κέντρου, αἱ περὶ τὸ κέντρον αὐτῶν 15 γωνίαι θέλουσιν εἶναι $= 4 \times 90^{\circ}$ (πόρ. β΄. προ. ιγ΄. βιβ. α΄).

Σημείωσις.

Ἂν ἐγγράψω ἐν κύκλῳ πεντεκαιδεκάγωνον, καὶ δι' ἑκάστης κορυφῆς τῶν γωνιῶν ἄξω ἐφαπτομένας ἐπεκτείνων αὐτὰς ἕως οὗ νὰ συμπέσωσι, τὸ περιγραφθησόμενον σχῆμα θέλει εἶναι πεντεκαιδεκάγωνον, ὡς δηλονότι καὶ τὸ ἑξάγωνον (σημείωσις. πρ. ιε΄.).

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄. (α).

Ὅροι.

α΄. Μέρος ἢ ὑποπολλαπλάσιον λέγεται ἓν μέγεθος ἄλλου μεγέθους, ὅταν καταμετρῇ αὐτὸ ἐξηκριβωμένως. Οὕτω μία γραμμὴ τριῶν ποδῶν εἶναι μέρος καὶ

(α) Εἰς τοῦτο τὸ βιβλίον ἐκτίθησιν ὁ Εὐκλείδης τὴν ἀναλογίαν, περὶ ἧς πρὸ ἐγένετο εἰς τὴν ἀριθμητικὴν λόγος μικρός. Ἡ ἀναλογία ὅμως προσιδιάζει ὄχι μόνον εἰς τὴν γεωμετρίαν, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικήν, καὶ εἰς τὴν ἄλγεβραν, καὶ εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, καὶ ἐν γένει εἰς πᾶσαν τὴν ἁπλῆν μαθηματικὴν καὶ μικτὴν καὶ εἰς αὐτὴν τὴν πολιτικὴν ζωήν. Καὶ εἶναι ἡ ψυχὴ καὶ τὸ φῶς καὶ τῆς μαθηματικῆς, ὥστε ταύτης ἀφαιρεθείσης, ἐκείνη μένει νεκρά. Εὔδοξον τὸν διδάσκαλον τοῦ Πλάτωνος θέλουσι δὲ εὑρετὴν τούτου τοῦ οὐρανίου δώρου.

ὑποπολλαπλασία τῆς 12 ποδῶν γραμμῆς· πλὴν ὄχι καὶ τῆς 11, ἢ 13.

β'. Πολλαπλάσιον λέγεται ἓν μέγεθος ἄλλου μεγέθους, ὅταν καταμετρῆται ὑπ' ἐκείνου ἐξηκριβωμένως. Οὕτω μία γραμμὴ 12 ποδῶν εἶναι πολλαπλάσιον τῆς 3 ποδῶν γραμμῆς· πλὴν ὄχι καὶ τῆς πέντε.

γ'. Τὰ δύο μεγέθη· τό τε πολλαπλάσιον καὶ ὑποπολλαπλάσιον, ὀνομάζονται σ ύ μ μ ε τ ρ α, ὡς ἔχοντα ἓν κοινὸν μέτρον· καὶ διὰ τοῦτο ἀ σ ύ μ μ ε τ ρ α, τὰ μὴ ἔχοντα κοινὸν μέτρον.

δ'. Λόγος λέγεται ἡ κατὰ πηλικότητα δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν (β) σχέσις· τουτέστι τὸ ποσάκις ἓν μέγε-

---

(β) Τὸ ποσὸν θεωρούμενον ὡς ὅλον, σύγκειται ἐκ μερῶν. Ἂν λοιπὸν τὰ μέρη αὐτοῦ ἦναι ἴσα ἀλλήλοις, τότε τὸ μὲν ὅλον ὀνομάζεται πολλαπλάσιον ὡς πρὸς τὸ ἓν αὐτοῦ μέρος, τὸ δὲ μέρος αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ ὅλον, ὑποπολλαπλάσιον, τὸ δὲ ποσάκις τὸ μέρος περιέχεται εἰς τὸ ὅλον, ἢ ποσάκις τὸ ὅλον περιέχει τὸ μέρος, λόγος. Οὕτως ὄντος τοῦ $12 = 4 + 4 + 4$, ἐγὼ ἐκτίθημι αὐτὸ οὕτως $\frac{12}{3}$, ἔνθα τὸ μὲν 12 λέγεται πολλαπλάσιον τοῦ 3, τὸ δὲ 3 ὑποπολλαπλάσιον τοῦ 12, καὶ λόγος τὸ $\frac{12}{3}$. οὗτινος ἐναντίον εἶναι τὸ $\frac{3}{12}$·. ἔνθα εἰς μὲν τὸ $\frac{12}{3}$ θεωροῦμεν ὁποῖον ὅλον εἶναι τὸ 12 τοῦ 3, εἰς δὲ τὸ $\frac{3}{12}$, ὁποῖον μέρος τὸ 3 τοῦ 12. Δῆλον ὅμως ὅτι ὑπὸ τοῦ 12 ἀριθμοῦ ἐγὼ δύναμαι νὰ ἐννοῶ καὶ χρόνον, καὶ γραμμήν, καὶ ἐπιφάνειαν, καὶ σῶμα. Πλὴν εἶμαι βεβιασμένος νὰ ἐκλάβω ὡσαύτως καὶ τὸ 3 τοῦ αὐτοῦ εἴδους δηλονότι· τουτέστι χρόνου ἢ γραμμῆς, ἢ κτξ., καί μοι εἶναι ἀδύνατον νὰ εἰπῶ 12 ὧραι χρόνος περιέχει 3 ποδῶν μῆκος, τετράκις, ὡς ὄντος τούτου λήρου σαφοῦς. Καθότι καθὼς ἐγὼ δὲν δύναμαι ποτὲ θος περιέχει, ἢ περιέχεται ὑπ᾽ ἄλλου μεγέθους, καὶ διὰ τοῦτο πᾶς λόγος ἀπαιτεῖ δύο ὅρους, ἐξ ὧν ὁ μὲν πρῶτος ὀνομάζεται ἡγούμενον, ὁ δὲ δεύτερος, ἑπόμενον. Οὕτως εἰς τὸ 12 : 3 τῶν 12 περιεχόντων τὰ 3 τετράκις, ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι 4, καὶ εἰς τὸ 3 : 12 εἶναι $= \frac{1}{4}$, καὶ εἰς τὸ 3 : 3 εἶναι $= 1$.

ε΄. Ἂν τὰ δύο μεγέθη τοῦ λόγου εἶναι σύμμετρα, ὁ λόγος αὐτῶν λέγεται λογικὸς ἢ ῥητὸς, εἰ δ᾽ ἀσύμμετρα, ἄλογος ἢ ἄῤῥητος. Οὕτως ὁ μὲν λόγος τοῦ 2 : 1 εἶναι ῥητὸς, ὁ δὲ τοῦ $\sqrt{2} : 1$ ἄῤῥητος.

ϛ΄. Ἀνάλογα ἢ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ λέγονται τέσσαρα μεγέθη, ὅταν ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τοῦ τρίτου πρὸς τὸ τέταρτον. Οὕτως ἐπειδὴ 15 : 5, ὡς 12 : 4, διὰ τοῦτο 15, 5, 12, 4 εἶναι ἀνάλογα ἢ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ.

ζ΄. Ἀναλογία λέγεται ἡ ἐξίσωσις δύο λόγων. Οὕτως ἐπειδὴ $\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$, διὰ τοῦτο 15 : 5 :: 12 : 4 ὀνομάζεται ἀναλογία. καὶ ἐν γένει ἂν $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$, ἔσται καὶ A : B :: α : β (ἀριθμ. 129).

η΄. Εἰς τὰ μὴ ἀνάλογα μεγέθη ὁ λόγος εἶναι μείζων λόγου, καὶ ὅταν τὸ ἡγούμενον ὑπερέχῃ μᾶλλον τὸ ἑπόμενον, καὶ ὅταν περιέχηται ἧττον εἰς αὐτὸ, ἢ εἰς τὸν δεύτερον λόγον. Οὕτως $12 : 3 > 12 : 4$, καὶ $4 : 12 > 3 : 12$, διότι τὸ μὲν $\frac{12}{3} > \frac{12}{4}$, τὸ δὲ $\frac{4}{12} > \frac{3}{12}$.

νὰ κάμω ἐξίσωσιν εἰς δύο ἑτεροειδῆ ποσά; δὲν δύναμαι. φέρε εἰπεῖν, νὰ εἰπῶ γραμμὴ 12 ποδῶν εἶναι ἴση μὲ ἐπιφάνειαν 12 ποδῶν, ἢ μὲ 12 ποδῶν σῶμα, οὕτω ἀδυνατῶ ἁπλῶς νὰ παραβάλω δύο ἑτεροειδῆ ποσά.

θ'. Ἂν εἰς τὰ ἀνάλογα τὸ ἑπόμενον τοῦ πρώτου λόγου ἦναι καὶ ἡγούμενον τοῦ δευτέρου, ἡ ἀναλογία ὀνομάζεται συνεχής, εἰδὲ μή, διακεκριμένη. Οὕτως ∺ $2^4 : 2^3 : 2^2 : 2$, ἢ ἐν γένει $:: \alpha^4 : \alpha^3 : \alpha^2 : \alpha$ εἶναι ἀναλογία συνεχής.

ι'. Εἰς τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν τὸ πρῶτον μέγεθος ἔχει πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον, ἢ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα ἢ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Οὕτως εἰς τὴν ἀναλογίαν ∺ $2^4 : 2^3 : 2^2 : 2$, ὁ λόγος $\frac{2^4}{2^2}$ εἶναι διπλασίων τοῦ λόγου $\frac{2^4}{2^3}$: τουτέστι τετράγωνον. καὶ ὁ λόγος $\frac{2^4}{2}$ εἶναι τριπλασίων τοῦ λόγου $\frac{2^4}{2^3}$: τουτέστι κύβος.

ια'. Εἰς μίαν ἀναλογίαν ὁμόλογα μεγέθη λέγονται τὰ ἡγούμενα πρὸς ἄλληλα, ὡσαύτως καὶ ἑπόμενα. Οὕτως ἂν $A : B :: \alpha : \beta$, τὰ A, α λέγονται ὁμόλογα, ὡσαύτως καὶ τὰ B, β.

ιβ'. Ἐναλλὰξ λόγος λέγεται, ὅταν τις ἐκ μιᾶς ἀναλογίας κάμῃ τὰ μὲν δύο ἡγούμενα πρῶτον λόγον, δεύτερον δὲ τὰ ἑπόμενα. Οὕτως οὔσης τῆς ἀναλογίας $15 : 5 :: 12 : 4$, $\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$, ἐναλλὰξ λόγος λέγεται τὸ $15 : 12 :: 5 : 4$, ἢ $\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$.

ιγ'. Ἀνάπαλιν λόγος λέγεται, ὅταν τις ἐκ μιᾶς ἀναλογίας κάμῃ τὰ ἑπόμενα ἡγούμενα. Οὕτως οὔσης τῆς ἀναλογίας $15 : 5 :: 12 : 4$, $\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$, ἀνάπαλιν λόγος λέγεται τὸ $5 : 15 :: 4 : 12$, ἢ $\frac{5}{15} = \frac{4}{12}$.

ιδ'. Σύνθεσις λόγου λέγεται, ὅταν ἐκ μιᾶς ἀναλογίας κάμῃ τις ἡγούμενον τὸ κεφάλαιον τοῦ ἡγουμένου καὶ ἑπομένου. Οὕτως οὔσης τῆς ἀναλογίας 15 : 5 :: 12 : 4, σύνθεσις λόγου λέγεται τὸ 15 + 5 : 5 :: 12 + 4 : 4 ; εἴτε 20 : 5 :: 16 : 4, ἢ $\frac{20}{5} = \frac{16}{4}$.

ιε΄. Διαίρεσις λόγου λέγεται, ὅταν ἐκ μιᾶς ἀναλογίας κάμῃ τις ἡγούμενον τὴν διαφορὰν τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἑπόμενον. Οὕτως οὔσης τῆς ἀναλογίας 15 : 5 :: 12 : 4, ἢ $\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$, διαίρεσις λόγου λέγεται τὸ 15 — 5 : 5 :: 12 — 4 : 4, εἴτε 10 : 5 :: 8 : 4, ἢ $\frac{10}{5} = \frac{8}{4}$.

ις΄. Ἀναστροφὴ λόγου λέγεται, ὅταν ἐκ μιᾶς ἀναλογίας κάμῃ τις ἑπόμενον τὴν διαφορὰν τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἑπόμενον. Οὕτως οὔσης τῆς ἀναλογίας 15 : 5 :: 12 : 4, ἀναστροφὴ λόγου λέγεται τὸ 15 : 15 — 5 :: 12 : 12 — 4, εἴτε 15 : 10 :: 12 : 8, ἢ $\frac{15}{10} = \frac{12}{8}$.

ιζ΄. Τεταγμένη ἀναλογία λέγεται, ὅταν οἱ ὁμόλογοι ὅροι μιᾶς ἀναλογίας γένωσιν ὁμόλογοι μιᾶς ἄλλης μετὰ διαφορετικῶν ἑπομένων : ὅ ἐστιν ὅταν οἱ ἀριθμηταὶ ἢ παρονομασταὶ δύο ἴσων κλασμάτων γένωσιν παρονομασταὶ ἢ ἀριθμηταὶ ἄλλων δύο ἴσων κλασμάτων. Οὕτως ἂν Α : Β :: Γ : Δ, τεταγμένη εἶναι ἤτε Α : Ε :: Γ : Ζ, καὶ ἡ Β : Ε :: Δ : Ζ : ὅ ἐστιν ἂν $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$, τεταγμένη εἶναι ἡ $\frac{Β}{Ε} = \frac{Δ}{Ζ}$.. ἢ ἂν $\frac{Β}{Α} = \frac{Δ}{Γ}$, ἡ $\frac{Ε}{Β} = \frac{Ζ}{Δ}$, εἴτε ἐπειδὴ $\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$, διὰ τοῦτο $\frac{15}{20} = \frac{12}{16}$, καὶ $\frac{20}{5} = \frac{16}{4}$ εἶναι τεταγμένη ἀναλογία.

ιη΄. Τεταραγμένη ἀναλογία λέγεται, ὅταν οἱ μὴ ὁμόλογοι ὅροι μιᾶς ἀναλογίας γένωσι μὴ ὁμόλογοι ὅροι μιᾶς ἄλλης μετὰ διαφορετικῶν μέσων. Οὕτως ἂν Α : Β :: Γ : Δ, καὶ Β : Ε :: Ζ : Γ : τουτέστι ἂν ΑΔ = ΒΓ, καὶ

$B\Gamma = EZ$, ἡ δευτέρα εἶναι τεταραγμένη ἀναλογία.. εἴτε ἐπειδὴ $15 \times 4 = 12 \times 5$, καὶ $12 \times 5 = 20 \times 3$ ἡ δευτέρα εἶναι ἀναλογία τεταραγμένη.

ιθ'. Δι᾽ἴσου λόγος λέγεται, ὅταν ἐκ δύο ἀναλογιῶν ληφθέντες δύο ἴσοι λόγοι ἐκτελέσωσι τρίτην ἀναλογίαν. Καὶ δι᾽ἴσου μὲν τεταγμένως λόγος λέγεται, ὅταν οἱ μὲν δύο ὁμόλογοι ὅροι τῆς πρώτης ἀναλογίας γεννῶσιν ὁμόλογοι τῆς τρίτης, οἱ δὲ ὁμόλογοι τῆς δευτέρας δεύτεροι ὁμόλογοι.. δι᾽ἴσου δὲ τεταραγμένως λόγος λέγεται, ὅταν οἱ δύο ὅροι τῆς πρώτης σχῶσιν ἀντιπεπονθότως πρὸς τοὺς δύο ὅρους τῆς δευτέρας. Οὕτως ἂν $A:B::\Gamma:\Delta$, καὶ $B:E::\Delta:Z$, εἴτε ἂν $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ καὶ $\frac{B}{E} = \frac{\Delta}{Z}$, τότε $\frac{A}{E} = \frac{\Gamma}{Z}$ λέγεται λόγος δι᾽ἴσου τεταγμένως.. καὶ ἂν $A:B::\Gamma:\Delta$, καὶ $B:E::Z:\Gamma$, εἴτε $A\Delta = B\Gamma$, καὶ $B\Gamma = EZ$, τότε $A\Delta = EZ$, εἴτε $A:E::Z:\Delta$ λέγεται λόγος δι᾽ἴσου τεταραγμένως.

Π ρ ό τ α σ ι ς. α'. καὶ ιβ'. (α).

Ἐὰν ὁποσαδήποτε μεγέθη ἦναι ἀνάλογα, ἅπαντα τὰ ἡγούμενα ἔξουσι πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, ὡς ἓν ἡγούμενον πρὸς ἓν ἑπόμενον.

Ἔςω $A:B::\Gamma:\Delta::E:Z::H:\Theta$, τότε λέγω ὅτι $A+\Gamma+E+H:B+\Delta+Z+\Theta::A:B$.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἓν ἑπόμενον ἄλλο δὲν εἶναι εἰμὴ

(α) Ὁ Εὐκλείδης μεταχειρίζεται τινὰς προτάσεις διὰ τῶν πολλαπλασίων πρὸς ἀπόδειξιν ἄλλων.. ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ τοιαῦται ἀποδείξεις εὑρίσκονται περιτταί, τούτου ἕνεκεν ἑνοῦμεν πολλὰς προτάσεις, φυλάττοντες ὅμως τὴν τάξιν αὐτῶν.