ΒΓ = ΕΖ, ἡ δευτέρα εἶναι τεταραγμένη ἀναλογία. εἴτε ἐπειδὴ $15 \times 4 = 12 \times 5$, καὶ $12 \times 5 = 20 \times 3$ ἡ δευτέρα εἶναι ἀναλογία τεταραγμένη.

ιθ'. Δι' ἴσου λόγος λέγεται, ὅταν ἐκ δύο ἀναλογιῶν ληφθέντες δύο ἴσοι λόγοι ἐκτελέσωσι τρίτην ἀναλογίαν. Καὶ δι' ἴσου μὲν τεταγμένως λόγος λέγεται, ὅταν οἱ μὲν δύο ὁμόλογοι ὅροι τῆς πρώτης ἀναλογίας γεννῶσιν ὁμόλογοι τῆς τρίτης, οἱ δὲ ὁμόλογοι τῆς δευτέρας δεύτεροι ὁμόλογοι. δι' ἴσου δὲ τεταραγμένως λόγος λέγεται, ὅταν οἱ δύο ὅροι τῆς πρώτης σχῶσιν ἀντιπεπονθότως πρὸς τοὺς δύο ὅρους τῆς δευτέρας. Οὕτως ἂν Α : Β :: Γ : Δ, καὶ Β : Ε :: Δ : Ζ, εἴτε ἂν $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ καὶ $\frac{B}{E} = \frac{\Delta}{Z}$, τότε $\frac{A}{E} = \frac{\Gamma}{Z}$ λέγεται λόγος δι' ἴσου τεταγμένως. καὶ ἂν Α : Β :: Γ : Δ, καὶ Β : Ε :: Ζ : Γ, εἴτε ΑΔ = ΒΓ, καὶ ΒΓ = ΕΖ, τότε ΑΔ = ΕΖ, εἴτε Α : Ε :: Ζ : Δ λέγεται λόγος δι' ἴσου τεταραγμένως.

Π ρ ό τ α σ ι ς. α'. καὶ ιβ'. (α).

Ἐὰν ὁποσαδήποτε μεγέθη ἦναι ἀνάλογα, ἅπαντα τὰ ἡγούμενα ἔξουσι πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, ὡς ἓν ἡγούμενον πρὸς ἓν ἑπόμενον.

Ἔσω Α : Β :: Γ : Δ :: Ε : Ζ :: Η : Θ, τότε λέγω ὅτι Α + Γ + Ε + Η : Β + Δ + Ζ + Θ :: Α : Β.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἓν ἑπόμενον ἄλλο δὲν εἶναι εἰμὴ

(α) Ὁ Εὐκλείδης μεταχειρίζεται τινὰς προτάσεις διὰ τῶν πολλαπλασίων πρὸς ἀπόδειξιν ἄλλων.. ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ τοιαῦται ἀποδείξεις εὑρίσκονται περιτταί, τούτου ἕνεκεν ἑνοῦμεν πολλὰς προτάσεις, φυλάττοντες ὅμως τὴν τάξιν αὐτῶν.

τοῦ ἡγούμενου ἐπὶ τὸν λόγον (ὅρ. δ΄.)· διὰ ταῦτο ὀνομασθέντος μ τοῦ λόγου τούτων τῶν ἀναλόγων ποσοτήτων, ἡ ἀναλογία θέλει τραπεῖ εἰς τὴν ἑξῆς Α : Αμ : : Γ : Γμ : : Ε : Εμ : : Η : Ημ. Ἐπειδὴ τοῦτο ὡς ὁρᾶται (Α + Γ + Ε + Η) Αμ = (Α + Γ + Ε + Η) Αμ εἶναι ταυτότης ἢ ἐξίσωσις. καὶ ἐπειδὴ μία ἐξίσωσις ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἀναλογία· διὰ τοῦτο ἔξω Α + Γ + Ε + Η : (Α + Γ + Ε + Η) μ : : Α : Αμ ; ὅ ἐστιν Α + Γ + Ε + Η : Β + Δ + Ζ + Θ : : Α : Β : τουτέστι τὸ κεφάλαιον τῶν ἡγουμένων ἔχει πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν ἑπομένων τῶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ὡς ἓν ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον αὐτοῦ.

Ἔστω 21 : 7 : : 18 : 6 : : 15 : 5 : : 12 : 4 τουτέστι $\frac{21}{7} = \frac{18}{6} = \frac{15}{5} = \frac{12}{4}$· τότε λέγω ὅτι 21 + 18 + 15 + 12 : 7 + 6 + 5 + 4 : : 21 : 7, εἴτε $\frac{21+18+15+12}{7+6+5+4} = \frac{21}{7} = \frac{3}{1}$.

Πρότασις κβ΄. καὶ κδ΄.

Ἐὰν εἰς ἀναλογίας ἦναι τὰ αὐτὰ ἑπόμενα καὶ διάφορα τὰ ἡγούμενα· ἅπαντα τὰ ἡγούμενα τοῦ πρώτου ἑπόμενου ἔξουσι πρὸς ἅπαντα τὰ ἡγούμενα τοῦ δευτέρου ἑπομένου· ὡς αὐτὰ τὰ ἑπόμενα.

Ἔστω Α : Β : : Γ : Δ, καὶ Ε : Β : : Ζ : Δ, καὶ Η : Β : : Θ : Δ· τότε λέγω ὅτι Α + Ε + Η : Γ + Ζ + Θ : : Β : Δ.

Ἐπειδὴ καὶ μία ἀναλογία ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ μία ἐξίσωσις (ὅρ. ς΄.)· διὰ τοῦτο αἱ δοθεῖσαι ἀναλογίαι τρέπονται εἰς ταύτας τὰς ἐξισώσεις $\frac{Β}{Δ} = \frac{Α}{Γ}$, καὶ $\frac{Β}{Δ} = \frac{Ε}{Ζ}$, καὶ $\frac{Β}{Δ} = \frac{Η}{Θ}$. ὥστε $\frac{Α}{Γ} = \frac{Ε}{Ζ} = \frac{Η}{Θ}$ (ἀξ. α΄.). ἀλλ' αἱ ἐξισώσεις τρέπονται εἰς ἀναλογίας· διὰ τοῦτο ἔχω $Β : Δ :: Α : Γ :: Ε : Ζ :: Η : Θ$, καὶ διὰ τοῦτο $Α + Ε + Η : Γ + Ζ + Θ :: Β : Δ$ (πρ. α΄.). Ἔςω $15 : 5 :: 12 : 4$, καὶ $20 : 5 :: 16 : 4$, καὶ $25 : 5 :: 20 : 4$· τότε ἔσονται $15 + 20 + 25 : 12 + 16 + 20 :: 5 : 4 = 1\frac{1}{4}$.

Πρότασις γ΄.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἦναι ἀνάλογα, καὶ πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσιν ἐξίσου τὰ ἡγούμενα αὐτῶν ἢ οἱ ὅροι τοῦ ἑνὸς λόγου, ἔσονται πάλιν ἀνάλογα.

Ἔςω $Α : Β :: Γ : Δ$.. καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἢ ἂς διαιρεθῶσι τὰ ἡγούμενα αὐτῆς, ἢ οἱ ὅροι τοῦ ἑνὸς λόγου διὰ τῆς μ ποσότητος, τότε λέγω ὅτι $μΑ : Β :: μΓ : Δ$, καὶ $\frac{Α}{μ} : Β :: \frac{Γ}{μ} : Δ$, καὶ $μΑ : μΒ :: Γ : Δ$.

Ἐπειδὴ καὶ πᾶσα ἀναλογία ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἐξίσωσις (ὅρ. ζ.), διὰ τοῦτο ἔχω $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$.. ἀλλ' ἐπειδὴ μία ἐξίσωσις ἂν πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ ἑκατέρωθεν ἐπίσης, δὲν ἀπολλύει τὴν ἰσότητα, διὰ τοῦτο α΄. ἔχω $\frac{μΑ}{Β} = \frac{μΓ}{Δ}$, καὶ ἑπομένως $μΑ : Β :: μΓ : Δ$.. β΄. ἔχων $\frac{Α}{μΒ} = \frac{Γ}{μΔ}$, ἔχω $\frac{Α}{μ} : Β :: \frac{Γ}{μ} : Δ$.. γ΄. ἔχων $\frac{μΑ}{μΒ} = \frac{Γ}{Δ}$ ἔχω $μΑ : μΒ :: Γ : Δ$. Ὡσαύτως καὶ $\frac{Α}{μ} : \frac{Β}{μ} :: Γ : Δ$.

Ἔςω $15 : 5 :: 12 : 4$, τότε ἔςαι α΄. $10 \times 15 : 5 :: 10 \times 12 : 4$.. β΄. $\frac{15}{3} : 5 :: \frac{12}{3} : 4$.. διότι $\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$, $\frac{10 \times 15}{5} = \frac{10 \times 12}{4}$, $\frac{15}{5 \times 3} = \frac{12}{4 \times 3}$.

Πρότασις δ΄.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἦναι ἀνάλογα, καὶ πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσιν ἐξ ἴσου τὰ ἡγούμενα καὶ ἑπόμενα αὐτῶν, ἢ οἱ ὅροι ἑκατέρου λόγου, ἔσονται πάλιν ἀνάλογα.

Ἔςω $A : B :: \Gamma : \Delta$. καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσι τὰ μὲν ἡγούμενα διὰ τοῦ μ, τὰ δὲ ἑπόμενα διὰ τοῦ ν, τότε λέγω ὅτι $\mu A : \nu B :: \mu\Gamma : \nu\Delta$, καὶ $\mu A : \mu B :: \nu\Gamma : \nu\Delta$.

Ἐπειδὴ καὶ πᾶσα ἀναλογία τρέπεται εἰς ἐξίσωσιν, διὰ τοῦτο ἔξω $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$. ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ μία ἐξίσωσις ἂν πολλαπλασιασθῇ, ἢ διαιρεθῇ ἑκατέρωθεν διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, δὲν ἀπολλύει τὴν ἰσότητα, διὰ τοῦτο διαιρῶν ἑκάτερα τὰ μέλη διὰ τοῦ ν, καὶ πολλαπλασιάζων διὰ τοῦ μ, ἔξω $\frac{\mu A}{\nu B} = \frac{\mu\Gamma}{\nu\Delta}$, καὶ ἐπομένως $\mu A : \nu B :: \mu\Gamma : \nu\Delta$.

Ὡσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ $\frac{A}{\mu} : \frac{B}{\nu} :: \frac{\Gamma}{\mu} : \frac{\Delta}{\nu}$.

Ἔςω $15 : 5 :: 12 : 4$, τότε καὶ $10 \times 15 : 2 \times 5 :: 10 \times 12 : 2 \times 4$, καὶ $\frac{15}{3} : \frac{5}{5} :: \frac{12}{3} : \frac{4}{5}$. διότι αὕτη τρέπεται εἰς τὴν $\frac{15 \times 4}{15} = \frac{12 \times 5}{15}$.

Πόρισμα α'.

Ὥςε ἂν δύο ἀναλογιῶν πολλαπλασιάσῃ τις τοὺς ὅρους καταλλήλως, τὰ γινόμενα θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα. Οὕτως ἔςω $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$, τότε λέγω ὅτι $\alpha A : \beta B :: \gamma\Gamma : \delta\Delta$. Καθότι αἱ δοθεῖσαι ἀναλογίαι τρέπονται εἰς ταύτας τὰς ἐξισώσεις $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, καὶ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Καὶ ἐπειδὴ ἂν πολλαπλασιασθῇ μία ἐξίσωσις διὰ τῆς αὐτῆς ἢ ἴσης ποσότητος, δὲν ἀλλάττει τὸ εἶναι τῆς ἰσότητος· διὰ τοῦτο ἔξω $\frac{\alpha A}{\beta B} = \frac{\gamma \Gamma}{\delta \Delta}$· ὅθεν $\alpha A : \beta B :: \gamma \Gamma : \delta \Delta$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ πᾶν ἑπόμενον ἐπὶ τὸν λόγον εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ αὐτὸ τὸ ἡγούμενον· διὰ τοῦτο ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$, ὀνομασθέντος μ τοῦ λόγου, τρέπεται εἰς ταύτην $\alpha : \mu\alpha :: \gamma : \mu\gamma$.. καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐξίσωσις $\frac{\alpha A}{\beta B} = \frac{\gamma \Gamma}{\delta \Delta}$ τρέπεται εἰς ταύτην $\frac{\mu A}{B} = \frac{\mu \Gamma}{\Delta}$, εἴτε $\mu A : B :: \mu \Gamma : \Delta$.

Πόρισμα β.

Ἂν μιᾶς ἀναλογίας διαιρέσῃ τις τοὺς ὅρους καταλλήλως διὰ τῶν ὅρων μιᾶς ἄλλης· τὰ πηλίκα θέλουσιν ἐπίσης εἶναι ἀνάλογα. Οὕτως ἔςω $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$· τότε λέγω ὅτι $\frac{A}{\alpha} : \frac{B}{\beta} :: \frac{\Gamma}{\gamma} : \frac{\Delta}{\delta}$. Καθότι αἱ δοθεῖσαι ἀναλογίαι τρέπονται εἰς ταύτας τὰς ἐξισώσεις $A\Delta = B\Gamma$, καὶ $\alpha\delta = \beta\gamma$. Καὶ ἐπειδὴ ἂν μία διαιρεθῇ ἐξίσωσις διὰ τῆς αὐτῆς ἢ ἴσης ποσότητος· μένει ἐπίσης ἐξίσωσις· διὰ τοῦτο ἔξω $\frac{A\Delta}{\alpha\delta} = \frac{B\Gamma}{\beta\gamma}$, εἴτε $\frac{A}{\alpha} \times \frac{\Delta}{\delta} = \frac{B}{\beta} \times \frac{\Gamma}{\gamma}$, καὶ διὰ τοῦτο $\frac{A}{\alpha} : \frac{B}{\beta} :: \frac{\Gamma}{\gamma} : \frac{\Delta}{\delta}$, εἴτε ὀνομασθέντος μ τοῦ λόγου, $\frac{A}{\alpha} : \frac{B}{\mu\alpha} :: \frac{\Gamma}{\gamma} : \frac{\Delta}{\mu\gamma}$· ὅ ἐςιν $A : \frac{B}{\mu} :: \Gamma . \frac{\Delta}{\mu}$.

Πόρισμα γ.

Ἂν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι ἦναι ἀνάλογοι· καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν ἀνάλογα θέλουσιν εἶναι· τοὐτέςιν ἂν $A : B :: \Gamma : \Delta$· τότε καὶ $A^2 : B^2 :: \Gamma^2 : \Delta^2$.

Καθότι ἐπειδὴ $A : B :: \Gamma : \Delta$· διὰ τοῦτο καὶ $A : B :: \Gamma : \Delta$· ὅθεν πολλαπλασιάζων καταλλήλως τοὺς ὅρους αὐτῶν ἔξω $A^2 : B^2 :: \Gamma^2 : \Delta^2$. Ὡσαύτως βεβαία καὶ $A^3 : B^3 :: \Gamma^3 : \Delta^3$. καὶ ἐν γένει $A^\alpha : B^\alpha :: \Gamma^\alpha : \Delta^\alpha$.

Π ό ρ ι σ μ α : δ'.

Ὥςε ἂν τὰ τετράγωνα τινῶν μεγεθῶν ἦναι ἀνάλογα, καὶ τὰ μεγέθη θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα: τούτεςιν ἂν $A^2 : B^2 :: \Gamma^2 : \Delta^2$, τότε καὶ $A : B :: \Gamma : \Delta$. Ὡσαύτως καὶ ἂν ἦν $A^3 : B^3 :: \Gamma^3 : \Delta^3$, καὶ ἐν γένει ἂν ἦν $A^\alpha : B^\alpha :: \Gamma^\alpha : \Delta^\alpha$.

Π ό ρ ι σ μ α : ε'.

Ὥςε ἂν τὸ ἡγούμενον μιᾶς ἀναλογίας ταυτίζηται μὲ τὸ ἑπόμενον μιᾶς ἄλλης, τότε τὰ γινόμενα τῶν πρώτων λόγων ἔξουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς ἓν ἡγούμενον πρὸς ἓν ἑπόμενον. Οὕτως ἂν $A : B :: \alpha : \beta$, καὶ $\Gamma : \Delta :: \gamma : \alpha$, τότε $A\Gamma : B\Delta :: \gamma : \beta$. ὅπερ καὶ μέθοδον σύνθετον τῶν τριῶν ἢ τῶν πέντε ὀνομάζουσιν (ἀριθμ. 141). Καὶ ἂν $A : B :: \alpha : \beta$, καὶ $A : B :: \beta : \gamma$, τότε $A^2 : B^2 :: \alpha : \gamma$, εἴτε $A : B :: \sqrt{\alpha} : \sqrt{\gamma}$.

Π ρ ό τ α σ ι ς : ε'. καὶ ς'. καὶ θ'.

Ἐὰν ἐκ δύο ὅλων ἀφαιρεθῶσι μέρη ἀνάλογα μὲ τὰ ὅλα, τὰ καταλειπόμενα θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα καὶ μὲ τὰ ὅλα καὶ μὲ τὰ ἀφαιρεθέντα.

Ἔςω $10A : 2A :: 10B : 2B$, τότε λέγω ὅτι καὶ $8A : 10A :: 8B : 10B$, καὶ $8A : 2A :: 8B : 2B$.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ πᾶσα ἀναλογία τρέπεται εἰς ἐξίσωσιν, διὰ τοῦτο ἔξω $2 \times 10\,AB = 2 \times 10\,AB$. πολλαπλασιάζω ἑκατέρωθεν διὰ τοῦ 4, καὶ ἔχω $8 \times 10\,AB = 8 \times 10\,AB$, καὶ ἐπομένως $8A : 10A :: 8B : 10B$.

β'. Εἰ δὲ καὶ πρῶτον μὲν διαιρέσω ἑκατέρωθεν τὴν

2×10 AB $= 2\times 10$ AB διὰ τοῦ 5, εἶτα δὲ πολλαπλασιάσω διὰ τοῦ 4, ἔξω 2×8 AB $= 2\times 8$ AB, καὶ ἐπομένως 8A : 2A : : 8B : 2B.

Ἔςω A $= 15$, καὶ B $= 12$, τότε ὄντος 10×15 : 2×15 : : 10×12 : 2×12, θέλει εἶναι καὶ 8×15 : 10×15 : : 8×12 : 10×12.. καὶ ἔτι 8×15 : 2×15 : : 8×12 : 2×12.

Πρότασις. ζ.

Τὰ ἴσα μεγέθη ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ αὐτὸ μέγεθος.. καὶ τὸ αὐτὸ μέγεθος ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς δύο ἴσα μεγέθη.

Ἔςω A $=$ α, τότε λέγω, ὅτι A : B : : α : B.. καὶ ὅτι B : A : : B : α.

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, A $=$ α, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζων ἑκάτερα τὰ μέλη διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος τοῦ B, ἔξω AB $=$ αB, καὶ ἐπομένως A : B : : α : B, εἴτε $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{B}$.

β΄. Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, A $=$ α, διὰ τοῦτο καὶ BA $=$ Bα, ὥςε B : A : : B : α (ὅρ. ζ.), εἴτε $\frac{B}{A} = \frac{B}{\alpha}$.

Πρότασις. η΄.

Ἐκ δύο ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον ἔχει πρὸς ἓν τρίτον μείζονα λόγον, ἢ τὸ ἔλαττον.. καὶ τὸ τρίτον ἔχει μείζονα λόγον πρὸς τὸ ἔλαττον, ἢ πρὸς τὸ μεῖζον.

Ἔςω A $>$ β, τότε λέγω ὅτι A : B $>$ β : B, καὶ ὅτι B : β $>$ B : A.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ A εἶναι μεῖζον τοῦ β, διὰ τοῦτο ἂν διαιρέσω ἑκάτερα διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ὡς τῆς Β, τὰ πηλίκα ἕξουσι τὴν ὁμοίαν ἀναφοράν. Ὥςε $\frac{A}{B} > \frac{\beta}{B}$, καὶ διὰ τοῦτο $A : B > \beta : B$.

β'. Ἐπειδὴ καὶ ἐξ ὑποθέσεως τὸ Α εἶναι μεῖζον τοῦ β, διὰ τοῦτο μία καὶ ἡ αὐτὴ ποσότης: τὸ Β, περιέξει τὸ β, μᾶλλον, ἢ τὸ Α: ὃ ἐςι $\frac{B}{\beta} > \frac{B}{A}$, εἴτε $B : \beta > B : A$. Καθότι διαιρῶ ἀμφότερα τὰ μέρη τοῦ $A > \beta$ διὰ τοῦ Αβ, καὶ ἔχω $\frac{1}{\beta} > \frac{1}{A}$.. πολλαπλασιάζω ἀμφότερα διὰ τοῦ Β, καὶ ἔχω $\frac{B}{\beta} > \frac{B}{A}$, εἴτε $B : \beta > B : A$.

Ἔςω $A = 30$, $\beta = 20$, καὶ $B = 5$, τότε $\frac{30}{5} > \frac{20}{5}$, καὶ $\frac{5}{20} > \frac{5}{30}$.. ὡσαύτως καὶ ἂν $A = 30$, $\beta = 20$, καὶ $B = 60$, τότε $\frac{30}{60} > \frac{20}{60}$, καὶ $\frac{60}{20} > \frac{60}{30}$. Καὶ τέλος, ἂν $A = 30$, $\beta = 20$, καὶ $B = 30$, τότε $\frac{30}{30} > \frac{20}{30}$, καὶ $\frac{30}{20} > \frac{30}{30}$.

Πρότασις θ'.

Τὰ ἔχοντα πρὸς ἓν τρίτον τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.. καὶ, πρὸς ἅπερ ἓν τρίτον ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.

Ἔςω $A : B :: \alpha : B$, τότε λέγω ὅτι $A = \alpha$.

Ἐπειδὴ $A : B :: \alpha : B$, ἐξ ὑποθέσεως, διὰ τοῦτο $AB = \alpha B$ (ὅρ. ζ.).. διαιρῶ ἑκατέρωθεν διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος: τῆς Β, καὶ ἔχω $A = \alpha$.

β'. Ἔςω $B : A :: B : \alpha$, τότε λέγω ὅτι $A = \alpha$.

Ἐπειδὴ $B : A :: B : \alpha$, διὰ τοῦτο $B\alpha = BA$, καὶ ἐπομένως $\alpha = A$.

Πόρισμα.

Ὥςε καὶ τὰ ἔχοντα πρὸς δύο ἴσα τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.. καὶ πρὸς ἅπερ δύο ἴσα ἀλλήλοις ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ί.

Ἐκ δύο μεγεθῶν τὸ ἔχον μείζονα λόγον πρὸς ἓν τρίτον, εἶναι μεῖζον.. καὶ θάτερον δύο μεγεθῶν, πρὸς ὅπερ ἓν τρίτον ἔχει μείζονα λόγον, εἶναι ἔλαττον τοῦ ἑτέρου.

Ἔςω $A : B > \alpha : B$, τότε λέγω ὅτι $A > \alpha$.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A : B > \alpha : B$, διὰ τοῦτο $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{B}$ (ἀριθμ. 22). Τώρα ἂν πολλαπλασιάσω ἑκάτερα διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος: τῆς B, τὸ πρᾶγμα μένει ἀμετάβλητον.. ὥςε ἔξω $A > \alpha$.

β'. Ἔςω $A > \alpha$, τότε λέγω ὅτι $A : B > \alpha : B$.

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A > \alpha$, διὰ τοῦτο διαιρῶν ἑκάτερα διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος: τῆς B, τὸ πρᾶγμα μένει ἀμετάβλητον.. ὥςε ἔξω $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{B}$, εἴτε $A : B > \alpha : B$.

Π ό ρ ι σ μ α. ά.

Ὥςε ἐκ δύο μεγεθῶν τὸ ἔχον μείζονα λόγον πρὸς θάτερον δύο ἴσων, εἶναι μεῖζον.. καὶ θάτερον δύο μεγεθῶν, πρὸς ὅπερ ἓν ἐκ δύο ἴσων ἔχει μείζονα λόγον, εἶναι ἔλαττον τοῦ ἑτέρου.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Εἰς δύο ἀνίσους λόγους, τὸ γινόμενον τὸ ἐκ τῶν ἄκρων εἶναι ἄνισον μὲ τὸ γινόμενον τὸ ἐκ τῶν μέσων.

Καθότι ἂν $A : B > \alpha : B$, δῆλον ὅτι καὶ $AB > \alpha B$. Καθότι ἐπειδὴ $15 : 5 > 10 : 5$, διὰ τοῦτο καὶ

$15 \times 5 > 10 \times 5$.. ὡσαύτως ἐπειδὴ $5 : 10 > 5 : 15$, διὰ τοῦτο καὶ $5 \times 15 > 5 \times 10$.

Πόρισμα γ'.

Ἂν εἰς δύο λόγους τὸ γινόμενον τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἦναι ἄνισον μὲ τὸ γινόμενον τὸ ἐκ τῶν μέσων, οἱ λόγοι εἶναι ἄνισοι: ὅ ἐστιν ἡ μὴ ἐξίσωσις, μὴ ἀναλογία.

Πρότασις. ια'.

Οἱ λόγοι οἱ αὐτοὶ μὲ ἕνα τρίτον, εἶναι οἱ αὐτοὶ καὶ πρὸς ἀλλήλους.

Ἐὰν $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $\Gamma : \Delta :: E : Z$, τότε λέγω ὅτι καὶ $A : B :: E : Z$.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A : B :: \Gamma : \Delta$, διὰ τοῦτο $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ (ὅρ. ζ.).. ὡσαύτως ἐπειδὴ $\Gamma : \Delta :: E : Z$, διὰ τοῦτο $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{E}{Z}$ .. καὶ διὰ τοῦτο $\frac{A}{B} = \frac{E}{Z}$ (ἀξ. α'.) .. ὥστε $A : B :: E : Z$, ὅπερ καὶ διΐσου λόγος τεταραγμένως λέγεται (ὅρ. ιθ'.).

Πόρισμα. α'.

Ὥστε οἱ λόγοι οἱ αὐτοὶ μὲ δύο ἴσους λόγους, εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλλους ἴσοι.

Πόρισμα β'.

Ἂν οἱ λόγοι οἱ ὑποδιπλασίονες ἦναι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ οἱ διπλασίονες αὐτῶν ἴσοι θέλουσιν εἶναι. Ἔστω $A : B :: B : \Gamma$, καὶ $\alpha : \beta :: \beta : \gamma$, καὶ $A : B :: \alpha : \beta$, τότε λέγω ὅτι $A : \Gamma :: \alpha : \gamma$.

Καθότι αὗται αἱ ἀναλογίαι τρέπονται εἰς ταύτας τὰς ἐξισώσεις $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$, καὶ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$, καὶ $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$ .. ὅθεν $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ .. καὶ πολλαπλασιάζων τὰ ἴσα διὰ τῶν ἴσων, ἔξω $\frac{A}{B} \times \frac{B}{\Gamma} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\gamma}$, εἴτε $\frac{A}{\Gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$, καὶ διὰ τοῦτο $A : \Gamma :: \alpha : \gamma$, ὅπερ εἶναι λόγος διπλασίων, ἢ ὁ τοῦ $A : B$.

Πόρισμα γ'.

Ἂν οἱ λόγοι οἱ διπλασίονες ἦναι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ οἱ ὑποδιπλασίονες θέλουσιν εἶναι ἴσοι. Ἔςω $A : B :: B : \Gamma$, καὶ $\alpha : \beta :: \beta : \gamma$, καὶ $A : \Gamma :: \alpha : \gamma$, τότε λέγω ὅτι καὶ $A : B :: \alpha : \beta$.

Καθότι αὗται αἱ ἀναλογίαι τρέπονται εἰς ταύτας τὰς ἐξισώσεις $A\Gamma = B^2$, καὶ $\alpha\gamma = \beta^2$, καὶ $A\gamma = \alpha\Gamma$, αἵτινες πολλαπλασιασθεῖσαι ὑπ' ἀλλήλων δίδουσι $A^2\Gamma\gamma\beta^2 = \alpha^2\Gamma\gamma B^2$, εἴτε $A\beta^2 = \alpha^2 B^2$, καὶ διὰ τοῦτο $A^2 : B^2 :: \alpha^2 : \beta^2$, καὶ ἑπομένως $A : B :: \alpha : \beta$. (πορ. δ'. προ. δ'.), ὅπερ εἶναι λόγος ὑποδιπλασίων, ἢ ὁ τοῦ $A^2 : B^2$.

Πρότασις ιγ'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἦναι ἀνάλογα, καὶ θάτερος τῶν λόγων αὐτῶν ἦναι μείζων ἑνὸς τρίτου, θέλει εἶναι ὡσαύτως καὶ ὁ ἕτερος.

Ἔςω $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $\Gamma : \Delta > E : Z$, τότε λέγω ὅτι καὶ $A : B > E : Z$.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $\Gamma : \Delta > E : Z$, διὰ τοῦτο ἔξω $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, καὶ $\frac{\Gamma}{\Delta} > \frac{E}{Z}$· ὥςε ἀντικαθιςῶν εἰς τὸν τόπον τοῦ $\frac{\Gamma}{\Delta}$ τὸ ἰσοδύναμον αὐτοῦ $\frac{A}{B}$, ἔξω $\frac{A}{B} > \frac{E}{Z}$, εἴτε $A : B. > E : Z$.

Πρότασις ιδ'.

Ἂν ἐκ τεσσάρων μεγεθῶν ἀναλόγων τὸ πρῶτον ἢ γούμενον ἦναι μεῖζον τοῦ δευτέρου, θέλει εἶναι ὡσαύτως καὶ τὸ πρῶτον ἑπόμενον τοῦ δευτέρου.. καὶ ἂν ἴσον, ἴσον.. καὶ ἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἔςω $A : B :: \Gamma : \Delta$, τότε λέγω ὅτι ἂν $A > \Gamma$, θέλει εἶναι ἐπίσης καὶ $B > \Delta$, καὶ ἂν $A = \Gamma$, καὶ $B = \Delta$, καὶ ἂν $A < \Gamma$, καὶ $B < \Delta$.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A : B :: \Gamma : \Delta$, διὰ τοῦτο $A\Delta = \Gamma B$ (ὅρ. ζ΄.).

Ὥςε ἂν $A = \Gamma$, ἐξ ἀνάγκης θέλει εἶναι καὶ $B = \Delta$.. καὶ ἂν $A > \Gamma$, θέλει εἶναι ἐπίσης καὶ $B > \Delta$.. καὶ ἂν $A < \Gamma$, θέλει εἶναι ἐπίσης καὶ $B < \Delta$, ἀλλέως ἡ ἐξίσωσις $A\Delta = \Gamma B$ δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ιε΄.

Ἐὰν δύο μεγέθη ἦναι ὅμοια μέρη δύο ὅλων, ἔξουσι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὅλα.

Ἔςω $aB = A$, καὶ $a\Delta = \Gamma$, τότε λέγω ὅτι $B : \Delta :: A : \Gamma$.

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $aB = A$, καὶ $a\Delta = \Gamma$, διὰ τοῦτο θέλει εἶναι $aB\Gamma = a\Delta A$, εἴτε $B\Gamma = \Delta A$ εἴτε $\frac{B}{\Delta} = \frac{A}{\Gamma}$, διαιρεθέντων ἑκατέρων διὰ τοῦ $\Delta\Gamma$, καὶ διὰ τοῦτο $B : \Delta :: A : \Gamma$ (ὅρ. ζ΄.).

Οὕτως ἐπειδὴ $5 \times 10 = 50$, καὶ $4 \times 10 = 40$, διὰ τοῦτο $5 : 4 :: 50 : 40$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ις΄.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἦναι ἀνάλογα, καὶ ἐναλλὰξ ἢ καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογα θέλουσιν εἶναι.

Ἔςω $A : B :: \Gamma : \Delta$, τότε λέγω ὅτι καὶ $A : \Gamma :: B : \Delta$, καὶ $B : \Delta :: A : \Gamma$.

α'. Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, Α : Β :: Γ : Δ, διὰ τοῦτο ΑΔ = ΓΒ (ὅρ. ζ'.) : ὅ ἐςι $\frac{Α}{Γ} = \frac{Β}{Δ}$, διαιρεθείσης δηλονότι τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ ΓΔ, ὥςε Α : Γ :: Β : Δ.

β'. Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, Α : Β :: Γ : Δ, διὰ τοῦτο ΒΓ = ΑΔ, εἴτε $\frac{Β}{Α} = \frac{Δ}{Γ}$: διαιρεθείσης δηλονότι τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ ΑΓ, ὥςε ἔξω Β : Α :: Δ : Γ, ὅπερ καὶ λόγος ἀνάπαλιν λέγεται (ὅρ. ιγ'.). Ἐπειδὴ $\frac{Α}{Γ} = \frac{Β}{Δ}$, διὰ τοῦτο καὶ $\frac{Β}{Δ} = \frac{Α}{Γ}$, εἴτε ΓΒ = ΑΔ, καὶ διὰ τοῦτο Β : Α :: Δ : Γ, εἴτε καὶ ἐναλλάξ Α : Γ :: Β : Δ, εἴτε Β : Δ :: Α : Γ, καὶ ἐναλλάξ Β : Α :: Δ : Γ.

Ἔςω 15 : 5 :: 12 : 4, τότε α'. θέλει εἶναι 15 : 12 :: 5 : 4.. β'. 5 : 4 :: 15 : 12. ὅπερ λέγεται ἀνάπαλιν λόγος (ὅρ. ιγ'.).

Πόρισμα.

Ὥςε δύναμαι νὰ ἀνατρέψω δύο ἴσα κλάσματα. Καθότι ἂν Α : Β :: Γ : Δ.. καὶ ἂν τὸ ἀνάπαλιν Β : Α :: Δ : Γ : ὅ ἐςιν ἂν $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$, καὶ $\frac{Β}{Α} = \frac{Δ}{Γ}$, τοῦτο τὶ — ἄλλο εἶναι, εἰμὴ ἀνατροπὴ ἴσων κλασμάτων;

Πρότασις. ις'.

Ἐὰν ὁποσαοῦν μεγέθη ἦναι ἀνάλογα, διαιρεθέντα τε καὶ κατ' ἀντιςροφὴν ἀνάλογα θέλουσιν εἶναι.

Ἔςω Α : Β :: Γ : Δ, τότε λέγω ὅτι καὶ Α — Β : Β :: Γ — Δ : Δ, καὶ ὅτι Α : Α — Β :: Γ : Γ — Β.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, Α : Β :: Γ : Δ, διὰ τοῦτο ΑΔ = ΓΒ. Τώρα ἀφαιρῶν ἑκατέρωθεν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα : τὴν ΒΔ, ἔξω ΑΔ — ΒΔ =

$\Gamma B - B\Delta$, εἴτε $(A - B)\Delta = (\Gamma - \Delta)B$, καὶ ἐπομένως $A - B : B :: \Gamma - \Delta : \Delta$, ὅπερ καὶ διαίρεσις λόγου ὀνομάζεται (ὅρ. ιε'.).

β'. Ὥςε ἐπειδὴ $A\Delta = \Gamma B$, διὰ τοῦτο θέλει εἶναι ἐπίσης καὶ $-A\Delta = -\Gamma B$. Τώρα προςθέμενος ἑκατέρωθεν μίαν καὶ καὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα: τὴν $A\Gamma$, ἔξω $A\Gamma - A\Delta = A\Gamma - \Gamma B$, εἴτε $A(\Gamma - \Delta) = (A - B)\Gamma$, καὶ ἐπομένως $A : A - B :: \Gamma : \Gamma - \Delta$, ὅπερ καὶ ἀντιςροφὴ λόγου ὀνομάζεται (ὅρ. ιϛ'.).

Πόρισμα. α'.

Ὥςε ἂν τέσσαρα μεγέθη ἦναι μὴ ἀνάλογα, καὶ διαιρεθέντα δὲν θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα. Οὕτως ἂν $A : B > \Gamma : \Delta$, εἴτε $\frac{A}{B} > \frac{\Gamma}{\Delta}$, θέλει εἶναι ὡσαύτως καὶ $\frac{A - B}{B} > \frac{\Gamma - \Delta}{\Delta}$. Καὶ μερικῶς ἐπειδὴ $20:5 > 12:4$, εἴτε $\frac{20}{5} > \frac{12}{4}$, διὰ τοῦτο καὶ $\frac{20-5}{5} > \frac{12-4}{4}$, εἴτε $\frac{20-1}{5} > \frac{12-1}{4}$.

Πόρισμα. β'.

Ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων ἔχει πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἑπομένων ὡς ἓν ἡγούμενον πρὸς ἓν ἑπόμενον. Καθότι ἔςω $A : B :: \Gamma : \Delta$, τότε καὶ ἐναλλὰξ $A : \Gamma :: B : \Delta$, καὶ διαιρέσει $A - \Gamma : \Gamma :: B - \Delta : \Delta$, ὅθεν καὶ ἐναλλὰξ $A - \Gamma : B - \Delta :: \Gamma : \Delta$.

Πρότασις. ιη'.

Ἐὰν ὁποσαοῦν μεγέθη ἦναι ἀνάλογα, καὶ συντεθέντα ἀνάλογα θέλουσιν εἶναι.

Ἔϛω $A : B :: \Gamma : \Delta$, τότε λέγω ὅτι καὶ $A + B :$ $B :: \Gamma + \Delta : \Delta$.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A : B :: \Gamma : \Delta$, διὰ τοῦτο $A\Delta = \Gamma B$. Τώρα προςιθέμενος ἑκατέρωθεν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα: τὴν $B\Delta$, ἔξω $A\Delta + B\Delta = \Gamma B + B\Delta$, εἴτε $(A + B)\ \Delta = (\Gamma + \Delta)\ B$, καὶ ἑπομένως $A + B : B :: \Gamma + \Delta : \Delta$, ὅπερ δηλονότι καὶ σύνθεσις λόγου ὀνομάζεται (ὅρ. ιδ΄).

Ἔϛω $15 : 5 :: 12 : 4$, τότε καὶ $15 + 5 : 5 :: 12 + 4 : 4$, εἴτε $20 : 5 :: 16 : 4$.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥϛε ἂν τέσσαρα μεγέθη ἦναι μὴ ἀνάλογα, καὶ συντεθέντα δὲν θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα. Οὕτως ἂν $A : B > \Gamma : \Delta$, εἴτε $\frac{A}{B} > \frac{\Gamma}{\Delta}$, θέλει εἶναι ὡσαύτως καὶ $\frac{A + B}{B} > \frac{\Gamma + \Delta}{\Delta}$. διότι $\frac{A + B}{B} = \frac{A}{B} + 1$, καὶ $\frac{\Gamma + \Delta}{\Delta} = \frac{\Gamma}{\Delta} + 1$: ὅ ἐϛιν εἰς ἄνισα πρόσθεσις μονάδος.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κ΄. καὶ κα΄.

Ἐὰν ὁποσαοῦν μεγέθη ἦναι ἀνάλογα τεταγμένως, καὶ διΐσου τεταγμένως ἀνάλογα θέλουσιν εἶναι.

Ἔϛω $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $B : E :: \Delta : Z$, τότε λέγω ὅτι καὶ $A : E :: \Gamma : Z$. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως, $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $B : E :: \Delta : Z$, διὰ τοῦτο καὶ ἐναλλὰξ $A : \Gamma :: B : \Delta$, καὶ $B : \Delta :: E : Z$ (πρ. ιϛ΄). Ὥϛε $A : \Gamma :: E : Z$ (πρ. ια΄), καὶ ἐναλλὰξ $A : E :: \Gamma : \Delta$, ὅπερ καὶ διΐσου τεταγμένως ὀνομάζεται (ὅρ. ιθ΄).

Ἔϛω $15 : 5 :: 12 : 4$, καὶ $5 : 20 :: 4 : 16$, τότε: 15 : 20 :: 12 : 16.. ὅ ἐςιν ἂν $\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$, καὶ $\frac{5}{20} = \frac{4}{16}$, τότε καὶ $\frac{15}{20} = \frac{12}{16}$. Καθότι πολλαπλασιάζων τὰ ἴσα διὰ τῶν ἴσων, ἔξω $\frac{15}{5} \times \frac{5}{20} = \frac{12}{4} \times \frac{4}{16}$: ὅ ἐςι $\frac{15}{20} = \frac{12}{16}$.

Πρότασις. κβ'. καὶ κγ'.

Ἐὰν ὁποσοῦν μεγέθη ἦναι ἀνάλογα τεταραγμένως, καὶ διΐσου τεταραγμένως ἀνάλογα θέλουσιν εἶναι.

Ἔςω Α : Β :: Γ : Δ, καὶ Β : Ε :: Ζ : Γ, τότε λέγω ὅτι Α : Ε :: Ζ : Δ.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, Α : Β :: Γ : Δ, καὶ Β : Ε :: Ζ : Γ, διὰ τοῦτο ΑΔ = ΓΒ, καὶ ΓΒ = ΕΖ (ὅρ. ζ'.).. ὥςε ΑΔ = ΕΖ (ὅρ. α'.), ὅθεν Α : Ε :: Ζ : Δ, ὅπερ καὶ διΐσου τεταραγμένως ὀνομάζεται (ὅρ. ιθ.).

Ἔςω 15 : 5 :: 12 : 4, καὶ 5 : 30 :: 2 : 12, τότε καὶ 15 : 30 :: 2 : 4, τουτέςιν ἂν $15 \times 4 = 12 \times 5$, καὶ $12 \times 5 = 30 \times 2$, τότε καὶ $15 \times 4 = 30 \times 2$, ὥςε 15 : 30 :: 2 : 4.

Πρότασις. κε'.

Ἐὰν τέσσαρα μέγεθη ἦναι ἀναλογα, τὸ μέγιςον μετὰ τοῦ ἐλαχίςου ἔςαι μεῖζον τῶν λοιπῶν.

Ἔςω Α : Β :: Γ : Δ, ἔνθα ἔςω Α μεῖζον τοῦ Β καὶ Γ, καὶ διὰ τοῦτο Β > Δ.. ἢ ὄντος Δ < Β, ἔςω Α = 12 Β, τότε ἔςαι 12Β : Β :: 12Δ : Δ, καὶ λέγω ὅτι 12 Β + Δ > 12 Δ + Β.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, Β > Δ, ἔςαι καὶ 11 Β > 11 Δ, καὶ ἐντεῦθεν καὶ 12 Β > 11 Δ + Β, καὶ διὰ τοῦτο 12 Β + Δ > 12 Δ + Β, εἴτε ἀντικαθιςῶν τὰ ἴσα ἔξω Α + Δ > Β + Γ.