Περὶ προσθέσεως τῶν κλασμάτων.

66. Ἂν λοιπὸν καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν κλασμάτων ἦναι ὁμοειδῆ τὰ δοθέντα κλάσματα, τότε θέλει κάμει τις τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν μόνον εἰς τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν χωρὶς νὰ ἐπιθέσῃ ὁλοτελῶς χεῖρα εἰς τοὺς παρονομαςὰς αὐτῶν, εἰς δὲ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν θέλει ὑποθέσει τὸν κοινὸν αὐτῶν παρονομαςήν. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ὁ παρονομαςὴς ἑνὸς κλάσματος σημαίνει οὐδὲν ἄλλο, ἢ τὸ εἶδος τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμητοῦ (50), τούτου ἕνεκεν ζητῶν τις τὸ κεφάλαιόν τινων κλασμάτων, πρέπει νὰ προσθέτῃ μόνον τὰς μονάδας τῶν ἀριθμητῶν, καὶ τελείως τῶν παρονομαςῶν. Ζητείσθω τὸ κεφάλαιον τῶν κλασμάτων $\frac{20}{40}$, $\frac{30}{40}$, $\frac{40}{40}$. Ἐγὼ λοιπὸν ἐῶν ἀνεπαφεῖς τοὺς παρονομαςὰς αὐτῶν, προςίθημι τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν μόνους: τουτέςι $20+30+40=90$, καὶ ἔχω διὰ κεφάλαιον αὐτῶν $\frac{90}{40}=2+\frac{10}{40}=2+\frac{1}{4}$; διὰ τῆς ἐπαγωγῆς δηλονότι (56). Ὥςε ἂν ὁ παρονομαςὴς αὐτῶν ἐπαρίςα μέρη γροσίου, εἴτε παράδες, τότε τὸ κεφάλαιον ἤθελεν ἐμφανίζοι 2 γρόσ. καὶ 10 παράδες. Καὶ οὕτως εἰς τὴν πρόσθεσιν τούτων τῶν κλασμάτων ἤθελεν εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡσὰν νὰ ἐπρόσθεττον μονάδας ὁλοσχερεῖς: παράδας δηλ. λέγων $20^{\pi}+30^{\pi}+40^{\pi}=2^{\gamma}\ 10^{\pi}$: ὃ ἐςὶν ὁ παρονομαςὴς 40 ἄλλο δὲν ἤθελε λέγοι, εἰμὴ ὅτι ὁ ἀριθμητὴς εἶναι παράδες.

Εἰδὲ καὶ τὰ δοθέντα κλάσματα εἶναι ἑτεροειδῆ, τότε εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀλλάξῃ τις πρῶτον τὴν ἑτερότητα αὐτῶν, ἐκτελῶν αὐτὰ ὁμοειδῆ· εἶτα τότε νὰ κάμῃ τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν. Οὕτως ἔςωσαν δοθέντα κλάσματα τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{7}$, ὧνπερ δηλονότι ζητείσθω τὸ κεφάλαιον. Τότε ἄγων αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν (63), εἴτε εἰς τὰ $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{15}{105}$ ἔχω διὰ κεφάλαιον αὐτῶν τὸ $\frac{169}{105} = 1 + \frac{64}{105}$. Ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{7}{10} + \frac{7}{15} + \frac{5}{6} = \frac{15+20+18+21+14+25}{30} = 3 + \frac{23}{30}$.

67. Ἂν ὅμως καὶ ἐζητεῖτο τὸ κεφάλαιον κλάσματος καὶ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ· ἡ μέθοδος δὲν ἤθελεν εἶναι διάφορος τῆς ἀνωτέρω. Καθότι ἐπειδὴ καὶ πᾶς ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς κλάσμα ἔχον μονάδα παρονομαςὴν (51)· τούτου ἕνεκεν καὶ ὁ δοθεὶς ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς ἤθελε μεταβληθῇ εἰς κλάσμα· καὶ οὕτω τὸ πρᾶγμα νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ ἀνωτέρω συμβεβηκὸς (64). Καθότι ζητείσθω τὸ κεφάλαιον τῶν 4 καὶ $\frac{3}{5}$ τότε ἦν ὡσὰν νὰ ἐζητεῖτο τῶν $\frac{4}{1}$, καὶ $\frac{3}{5}$.

68. Εἰδὲ καὶ ἐζητεῖτο τὸ κεφάλαιον ἀριθμῶν κλασματίων: ἀριθμῶν λέγω συγκειμένων ἐκ μερῶν ὁλοσχερῶν καὶ κλασματικῶν· τότε ἡ πρόσθεσις αὐτῶν ἤθελεν εἶναι σύνθετος ἔκτε τῶν κλασματικῶν μονάδων καὶ ἐκ τῶν ὁλοσχερῶν. Οὕτως ζητείτω τὸ κεφάλαιον τῶν 264 $\frac{2}{3}$ 353 $\frac{4}{5}$, 678 $\frac{1}{7}$.

Ἐκτελῶ τὰ κλασματικὰ αὐτῶν μέρη ὁμοειδῆ: ὅθεν μεταμορφῶ αὐτοὺς εἰς τοὺς 264 $\frac{70}{105}$, 353 $\frac{84}{105}$, 678 $\frac{15}{105}$. τάττω αὐτοὺς ὡς ὁρᾶται κατὰ στήλην· καὶ ἔχω διὰ κεφάλαιον αὐτῶν

264 $\frac{70}{105}$
353 $\frac{84}{105}$

τῶν μὲν κλασματικῶν $= 1\frac{64}{105}$, τῶν δὲ ὁλοσχερῶν $= 1295$, ὅθεν ἀμφοτέρων $= 1296 + \frac{64}{105}$.

$$\begin{array}{r} 678\ \frac{15}{105} \\ \hline 1266 + \frac{64}{105} \end{array}$$

69. Ἂν ὅμως καὶ τὰ κλασματικὰ μέρη τῶν κλασματιῶν ἀριθμῶν ἦναι μονάδες ἐκ συνθήκης (58): ὃ ἐςὶ μεθερμηνευόμενον ἂν ἦναι ἐκ φύσεως αὐτῶν ὁμοειδῆ· τότε εἶναι οὐδεμία χρεία μεταμορφώσεως εἰς αὐτὰ ‹ ἀλλ᾽ εἶναι ἱκανὴ μόνη ἡ εἰς ςήλας κατάςρωσις αὐτῶν, γινομένης δηλ. τῆς προσθέσεως πρῶτον ἐκ τῶν μικρῶν μονάδων, εἶτα τῶν μειζόνων.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, τὸ κεφάλαιον τῶν $3^{η}\ 17^{ω}\ 42'\ 16''$, $9^{η}\ 13^{ω}\ 25'\ 33''$, $11^{η}\ 23^{ω}\ 17'\ 44''$.

Τάττω ἐγὼ αὐτοὺς κατὰ ςήλας.. εἶτα ἄρχομαι τῆς προσθέσεως ἐκ τῶν δευτέρων λέγων $44'' + 33'' + 16'' = 93'' = 1'\ 33''$..

$$\begin{array}{rrrr} 3^{η} & 17^{ω} & 42' & 16'' \\ 9 & 13 & 25' & 33'' \\ 11 & 23 & 17' & 44'' \\ \hline 25^{η} & 6^{ω} & 25' & 33'' \end{array}$$

καὶ γράφων εἰς τὸ κεφάλαιον τὰ 33 δεύτερα, κρατῶ ἀνὰ χεῖρας τὸ $1'$. Καὶ ἐρχόμενος εἰς τὴν ςήλην τῶν πρώτων, λέγω $1' + 17' + 25' + 42' = 85' = 1^{ω}\ 25'$.. καὶ γράφων εἰς τὸ κεφάλαιον τὰ 25 λεπτὰ, κρατῶ ἀνὰ χεῖρας τὴν $1^{ω}$. Καὶ ἐρχόμενος εἰς τὴν ςήλην τῶν ὡρῶν, λέγω $1^{ω} + 17^{ω} + 13^{ω}\ 23^{ω} = 54^{ω} = 2^{η}\ 6^{ω}$.. καὶ γράφων εἰς τὸ κεφάλαιον τὰς 6 ὥρας, κρατῶ ἀνὰ χεῖρας τὰς 2 ἡμέρας. Καὶ ἐρχόμενος εἰς τὴν ςήλην τῶν ἡμερῶν, λέγω $2^{η} + 11^{η} + 9^{η} + 3^{η} = 25^{η}$. Ὥςε γράφω εἰς τὸ κεφάλαιον $25^{η}$. Καὶ οὕτως ἔχω διὰ ζητούμενον κεφάλαιον $= 25^{η}\ 6^{ω}\ 25'\ 33''$.

Ὁμοιόν τι ἤθελον ἐκτελέσοι ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἦσαν μοῖραι μετὰ λεπτῶν, ἢ γρόσια μετὰ παράδων καὶ λεπτῶν, ὡς ὁρᾶται.

36°	25′	47″		120γρ.	32π.	2λ.
49	33	28		28	19	1
55	31	49		18	14	2
141°	31′	4″		167γρ.	26π.	2λ.

Περὶ ἀφαιρέσεως τῶν κλασμάτων.

70. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἐργασία ἐναντία τῆς προσθέσεως (25).. καὶ ἐπειδὴ ἡ πρόσθεσις τῶν κλασμάτων γίνεται οὐδέποτε εἰς κλάσματα ἑτεροειδῆ (64)· ἑπόμενον εἶναι νὰ γίνηται οὐδέποτε οὔτε ἀφαίρεσις εἰς κλάσματα ἑτεροειδῆ. Ὥςε ἂν τὸ μειωτέον καὶ τὸ ἀφαιρετέον τῶν κλασμάτων εἶναι ἑτεροειδῆ· εἶναι ἀνάγκη πᾶσα πρῶτον νὰ τὰ μεταμορφώσῃ τις εἰς ὁμοειδῆ· καὶ τότε νὰ ἐκτελέσῃ τὴν ἀφαίρεσιν. Πλὴν ὡς ἡ πρόσθεσις· οὕτω καὶ ἡ ἀφαίρεσις θέλει γένῃ εἰς μόνους τοὺς ἀριθμητὰς τῶν κλασμάτων, χωρὶς νὰ τεθῇ χεῖρα εἰς τοὺς παρονομαςὰς· εἶτα εἰς τὴν διαφορὰν αὐτῶν θέλει ὑποτεθῇ ὁ κοινὸς αὐτῶν παρονομαςής.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ διαφορὰ τῶν κλασμάτων $\frac{30}{40}$, $\frac{20}{40}$. Εἶναι οἴκοθεν σαφὲς ὅτι αὕτη εἶναι $=\frac{10}{40}$: ὃ ἐςὶ $\frac{30}{40}-\frac{20}{40}=\frac{10}{40}$. Καθότι ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ μετὰ τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι ἴση μὲ τὸν μειωτέον, (26)· τούτου ἕνεκεν ἐκτελῶν τὴν ἀπόπειραν, εὑρίσκω τὸν μειωτέον $\frac{30}{40}$..

ὃ ἐςὶ $\frac{10}{40}+\frac{20}{40}=\frac{30}{40}$. Ὥςε ἂν ἡ πρώτη μονὰς ἦν γρόσιον, αἱ δεύτεραι ἤθελον εἶναι παράδες, καὶ οὕτω $30^{\pi}-20=10^{\pi}$, καὶ διὰ τοῦτο καὶ $10^{\pi}+20^{\pi}=30_{\pi}$.

Εἰ δὲ καὶ τὰ δοθέντα κλάσματα εἶναι ἑτεροειδῆ, ὡς τὰ $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, φέρε εἰπεῖν, τότε εἶναι ἀνάγκη νὰ μεταμορφώσῃ τις αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμοειδῆ, ὡς εἰς τὰ $\frac{12}{15}$, $\frac{10}{15}$ δηλ., εἶτα νὰ ἐκτελέσῃ τὴν ἀφαίρεσιν. Καὶ οὕτως ἔξει $\frac{12}{15}-\frac{10}{15}=\frac{2}{15}$.. ἐκ τοῦ διότι $\frac{2}{15}+\frac{10}{15}=\frac{12}{15}$. Ὡσαύτως καὶ ἂν ἦσαν δεδομένα ταῦτα $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}-\frac{5}{12}$, ἤθελε τὰ μεταβάλοι τις εἰς τὰ ἑξῆς: $\frac{60+80+84+56+100-45-30-50}{120}=\frac{327}{120}=2+\frac{29}{40}$.

71. Ἂν ὅμως καὶ θάτερον τῶν κλασμάτων ἦναι ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς, τότε εἶναι ἀνάγκη νὰ δώσῃ τις εἰς αὐτὸν πρῶτον μορφὴν κλάσματος, εἶτα νὰ κάμῃ ἀφαίρεσιν. Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ ἀφαίρεσις τῶν $\frac{4}{5}$ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 3. Πολλαπλασιάζω αὐτὸν διὰ τῆς μονάδος $\frac{5}{5}=1$, καὶ ἔχω $\frac{15}{5}$: ὅπερ δηλ. ἀνήχθη εἰς τὸ ἀνωτέρω. (68).

Εἰ δὲ καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἦν κλασματίου ἀπὸ κλασματίου, τότε εἰ μὲν καὶ τὰ κλασματώδη αὐτῶν μέρη εἶναι ὁμοειδῆ, ὡς τῶν $264\frac{70}{105}$, $678\frac{15}{105}$, θέλει εἶναι οὐδεμία ἀνάγκη μεταμορφώσεως εἰς αὐτὰ, ἀλλ' εὐθὺς θέλω κάμει ἀρχὴν τῆς ἀφαιρέσεως. Πλὴν ἐπειδὴ καὶ τὰ $\frac{70}{105}$ δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῶν $\frac{15}{105}$, τούτου ἕνεκεν δανείζομαι ἀπὸ τῶν 8 μίαν μονάδα, ἥτις εἶναι $=$

$$\begin{array}{r} 678\frac{15}{105} \\ 264\frac{70}{105} \\ \hline 413\frac{50}{105} \end{array}$$

$\frac{105}{105}$ ‹ καὶ οὕτως ἔχω διὰ μειωτέον $677\frac{120}{150}$, ἐξ οὗ ἐκτελῶν τὴν ἀφαίρεσιν, ἔχω διαφορὰν $413 + \frac{5}{105} = 413 + \frac{1}{21}$.

Ἂν ὅμως καὶ τὰ κλασματώδη μέρη τῶν κλασματίων ἦναι ἑτεροειδῆ ‹ τότε εἶναι ἀνάγκη πρῶτον μεταμορφώσεως εἰς αὐτά, εἶτα νὰ ἐκτελέσῃ τις τὴν ἀφαίρεσιν. Ἂν, φέρε εἰπεῖν, καὶ ἐζητεῖτο ἡ ἀφαίρεσις τῶν $264\frac{2}{3}$ ἀπὸ τῶν $678\frac{1}{7}$ ‹ τότε μεταμορφῶν αὐτοὺς εἰς τοὺς $264\frac{14}{21}$, $678\frac{3}{21}$, ἐκτελῶ τὴν ἀφαίρεσιν.

72. Ὅμοιόν τι ἤθελεν ἀκολουθήσει, καὶ ἂν αἱ μονάδες τῶν κλασματωδῶν μερῶν τῶν κλασματίων εἶναι ὡρισμέναι.. πλὴν πρέπει νὰ ἀρχίσῃ τις τῆς ἀφαιρέσεως ἐκ τῶν μονάδων τῶν κατωτέρω μονάδων.. καὶ ἂν μὲν ἡ ἀφαίρεσις ἦναι δυνατή, καλῶς ‹ ἀλλέως νὰ δανεισθῇ μίαν μονάδα ἐκ τοῦ ἐγγὺς χαρακτῆρος, καὶ οὕτω νὰ ἐκτελέσῃ τὴν ἀφαίρεσιν.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ ἀφαίρεσις τοῦ κλασματίου $3^{\eta}\ 17^{\omega}\ 42'\ 16''$ ἀπὸ τοῦ $25^{\eta}\ 6^{\omega}\ 25'\ 33''$. Τάττω αὐτοὺς ὡς εἰς τὴν πρόσθεσιν, καὶ ἄρχομαι τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τῶν δευτέρων.. καὶ ἐπειδὴ τὰ

$$\begin{array}{rrrr} 25^{\eta} & 6^{\omega} & 25' & 33'' \\ 3 & 17 & 42 & 16 \\ \hline 21^{\eta} & 12^{\omega} & 30' & 17'' \end{array}$$

$42'$ δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῶν $25'$ ‹ δανείζομαι μίαν μονάδα ἀπὸ τῶν 6^{ω}, εἴτε $60'$ ‹ καὶ ἔχω $66'$.. ὁμοιόντε ἐκτελῶ καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ὡρῶν. Καὶ οὕτως ἔχω διαφορὰν $= 21^{\eta}\ 12^{\omega}\ 33'\ 17''$, ὅπερ ἀποδεικνύεται διὰ τῆς προσθέσεως τῆς διαφορᾶς μετὰ τοῦ ἀφαιρετέου.

Ὁμοιόν τι ἤθελεν ἐκτελέσοι τις, καὶ ἂν οἱ κλασματίαι ἦσαν μοῖραι μετὰ λεπτῶν, ἢ λέγαι μετὰ ὀργυιῶν, ἢ γρόσια μετὰ παράδων κ. τ. ξ. ‹ φθάνει μόνον νὰ γινώσκῃ τις πόσας μονάδας ταπεινὰς κάμνει μία μονὰς ὑψηλὴ (60).

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων.

73. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα εἶναι νὰ λάβῃ τις τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πολλαπλασιαστέου τοσάκις, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ τοσάκις, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ παρονομαστὴς τούτου: ὃ ἐστὶ νὰ κάμῃ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, ἀριθμητὴν, καὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν, παρονομαστὴν αὐτοῦ.

Ἂν, φέρε εἰπεῖν, ζητηθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν $\frac{4}{5}$ ἐπὶ τὰ $\frac{2}{3}$, τότε πολλαπλασιάζων τὰ μὲν 4 ἐπὶ τὰ 2, ἔξω 8 δὶ ἀριθμητὴν τοῦ γινομένου, τὰ δὲ 5 ἐπὶ τὰ 3, ἔξω 15 διὰ παρονομαστὴν αὐτοῦ, εἴτε $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$. Καθότι ἂν ἦν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς, ὁ πολλαπλασιασμὸς ἤθελεν εἶναι ὅμοιος μὲ τὸν τῶν ὁλοσχερῶν. Οὕτω $\frac{4}{5} \times 2 = \frac{8}{5}$, καὶ $\frac{4}{5} \times 5 = 4$: ὅ ἐστι πρέπει νὰ λάβῃ τις τὸ κλάσμα τοσάκις, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ ὁλοσχερὴς πολλαπλασιαστὴς, εἴτε $\frac{4}{5} \times 5 = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{20}{5} = 4$. Ἀλλὰ καὶ $\frac{4}{5} \times 5 = \frac{4}{\frac{5}{5}} = \frac{4}{5:5}$

Ὥστε πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπ' ὁλοσχεροῦς εἶναι ὅ,τε πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ ἡ διαίρεσις τοῦ παρονομαςοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. Ὥςε, ὡς ὁρᾶται, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων ἐκτελοῦνται ταυτοχρόνως δύο ἐργασίαι: πολλαπλασιασμὸς δηλ. καὶ διαίρεσις: πολλαπλασιασμὸς λέγω τῶν ἀριθμητῶν, καὶ διαίρεσις τοῦ ἐξ αὐτῶν γινομένου διὰ τοῦ γινομένου τῶν παρονομαςῶν· καὶ δικαίως.

Καθότι τὸ νὰ πολλαπλασιάσῃ τις τὰ $\frac{4}{5}$ διὰ τῶν $\frac{2}{3}$ δὲν θέλει νὰ εἰπῇ νὰ λάβῃ τὰ $\frac{4}{5}$ δὶς, ἀλλέως τοῦτο ἤθελεν εἶναι πολλαπλασιασμὸς τῶν $\frac{4}{5}$ διὰ μόνου τοῦ 2, εἴτε $= \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$· ἀλλὰ νὰ τὰ λάβῃ δὶς τριτῶς, ὅπερ δηλονότι ἐκτελεῖται καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τῶν παρονομαςῶν. Ὡς ὅμως εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ὁλοσχερῶν· οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἔχει χώραν ὁ γενικὸς νόμος (ἐναντίως ὅμως) (29): τουτέςι τὸ γινόμενον περιέχεται εἰς θάτερον τῶν παραγόντων· ὡς ὁ ἕτερος αὐτῶν εἰς τὴν μονάδα. Οὕτως ἐπειδὴ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$· τούτου ἕνεκεν τὸ $\frac{1}{8}$ περιέχεται εἰς τὸ $\frac{1}{4}$, ὡς τὸ $\frac{1}{2}$ εἰς τὸ 1. Ὁμοιόντι ἤθελεν ἀκολουθήσοι, καὶ ἂν ὁ εἷς τῶν δοθέντων κλασμάτων ἦν ὁλοσχερής. Ἔςω, φέρε εἰπεῖν, 4 καὶ $\frac{1}{2}$ οἱ δοθέντες ἀριθμοί· τότε $4 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$, ἔνθα δηλ. τὰ 2 περιέχονται εἰς τὰ 4, ὡς τὸ $\frac{1}{2}$ εἰς τὸ 1.

74. Ἀλλόκοτον βέβαια πρᾶγμα θεωρεῖται ἐνταῦθα: εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν λέγω τῶν κλασμάτων. Καθότι ἡμεῖς ἐμάθομεν (29) ὅτι πολλαπλασιασμὸς ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ γένεσις ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ τοῦ πολλάκις λαμβάνεσθαι ἕνα δοθέντα ἀριθμὸν· καὶ ἐδῶ βλέπομεν ὅτι ἀ-

κολουθεῖ ὅλον τὸ ἐναντίον: ὅ ἐςιν ὁ γενόμενος ἀριθμὸς, ἕνεκα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ δοθέντος, εἶναι ἐλάσσων ἑκατέρου τῶν παραγόντων: τὸ $\frac{1}{8}$ λέγω, ὅπερ γεννᾶται ἐκ τοῦ $\frac{1}{2}$ ἐπὶ τὸ $\frac{1}{4}$, εἶναι ἔλασσον καὶ τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ τοῦ $\frac{1}{4}$. Ἀλλ' ὡς φαίνεται ἓν τοιοῦτον ἔπρεπεν ἐξ ἀνάγκης νὰ ἐπακολουθήσῃ ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῶν κλασμάτων. Καθότι ἐνταῦθα πολλαπλασιάζονται ἀριθμοὶ ὄχι ὁλοσχερεῖς, ἀλλ' ἐλάσσονες μονάδος. Ὅθεν πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα ἄλλο δὲν εἶναι πραγματικῶς, εἰμὴ διαίρεσις ποσότητος.

Καθότι τὸ νὰ πολλαπλασιάσῃ τις ἕνα ἀριθμὸν ἐπ' ἄλλον, τὰ 10 φέρε εἰπεῖν ἐπὶ τὰ 2, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ, νὰ τὸν λάβῃ δὶς, ὅθεν $10 \times 2 = 10 + 10$. Καὶ τὸ νὰ πολλαπλασιάσῃ τὰ 10 ἐπὶ τὸ 1, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ τὰ λάβῃ ἅπαξ, ὅθεν $10 \times 1 = 10$. Ὥςε τὸ νὰ πολλαπλασιάσῃ τις τὰ 10 ὄχι ἐπὶ τὴν μονάδα, ἀλλ' ἐπ' ἐλάσσονα αὐτῆς, τοῦτο μὲ ἄλλους λόγους θέλει νὰ εἰπῇ νὰ μὴν τὸν λάβῃ ὁλοσχερῶς, ἀλλὰ μέρος αὐτοῦ: ὅ ἐςι μεθερμηνευόμενον νὰ τὸν διαιρέσῃ. Ὥςε ἕπεται ἐντεῦθεν ὅσον σμικρὸς ἤθελεν εἶναι ὁ πολλαπλασιαςὴς ὡς πρὸς τὸν παρονομαςὴν τοῦ πολλαπλασιαςέου, τοσοῦτον καὶ τὸ γινόμενον.. καὶ τούτου ἕνεκεν τὸ $10 \times \frac{1}{2} > 10 \times \frac{1}{10} > 10 \times \frac{1}{10} > 10 \times \frac{1}{1000}$, κ. τ. ξ. $= 5 > 1 > \frac{1}{10} > \frac{1}{100}$ κ. τ. ξ.

75. Ἂν ὅμως τὰ δοθέντα κλάσματα ἦναι ἀριθμοὶ κλασματίαι, τότε πρέπει νὰ ἐκτελῇ τις αὐτοὺς πρῶτον ἐντελῶς κλάσματα, εἶτα νὰ ποιῇ τὸν πολλαπλασιασμόν.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν $3\frac{2}{9}$ ἐπὶ τὰ $7\ \frac{1}{3}$. Τώρα ἐπειδὴ $3\ \frac{2}{9} = \frac{29}{9}$, καὶ $7\ \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$ ⸱ τούτου ἕνεκεν καὶ ἐγὼ ἔχω $\frac{29}{9} \times \frac{22}{3} = \frac{638}{27} = 23\ \frac{17}{27}$. Ὡσαύτως καὶ τὰ $10\frac{3}{100} \times 15\ \frac{1}{10} = \frac{1003}{100} \times \frac{151}{10} = \frac{151453}{1000} = 151 + \frac{453}{1000}$.

Πλὴν πολλάκις ἤθελεν εἶναι συντομωτέρα ἡ ὁδὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασματιῶν ἡ μὴ μεταμόρφωσις αὐτῶν εἰς κλάσματα ⸱ ἀλλ᾿ ὁ ἀνὰ μέρος αὐτῶν πολλαπλασιασμός. Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, $3406\ \frac{2}{3}$ ὀκάδες σηρικοῦ νήματος πρὸς $56\ \frac{3}{4}$ γρ. πόσα γρόσια κάμνουσιν;

Ἐνταῦθα λοιπὸν ἐγὼ μεταμορφῶ τελείως τοὺς δοθέντας κλασματίας εἰς ἐντελῆ κλάσματα ⸱ ἀλλ᾿ ἀμέσως πολλαπλασιάζω τὸν πολλαπλασιαςέον διὰ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ ⸱ πλὴν ἀνὰ μέρος: ὅ ἐςιν α΄. τὰ ὁλοσχερῆ αὐτῶν μέρη, εἴτε τὰ 3406×56.. β΄. τὰ κλασματώδη αὐτῶν μέρη ἐπὶ τὰ ὁλοσχερῆ, εἴτε τά τε $3406 \times \frac{3}{4}$, καὶ τὰ $\frac{2}{3} \times 56$.. καὶ γ΄. τὰ κλασματώδη αὐτῶν πρὸς ἄλληλα μέρη, εἴτε τὰ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$.

$$\begin{array}{rl}
3406 & \frac{2}{3} \\
56 & \frac{3}{4} \\
\hline
20436 & \\
17030 & \\
37 & \frac{1}{3} \\
2554 & \frac{1}{2} \\
 & \frac{1}{2} \\
\hline
193328 & \frac{1}{3}
\end{array}$$

Καὶ οὕτως ἐπισυνάπτων αὐτῶν τὰ μερικὰ γινόμενα, ἔξω διὰ γενικὸν γινόμενον $= 193328\ \frac{1}{3}$.

76. Ἂν ὅμως τὰ κλασματικὰ μέρη τῶν κλασματιῶν ἀριθμῶν ἦναι μονάδες, ἐκ συνθήκης διωρισμέναι (60) ⸱ τότε ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν πρέπει νὰ γίνηται κατὰ τὴν δευτέραν σημασίαν τῶν κλασμάτων (54).

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, 34 ὀκάδες καὶ 13 δραχμαὶ νῆμα σηρικὸν, πρὸς 57 γρο. καὶ 14 παράδες, πόσα γρόσια κάμνουσιν;

Ἐν πρώτοις λοιπὸν πολλαπλασιάζω τὰ 57 ἐπὶ τὸ 34 · καὶ τὸ γινόμενον εἶναι γρόσια καὶ μηδὲν παράδες.

β΄. Ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσω τὰς $34^{\text{οκ}}$ ἐπὶ τὰ $14^{\text{παρ}}$, εἴτε ἐπὶ τὰ $\frac{14}{40}$ γρόσια, ἐγὼ βλέπω ὅτι $\frac{14}{40} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10}$ · ὅθεν λαμβάνω ἐκ τῶν 34 τὸ $\frac{1}{4}$ πρῶτον, τουτέςι $8^{\text{γρ}}$ καὶ $20^{\text{πρ}}$, ἅπερ δηλονότι καὶ τὰ γράφω · εἶτα τὸ $\frac{1}{10}$, εἴτε $3^{\text{γρ}}$ καὶ $16^{\text{πρ}}$, ἅπερ δηλονότι τὰ γράφω.

$57^{\text{γρ}}$	$14^{\text{πρ}}$
$34^{\text{οκ}}$	$13^{\text{δρ}}$
$2287^{\text{γρ}}$	$0^{\text{πρ}}$
171	
8	20
3	16
1	17
	17 $\frac{1}{10}$
	$\frac{1}{2}$
$1951^{\text{γρ}}$	$30^{\text{πρ}}$ $\frac{1}{2}$

γ΄. Ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσω τὰ $57^{\text{γρ}}$ ἐπὶ τὰς 13 δραχμὰς, τὰ πολλαπλασιάζω ἐπὶ τὰς $\frac{13}{400}$ ὀκάδ. ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{13^{\text{οκ}}}{400} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{400}\right)^{\text{οκ}}$. · τούτου ἕνεκεν λαμβάνων ἐκ τῶν 57 τὸ $\frac{1}{40}$ πρῶτον, τουτέςι $1^{\text{γρ}}$ καὶ $17^{\text{πρ}}$, ἅπερ δηλονότι καὶ τὰ γράφω · εἶτα τὰ $\frac{3}{400}$, ἢ ἐκτελῶν αὐτὰ παράδες (ἐκ τοῦ διότι $\frac{3^{\text{γρ}}}{400} = \frac{3 \times 40^{\text{παρ}}}{400} = \frac{3^{\text{παρ}}}{10}$), ἔχω $17^{\text{πρ}} \frac{1}{10}$, ἅπερ καὶ τὰ γράφω.

δ΄. Πολλαπλασιάζων $\frac{13^{\text{οκ}}}{400}$ ἐπὶ τοὺς $13^{\text{παρ}}$, μόλις ἔχω γινόμενον $\frac{1^{\text{παρ}}}{2}$ · ὥςε ἐπισυνάπτων ταῦτα πάντα τὰ μερικὰ γινόμενα, ἔχω διὰ γενικὸν $1951^{\text{γρ}}$ $30^{\text{πρ}}$ $\frac{1}{2}$.

Δῆλον ὅμως ὅτι ἐδυνάμην νὰ μεταβάλω τούτους τοὺς κλασματίας: τουτέςι τὰ 57$^{\gamma\rho}$ 14$^{\pi\rho}$, καὶ 34$^{o\kappa}$ 13$^{\delta\rho}$, εἰς 57$^{\gamma\rho}$ $\frac{14}{40}$, καὶ 34$^{o\kappa}$ $\frac{13}{400}$: ὃ ἐςιν εἰς τὸ ἀνωτέρω (73).

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λοιπὸν ἤθελον πολλαπλασιάσοι καὶ τοὺς κλασματίας τῆς ἐκτάσεως ἐπὶ νομίσματα, ἢ ἐπὶ μονάδας χρόνου, ἢ ἄλλου τινὸς (οὐδέποτε ὅμως τῆς αὐτῆς φύσεως: γρόσια, φέρε εἰπεῖν, ἐπὶ γρόσια.. ἐκ τοῦ διότι ἤθελεν εἶναι ἄλογον τὸ νὰ ζητήσῃ τις 57$^{\gamma\rho}$. ἐπὶ 34$^{\gamma\rho}$. πόσα γρόσια κάμνουσιν. Εἰς τὰ τῆς ἐκτάσεως ὅμως, καὶ μάλιςα. Καθότι ἄριςα τὶς ἐρωτᾷ 57 ὀργυιαὶ ἐπὶ τὰς 34 ὀργυιὰς, πόσας ὀργυιὰς κάμνουσι; Πλὴν τότε τὸ γινόμενον δὲν εἶναι πλέον ὁμοειδὲς μὲ τοὺς παράγοντας (ἀλλ' εἶναι ἐπιφάνεια, ὅπερ εἶναι τῆς γεωμετρίας, καὶ ὄχι τῆς ἀριθμητικῆς.

77. Εἶναι βέβαια ἄξιον σημειώσεως εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων, ὅτι πολλάκις τις λυτροῦται ἐκ τοῦ κόπου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, διὰ μόνης τῆς διαγραφῆς. Καθότι ἂν ὁ παρονομαςὴς τοῦ ἑνὸς κλάσματος ἦναι ἢ παράγων, ἢ ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἑτέρου κλάσματος (τότε ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσῃ τις τὰ κλάσματα, διαγράφων ἄνω καὶ κάτω τοὺς κοινοὺς παράγοντας, ἔξει τὸ ζητούμενον. Οὕτως ἂν ἐζητεῖτο νὰ πολλαπλασιάσῃ τις τὰ 3 ἐπὶ τὸ $\frac{1}{12}$ (τότε ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσῃ, διαιρεῖ μόνον τὸν παρονομαςὴν 12 διὰ τοῦ 3 (καὶ τὸ πηλίκον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον (ὡς ὄντος $3\times\frac{1}{12}=\frac{3\times1}{3\times4}=\frac{1}{4}$.. ὡσαύτως καὶ ἂν ἐζητεῖτο νὰ πολλαπλασιάσῃ τις $\frac{3}{13}$ ἐπὶ τὰ 13, οὗτος ἤθελε διαγράψοι ἄνω καὶ κάτω τὰ 13, ὡς ὄντος $\frac{3}{13}\times13=3$.