πρὸς πᾶν γινόμενον, ὡς τὸ γινόμενον τῶν λόγων τῶν παραγόντων.

ε΄. Ὅμοια τόξα λέγονται, ὅσα ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς ἰδίας περιφερείας.

Πρότασις. α΄.

Τά τε τρίγωνα καὶ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ἀνάλογα μὲ τὰς βάσεις αὐτῶν.

α΄. Τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, αβγδ ἃς ἔχωσι τὸ αὐτὸ ὕψος (ὅρ. β΄. βιβ. β΄.): τουτέστιν ἔστω ΒΕ $=$ βε, τότε λέγω ὅτι παραλ. ΑΒΓΔ : παραλ. αβγδ :: ΑΒ : αβ. σχ. 135.

Ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων ΑΒ, αβ συνίστημι παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια τὰ ΑΒΕΖ, αβεζ, ἐξ ὧν τὸ μὲν ὀρθογ. ΑΒΕΖ $=$ παραλ. ΑΒΓΔ, τὸ δ᾽ ὀρθογ. αβεζ $=$ παραλ. αβγδ (πρ. λς΄. βιβλ. α΄.).. ἀλλὰ τὸ μὲν ὀρθογ. ΑΒΕΖ $=$ ΑΒ $\times$ ΒΕ, τὸ δ᾽ ὀρθογ. αβεζ $=$ αβ $\times$ βε (ὅρ. α΄. βιβλ. β΄.).. ὥστε τὸ μὲν παραλ. ΑΒΓΔ $=$ ΑΖ $\times$ ΒΕ, τὸ δὲ παραλ. αβγδ $=$ αβ $\times$ βε, καὶ διὰ τοῦτο $\frac{\text{παραλ. ΑΒΓΔ}}{\text{παραλ. αβγδ}} = \frac{\text{ΑΒ} \times \text{ΒΕ}}{\text{αβ} \times \text{βε}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{αβ}}$. ὡς ὄντος, ἐξ ὑποθέσεως, ΒΕ $=$ βε,. ὥστε παραλ. ΑΒΓΔ : παραλ. αβγδ :: ΑΒ : αβ (ὅρ. ζ. βιβ. ε΄.).

β΄. Ἐπειδὴ λοιπὸν παραλ. ΑΒΓΔ : παραλ. αβγδ :: ΑΒ : αβ, διὰ τοῦτο καὶ παραλ. $\frac{\text{ΑΒΓΔ}}{2}$: παραλ. $\frac{\text{αβγδ}}{2}$ :: ΑΒ : αβ. (πρ. γ΄. βιβ. ε΄.).. ἀλλὰ τὸ μὲν παραλ. $\frac{\text{ΑΒΓΔ}}{2} =$ τριγ. ΑΒΓ, τὸ δὲ παραλ. $\frac{\text{αβγδ}}{2} =$ τριγ. αβγ. (πρ. μα΄. βιβ. α΄.), ὥστε τριγ. ΑΒΓ : τριγ. αβγ :: ΑΒ : αβ.

Πόρισμα α'.

Τὰ τρίγωνα καὶ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν εἶναι ἀνάλογα μὲ τὰ ὕψη αὐτῶν.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ εἶναι ἀδιάφορον ὁποῖον θέλει νὰ λάβῃ τις διὰ ὕψος, διὰ τοῦτο ἐκληφθέντων τῶν ΒΕ, βε διὰ βάσεων, ἔξω τὰ ὕψη ΑΒ, αβ ἀνάλογα καὶ μὲ τὰ τρίγωνα καὶ μὲ τὰ παραλληλόγραμμα.

Πόρισμα β'.

Τὰ τρίγωνα καὶ παραλληλόγραμμα, τὰ ὄντα ἀνάλογα μὲ τὰς βάσεις ἔχουσιν ἴσα τὰ ὕψη.

Πόρισμα γ'.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους, ἢ ἴσον μὲ τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτοῦ βάσιν. Καθότι ἂν τὸ τριγ. $\text{ΑΒΓ} = $ παραλ. $\frac{\text{ΑΒΓΔ}}{2}$, καὶ ἂν παραλ. $\frac{\text{ΑΒΓΔ}}{2} = \frac{\text{ΑΒ} \times \text{ΒΕ}}{2}$, δῆλον ὅτι τριγ. $\text{ΑΒΓ} = \frac{\text{ΑΒ} \times \text{ΒΕ}}{2} = \text{ΑΒ} \times \frac{\text{ΒΕ}}{2}$ ἢ $= \frac{\text{ΑΒ}}{2} \times \text{ΒΕ}$.

Πόρισμα δ'.

Εἰς πᾶν τρίγωνον ἡ μείζων πλευρὰ ἔχει πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν λοιπῶν δύο, καθὼς ἡ διαφορὰ αὐτῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τμημάτων τῆς μείζονος πλευρᾶς τμηθείσης ὑπὸ τῆς καθέτου τῆς ἀπὸ τῆς μείζονος γωνίας. Οὕτως εἰς τὸ τρίγωνον αβγ ἀχθείσης τῆς καθέτου αδ, ἔξω $\beta\gamma : \alpha\beta + \alpha\gamma : \alpha\beta - \alpha\gamma : \beta\delta - \delta\gamma$. σχ. 136.

Καθότι κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ γράφω κύκλον τὸν βηε, καὶ ἔχω, ἐπεκτείνων τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου μέχρι τῆς περιφερείας, $\beta\gamma \times \gamma\eta = \epsilon\gamma \times \gamma\zeta$ (πρ. λε'. βιβ. γ'.). Ἀλλ' ἡ $\epsilon\gamma = \alpha\beta + \alpha\gamma$, ἡ δὲ $\gamma\zeta = \alpha\beta - \alpha\gamma$, ἢ δὲ $\gamma\eta = \beta\delta - \delta\gamma$.. ὥςε $\beta\gamma\,(\beta\delta - \delta\gamma) = (\alpha\beta + \alpha\gamma)\,(\alpha\beta - \alpha\gamma)$, εἴτε $\beta\gamma : \alpha\beta + \alpha\gamma :: \alpha\beta - \alpha\gamma : \beta\delta - \delta\gamma$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. β'.

Ἐὰν εἰς τρίγωνα ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος μὲ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, ταμεῖ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἀναλόγως.. καὶ ἂν εὐθεῖα τις τέμνῃ ἀναλόγως τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, αὕτη θέλει εἶναι παράλληλος μὲ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου.

Εἰς τὸ τρίγ. ΑΒΓ ἄγω τὴν ΔΕ παράλληλον μὲ τὴν βάσιν ΒΓ, καὶ λέγω ὅτι ΑΔ : ΔΒ :: ΑΕ : : ΕΓ. σχ. 137.

Ἄγω τὰς διαγωνίους ΒΕ, ΓΔ, καὶ ἔχω τριγ. ΒΔΕ = τριγ. ΓΕΔ (πρ. λη'. βιβ. α'.), ὡς ὄντων ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.. ἀλλὰ τὸ μὲν τριγ. ΒΔΕ ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ τριγ. ΑΔΕ, ὡς εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ε περατουμένων ἀμφοτέρων, ὥςε τριγ. ΑΔΕ : τριγ. ΒΔΕ : : ΑΔ : ΔΒ (πρ. κ'.). Τὸ δὲ τριγ. ΓΕΔ ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ αὐτὸ τριγ. ΑΔΕ, ὡς εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Δ περατουμένων ἀμφοτέρων, ὥςε τριγ. ΑΔΕ : τριγ. ΒΔΕ (= τριγ. ΓΕΔ) : : ΑΕ : ΕΓ. Ὥςε διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων ΑΔ : ΔΒ : : ΑΕ : ΕΓ (πρ. ια'. βιβ. ε'.).

β'. Ἔςω ΑΔ : ΔΒ : : ΑΕ : ΕΓ, τότε λέγω ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΒΓ. Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΒΔΕ εἶναι ἰσοϋψῆ, διὰ τοῦτο τριγ. ΑΕΔ : τριγ. ΒΔΕ : : ΑΔ : ΔΕ (πρ. α'.).. ἔτι ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΓΕΔ εἶναι ἰσοϋψῆ, διὰ τοῦτο τριγ.

ΑΔΕ : τριγ. ΓΕΔ : : ΑΕ : ΕΓ.. ἀλλ ἐξ ὑποθέσεως ΑΔ : ΔΒ : : ΑΕ : ΕΓ.. ὥςε διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων τριγ. ΑΔΕ : τριγ. ΒΔΕ : : τριγ. ΑΔΕ : τριγ. ΓΕΔ (πορ. α΄. προ. ια΄. βιϐ. ε΄.), καὶ διὰ τοῦτο τριγ. ΒΔΕ = τριγ. ΓΕΔ (πρ. ζ΄ βιϐ. ε΄.).. ὥςε ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΒΓ (πρ. λθ΄ βιϐ. α΄.).

Π ό ρ ι σ μ α α΄.

Ὥςε ἂν ἀπό τινος σημείου ἐκτὸς παραλλήλων ἄξω τυχούσας εὐθείας ἐπὶ τῶν παραλλήλων, αἱ ἀχθησόμεναι εὐθεῖαι τμηθήσονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τμήματα ἀνάλογα. Οὕτως ἂν ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἄξω τὰς ΑΒ, ΑΓ, ἔςαι ΑΔ : ΔΒ : : ΑΕ : ΕΓ.

Π ό ρ ι σ μ α. β΄.

Ὥςε αἱ διάμετροι τῶν κύκλων εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς χορδὰς τὰς ὑποτεινούσας ὅμοια τόξα : ὅ ἐςιν οἱ κύκλοι εἶναι ὅμοια σχήματα. Καθότι ἔςωσαν συνεφαπτόμενοι οἱ κύκλοι ΑΓΔ, αγδ (σχ. 138). Ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἄγω διάμετρον τοῦ μείζονος κύκλου τὴν ΑΒ, ἥτις θέλει εἶναι καὶ τοῦ μικροῦ (πρ. ια΄. βιϐ. γ΄.).. ἄγω τὴν χορδὴν ΑγΓ, καὶ ἔχω ΑΒ : Αβ : : ΑΓ : Αγ (πορ. α΄.). Καθότι ἂν ἄξω τὰς χορδὰς ΒΓ, βγ, ἡ γων. ΑΓΒ = γων. Αγβ = 90° (πρ. λα΄. βιϐ. γ΄.) : τουτέςιν ἡ ΒΓ, βγ παράλληλοι, καὶ διὰ τοῦτο βΒ : Αβ : : γΓ : ΑΓ, καὶ ἐν συνθέσει ΑΒ : Αβ : : ΑΓ : Αγ. Ὡσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῆ ὅτι καὶ ΑΒ : Αβ : : ΑΔ : αδ.. Καὶ διὰ τοῦτο καὶ ΑΓ : Αγ : : ΑΔ : Αδ.

Π ρ ό τ α σ ι ς γ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ δίχα μίαν γωνίαν ἑνὸς τριγώνου, ἐπεκταθεῖσα ταμεῖ τὴν βάσιν εἰς τμήματα ἀνάλογα μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.. καὶ ἂν τὰ τῆς βάσεως τμήματα ἑνὸς τριγώνου ἦναι ἀνάλογα μὲ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ, ἡ ἀπὸ τῆς τομῆς εἰς τὴν ὑποτεινουμένην γωνίαν ἀχθεῖσα εὐθεῖα ταμεῖ δίχα αὐτήν.

α΄. Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΑΓ ἔσω ἡ γων. ΔΑΒ = γων. ΔΑΓ, τότε λέγω ὅτι ΔΓ : ΔΒ :: ΑΓ : ΑΒ. σχ. 139.

Ἄγω τὴν ΓΕ παράλληλον μὲ τὴν ΔΑ.. ἐπεκτείνω τὴν ΒΑ ἕως οὗ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΓΕ.. καὶ οὕτως εἰς τὸ τρίγωνον ΕΒΓ οὔσης τῆς ΑΔ παραλλήλου μὲ τὴν ΕΓ, ἔξω ΓΔ : ΕΑ :: ΑΒ : ΔΒ (πρ. β΄.). Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἡ ΑΔ ἦκται παράλληλος μὲ τὴν ΕΓ, διὰ τοῦτο ἡ γων. ΑΕΓ = γων. ΔΑΒ (πρ. κθ΄. βιβ. α΄.) = γων. ΔΑΓ, ὡς οὔσης, ἐξ ὑποθέσεως, γων. ΔΑΓ = γων. ΔΑΒ.. ἀλλ' ἡ γων. ΔΑΓ = γων. ΑΓΕ, ὡς οὖσαι ἐναλλάξ, διά τοῦτο καὶ γων. ΑΓΕ = γων. ΑΕΓ (ἐξ α΄.).. ὅθεν ΑΓ = ΑΕ (πρ. ς΄. βιβ. α΄.).. ὥςε ἡ ἀναλογία ΓΔ : ΔΒ :: ΕΑ : ΑΒ τρέπεται εἰς τὴν ΔΓ : ΔΒ :: ΓΑ : ΑΒ, ὅπερ ἐζητεῖτο.

β΄. Ἔσω ΔΓ : ΔΒ :: ΓΑ : ΑΒ, τότε λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΑ διχοτομεῖ τὴν γων. ΒΑΓ.

Ἐπεκτείνω τὴν πλευρὰν ΒΑ, ἕως οὗ ἡ ΑΕ = ΑΓ, καὶ ἄγω τὴν ΓΕ.. καὶ ἔχω γων. ΑΕΓ = γων. ΑΓΕ (πρ. ε΄. βιβ. α΄.).. ἀλλ' ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ΓΔ : ΔΒ :: ΓΑ : ΑΒ, καὶ ἡ ΓΑ = ΕΑ, διὰ τοῦτο ΓΔ : ΔΒ :: ΕΑ : ΑΒ.. ὥςε ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΕΓ (πρ. β΄.).. ὅθεν ἡ μὲν γων. ΔΑΒ = γων. ΑΕΓ, ἡ δὲ γων. ΔΑΓ = γων. ΑΓΕ (πρ. κθ΄. βιβ.

α′.).. ὥςε ἡ γων. ΔΑΒ = γων. ΔΑΓ (ἀξι. α′.), ὅπερ ἐζητεῖτο.

Πόρισμα α′.

Ὥςε ἂν τὰ τμήματα τῆς βάσεως ἦναι ἴσα ἀλλήλοις, τὸ δοθὲν τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελὲς (πόρ. πρ. θ′. βιϐ. α′.).

Πόρισμα β′.

Ὥςε εὐκόλως ἤθελε διχοτομήσοι τις μίαν γωνίαν ἑνὸς τριγώνου. Καθότι ἂν τις ἐπεκτείνῃ τὴν μίαν τῶν συνεχουσῶν πλευρῶν τὴν εἰρημένην γωνίαν τοσοῦτον, ὅση εἶναι ἡ ἑτέρα.. καὶ συζεύξῃ τὸ πέρας αὐτῆς μὲ τὸ πέρας τῆς βάσεως.. καὶ ἄξῃ ἀπὸ τῆς εἰρημένης γωνίας παράλληλον μὲ τὴν βάσιν τοῦ γεννηθέντος τριγώνου, αὕτη ἡ παράλληλος ταμεῖ δίχα τὴν γωνίαν.

Οὕτω γενομένης τῆς ΑΕ = ΑΓ, καὶ ἀχθείσης τῆς ΕΓ, ἂν ἄχθῇ ἡ ΑΔ παράλληλος μὲ τὴν ΕΓ, ἡ γων. ΒΑΓ διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς ΑΔ.

Πρότασις. δ′.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων αἱ μὲν περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, ὁμόλογοι δὲ αἱ ὑποτείνουσαι τὰς ἴσας γωνίας: ὅ ἐςι τὰ ἰσογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

Ἔςωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αδε ἰσογώνια: τουτέςιν ἡ μὲν γων. Α = γων. α, ἡ δὲ γων. Β = γων. δ, καὶ ἡ γων. Γ = γων. ε, τότε λέγω ὅτι ΑΒ : αδ :: ΑΓ : αε, καὶ ἑπομένως ΑΒ : ΑΓ :: αδ : αε. σχ. 137.

Ἐφαρμόζω τὸ σημεῖον α ἐπὶ τὸ σημεῖον Α, καὶ οὕτως ἐφαρμοσθήσεται ἡ μὲν αδ πλευρὰ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ δὲ αε ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ ἑπομένως ἡ δε θέλει εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΒΓ καὶ μὲ τὴν ΔΕ, ἢ θέλει συμπέσει μὲ αὐτὴν (πρ. κή. βιβ. α΄.), καὶ ἂς συμπέσῃ.. ὥςε ἡ ΔΒ : ΑΔ :: ΕΓ : ΑΕ (πρ. β΄.)... καὶ ἐν συνθέσει ΑΒ : ΑΔ :: ΑΓ : ΑΕ : ὅ ἐςιν ΑΒ : αδ :: ΑΓ : αε.

Ὡσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῇ καὶ ΑΒ : αδ :: ΒΓ : δε, καὶ ΑΓ : αε :: ΓΒ : εδ.

β΄. Ἀλλ' ἂν ΑΒ : αδ :: ΑΓ : αε, τότε καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογα θέλουσιν εἶναι : τουτέςι ΑΒ : ΑΓ :: αδ : αε, ὅπερ εἶναι ὅτι αἱ πλευραὶ αἱ ὑποτείνουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ὁμόλογοι.

Π ό ρ ι σ μ α α΄.

Ὥςε ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς τρεῖς πλευρὰς παραλλήλους, ταῦτα τὰ τρίγωνα θέλουσιν εἶναι ὅμοια.. καὶ τὸ ἀνάπαλιν ἂν ἦναι ὅμοια, ἔξουσι καὶ τὰς πλευρὰς παραλλήλους.

Π ό ρ ι σ μ α β΄.

Ἐὰν τινὸς τριγώνου αἱ τρεῖς πλευραὶ ἦναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς ἄλλου τριγώνου, ταῦτα τὰ τρίγωνα θέλουσιν εἶναι ὅμοια. Καθότι ἂν περιςρέψῃ τις τὸ ἓν τρίγωνον 90°, αἱ πλευραὶ αὐτοῦ θέλουσιν εἶναι παράλληλοι μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ ἄλλου τριγώνου, καὶ διὰ τοῦτο ὅμοια τὰ τρίγωνα (πορ. α΄.).

Π ό ρ ι σ μ α γ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ταῦτα τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια (πόρ. γ΄. πρ. λβ΄. βιβ. α΄).

Π ό ρ ι σ μ α δ΄.

Ἐὰν δύο ἰσογωνίων τριγώνων τμηθῇ μία ἴση γωνία ὅπως ἔτυχεν, ἡ διατέμνουσα εὐθεῖα ἐπεκτανθεῖσα ταμεῖ τὰς βάσεις τῶν τριγώνων εἰς τμήματα ἀνάλογα.. διότι γεννῶνται τρίγωνα ὅμοια. Ἔςωσαν ἰσογώνια τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ (σχ. 140).. καὶ ἄς ἀχθῇ ἀπὸ τῆς κοινῆς Α γωνίας τυχοῦσα εὐθεῖα: ἡ ΑΖ, τότε λέγω ὅτι ΒΖ: ΖΓ:: ΔΗ: ΗΕ. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΒΓ, διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα ΑΖΓ, ΑΗΕ εἶναι ὅμοια, ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ ΔΒΖ, ΑΔΗ (πορ. α΄).. ὥςε ΑΖ: ΑΗ:: ΖΓ, ΗΕ, καὶ ΑΖ: ΑΗ:: ΒΖ: ΔΗ, καὶ διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων ΖΓ: ΗΕ:: ΒΖ: ΔΗ, καὶ ἐναλλὰξ ΖΓ: ΒΖ:: ΗΕ: ΔΗ, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α. ε΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἰσοσκελῆ ἔχωσιν ἢ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων σκελῶν περιεχομένην γωνίαν, ἢ μίαν τῶν περὶ τῇ βάσει ἴσην, ταῦτα τὰ τρίγωνα θέλουσιν εἶναι ὅμοια (πόρ. γ΄. προ. λβ΄. βιϐλ. α΄.).

Π ό ρ ι σ μ α. ς΄.

Αἱ χορδαὶ, εἰς δύο κύκλους, αἱ ὑποτείνουσαι ὅμοια τόξα (ὅρ. ε΄.) εἶναι ἀνάλογοι. Καθότι εἰς τοὺς κύκλους ΑΓΒ, αγβ (σχ. 138.) ἄγω τὰς χορδὰς ΑΕ, Αε, ΓΕ, γε, ὑποτεινούσας ὅμοια τόξα, εἴτε ἴσας γωνίας.. ὥςε ΑΕ: Αε:: ΕΓ: εγ, καὶ ἐναλλὰξ ΑΕ: ΕΓ:: Αε: εγ.

Π ό ρ ι σ μ α. ζ΄.

Ὥςε εὐκόλως ἤθελεν ἄξει τις δύο εὐθείας παραλλήλους. Καθότι ἄν τις γράψῃ δύο κύκλους συνεφαπτομένους, ὡς τὸν ΑΓΒ, Αγβ.. καὶ ἄξῃ δύο τυχούσας κοινὰς χορδὰς τὰς ΑΓ, ΑΕ, αἱ ἀχθησόμεναι χορδαὶ: ΓΕ, γε θέλουσιν εἶναι παράλληλοι.

Π ό ρ ι σ μ α. ή.

Ἂν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπ' ἀλλήλων περατοῦνται εἰς δύο παραλλήλους, τμηθήσονται ἀναλόγως. Ἔστωσαν παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ (σχ. 141), τότε λέγω ὅτι ΕΚ : ΘΚ : : ΚΖ : ΚΗ. Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΕΚΘ, ΗΚΖ ἔχουσι καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ἴσας, καθὸ κατὰ κορυφὴν καὶ καθὸ ἐναλλὰξ, διὰ τοῦτο ΕΚ : ΘΚ : : ΖΚ : ΗΚ : ὃ ἐστιν εἴτε ἐκτὸς τῶν παραλλήλων (πορ. α'. πρ. β'), εἴτε ἐντὸς ληφθῇ σημεῖον, καὶ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, ἔσονται ἀνάλογοι.

Π ρ ό τ α σ ι ς έ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσιν ἀναλόγους τὰς τρεῖς πλευρὰς, ταῦτα τὰ τρίγωνα θέλουσιν εἶναι ἰσογώνια, ἔχοντα ἴσας τὰς γωνίας, ἅς περ ὑποτείνουσιν αἱ ὁμόλογοι πλευραί.

Ἐχέτωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ ἀναλόγους τὰς πλευρὰς: τουτέστιν ἔστω ΑΒ : ΒΓ : : αβ : βγ, καὶ ΓΒ : ΓΑ : : γβ : γα, καὶ ΑΒ : ΑΓ : : αβ : αγ, τότε λέγω ὅτι ἡ γων. Α = γων. α, καὶ ἡ γων. Β = γων. αβγ, καὶ ἡ γων. Γ = γων. βγα. σχ. 142.

Πρὸς τῇ βγ εὐθείᾳ καὶ πρὸς τοῖς σημείοις β καὶ γ συνίστημι τὴν μὲν γων. γβδ = γων. Β, τὴν δὲ γων. βγδ = γων. Γ, καὶ ἑπομένως ἔσται καὶ ἡ τρίτη γων. δ = γων. Α : ὃ ἐστι τὰ τρίγωνα δβγ, ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνια, καὶ διὰ τοῦτο ΑΒ : ΒΓ : : δβ : βγ (πρ. δ'.).. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ : ΒΓ : : αβ : βγ.. ὥστε διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων καὶ αβ : βγ : : δβ : βγ, καὶ διὰ τοῦτο δβ =

αβ (πρ. θ'. βιβ. ε'.).. ὡσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῆ καὶ ἡ δγ=αγ.. ὥςε τὸ τρίγ. δβγ=τρίγ. αβγ (πρ. η'. βιβ. α'.).. ἀλλὰ τὸ τρίγωνον δβγ κατεσκεύαςαι ἰσογώνιον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, διὰ τοῦτο καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον καὶ μὲ τὸ τρίγωνον αβγ: ὅ ἐςιν ἡ μὲν γων. Α=γων. α, ἡ δὲ γων. Β=γων. αβγ, ἡ δὲ γων. Γ=γων. βγα, αἵτινες δηλονότι ὑποτείνονται ὑπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ὡς προςτέθη.

Πρότασις ς'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην, καὶ τὰς πλευρὰς τὰς περὶ τὴν ἴσην γωνίαν ἀναλόγους, ταῦτα τὰ τρίγωνα ἔσονται ἰσογώνια, καὶ ἔξουσιν ἴσας τὰς γωνίας, ἅςπερ ὑποτείνουσιν αἱ ὁμόλογοι πλευραί.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΕΓ, Αεγ οὔσης κοινῆς τῆς γωνίας Α, ἔςω καὶ ΑΓ:ΑΕ::Αγ:Αε, τότε λέγω ὅτι ταῦτα τὰ τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια. σχ. 138.

Ἂν ἡ γων. Αγε=γων. ΑΓΕ, τὰ τρίγωνα Αεγ, ΑΕΓ θέλουσιν εἶναι ἰσογώνια (πόρ. γ'. προ. λβ'. βιβ. α'.), εἰδὲ καὶ δὲν εἶναι, ἔςω μία ἄλλη, ὡς ἡ γων. Αζε =γων. ΑΓΕ, καὶ τότε ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα Αζε, ΑΓΕ εἶναι ἰσογώνια, διὰ τοῦτο ΑΓ:ΑΕ::Αζ:Αε (πρ. δ'.).. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, καὶ ΑΓ:ΑΕ::Αγ:Αε, ὅθεν Αζ: Αε::Αγ:Αε (πρ. ια'. βιβ. ε'.).. ὥςε Αζ=Αγ (πρ. θ'. βιβ. ε'.).. τουτέςι τὸ σημεῖον ζ πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον γ.

Πόρισμα α'.

Ὥςε αἱ ὁμόλογοι χορδαὶ ὑποτείνουσιν ἴσας γωνίας.

Οὕτως αἱ χορδαὶ ΑΓ, Αγ ὑποτείνουσιν ἴσας γωνίας τὰς ΑΕΓ, Αεγ.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Ὥςε τὰ ὅμοια τόξα ὑποτείνουσι γωνίας τριγώνων ὁμοίων. Ἔςωσαν κύκλοι ὁμόκεντροι οἱ ΑΒΓ, αβγ (σχ. 143). Ἄγω τὴν διάμετρον ΑΒ, τὴν ἡμιδιάμετρον ΚΓ καὶ τὰς χορδὰς ΒΓ, βγ, καὶ τότε τὰ τρίγωνα ΚΒΓ, Κβγ θέλουσιν εἶναι ὅμοια. Καθότι ἡ μὲν γων. ΒΚΓ εἶναι κοινή, αἱ δὲ πλευραὶ ΚΒ : ΚΓ :: Κβ : Κγ (πόρ. α'. προ. β'.): τουτέςιν ἀνάλογοι.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ζ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην, καὶ ἀναλόγους τὰς πλευρὰς τὰς περὶ τὴν μίαν τῶν λοιπῶν γωνιῶν, καὶ τὴν τρίτην τοῦ αὐτοῦ εἴδους, ταῦτα τὰ τρίγωνα ἔσονται ἰσογώνια, καὶ ἕξουσιν ἴσας τὰς γωνίας, ἅσπερ ὑποτείνουσιν αἱ ὁμόλογοι πλευραί.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ ἔςω ἡ μὲν γων. Α = γων. α, αἱ δὲ ΒΑ : ΒΓ :: βα : βγ, καὶ αἱ γωνίαι Γ καὶ γ ἐν ταυτῷ ἢ ὀξεῖαι, ἢ ἀμβλεῖαι, τότε λέγω ὅτι ταῦτα τὰ τρίγωνα θέλουσι εἶναι ἰσογώνια. σχ. 144.

Εἰ δὲ καὶ δὲν εἶναι: τουτέςιν ἂν ἡ γων. ΑΒΓ δ' ἐν εἶναι ἴση μὲ τὴν γων. αβγ, θατέρα αὐτῶν θέλει εἶναι μείζων.. καὶ ἔςω τοιαύτη ἡ γων. ΑΒΓ, ἔςωσαν δ' ἐν ταυτῷ ὀξεῖαι καὶ αἱ γωνίαι ΒΓΑ, βγα. Τότε ἐκτελῶ τὴν γων. ΑΒΔ = γων. β, καὶ διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, αβγ θέλουσιν εἶναι ἰσογώνια (πόρ. γ'. προ. λβ'. βιβ. α'.).. καὶ ἐχομένως τότε ΒΑ : ΒΔ :: βα : βγ (πρ. δ'.).. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, καὶ ΒΑ : ΒΓ :: βα : βγ, διὰ τοῦτο ΒΑ : ΒΓ :: ΒΑ : ΒΔ (πρ. ια'. βιϐ. ε').. ὥςε ΒΓ $=$ ΒΔ (πρ. θ'. βιϐ. ε'.): ὅ ἐςι τὸ τρίγ. ΓΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γων. ΒΔΓ $=$ γων. Γ.. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γων. Γ ὀξεῖα, ὀξεῖα λοιπὸν θέλει εἶναι καὶ ἡ γων. ΒΔΓ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐφεξῆς αὐτῆς γωνία: ἡ ΒΔΑ πρέπει νὰ ἦναι ἀμϐλεῖα (πρ. ιγ'. βιϐ. α'.), ἥτις δηλονότι δέδεικται ἴση μὲ τὴν ὀξεῖαν γων. γ, ὅπερ εἶναι ἄτοπον. Ἂν λοιπὸν καὶ ἡ γων. ΑΒΓ ἀδυνατῆ νὰ ἦναι ἄνισος μὲ τὴν γων. β, ἕπεται ἀναγκαίως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ νὰ ἦναι ἰσογώνια.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἤθελεν ἀποδειχθῆ τὸ πρᾶγμα, καὶ ἂν ἐν ταυτῷ αἱ γωνίαι Γ καὶ γ ἦσαν ἀμϐλεῖαι.

Εἰ δὲ καὶ ἐν ταυτῷ ἦσαν ὀρθαί, τότε τὸ πρᾶγμα ἐδεῖτο οὐδεμιᾶς ἀποδείξεως. Καθότι οὔσης, ἐξ ὑποθέσεως, τῆς γων. Α $=$ γων. α, καὶ τῆς γων. Γ $= 90^{\circ} =$ γων. γ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ ἤθελον εἶναι ἰσογώνια.

Σημείωσις.

Ἄντις παρατηρήσῃ τὴν φύσιν τῶν ἰσογωνίων τριγώνων, οὗτος ἤθελεν ἰδοῖ ὅτι ταῦτα ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ τρίγωνα ἐγγεγραμμένα ἐν τοῖς ὁμοίοις τμήμασι τῶν κύκλων (ὅρ. ι'. βιϐ. γ'.): ἔχοντα λέγω ἴσας τὰς γωνίας τὰς ἐν τμήμασι. Οὕτως ὄντων ὁμοίων τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΑΕΓ, Αεγ (σχ. 138) τὰ τρίγωνα ΑΕΓ, Αεγ εἶναι ὅμοια.. β'. ὅτι ἂν μὲν ταῦτα τὰ ὅμοια τμήματα ἦναι ἡμικύκλια, τὰ ἐγγεγραμμένα τρίγωνα θέλουσιν εἶναι ὀρθογώνια.. ἂν δὲ μείζονα ἡμικυκλίων, ὀξυγώνια, καὶ ἂν ἐλάσσονα ἡμικυκλίων, ἀμϐλυγώνια, καὶ τούτου ἕνεκεν προσετέθη εἰς τὴν ζ'. πρότασιν τὸ νὰ ἦναι ἡ τρίτη γωνία τοῦ αὐτοῦ εἴδους: τουτέστιν ἢ ὀξεῖα εἰς ἀμφότερα τὰ τρίγωνα ἢ ἀμβλεῖα, ἀλλέως τὰ τμήματα, ἔνθα ἤθελον εἶναι τὰ παραβαλλόμενα τρίγωνα, δὲν ἤθελον εἶναι ὅμοια.

Π ρ ό τ α σ ι ς ιη'.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, ἂν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης, τὰ γενητόμενα τρίγωνα ἔσονται ὅμοια καὶ ἀλλήλοις καὶ μὲ τὸ ὅλον.

Ἔςω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν ΒΑΓ.. ἔςω καὶ κάθετος ἡ ΑΔ, τότε λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ΒΔΑ, ΓΑΔ, ΑΒΓ εἶναι ὅμοια. σχ. 145. Καθότι εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΔΑ ἡ μὲν γων. ΓΑΒ = γων. ΑΔΒ = 90°, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ δὲ γων. ΑΒΔ κοινή.. ὥςε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΔΑ εἶναι ἰσογώνια (πόρ. γ'. προ. λβ' βιβ. α'.), ὅθεν καὶ ὅμοια (πρ. δ'.).

β'. Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΑΔ ἡ μὲν γων. ΓΑΒ = γων. ΑΔΓ = 90°, ἡ δὲ γων. ΔΓΑ κοινή.. ὥςε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΑΔ εἶναι ἰσογώνια, ὅθεν καὶ ὅμοια.

γ'. Ἀλλ' ἂν τὰ τρίγωνα ΒΔΑ, ΓΑΔ εἶναι ὅμοια μὲ ἓν καὶ τὸ αὐτὸ τρίγωνον: τὸ ΑΒΓ, δῆλον ὅτι εἶναι ὅμοια καὶ ἀλλήλοις (ἀξ. α'.).

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

Ὥςε εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ἡ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης καταγομένη κάθετος εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης. Οὕτως ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΓΑΔ, ΒΔΑ εἶναι ὅμοια.. καὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων αἱ πλευραὶ αἱ ὑποτείνουσαι τὰς ἴσας γωνίας ὁμόλογοι (πρ. δ'.), διὰ τοῦτο ΓΔ : ΑΔ :: ΑΔ : ΒΔ, εἴτε $ΑΔ^2 = ΓΔ \times ΒΔ$, ὅπερ εἴδομεν εἰς τὸ (πόρ. πρ. λε'. βιβ. γ'.).

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Ὥςε ἐν τοῖς κύκλοις ἡ ἀπὸ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀγομένη κάθετος, εἶναι ἴση μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμιδιαμέτρου ἀποθέσει τοῦ τετραγώνου τοῦ διαςήματος τοῦ ἀπολαμβανομένου ὑπὸ τῆς καθέτου καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κλύκλου. Οὕτως ἐπειδὴ $ΓΕ^2 = ΑΕ \times ΕΒ$ (σχ. 92.) (πορ. α'.), ἂν ὀνομάσω y τὴν ΓΕ, χ τὴν ΕΚ, καὶ α τὴν ΚΑ, ἡ ἐξίσωσις θέλει τραπεῖ εἰς τὴν $y^2 = (\alpha + \chi)(\alpha - \chi.) = \alpha^2 - \chi^2$.. καὶ διὰ τοῦτο $y = \sqrt{(\alpha^2 - \chi^2)}$.

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

Ἑκατέρα τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ τοῦ τμήματος αὐτῆς τοῦ ἀπολαμβανομένου ὑπὸ τῆς καθέτου καὶ τῆς εἰρημένης πλευρᾶς. Οὕτως ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΑΔ εἶναι ὅμοια, διὰ τοῦτο ΓΔ : ΑΓ :: ΑΓ : ΓΒ, εἴτε $ΑΓ^2 = ΓΒ \times ΓΔ$.

β'. Ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΑΔ εἶναι ὅμοια, διὰ τοῦτο ΒΔ : ΑΒ :: ΑΒ : ΒΓ, εἴτε $ΑΒ^2 = ΒΓ \times ΒΔ$, ὡς ἐθεωρήθη εἰς τὸ (πόρ. β'. προ. μζ'. βιβ. α'.).

Π ό ρ ι σ μ α δ'.

Ἐὰν μία εὐθεῖα τμηθῇ κατὰ τυχὸν σημεῖον, τὸ ἐκ τῶν τμημάτων ὀρθογώνιον θέλει εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων. Ἔςω ΒΓ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 145), καὶ ἂς τμηθῇ κατὰ τυχὸν σημεῖον τὸ

Δ, τότε λέγω ὅτι $B\Delta^2 : B\Delta \times \Delta\Gamma :: B\Delta \times \Delta\Gamma : \Delta\Gamma^2$. Καθότι ἐπειδὴ $B\Delta : A\Delta :: A\Delta : \Delta\Gamma$ (πόρ. α΄.).. καὶ διὰ τοῦτο καὶ $B\Delta^2 : A\Delta^2 :: A\Delta^2 \ \Delta\Gamma^2$ (πόρ. γ΄. πρ. γ΄. βιβ. ϛ΄.).. ἀλλὰ $A\Delta^2 = B\Delta \times \Delta\Gamma$.. ὥστε $B\Delta^2 : B\Delta \times \Delta\Gamma :: B\Delta \times \Delta\Gamma : \Delta\Gamma^2$: ὅ ἐστι $B\Delta^2 \times \Delta\Gamma^2 = B\Delta^2 \times \Delta\Gamma^2$.

Πρότασις. θ΄.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀφέλῃ τις μέρος προσταχθέν.

Ἔστω ΑΔ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ὥστε νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς ἓν τρίτον. σχ. 146.

Ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἄγω τὴν Αε ἄπειρον εὐθεῖαν, ὥστε νὰ ἐμποιῇ τυχοῦσαν γωνίαν μὲ τὴν ΑΒ.. ἐπὶ τῆς Αε εὐθείας λαμβάνω τυχὸν σημεῖον: τὸ Β.. ἀπὸ τῆς Αε εὐθείας τέμνω τμήματα ἴσα μὲ τὸ Αβ: τουτέστιν $A\beta = \beta\gamma = \gamma\delta$ (πρ. γ΄. βιβ. α΄.).. ζευγνύω τὰ σημεῖα δ, Δ διὰ τῆς δΔ εὐθείας.. ἄγω τὴν βΒ παράλληλον μὲ τὴν δΔ, καὶ ἔχω $A\beta : AB :: A\delta : A\Delta$ (πρ. β΄).. καὶ ἐναλλὰξ $A\beta : A\delta :: AB : : A\Delta$.. ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ $A\beta = \frac{1}{3} A\delta$, διὰ τοῦτο καὶ ἡ $AB = \frac{1}{3} A\Delta$, ὡς ἐζητεῖτο.

Πρότασις ι΄.

Τὴν δοθεῖσαν ἄτμητον εὐθεῖαν νὰ τάμῃ τις ὁμοίως μὲ τὴν δοθεῖσαν τετμημένην.

Ἔστω αδ ἡ δοθεῖσα ἄτμητος εὐθεῖα, καὶ ἡ ΑΔ ἡ δοθεῖσα τετμημένη κατὰ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. σχ. 147.

Ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἄγω τὴν $A\delta = \alpha\delta$, ὥστε νὰ ἐμποιῇ τυχοῦσαν γωνίαν μὲ τὴν ΑΔ.. ζευγνύω τὰ σημεῖα Δ, δ διὰ τῆς Αδ εὐθείας.. ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Γ ἄγω παραλλήλους τὰς Ββ, Γγ μὲ τὴν Δδ, καὶ λέγω ὅτι ἡ Αδ τέτμηται ὁμοίως μὲ τὴν ΑΔ κατὰ τὰ σημεῖα β, καὶ γ.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ Ββ ἤχθη παράλληλος μὲ τὴν Γγ, διὰ τοῦτο ΑΒ: ΒΓ:: Αβ: βγ (πρ. β'.).

Εἶτα ἐπειδὴ καὶ ἡ Γγ ἤχθη παράλληλος μὲ τὴν Δδ, διὰ τοῦτο ΑΓ: ΓΔ:: Αγ: γδ.. καὶ ἐπομένως ΒΓ: ΓΔ::βγ: γδ (πρ. ϛ'. βιβ. ε'.): ὅ ἐςιν ἡ αδ, εἴτε ἡ ταύτῃ ἴση Αδ τέτμηται ὁμοίως μὲ τὴν δοθεῖσαν τετμημένην εὐθεῖαν ΑΔ, ὡς ἐζητεῖτο.

Πρότασις ια'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, νὰ προσεύρῃ τις τρίτην ἀνάλογον.

Ἔςωσαν ΑΒ, καὶ αβ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. σχ. 148.

Ἀπὸ τοῦ Β πέρατος τῆς ΑΒ εὐθείας, ἄγω πρὸς ὀρθὰς μὲ αὐτὴν τὴν ΒΓ ἴσην μὲ τὴν αβ (πρ. β'. βιβ. α'.).. ζευγνύω τὰ σημεῖα Α, Γ.. πρὸς τῷ σημείῳ Γ τῆς ΑΓ εὐθείας.. ἐκτελῶ τὴν γων. ΑΓΔ = 90° (πρ. κγ'. βιβ. α'.).. ἐπεκτείνω τὴν ΑΒ εὐθείαν ἕως νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΓΔ, καὶ λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΔ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ΑΒ: ΒΓ:: ΒΓ: ΒΔ (πόρ. α'. πρ. κ'.), διὰ τοῦτο ἡ ΒΔ εἶναι τρίτη ἀνάλογος τῶν ΑΒ ΒΓ, εἴτε τῶν ΑΒ, αβ, ὡς ἐζητεῖτο.

Πόρισμα.

Ὥςε εἰς πάντα κύκλον τὸ μέρος τῆς διαμέτρου τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς καθέτου καὶ τῆς περιφερείας