μεῖα Δ, δ διὰ τῆς Αδ εὐθείας.. ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Γ ἄγω παραλλήλους τὰς Ββ, Γγ μὲ τὴν Δδ, καὶ λέγω ὅτι ἡ Αδ τέτμηται ὁμοίως μὲ τὴν ΑΔ κατὰ τὰ σημεῖα β, καὶ γ.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ Ββ ἤχθη παράλληλος μὲ τὴν Γγ, διὰ τοῦτο ΑΒ: ΒΓ:: Αβ: βγ (πρ. β΄.).

Εἶτα ἐπειδὴ καὶ ἡ Γγ ἤχθη παράλληλος μὲ τὴν Δδ, διὰ τοῦτο ΑΓ: ΓΔ:: Αγ: γδ.. καὶ ἐπομένως ΒΓ: ΓΔ::βγ: γδ (πρ. ϛ΄. βιβ. ε΄.): ὅ ἐςιν ἡ αδ, εἴτε ἡ ταύτη ἴση Αδ τέτμηται ὁμοίως μὲ τὴν δοθεῖσαν τετμημένην εὐθεῖαν ΑΔ, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς ια΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, νὰ προσευρῇ τις τρίτην ἀνάλογον.

Ἔςωσαν ΑΒ, καὶ αβ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. σχ. 148.

Ἀπὸ τοῦ Β πέρατος τῆς ΑΒ εὐθείας, ἄγω πρὸς ὀρθὰς μὲ αὐτὴν τὴν ΒΓ ἴσην μὲ τὴν αβ (πρ. β΄. βιβ. α΄.).. ζευγνύω τὰ σημεῖα Α, Γ.. πρὸς τῷ σημείῳ Γ τῆς ΑΓ εὐθείας.. ἐκτελῶ τὴν γων. ΑΓΔ=90° (πρ. κγ΄. βιβ. α΄.).. ἐπεκτείνω τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἕως νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΓΔ, καὶ λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΔ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ΑΒ: ΒΓ:: ΒΓ: ΒΔ (πόρ. α΄. πρ. κ΄.), διὰ τοῦτο ἡ ΒΔ εἶναι τρίτη ἀνάλογος τῶν ΑΒ ΒΓ, εἴτε τῶν ΑΒ, αβ, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥςε εἰς πάντα κύκλον τὸ μέρος τῆς διαμέτρου τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς καθέτου καὶ τῆς περιφερείας εἶναι τρίτον ἀνάλογον τοῦ λοιποῦ μέρους τῆς διαμέτρου καὶ τῆς καθέτου. Οὕτως ἐπειδὴ ΑΕ: ΓΕ::ΓΕ: ΕΒ (πορ. β'. πρ. η'.), διὰ τοῦτο ἡ ΕΒ εἶναι τρίτη ἀνάλογος τῆς ΑΕ καὶ ΕΒ (σχ. 92.).

Π ρ ό τ α σ ι ς ιβ'.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ προσεύρη τις τετάρτην ἀνάλογον.

Ἔςωσαν ΖΖ, ΗΗ, ΘΘ αἱ τρεῖς δοθεῖσαι εὐθεῖαι σχ. 138.

Ἐκτελῶ τὴν ΑΒ = ΖΖ, καὶ τὴν Αβ = ΗΗ.. γράφω κύκλους περὶ αὐτάς: τὸν Αβγ, ΑΒΓ.. ἐναρμόζω εἰς τὸν κύκλον ΑΓΒ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ = ΘΘ (πρ. α'. βιβ. δ'.).. ἄγω τὴν ΑΓ χορδὴν, εἶτα τὴν βγ, καὶ λέγω ὅτι ἡ βγ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ αἱ διάμετροι εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς χορδὰς (πόρ. α'. προ. β.), διὰ τοῦτο ΑΒ: Αβ::ΒΓ: βγ.. ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ μὲν ΑΒ = ΖΖ, ἡ δὲ Αβ = ΗΗ, ἡ δὲ ΒΓ = ΘΘ, ὥςε ΖΖ: ΗΗ::ΘΘ: γβ: τουτέςιν ἡ βγ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ιγ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ προσεύρη τις μέσην ἀνάλογον.

Ἔςωσαν ΑΒ, βγ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. σχ. 149.

Ἐπεκτείνω τὴν ΑΒ, ἕως οὗ τὸ μέρος ΒΓ = βγ.. περὶ τὴν ΑΓ, ὡς διάμετρον, γράφω κύκλον τὸν ΓΔΑ.. ἀπὸ τοῦ Β σημείου, κοινοῦ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἀνάγω πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν διάμετρον τὴν ΒΔ, καὶ λέγω ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Καθότι ἐπειδὴ $ΔΒ^2 = ΑΒ \times ΒΓ$ (πόρ. β'. προ. η'), διὰ τοῦτο ΑΒ : ΔΒ : : ΔΒ : ΒΓ.. ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, ΒΓ = βγ, διὰ τοῦτο καὶ ΑΒ : ΔΒ : : ΔΒ : βγ: τουτέςιν ἡ ΔΒ μέση ἀνάλογος τῶν ΑΒ καὶ βγ.

Πρότασις ιδ'.

Ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα ἦναι ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἔχωσι καὶ μίαν γωνίαν ἴσην, ἕξουσιν ἀντιπεπονθότως τὰς περὶ τὴν ἴσην γωνίαν πλευρὰς.. καὶ ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην, καὶ ἀντιπεπονθότως τὰς περὶ ταύτην τὴν γωνίαν πλευρὰς, ταῦτα τὰ παραλληλόγραμμα θέλουσιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

α'. Ἔςω παραλ. Μ = παραλ. Ν, καὶ ἡ γων ΑΒΓ = γων. ΔΒΕ, τότε λέγω ὅτι ΑΒ : ΒΕ : : ΔΒ : ΒΓ. σχ. 150.

Τίθημι τὴν βάσιν ΒΕ ἐπ' εὐθείας μὲ τὴν βάσιν ΑΒ, καὶ ἐχομένως καὶ ἡ ΔΒ θέλει εἶναι ἐπ' εὐθείας μὲ τὴν ΒΓ, ἀλλέως αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΒΓ, ΔΒΕ δὲν θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις (πρ. ιε'. βιβ. α'), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.. ἐκπληρῶ τὸ παραλληλόγραμμον Π, καὶ ἔχω παραλ. Μ : παραλ. Π : : ΑΒ : ΒΕ (πρ. α'.). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ παραλ. Ν : παραλ. Π : : ΔΒ : ΒΓ.. ἀλλὰ παραλ. Ν = παραλ. Μ, ἐξ ὑποθέσεως.. ὥςε παραλ. Μ : παραλ. Ν : : ΔΒ : ΒΓ, καὶ διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων ΑΒ : ΒΕ : : ΔΒ : ΒΓ (πρ. ια'. βιβ. ε'.).

β'. Ἔςω ΑΒ : ΒΕ : : ΔΒ : ΒΓ, καὶ ἡ γων. ΑΒΓ = γων. ΔΒΕ, τότε λέγω ὅτι παραλ. Μ = παραλ. Ν.

Ἐκτελῶ τὴν ὁμοίαν κατασκευήν. Καὶ ἐπειδὴ τὰ παραλληλόγραμμα Μ, καὶ Π εἶναι ἰσοϋψῆ, διὰ τοῦτο παραλ. Μ : παραλ. Π : : ΑΒ : ΒΕ (πρ. α΄.). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ παραλ. Ν : παραλ. Π : : ΔΒ : ΒΓ.. ἀλλ'. ἐξ ὑποθέσεως, ΑΒ : ΒΕ : : ΔΒ : ΒΓ, διὰ τοῦτο παραλ. Μ : παραλ. Π : : παραλ. Ν : παραλ. Π (πρ. ια΄. βιβ. ε΄.).. ὥςε παραλ. Μ = παραλ. Ν (πρ. θ΄. βιβ. ε΄.).

Π ρ ό τ α σ ι ς. ιε΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἦναι ἴσα ἀλλήλοις καὶ ἔχωσι καὶ μίαν γωνίαν ἴσην, ἕξουσιν ἀντιπεπονθότως τὰς περὶ τὴν ἴσην γωνίαν πλευράς.. καὶ ἐὰν δύο τριγώνων ἡ μία γωνία ἦναι ἴση καὶ ἀντιπάσχουσιν αἱ περὶ τὴν ισην γωνίαν πλευραὶ, ταῦτα τὰ τρίγωνα θέλουσιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Ἔςω τρίγ. ΑΒΓ = τριγ. αΓβ, καὶ ἡ γων. ΑΓΒ = γων. αΓβ, τότε λέγω ὅτι ΓΑ : βΓ : : Γα : ΓΒ. σχ. 151.

Τίθημι τὴν βάσιν Γβ ἐπ' εὐθείας μὲ τὴν βάσιν ΓΑ, καὶ ἐχομένως καὶ ἡ αΓ θέλει εἶναι ἐπ' εὐθείας μὲ τὴν ΓΒ, ἀλλέως αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΓΒ, αΓβ δὲν θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις (πρ. ιε΄. βιβ. α΄.), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.. ἄγω τὴν Αα εὐθεῖαν, καὶ ἔχω τριγ. ΑΒΓ : τριγ. Μ : : ΒΓ : Γα (πρ. α΄.), καθὸ ἰσοϋψῆ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τριγ. αΓβ.. τριγ. Μ : : βΓ : ΓΑ, εἴτε τριγ. αΓβ : τριγ. Μ : : βΓ : Γα.. διότι τριγ. αΓβ = τργ. ΑΒΓ, ἐξ ὑποθέσεως.. ὥςε διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων βΓ : ΓΑ : : ΒΓ : Γα, καὶ ἀνάπαλιν ΓΑ : βΓ : : Γα : ΓΒ.

β΄. Ἔςω ΓΑ : βΓ : : Γα : ΓΒ, καὶ ἡ γων. ΑΓΒ

= γων. αΓβ, τότε λέγω ὅτι τό τριγ. ΑΒΓ = τρίγ. αΓβ.

Ἐκτελῶ τὴν ὁμοίαν κατασκευήν. Καὶ ἐπειδὴ τὰ τριγ. ΑΒΓ, Μ εἶναι ἰσοϋψῆ, διὰ τοῦτο τριγ. ΑΒΓ : τριγ. Μ :: ΓΒ : Γα. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τριγ. αΓβ : τριγ. Μ :: Γβ : ΓΑ.. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, ΓΑ : Γβ :: Γα : ΓΒ.. ὅθεν διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων τριγ. ΑΒΓ : τριγ. Μ :: τριγ. αΓβ : τριγ. Μ.. ὥςε τρίγ. ΑΒΓ = τριγ. αΓβ (πρ. ια'. βιβ. ε'.).

Π ρ ό τ α σ ι ς. ις'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἦναι ἀνάλογοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἔςαι ἴσον μὲ τὸ ὑπὸ τῶν μέσων.. καὶ ἐὰν δύο ὀρθογώνια ἦναι ἴσα ἀλλήλοις, αἱ βάσεις αὐτῶν ἔξουσιν ἀντιπεπονθότως μὲ τὰ ὕψη. (α).

Ἔςω αα : ββ :: γγ : δδ, τότε λέγω ὅτι ὀρθογ. αα × δδ = ὀρθ. ββ × γγ. σχ. 152.

Ποιῶ τὴν ΑΒ = αα.. αἴρω πρὸς ὀρθὰς μὲ αὐτὴν τὴν ΑΔ = δδ.. ἐκπληρῶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ.. ἔτι ποιῶ τὴν ΕΖ = ββ.. αἴρω πρὸς ὀρθὰς μὲ αὐτὴν τὴν ΕΘ = γγ.. ἐκπληρῶ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΗ.

(α) Ἀριθμητικῶς θεωροῦντες τὸ πρᾶγμα, ἔχει πάντοτε τὸ γινόμενον τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσον μὲ τὸ γινόμμενον τὸ ἐκ τῶν μέσων, πλὴν ὄχι καὶ γεωμετρικῶς, εἴτε εἰς τὰς ἐπιφανείας.. εἶναι ἀνάγκη δηλονότι νὰ ἦναι καὶ ὁ προσδιορισμὸς: τουτέςι τὸ νὰ ἦναι ὀρθογώνια, ἢ ἰσογώνια τὰ παραλληλόγραμμα (πρ. ιδ'.). Ὥςε αὕτη ἡ πρότασις περιέχεται εἰς τὴν ιδ'. πρότασιν.

Ἐπειδὴ καὶ, ἐξ ὑποθέσεως, αα : ββ : : γγ : δδ, διὰ τοῦτο καὶ αἱ τούτων ἴσαι θέλουσιν εἶναι ἀνάλογοι : τουτέϛιν ΑΒ : ΕΖ : : ΕΘ : ΑΔ. Ἀλλὰ τοῦτο τί — ἄλλο εἶναι, ἢ πλευραὶ παραλληλογράμμων περὶ ὀρθὴν γωνίαν ἀντιπεπονθότως; Ὥϛε ὀρθ. ΑΒ = ὀρθ. ΕΘ (πρ. ιδ΄), εἴτε ΑΒ × ΑΔ = ΕΖ × ΕΘ : ὅ ἐϛιν αα × δδ = ββ × γγ.

β΄. Ἔϛω αα × δδ = ββ × γγ, εἴτε ΑΒ × ΑΔ = ΕΖ × ΕΘ, τότε λέγω ὅτι ΑΒ : ΕΖ : : ΕΘ : ΑΔ.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἓν ὀρθογώνιον ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἡ βάσις αὐτοῦ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ ὕψος (ὅρ. β΄· βιϐ. β΄.), ἕπεται ἀναγκαίως δύο ὀρθογωνίων ὄντων ἴσων ἀλλήλοις, αἱ βάσεις αὐτῶν νὰ ἀντιπάσχωσι μὲ τὰ ὕψη, ἀλλέως ἡ ἐξίσωσις δὲν ἤθελε διασωθῇ.

Π ό ρ ι σ μ α. α΄.

Ὥϛε ἂν δύο ἴσα ὀρθογώνια ἔχωσιν ἴσα τὰ ὕψη, ἔξουσι καὶ τας βάσεις ἴσας.. καὶ ἂν ἴσας τὰς βάσεις, καὶ τὰ ὕψη.

Π ό ρ ι σ μ α. β΄.

Ὥϛε ἂν δύο χορδαὶ τέμνωσιν ἀλλήλαις, τὰ τμήματα αὐτῶν ἔξουσι λόγον ἀντιπεπονθότα πρὸς ἄλληλα. Καθότι ἐπειδὴ (πρ. λε΄. βιϐ. γ΄.) ὀρθ. ΑΓ × ΒΓ = ὀρθ. αΓ × βΓ (σχ. 120.), τούτου ἕνεκεν ΑΓ : αΓ : : βΓ : ΒΓ.

Π ό ρ ι σ μ α γ΄.

Ὥϛε ἂν ἡ μία χορδὴ ἦναι διάμετρος καὶ ἡ ἄλλη διατετμημένη πρὸς ὀρθὰς, τότε τὸ ἐκ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου ὀρθογώνιον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον θατέρου τῶν τμημάτων τῆς πρὸς ὀρθὰς διατετμημένης.

Οὕτως (σχ. 92.) ἐπειδὴ ἡ ΓΔ τέτμηται πρὸς ὀρθὰς ὑπὸ τῆς ΑΒ διαμέτρου, καὶ διὰ τοῦτο καὶ δίχα.. καὶ ἐπειδὴ ὀρθ. ΑΕ × ΕΒ = ὀρθ. ΓΕ × ΕΔ.. καὶ ἐπειδὴ ΓΕ = ΕΔ (πρ. γ΄. βιβ. γ΄.), διὰ τοῦτο ὀρθ. ΑΕ × ΕΒ = ΕΔ².

Π ό ρ ι σ μ α. δ΄.

Ὥςε ἂν ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν ἐν κύκλῳ σημείων, ἐκτὸς τοῦ κέντρου, ἀχθῶσι πρὸς τὴν περιφέρειαν δύο εὐθεῖαι, καὶ ἐπεκταυθῶσιν ἐκ τοῦ ἀπέναντι μέρους μέχρι τῆς περιφερείας, γενήσονται δύο τρίγωνα ὅμοια. Οὕτως ἂν ἀπὸ τοῦ σημείου Γ (σχ. 120.) ἄξω τὰς ΓΑ, Γβ εὐθείας, καὶ ἐπεκτείνω τὴν μὲν ΑΓ μέχρι τοῦ Β σημείου, τὴν δὲ βΓ μέχρι τοῦ α, ἕξω δύο τρίγωνα ὅμοια τὰ ΑΓα, βΓΒ.. διότι βέβαια ἔχω ΑΓ : Γα :: βΓ : ΓΒ. (πρ. ζ.).

Π ό ρ ι σ μ α. ε΄.

Παντὸς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ τὸ ἐκ τῶν διαγωνίων ὀρθογώνιον, εἶναι ἴσον μὲ τὰ δύο ὀρθογώνια τὰ ἐκ τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου: τουτέςιν ΑΔ × ΓΒ = ΑΒ × ΓΔ + ΓΑ × ΒΔ. σχ. 111.

Ἂν ἡ γων. α δὲν ἦναι ἴση μὲ τὴν γων. ΔΓΒ, ἐκτελῶ τὴν γων. ΕΓΑ = γων. ΔΓΒ. Καὶ τότε εἰς τὰ τρίγωνα ΕΓΑ, ΔΓΒ ἡ μὲν γων. ΓΑΕ = γων. ΓΒΔ (πρ. κα΄. βιβ. γ΄.), ἡ δὲ γων. ΕΓΑ = γων. ΔΓΒ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ τρίτη αὐτῶν ἴση.. ὥςε ΑΓ : ΑΕ :: ΓΒ : ΒΔ (πρ. δ΄.): τουτέςιν ΑΕ × ΓΒ = ΑΓ × ΒΔ.

Ἔτι ἐπειδὴ ἡ γων. ΕΓΑ = γων. ΔΓΒ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, διὰ τοῦτο, ἀφαιρεθείσης κοινῶς τῆς γων.

ΕΓΒ, μένει γων. ΒΓΑ = γων. ΔΓΕ.. ἀλλὰ καὶ γων. ΓΒΑ = γων. ΕΔΓ (πρ. κα΄. βιβ. γ΄.).. ὥςε καὶ ἡ τρίτη ἴση, καὶ διὰ τοῦτο ὅμοια τὰ τρίγωνα ΓΕΔ, ΓΑΒ, καὶ ἐκ τούτου ΓΔ : ΔΕ : : ΓΒ : ΑΓ, εἴτε ΔΕ×ΓΒ = ΑΒ×ΓΔ. Τώρα προςίθημι τὰς δύο ἐξισώσεις, καὶ ἔχω ΑΒ×ΓΔ + ΓΑ×ΒΔ = ΑΕ×ΓΒ + ΔΕ×ΓΒ = (ΑΕ + ΔΕ)×ΓΒ = ΑΔ×ΓΒ.

Πρότασις ιζ΄.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἦναι συνεχῶς ἀνάλογοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς μέσης.. καὶ ἐὰν ἓν ὀρθογώνιον ἦναι ἴσον μὲ ἓν τετράγωνον, ἡ βάσις τοῦ τετραγώνου θέλει εἶναι μέσον ἀνάλογον τῆς βάσεως καὶ ὕψους τοῦ ὀρθογωνίου.

Ἐπειδὴ καὶ ἡ συνεχὴς ἀναλογία διαφέρει ὁλοτελῶς τῆς διακεκριμένης, εἰμὴ καθὸ τὸ δεύτερον ἡγούμενον εἶναι ὁ αὐτὸς ὅρος μὲ τὸ πρῶτον ἑπόμενον (ὅρ. θ΄. βιβ. ε΄.), ὥςε ὅσα ἐλέχθησαν εἰς τὴν μὴ συνεχῆ ἀναλογίαν (πρ. ις.), τὰ αὐτὰ ἤθελον λεχθῶσι καὶ εἰς τὴν συνεχῆ.

Πόρισμα.

Ὥςε δύναταί τις νὰ μεταμορφώσῃ ἓν σχῆμα ὁποιονδήποτε εἰς τετράγωνον. Καθότι συνίςημι παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἴσον μὲ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον σχῆμα (πρ. με΄. βιβ. α΄.).. εἶτα εὑρίσκω μέσον ἀνάλογον τῆς βάσεως καὶ ὕψους αὐτοῦ, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ιη΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀναγράψῃ τις πολύγωνον εὐθύγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον μὲ τὸ δοθὲν πολύγωνον εὐθύγραμμον.

Ἔςω αβ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, καὶ ΑΒΓΔ τὸ δοθὲν πολύγωνον εὐθύγραμμον. σχ. 153.

Ἀναλύω εἰς τρίγωνα τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον σχῆμα: ὅ ἐςιν ἄγω τὴν ΔΒ.. πρὸς τοῖς πέρασι τῆς αβ εὐθείας.. κάμνω τὴν μὲν γων. αβδ = γων. ΑΒΔ, τὴν δὲ γων. βαδ = γων. ΒΑΔ.. ὥςε καὶ ἡ γων. αδβ = γων. ΑΔΒ (πόρ. γ΄. προ. λβ΄. βιб. α΄.). Ἔτι ἐκτελῶ τὴν μὲν γων. δβγ = γων. ΔΒΓ, τὴν δὲ γων. βδγ = γων. ΒΔΓ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. γ = γων. Γ.

Ὥςε ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα αβδ, ΑΒΔ, ὡσαύτως καὶ τὰ δβγ, ΔΒΓ εἶναι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἰσογώνια.. καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶναι γωνίαι τῶν πολυγώνων εὐθυγράμμων αβγδ, ΑΒΓΔ, διὰ τοῦτο ταῦτα τὰ πολύγωνα εἶναι ἰσογώνια.

Ἐπειδὴ πάλιν καὶ τὰ τρίγωνα αβδ, ΑΒΔ εἶναι ἰσογώνια, διὰ τοῦτο ἔξω αβ : βδ :: ΑΒ : ΒΔ (πρ. δ΄.).. ὡσαύτως ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα δβγ, ΔΒΓ εἶναι ἰσογώνια, διὰ τοῦτο βδ : βγ :: ΒΔ : ΒΓ, καὶ δίισου τεταραγμένως αβ : βγ :: ΑΒ : ΒΓ. Ὥςε τὰ εὐθύγραμμα αβγδ, ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοια, καὶ ὁμοίως κείμενα. (α).

(α) Ἐκ ταύτης τῆς προτάσεως κρέμανται οἱ πίνακες τῆς γεωγραφίας: ἡ παράςασις δηλονότι τῶν μεγάλων διὰ τῶν ὁμοίων μικρῶν.

Πρότασις. ιθ'.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔςωσαν ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, αβγ: τουτέςιν ἔςω γων. Β = γων. β, καὶ ΑΒ : ΒΓ : : αβ : βγ, τότε λέγω ὅτι τριγ. ΑΒΓ : τριγ. αβγ : : ΒΓ² : βγ². σχ. 154.

Μετὰ τὴν ΒΓ, καὶ βγ εὑρίσκω τρίτην ἀνάλογον τὴν ΒΔ (πρ. ια'.).. ἄγω τὴν ΔΑ.

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ΑΒ : ΒΓ : : αβ : βγ, ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ΒΓ : βγ : : ΑΒ : αβ.. ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, ΒΓ : βγ : : βγ : ΒΔ, ὅθεν διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων ΑΒ : αβ : : βγ : ΒΔ.. ὥςε τρίγ. ΑΒΔ = τριγ. αβγ (πρ. ιε'.).

Ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, ΒΓ : βγ : : βγ : ΒΔ.. ὥςε ΒΓ : ΒΔ : : ΒΓ² : βγ² (ὅρ. ί. βιβ. ε'.).. ἀλλὰ τριγ. ΑΒΓ : τριγ. ΑΒΔ : : ΒΓ : ΒΔ (πρ. α'.).. ὥςε τριγ. ΑΒΓ : τριγ. ΑΒΔ : : ΒΓ² : βγ² (πρ. ια'. βιβ. ε'.), καὶ διὰ τοῦτο τριγ. ΑΒΓ : τριγ. αβγ : : ΒΓ² : βγ², ὡς ἀποδειχθέντος ἤδη τριγ. αβγ = τριγ. ΑΒΔ, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Πόρισμα.

Ὥςε οὐσῶν τριῶν εὐθειῶν συνεχῶς ἀναλόγων, ἂν ἀναγραφῶσι τρίγωνα ὅμοια ἐπὶ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας, ἕξουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην εὐθεῖαν.

Πρότασις. κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα διαιροῦνται εἰς τρίγωνα ἴσα τε τὸ πλῆθος, ὅμοια, καὶ ὁμόλογα μετὰ ὅλα.. καὶ πολύγωνον πρὸς πολύγωνον ἔχει ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔςωσαν ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, αβγδε, τότε λέγω ὅτι ΑΒΓΔΕ : αβγδε : : $ΑΒ^2$: $αβ^2$, οὔσης δηλ. τῆς γων. Δ = γων. δ. σχ. 155.

α΄. Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ ΑΒΓΔΕ, αβγδε εἶναι ὅμοια, διὰ τοῦτο εἶναι ἰσογώνιά τε καὶ ἰσόπλευρα (ὅρ α΄.).. ὥςε ἂν ἀπὸ μιᾶς γωνίας ἄξω εὐθείας πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας, ἔξω εἰς ἑκάτερον τῶν πενταγώνων τρία τρίγωνα : ἰσάριθμα δηλονότι.

Ἐπειδὴ καὶ εἰς τὰ τρίγωνα Μ, Ο ἡ μὲν γων. ΑΒΓ = γων. αβγ, ἡ δὲ ΑΒ : ΒΓ : : αβ : βγ, ὡς οὖσαι γωνίαι καὶ πλευραὶ ὁμοίων πολυγώνων, διὰ τοῦτο τὸ τριγ. Μ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ τριγ. Ο, ὡσαύτως καὶ τὸ τριγ. Ξ, μὲ τὸ τριγ. Ρ.. ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ τὰ τρίγωνα Μ καὶ Ο εἶναι ἰσογώνια : ὅ ἐςιν ἐπειδὴ ἡ γων. ΒΓΑ = γων. βγα, καὶ, ἐξ ὑποθέσεως, ὁλόκληρος ἡ γων. ΒΓΔ = γων. βγδ, διὰ τοῦτο ἡ γων ΑΓΔ = γων. αγδ.. ὡσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῆ καὶ ἡ γων. ΑΔΓ = γων. αδγ, καὶ διὰ τοῦτο τὸ τρίγωνον Ν ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον Π (πόρ. γ΄. πρ. δ΄.).

γ΄. Διὰ τὴν ὁμοιότητα λοιπὸν τῶν εἰρημένων τριγώνων ἐγὼ ἔχω τριγ. Μ : τριγ. Ο : : $ΑΓ^2$: $αγ^2$.. ὡσαύτως καὶ τριγ. Ν : τριγ. Π : : $ΑΓ^2$: $αγ^2$ (πρ. ιθ΄.).. ὥςε καὶ διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων τριγ. Μ : τριγ. Ο : : τριγ. Ν : τριγ Π.. καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τριγ. Ν : τριγ. Π : : τριγ. Ξ : τριγ. Ρ. Ἀλλ' ἅπαντα τὰ ἡγούμενα τὰ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔχουσι πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, ὡς ἓν ἡγούμενον πρὸς ἓν ἑπόμενον (πρ. α΄. βιβ. ε΄.), ἅπαντα δὲ τὰ ἡγούμενα καὶ ἑπόμενα εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ τὰ δοθέντα πολύγωνα, ὥςε ΑΒΓΔΕ: αβγδε :: τριγ. Μ: τριγ. Ο: ὅ ἐςι τὰ πολύγωνα εἶναι ὁμόλογα μὲ τὰ ἐξ αὐτῶν γενόμενα τρίγωνα.

δ'. Ἀλλὰ τριγ. Μ: τριγ. Ο :: $ΑΒ^2$: $αβ^2$ .. ὥςε καὶ ΑΒΓΔΕ : αβγδε :: $ΑΒ^2$: $αβ^2$. (πρ. ια'. βιϐ. ε'.).

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Ὥςε οὐσῶν τριῶν εὐθειῶν συνεχῶς ἀναλόγων, ἂν ἀναγραφῶσιν ἐπὶ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας ὅμοια πολύγωνα, ταῦτα ἔξουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Ἂν ἦναι ἐγνωσμένη ἡ ἀναφορὰ δύο ὁμολόγων πλευρῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων, θέλει γνωσθῆ καὶ ἡ τῶν πολυγώνων ἀναφορά.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὰ ἐμϐαδὰ τῶν ὁμοίων πολυγώνων ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον διπλασίονα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν: τουτέςιν ΑΒΓΔΕ: αβγδε :: $ΑΒ^2$: $αβ^2$, τούτου ἕνεκεν ὄντος ἐγνωσμένου τοῦ $\frac{ΑΒ}{αβ}$, εἴτε $\frac{ΑΒ^2}{αβ^2}$, ἤθελε γνωσθῆ καὶ τὸ $\frac{ΑΒΓΔΕ}{αβγδε}$. Οὕτως ἂν $ΑΒ = 6$ ποσὶ, καὶ $αβ = 2$ ποσὶ, τότε ΑΒΓΔ: αβγδε :: 36 : 4 :: 9 : 1 :: 3^2 : 1^2.

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

Ὥςε εὐκόλως ἤθελεν ἀναγράψοι τις σχῆμα ὅμοιον ἐν λόγῳ δοθέντι μὲ τὸ δοθὲν πολύγωνον. Ἂν, φέρε εἰπεῖν, καὶ ὁ ζητούμενος λόγος ἦναι ὡς 3 : 2, τότε δὲν πρέπει τις νὰ κάμῃ τὰ ὁμόλογα αὐτῶν πλευρὰ ὡς 3 : 2.: διότι τότε τὰ ἐμϐαδὰ αὐτῶν ἤθελον εἶναι ὡς 3^2 : 2^2, ἀλλὰ τοιαῦτα, ὥςε νὰ ἔχωσιν πρὸς ἄλληλα, ὡς 3 πρὸς 2. Ὥςε οὔσης τῆς μὲν ΑΒ $=3$, τῆς δὲ ΒΓ $=2$ (σχ. 149.), καὶ τῆς ΑΒ πλευρᾶς τοῦ δοθέντος πολυγώνου, ἂν εὕρω τὴν μέσην ἀνάλογον αὐτῶν: τὴν ΒΔ (πρ. ιγ΄.), καὶ ἐπ᾽ αὐτὴν ἀναγράψω τὸ ὅμοιον σχῆμα, τοῦτο θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον. Οὕτως ἂν ΑΒ $=50^{\pi o\sigma.}$, τότε $3 : 2 :: 50^2 : \chi = 1666\ \frac{2}{3}$, καὶ διὰ τοῦτο $\sqrt{1666^{\pi.}\ \frac{2}{3}} = 40^{\pi.},\ 824 = 40^{\pi.},\ 9^{\delta},\ 10^{\gamma}$, ἡ ζητουμένη πλευρά.

Π ό ρ ι σ μ α δ΄.

Μιᾶς μόνης πλευρᾶς γνωσθείσθης ἑνὸς τακτικοῦ σχήματος καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ, ἤθελε γνωσθῆ καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ἥμισυ ὕψος αὐτοῦ (πορ. γ΄. προ. β΄.).. καὶ ἐπειδὴ πᾶν πολύγωνον ἀναλύεται εἰς τρίγωνα, δῆλον ὅτι ἂν πολλαπλασιάσῃ τις τὸ κεφάλαιον τῶν πλευρῶν τοῦ τακτικοῦ σχήματος διὰ τοῦ ἡμίσεος ὕψους, τὸ γινόμενον ἔχει νὰ παριςᾷ τὸ ἐμβαδόν.

Καθότι ἔςω ἐγνωσμένη ἡ πλευρὰ ΑΓ τοῦ ἑξαγώνου ΑΓΖΒΔ (σχ. 133), οὕτινος δηλονότι τὸ ὕψος εἶναι $=$ ΑΚ, τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΓΖΒΔ $= 6$ ΑΓ $\times \frac{1}{2}$ ΑΚ, εἴτε $=3$ ΑΓ $=$ ΑΚ: τουτέςιν ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιδιαμέτρου ἐπὶ τὸ ὕψος.

Π ό ρ ι σ μ α ε΄.

Ὥςε τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κύκλου εἶναι ἴσον μὲ τὴν περιφέρειαν ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν ἀκτῖνα, ἢ μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ πᾶς κύκλος δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς πολύγωνον τακτικὸν ἔχον ἀπείρους τὰς πλευρὰς, καὶ διὰ τοῦτο ἀναλυόμενος εἰς τρίγωνα ὅμοια, ὧν περ τὸ ὕψος εἶναι αὐτὴ ἡ ἀκτὶς, τούτου ἕνεκεν ὀνομάζων α τὴν ἀκτῖνα ἢ ἡμιδιάμετρον, καὶ Π τὴν περιφέρειαν, ἔξω δὲ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου $= \frac{\alpha}{2}$ Π, ἢ $= \alpha \frac{\Pi}{2}$: εἴτε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα: τουτέςιν ἂν κάμω τὴν ἡμιπεριφέρειαν πλευρὰν ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ τὴν ἀκτῖνα ἄλλην, τοῦτο τὸ ὀρθογώνιον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ κατὰ τὸν Ἀρχιμήδην ἡ διάμετρος ἔχει πρὸς τὴν περιφέρειαν, ὡς 7 : 22, ἢ κατὰ τὸν Αὐδριανὸν Μέτιον ὡς 113 : 355, τούτου ἕνεκεν γινώσκων τις τὴν ἡμιδιάμετρον ἢ διάμετρον ἑνὸς κύκλου, αὐτὸς γνώσεται καὶ τὴν περιφέρειαν. Οὕτως ἂν εἷς κύκλος ἔχῃ διάμετρον $= 20^{\pi o \sigma.}$, ἡ περιφέρεια αὐτοῦ θέλει εἶναι $= 62^{\pi o \sigma.} \frac{6}{7} \times 5^{\pi o \sigma.} = 314\frac{2}{7}$ ποσὶ τετραγωνικοῖς.

Πρότασις κα'. (α).

Ἐὰν δύο εὐθύγραμμα ἦναι ὅμοια μὲ ἓν τρίτον, ταῦτα θέλουσιν εἶναι καὶ ἀλλήλοις ὅμοια.

Ἔςωσαν τὰ Α καὶ Β ὅμοια μὲ τὸ Γ, τότε λέγω ὅτι καὶ τὸ Α εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ Β. σχ. 156.

Ἐπειδὴ καὶ ὅμοια σχήματα ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ τὸ νὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας ἑκάςην ἑκάςῃ, καὶ ἀναλόγους τὰς πλευρὰς τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας (ὅρ. α'.) καὶ ἐπειδὴ τὸ εὐθύγραμμον Α εἶναι ὅμοιον, ἐξ ὑποθέσεως,

---

(α) Αὕτη ἡ πρότασις δὲν εἶναι πρότασις, ἀλλ' ἀξίωμα.

μὲ τὸ εὐθύγραμμον Γ, διὰ τοῦτο ἀμφότερα ἔχουσιν ἴσας καὶ τὰς γωνίας: ἑκάστην ἑκάστῃ, καὶ ἀναλόγους τὰς πλευρὰς τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας.. ὡσαύτως καὶ τὸ Β μὲ τὸ Γ, ὥστε καὶ τὸ Α μὲ τὸ Β (ἀξ. α΄.), καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὅμοια.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κβ΄.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἦναι ἀνάλογοι, καὶ τὰ ἐπ' αὐτῶν ἀναγραφθησόμενα ὅμοια καὶ ὁμοίως εὐθύγραμμα θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα.. καὶ ἂν τέσσαρα εὐθύγραμμα ἦναι ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν ἀνάλογοι θέλουσιν εἶναι.

α΄. Ἔστω ΑΒ : αβ :: ΓΔ : γδ. σχ. 157.

Ἐπὶ τῶν ΑΒ, αβ ἀναγράφω τὰ Κ καὶ Λ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εὐθύγραμμα.. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ΓΔ, γδ τὰ Μ, καὶ Ν, καὶ λέγω ὅτι Κ : Λ :: Μ : Ν.

Ἐγὼ ἔχω Κ : Λ :: $ΑΒ^2$: $αβ^2$ (πρ. ιθ΄.).. ὡσαύτως καὶ Μ : Ν :: $ΓΔ^2$: $γδ^2$. (πρ. κ΄.).. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, ΑΒ : αβ :: ΓΔ : γδ, τούτου ἕνεκεν $ΑΒ^2$: $αβ^2$ :: $ΓΔ^2$: $γδ^2$ (πόρ. γ΄. προ. δ΄. βιβ. ε΄.).. ὥστε Κ : Λ :: Μ : Ν (πρ. ια΄. βιβλ. ε΄.).

β΄. Ἔστω Κ : Λ :: Μ : Ν, τότε λέγω ὅτι καὶ ΑΒ : αβ :: ΓΔ : γδ.

Ἐγὼ ἔχω Κ : Λ :: $ΑΒ^2$: $αβ^2$ (πρ. ιθ΄.), καὶ Μ : Ν :: $ΓΔ^2$: $γδ^2$ (πρ. κ΄.).. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, Κ : Λ :: Μ : Ν.. ὥστε καὶ $ΑΒ^2$: $αβ^2$ :: $ΓΔ^2$: $γδ^2$ (πρ. ια΄. βιβλ. ε΄.).. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ΑΒ : αβ :: ΓΔ : γδ (πόρ. γ΄. προ. δ΄. βιβ. ε΄.).