: τουτέςιν ὅμοια τὰ τρίγωνα. σχ. 168.

Καθότι ἡ γων. Α = γων. β (πρ. κθ′. βιϐ. α′.).. ὡσαύτως καὶ ἡ γων. α = β.. ὅθεν καὶ ἡ γων. Α = γων. α (ἀξ. α′.).. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, ΑΒ : ΑΓ : : αΓ : αγ.. ὥςε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αΓγ εἶναι ὅμοια (πρ. δ′.).. ἀλλ' ΑΒ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν αΓ, ἄρα καὶ ἡ ΒΓ μὲ τὴν Γγ (πόρ. α′. πρ. δ′), καὶ ἐχομένως ἐπ' εὐθείας, ἂν ἡ μία τεθῇ μετὰ τὴν ἄλλην, εἴτε ἡ Βγ εὐθεῖα γραμμή: ὅ ἐςι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αΓγ εἶναι ὅμοια.

Πρότασις. λγ′.

Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους αἱ γωνίαι, καὶ πρὸς τῷ κέντρῳ καὶ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, εἶναι ἀνάλογοι μὲ τάτε ὑποτείνοντα αὐτὰς τόξα καὶ μὲ τοὺς τομεῖς.

Ἔςωσαν ἴσοι οἱ κύκλοι ΑΒΓ, αβγ, τότε λέγω ὅτι γων. ΒΑΓ : γων. βαγ : : τοξ. ΒΓ : τοξ. βγ : : τομ. ΒΚΓ : τομ. βκγ. σχ. 169.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ γων. ΒΚΓ εἶναι ἓν μέρος τοιοῦτον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν τῶν περὶ τὸ σημεῖον Κ (πόρ. β΄. πρ. ιγ΄. βιβ. α΄.): οἷον τὸ τοξ. ΒΓ τῆς ὅλης περιφερείας ΑΒΓ, εἴτε τῶν 360°.. διότι πᾶσα περιφέρεια καταμετρεῖ τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας, καὶ οὔτε πλέον, οὔτε ἔλαττον, τούτου ἕνεκεν εἰς ἕνα κύκλον μία γωνία ἔχει τοσαύτας μονάδας ἐκ τῶν 360, ὅσας καὶ τὸ ὑποτεῖνον αὐτὴν τόξον: ὅ ἐςιν εἶναι ἀνάλογα.. καὶ ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, οἱ κύκλοι ἐνταῦθα εἶναι ἴσοι, διὰ τοῦτο ἔξω γων. ΒΚΓ : τοξ. ΒΓ : : γων. βκγ : τοξ. βγ, καὶ ἐναλλὰξ γων. ΒΚΓ : γων. βκγ : : τοξ. ΒΓ : τοξ. βγ.

β΄. Ἐπειδὴ καὶ ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία εἶναι ἡμίσεια τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ, ἂν ὑποτείνηται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ τόξου (πρ. κ΄. βιβ. γ΄.).. καὶ τὰ ἡμίσεα ἔχουσιν ὡς τὰ ὅλα (πρ. δ΄. βιβ. ε΄.), διὰ τοῦτο γων. Α : γων. α : : τοξ. ΒΓ : τοξ. βγ.

γ΄. Ἐπειδὴ καὶ οἱ τομεῖς ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ τρίγωνα μετὰ κοίλης τῆς βάσεως, καὶ ἐνταῦθα διὰ τὴν ἰσότητα τῶν κύκλων οἱ τομεῖς εἶναι ἰσοϋψεῖς, διὰ τοῦτο καὶ τομ. ΒΚΓ : τομ. βκγ : : τοξ. ΒΓ : τοξ. βγ. (πρ. α΄.).

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥςε εἰς τοὺς ἀνίσους κύκλους τὰ τόξα τὰ ὑποτείνοντα ἴσας γωνίας, εἴτε πρὸς τῷ κέντρῳ, εἴτε πρὸς τῇ περιφερείᾳ, εἶναι ὁμόλογα καὶ μὲ τὰς λοιπὰς περιφερείας καὶ μὲ ὁλοκλήρους (πρ. ϛ΄. βιβ. γ΄.), καὶ ἐπομένως ἀνάλογοι αἱ χορδαὶ αἱ ὑποτείνουσαι ἴσας γωνίας.. καὶ τούτου ἕνεκεν καὶ αἱ διάμετροι δύο κύκλων, ὡς ὑποτείνουσαι δηλ.

ὀρθὰς γωνίας εἶναι ἀνάλογοι, ὡς εἴδομεν, μὲ τὰς χορδὰς τὰς ὑποτεινούσας ἴσας γωνίας (πόρ. β΄. πρ. β΄.).

ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΑ΄. (α).

ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ. Α΄.

Ὅροι.

α΄. Στερεὸν λέγεται τὸ ἔχον τρεῖς διαστάσεις: μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος.

(α) Εἰς τὰ πρῶτα ἓξ βιβλία ὁ γεωμέτρης ἐξέθετο τὸ μέτρον καὶ ἀναφορὰν τῶν γραμμῶν καὶ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν, εἰς δὲ τὸ ζ΄., η΄., καὶ θ΄., τὰ πάθη τῶν ἀριθμῶν: τουτέστι τὴν ἀριθμητικὴν, ἥτις δηλονότι παρ' ἡμῶν ἐκτέθη ἀνὰ μέρος πρότερον, εἰς δὲ τὸ ι΄., τὰ πάθη τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν, ἅπερ δηλονότι ἀνήκουσιν εἰς τὴν ἀνάλυσιν ἢ ἄλγεβραν, εἰς δὲ τὸ ια΄. καὶ ιβ΄., τὸ μέτρον καὶ ἀναφορὰν τῶν στερεῶν, εἰς ἅπερ καὶ ἐμβαίνομεν.

Στερεὸν λοιπὸν εἶναι πᾶν ἐκεῖνο, ὅπερ ἔχει μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος, καὶ ἐν ταυτῷ ἀντίστασιν καὶ βαρύτητα: τουτέστιν ἅπαντα τὰ σώματα. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ γεωμέτρης φροντίζει πολλὰ ὀλίγον περὶ τῆς ἀντιτυπίας καὶ βαρύτητος τῶν σωμάτων, τούτου ἕνεκεν ἐῶν ταύτας τὰς ἰδιότητας εἰς τοὺς φυσικοὺς, ἐξετάζει τὰ σώματα μόνον ὡς ἐκτατὰ, εἴτε ὡς ἔχοντα μόνον μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος. Καὶ τούτου ἕνεκεν τὸ γεωμετρικὸν σῶμα διαφέρει τοῦ φυσικοῦ, ὡς ὂν ἄνευ βαρύτητος καὶ ἀντιτυπίας.. καὶ ἐπομένως σῶμα γεωμετρικὸν ἢ στερεὸν εἶναι λέξις συνώνυμος μὲ τὸν ὄγκον. Καὶ τὸ μὲν μῆκος τῶν σωμάτων ἐκτίθεται διὰ τῶν γραμ-