Ζητείσθω δεύτερον ὁ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης τοῦ $\frac{576}{1164}$ κλάσματος.

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ 12 & 18 \\ & 12 \\ 6 & 2 \\ & 12 \\ & 12 \\ & 0 \end{array}$$

Διαιρῶ τὸν μείζονα ὅρον διὰ τοῦ ἐλάσσονος: ἢ ἂν θέλῃς ἀμφοτέρους διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 576 ‹ καὶ ὁ μὲν ἀριθμητὴς μοὶ δίδει λείψανον μηδὲν ‹ ὁδὲ παρονομαςὴς 12. Ὅθεν διὰ τοῦ 12 διαιρῶ τὸν πρῶτον διαιρέτην: τὰ 576 ‹ καὶ ἔχω μηδὲν λείψανον. Ὥςε συνάγω ὅτι τὸ 12 εἶναι ὁ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης τοῦ δοθέντος κλάσματος. Καθότι $\frac{576}{1164} = \frac{576}{576 \times 2 + 12} = \frac{48 \times 12}{48 \times 2 \times 12 + 2} = \frac{48 \times 12}{(48 \times 2 + 1)\ 12} = \frac{48}{97}$. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἤθελεν εὕροι τις ὅτι $\frac{14349}{38264} = \frac{3}{8}$ καὶ ὅτι $\frac{3661}{11500} = \frac{7}{22}$.

Εἰδὲ καὶ ἦν $\frac{13}{19}$ τὸ δοθὲν κλάσμα. Τότε εἰς μὲν τὴν πρώτην διαίρεσιν ἐγὼ ἤθελον ἔχοι 6 λείψανον ‹ εἰς δὲ τὴν δευτέραν 1 ‹ ὅπερ δηλονότι ἤθελε μοὶ ἐμφανίσοι ἀμετάβλητον τὸ κλάσμα, εἰς ἁπλουςέραν ἔκθεσιν. Οὕτως ὡς ὁρᾷ τις.

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ 13 & 19 \\ & \\ & 2 \\ 6 & 13 \\ & 12 \\ & 1 \end{array}$$

59. Ταῦτα λοιπὸν τὰ κλάσματα: ἅπερ δηλονότι ἔχουσιν οὐδένα ἀριθμὸν, ἐκτὸς τῆς μονάδος, κοινὸν μέτρον, εἶναι τὰ ἀσύμμετρα λεγόμενα (54), ἅπερ καὶ *ἀνάγωγα* ἤθελον ὀνομασθῆ, ἔνθα δηλονότι πᾶς κόπος τοῦ ψηλαφίσματος ἢ ἀποπείρας ἤθελεν εἶναι μάταιος, ὅπερ βέβαια χει νὰ ἐπακλουθήσῃ πάντοτε ‹ ὅταν οἱ ὅροι ἑνὸς κλάσματος ἦναι *πρῶτοι* ἀριθμοί. Καὶ ὀνομάζονται πρῶτοι

ριθμοὶ ἐκεῖνοι «οἵτινες ἔχουσιν οὐδὲν ἄλλο κοινὸν μέτρον, [πλὴν] τὴν μονάδα *): ὅ ἐςὶν ὅσοι διαιροῦνται μόνον διὰ τῆς μονάδος καὶ δι' ἑαυτῶν. Καὶ τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἑξῆς.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 169, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, καὶ τ. ξ.

Εἰς τούτους δὲ τοὺς ἀριθμοὺς οἱ γεωμέτραι ἐκαταγίνησαν ὄχι ὀλίγον, διὰ νὰ εὕρωσι δηλ. πῶς νὰ γινώσκῃ τις ἀμέσως «ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἦναι πρῶτος, ἢ μή « πλὴν, ὡς φαίνεται, ἀπέτυχον. Ὅθεν εὐχαριςήθησαν μόνον εἰς τὸ νὰ σύνθωσι πίνακας τῶν περιττῶν ἀριθμῶν. Πλὴν εἰς τὴν τοιαύτην ζήτησιν εὗρον προβλήματα ὡραῖα περὶ αὐτῶν «καὶ τοιοῦτον εἶναι τὸ, πᾶς ἀριθμὸς πρῶτος εἶναι πηλίκον γινομένου ἐξ ἁπάντων τῶν πρὸ αὐτοῦ ἀριθμῶν θέσει μονάδος. Τὸ 5, φέρε εἰπεῖν, καταμετρεῖ ἐξηκριβωμένως τὸν ἀριθμὸν $25 = 4 \times 3 \times 2 + 1$ «καὶ ὁ ἀριθμὸς $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 + 1$ μετρεῖται ἄριςα ὑπὸ τοῦ 7.

Πολλάκις ὅμως καὶ χωρὶς νὰ ἦναι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος πρῶτοι ἐκ φύσεως, γίνονται τοιοῦτοι πρὸς ἀλλήλους, ὡς ἐκ τῆς πρὸς ἀλλήλους ἀναφορᾶς «καὶ τότε ὀνο-

---

*) Εὐκλείδης βιβλ. ζ'. ὁρισ. ια'.

μάζονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους *).. ἐκ τοῦ διότι τὸ κλάσμα εἶναι καὶ τότε οὐδαμῶς ὀλιγώτερον ἀσύμμετρον. Καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$ καὶ τ. ξ. ἅπερ δηλονότι ἀδυνατοῦσι νὰ λάβωσιν ἁπλουςέραν μορφὴν (καὶ ὁ κοινὸς αὐτῶν διαιρέτης εἶναι ἡ μονὰς μόνον. Ὅθεν ἤθελεν εἶναι πᾶς κόπος μάταιος τοῦ νὰ ζητῇ τις εἰς τὰ τοιαῦτα κλάσματα κοινὸν διαιρέτην. Ἡ μόνη δὲ μέθοδος τοῦ νὰ λάβωσι τὰ ἀσύμμετρα κλάσματα ἁπλουςέραν μορφὴν ἤθελεν εἶναι ἡ μέθοδος τῶν συνεχῶν κλασμάτων, περὶ τῶν ὁποίων θέλομεν ὁμιλήσει ἐχομένως.

60. Ὡς ὅμως αἱ μονάδες τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖςον τῆς προαιρέσεως (1) (οὕτω καὶ τῶν κλασματικῶν.. καὶ ὥςτινες ἐκείνων εἶναι ἢ ἐκ συνθήκης, ἢ ἐκ τέχνης (2) (οὕτω καὶ ἐνταῦθα. Ὅθεν καὶ ἔχομεν ταύτας τὰς ἑξῆς.

Πᾶσα περιφέρεια, ἥτις δηλ. εἶναι οὐδὲν ἄλλοτι, ἡ γραμμὴ ἀρχομένη καὶ περατουμένη εἰς ἓν σημεῖον, διαιρεῖται εἰς 360 ἴσα μέρη, ἅπερ ὀνομάζονται μοῖραι, καὶ γράφονται οὕτω 360°. Πᾶσα μοῖρα λοιπὸν διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, ἅπερ ὀνομάζονται λεπτά, καὶ γράφονται οὕτως $60'$. Πᾶν λοιπὸν λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, ἅπερ ὀνομάζονται δεύτερα, καὶ γράφονται οὕτως $60''$. Ὡσαύτως καὶ εἰς τρίτα γραφόμενα οὕτως $60'''$. Ὥςε $1^{\circ} = 60' = 3600'' = 216000'''$. Οἱ μαθηματικοὶ ὅμως τῆς Γαλλίας τὴν σήμερον διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς 100 μέρη, ἢ μοίρας, καὶ ἑκάςην μοῖραν εἰς

*) Αὐτόθι ὁρισ. ιβ.

100′, καὶ ἕκαςον λεπτὸν εἰς 100″. Ὥςε κατ᾽ αὐτοὺς $1^{\circ}=100'=10000''$.

β′. Ὁ χρόνος τῆς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐπιςοφῆς τῆς γῆς ἐπὶ τῆς ἐκλειπτικῆς, ἥτις δηλονότι εἶναι μία περιφέρεια, ὀνομάζεται ἐνιαυτὸς, ἢ ἔτος· ὁ δὲ χρόνος, ὅνπερ δαπανᾷ ἡ γῆ εἰς τὸ νὰ περιςραφῇ περὶ τὸν ἴδιον ἄξονα, ἢ ἂν θέλῃς ἅπαντα τὰ οὐράνια σώματα νὰ περιγράψωσι κύκλους περὶ τὴν γῆν, ὀνομάζεται ἡμέρα. Ἑκάςη λοιπὸν τῶν ἡμερῶν διαιρεῖται εἰς 24 ἴσα μέρη, καὶ ὀνομάζονται ὧραι. Ἑκάςη δ᾽ ὥρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, καὶ ὀνομάζονται λεπτά.. ἕκαςον λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 60 μέρη, καὶ ὀνομάζονται δεύτερα. Ὥςε τὸ μὲν ἔτος ἐκ φύσεως εἶναι $=365^{\eta}\ 5^{\omega}\ 48'\ 48''$ (ἡ δὲ $1^{\omega}=60'=3600''$) καὶ $1^{\eta}=24^{\omega}=1440'=86400''$. Οἱ μαθηματικοὶ ὅμως τῆς Γαλλίας διαιροῦσι τὴν ἡμέραν τὴν σήμερον εἰς 10 ἴσα μέρη, ὀνομάζοντες αὐτὰ ὥρας, καὶ ἑκάςην ὥραν εἰς 100 λεπτὰ, καὶ ἕκαςον λεπτὸν εἰς 100 δεύτερα. Ὥςε κατ᾽ αὐτοὺς $1^{\eta}=10^{\omega}=1000'=100000''$.

γ′. Ἡ διαίρεσις τῆς ἐκτάσεως, ἢ μήκους, εἶναι βέβαια καὶ αὐτὴ ἐκ συνθήκης (πλὴν τοσοῦτον ἄτακτος, ὥςε καὶ εἰς ἕκαςον γένος, καὶ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖςον καὶ εἰς τὸ αὐτὸ γένος εἶναι διαφορετική. Ἐπειδὴ ὅμως καὶ ἐν γένει τὰ ἐπιςημονικὰ βιβλία δέχονται τὰ μέτρα τῆς Γαλλίας (τούτου ἕνεκεν καὶ ἡμεῖς θέλομεν μεταχειριζόμεθα αὐτὰ, ἀναφέροντες τὰ λοιπὰ εἰς αὐτά. Γραμμὴ λοιπὸν τῆς Γαλλίας εἶναι ἓν μέτρον μικρὸν, οὗτινος τὸ μέγεθος θέλει τὸ μάθει τις ἐκ τῶν βαρομέτρων, ἢ θερμομέτρων, ἥτις διαιρεῖται εἰς 12 ἴσα μέρη, ἅπερ λέγονται σημεῖα. Δώδεκα λοιπὸν γραμμαὶ ποιοῦσιν ἕνα δάκτυλον.. καὶ 12 δάκτυλοι, ἕνα πόδα.. καὶ 6 πόδες μίαν ὀργυιάν.. καὶ 2283 ὀργυιαὶ ἐκτελοῦσι μίαν λέγαν. Ἂν ὅμως καὶ ἀναφέρωμεν τὰ ἐπὶ τῆς γηΐνης ἐπιφανείας μέτρα εἰς τὴν οὐράνιον σφαῖραν· τότε 25 λέγαι = 1° τοῦ οὐρανοῦ.

δ'. Καὶ ἡ τοῦ βάρους μονὰς δὲν εἶναι ὀλιγώτερον ἄτακτος ἐπὶ τῆς γηΐνης ἐπιφανείας. Ἡ ἡμετέρα λοιπὸν λίτρα εἶναι = 100 δραχμαῖς.. καὶ ἑκάστη δραχμὴ = 60 κόκκοις.. καὶ 400 δραχμαὶ = μιᾷ ὀκᾷ, καὶ 44 ὀκάδες = ἑνὶ καντaρίῳ. Ἡ δὲ λίτρα τοῦ Παρισίου εἶναι = 16 οὐγγίαις (ἐν ᾧ ἡ τῆς Ἰταλίας = 12).. ἑκάστη αὐτῶν = 8 δραχμαῖς.. καὶ ἑκάστη δραχμὴ = 72 κόκ = 3 δηνάρι. Ὥστε μία λίτρα = 128 δραχ. = 9216 κόκ. Καὶ εἷς ποῦς κυβικὸς νεροῦ βαρύνει λίτρας 70.

ε'. Καὶ ἡ τοῦ νομίσματος μονὰς ἔπρεπε βέβαια νὰ ἦναι, καὶ εἶναι τῷ ὄντι, μᾶλλον ἄτακτος ἐπὶ τῆς γῆς, καὶ ἔτι πλέον εἰς ἕκαστον βασίλειον ὡς ἐκ τοῦ χρόνου. Τὸ γρόσιον λοιπὸν τῆς Τουρκίας διαιρεῖται εἰς τεσσαράκοντα ἴσα μέρη, ἅπερ ὀνομάζονται παράδες, καὶ ἕκαστος παρᾶς εἰς 3 λεπτά. Τὰ δὲ χρυσᾶ αὐτῆς εἶναι μεταβλητὰ εἰς πᾶσαν στιγμήν, καὶ εἰς πάντα τόπον αὐτῆς. Τὸ δὲ φράγκον, εἴτε λίτρα τῆς Γαλλίας διαιρεῖται εἰς 20 μέρη, σολδία ὀνομαζόμενα· ἕκαστον δὲ σολδίον εἰς 12 δηνάρια.

61. Ἡμεῖς εἴπομεν (60) ὅτι ἡ μονὰς τῆς ἐκτάσεως, καὶ βάρους, καὶ νομισμάτων εἶναι διάφορος εἰς πᾶν μέρος τῆς γῆς, καὶ ἔτι εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς γῆς, ὡς ἐκ τοῦ χρόνου. Ἰδοὺ ὅμως πῶς οἱ πεπαιδευμένοι ἀναφέ-

ρουσιν αὐτὰ εἰς ἓν, εἰ καὶ μὴ ὁλόλου συμφώνως, ὡς ἤθελεν ἰδεῖτις αὐτὰ εἰς πολλοὺς συγγραφεῖς, καὶ τὰ πλέον ἐπίσημα αὐτῶν εἶναι ταῦτα.

Ποῦς τῶν παλαι Ἑλλήνων $= 11^{\delta}\ 5^{\gamma}\ \frac{1}{2}$, καὶ κατ' ἄλλους $= 11^{\delta}\ 3^{\gamma}$, καὶ κατὰ τὸν Βαρθολομὴν $= 11^{\delta}\ 4^{\gamma}$.

τῶν παλαι Ῥωμαίων . .	$= 11^{\delta}\ 1^{\gamma}\ \frac{1}{5}$, καὶ κατ' ἄλλους $= 10\ \ 10^{\gamma}\ \frac{1}{2}$.
τῶν πάλαι Ἑβραίων . .	$= 13^{\delta}\ 3^{\gamma}$.
Ἀγγλίας	$= 11^{\delta}\ 3^{\gamma}$.
Βιέννης	$= 11^{\delta}\ 8^{\gamma}\ \frac{1}{10}$.
Ἑνετίας	$= 12^{\delta}\ 8^{\gamma}$.
Κωνσαντινουπόλεως .	$= 24^{\delta}\ 5^{\gamma}$.

Εἰδὲ καὶ ἤθελεν ἀναφέροι τις ταῦτα τὰ μέτρα εἰς δεκαδικὰ, ὑποτιθεμένου δηλονότι τοῦ Γαλλικοῦ 1440 μερῶν ἕξει ᾧδέπως.

Ποῦς τῆς Γαλλίας . .	$= 1440$
τῶν Ἑλλήνων	$= 1350$
τῶν Ῥωμαίων	$= 1306$
τῶν Ἑβραίων	$= 1590$
Ἀγγλίας	$= 1351$
Βιέννης	$= 1401$
Ἑνετίας	$= 1541$
Κωνσαντινουπόλεως . .	$= 3140$

Ἰδοὺ καὶ ἡ τῶν μιλλίων διαφορὰ κατὰ τὸν Βύσχιγγ.

	εἰς ὀργυι	ἐξ αὐτῶν πόσαι. 1°	καὶ κατὰ τὸν λάνδη.
Λέγα τῆς Γαλλίας ἀςρονομικὴ =	2283	25 = 1°	
ςάδιον τῶν Ἑλλην. κοινόν, ἢ Ὀλυμπιακὸν . . . . =	$94\frac{1}{2}$	604	
ςάδιον τοῦ Πτολεμαίου, ἢ Αἰγυπτιακὸν . . . . =	114	491	
μίλιον τῶν πάλαι Ῥωμαίων. =	756	76	757,5,
μίλιον κοινὸν τῆς Ἰταλίας . =	952	60	958
μίλιον διορισθὲν τῆς Ἀγγλίας =	829	$69\frac{1}{2}$	830
λέγα θαλάσσιος τῆς Γαλλίας, καὶ Ἀγγλίας . . . . =	2855	20	
μίλιον τῆς Δανίας καὶ Σουηδίας =	5439	$10\frac{1}{2}$	
μίλιον τῆς Γερμανίας καὶ Ἱσπανίας . . . . =	3807	15	
μίλιον τῆς Τουρκίας . : =	714	80	
βέρςιον τῆς Ῥωσσίας . . =	546	$104\frac{1}{4}$	547
παρασάγγης τῆς Περσίας . =	2568	22	
γὸς τῶν Ἰνδιῶν . . . . . =	4564	$12\frac{1}{2}$	
κὸ τῶν Ἰνδιῶν, καὶ τὸ ποῦ τῆς Κίνας . . . . =	2284	25	
λὶς τῆς Κίνας . . . . . =	228	250	
μίλιον τῆς Λαπονίας . . =	1902	30	

Εἶναι ὅμως ἄξιον σημειώσεως, λέγει ὁ Πικάρδ, ὅτι τὰ ςάδια τῶν Ἑλλήνων τὰ παρὰ τοῖς συγγραφεῦσι δὲν ἔχουσι τὴν αὐτὴν σημασίαν· ἀλλ' ὅτι τὰ ὕςερον ἦσαν μείζονα. Καθότι εἰς μὲν τὸν καιρὸν τοῦ Ἀριςοτέλους ςάδια 1111 ἦσαν ἴσα μὲ μίαν μοῖραν, 700 δὲ παρὰ τοῦ Ἐρατοσθένους, ὑπὸ δὲ τοῦ Ποσειδωνίου 666, ὑπὸ δὲ τῶν ἀκολούθων αὐτοῦ 500. Τοῦ Ἐρατοσθένους ὅμως τὸ ςάδιον ἦν $=\frac{1}{8}$ τοῦ μιλίου τῶν Ῥωμαίων. Καθότι κατ' αὐτὸν ἀπὸ τῆς Ἀλεξανδρείας μέχρι τῆς Ῥόδου ἦσαν $7^{\circ}\ \frac{1}{2}$, εἴτε $\frac{1}{48}$ τῆς περιφερείας: τουτέςι 3752 ςάδια, ἔνθα κατὰ τὸν Πλίνιον τοῦτο τὸ διάςημα ἦν μιλλίων 469, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι 500 ςάδια ἦσαν μία μοῖρα. Καὶ ἂν ὁ παρασάγγης ἦν $=$ 2568 ὀργυιαῖς Γαλλικαῖς (τότε ἐπειδὴ κατὰ τὸν Ἡρώδοτον, ὁ παρασάγγης $=$ 30 ςαδίοις (διὰ τοῦτο τὸ ςάδιον εἰς καιρὸν τοῦ Ἡρωδότου ἦν $=$ 84 ὀργυιαῖς Γαλλικαῖς.

Τὸ βῆμα πάλιν τὸ Ῥωμαϊκὸν ἦν $=$ 5 ποδ. ῥωμ $=$ $4^{\pi}\ 6^{\delta}\ 5^{\gamma}$ γαλλικοῖς.. τὸ δὲ γεωμετρικὸν βῆμα εἶναι $=5^{\pi}$

62. Ἰδοὺ καὶ πῶς αἱ διάφοροι μονάδες τοῦ βάρους ἤθελον ἔλθει εἰς ἐξίσωσιν. Ἓν τάλαντον τῶν πάλαι Ἑλλήνων ἐβάρυνεν $=$ 60 μναῖς $=$ 6000 δραχμαῖς. Ὥςε μία μνᾶ ἦν $=$ 100 δραχμαῖς, καὶ ἓν τετράδραχμον $=$ 4 δραχμαῖς. Μία δραχμὴ λοιπὸν, κατὰ τὸν Βυρθολομῆν, εἶναι $=$ 79 κοκ. γαλλικοῖς (καὶ ἓν τετράδραχμον $=$ 316 κοκ. Γαλλ.. καὶ μία μνᾶ $=$ $13^{ουγ}\,5^{δρ}\ 52^{κ}$, καὶ ἓν τάλαντον $=51^{\lambda}\ 6^{ουγ}\ 7^{δρ}\ 24^{κο}$. Καὶ διὰ τοῦτο τάλαντα 100 $=5143^{\lambda}\ 3^{ουγ}\,5^{δρ}\ 24^{κο}$.

Καὶ κατὰ τὸν Γουδρὴν 100 λίτραι τοῦ Παρισίου ἰσοδυναμοῦσι μὲ λίτρας.

			δρ	οκ
τῆς Τουρκίας	- - -	154	45 $=$	38 $\frac{62}{101}$
Λονδίου	- - -	157 $\frac{03}{101}$		

Λιβόρνου	- - - -	140	$\frac{60}{101}$
Ἐνετίας	βάρος παχὺ	102	$\frac{31}{101}$
	καὶ ἐλαφρὸν	161	$\frac{64}{101}$
Βιέννης	- - - -	87	$\frac{61}{101}$
Ῥωσσίας	- - -	118	$\frac{82}{101}$

Καὶ ἐπομένως μία λίτρα τοῦ Παρισίου ἰσοδυναμεῖ μὲ $154^{\delta\rho}$ $21^{\kappa\acute{o}\kappa}$ Τουρκίας: ὃ ἐςὶ τοῦ Παρισίου δραχμαὶ $128 = 154$ δράχ. Τουρκ$+27^{\kappa\acute{o}\kappa}$. Ὥςε τοῦ Παρισίου $9144^{\kappa\acute{o}\kappa} = 9267^{\kappa\acute{o}\kappa}$ τῆς Τουρκίας, ἢ ἂν θέλῃς τοῦ Παρισίου $3048^{\kappa\acute{o}\kappa} = 3089^{\kappa o\kappa}$ τῆς Τουρκίας.

63. Οὐδαμῶς ὅμως ὀλιγώτερον εἶναι ἄτακτα, ὡς εἶναι γνώςον, καὶ αἱ μονάδες τῶν νομισμάτων.

Πλὴν ἓν τάλαντον ἀργυρίου τῶν πάλαι Ἑλλήνων $=$ 60 μναῖς $=$ 6000 δραχμαῖς $= 6000 \times 6$ ὀβολοῖς. Ὥςε μία μνᾶ ἦν $=$ 100 δραχμαῖς.. καὶ μία δραχμὴ $=$ 6 ὀβολοῖς. Κατὰ τὸν Βαρθολομῆν λοιπὸν $1^{o\beta} = 3$ σολδ. Γαλλίας.. καὶ $1^{\mu\nu} = 18^{\sigma o\lambda}$.. καὶ 4 δραχμαὶ, εἴτε ἓν τετράδραχμον $= 3$ φράγ.$+12$ σολδ.

Ὅθεν μία μνᾶ $=$ 90 φραγ.., καὶ ἓν τάλαντον $=$ 5400 φραγ., ὑποτιθεμένου δηλονότι νὰ ἔχωσι μίγμα τὰ Ἑλληνικὰ νομίσματα $\frac{1}{24}$. Καὶ ἐπειδὴ τὴν σήμερον: εἰς τοὺς 1813 λέγω, τὸ γρόσιον τῆς Τουρκίας σχεδὸν ἐξισοῦται μὲ ἓν φράγκον τῆς Γαλλίας (τούτου ἕνεκεν ἓν τάλαντον τῶν πάλαι Ἑλλήνων ἐξισοῦται ὡς ἔγγιςα μὲ 5 χιλιάδας γροσίων τῆς Τουρκίας) πλὴν μόνον σήμερον.

64. Εἶναι ὅμως βέβαια ἄξιον σημειώσεως ὅτι αἱ μονάδες τῶν κλασμάτων δὲν σημαίνουσι πάντοτε ποσότητας ἐλάσσονας τῶν ὁλοσχερῶν· ἀλλὰ καὶ πολλάκις τὸ ἐναντίον. Καὶ ἡ λέξις κλάσμα δὲν πρέπει νὰ ὑποσύρῃ τινὰ, ὥςε νὰ ςοχάζηται τὰς κλασματικὰς μονάδας ἐλάσσονας τῶν μονάδων τῶν ὁλοσχερῶν ἐν γένει, ἀλλέως ἤθελεν εἶναι ἠπατημένος. Καθότι ὡς εἶναι γνωςὸν μίλλια καὶ λέγαι εἶναι βέβαια μονάδες ὁλοσχερεῖς, καὶ ὅτι ἡ ἀπόςασις τοῦ ἡλίου ἀφ᾽ ἡμῶν = 34,000,000 λέγαις. Ἐγὼ λοιπὸν δύναμαι νὰ λάβω τὰ $\frac{3}{4}$ ταύτης τῆς ἀποςάσεως· καὶ οὕτως ἑκάςη μονὰς τούτου τοῦ κλάσματος θέλει εἶναι = 8500000 λέγαις. Ὡσαύτως ἐγὼ δύναμαι νὰ λάβω τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ Ἑλληνικοῦ ταλάντου, οὗτινος ἑκατέρα μονὰς εἶναι ἴση μὲ 1800 φράγκα τῆς Γαλλίας, ἢ ἂν θέλῃς μὲ 1800 μονάδας ὁλοσχερεῖς. Πλὴν ἂς ἔμβωμεν εἰς τὰς ἐργασίας τῶν κλασμάτων.

ΚΕΦ. Ζ΄.

Περὶ τῶν τεσσάρων ἐργασιῶν τῶν κλασμάτων.

65. Ὡς οἱ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ προςίθενται, ἀφαιροῦνται, πολλαπλασιάζονται, καὶ διαιροῦνται· οὕτω καὶ τὰ κλάσματα· ὡς ὄντων καὶ τῶν κλασμάτων ἀριθμῶν ἐλασ-

σύνων μονάδος (50), ἢ εἰδοπεποιημένων (49). Πλὴν εἶναι ἀνάγκη πρὶν νὰ ἔμβωμεν εἴς τινα τῶν ἐργασιῶν αὐτῶν, νὰ μάθωμεν πῶς γίνονται τὰ κλάσματα ὁμοειδῆ: ὅ ἐςι πῶς φέρονται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαςήν. Καθότι οὔτε προςίθενται, οὔτε ἀφαιροῦνται κλάσματα ἑτεροειδῆ, ὡς δηλονότι οὔτε ὁλοσχερεῖς ἀριθμοί (3).

Διὰ νὰ κάμῃ λοιπόν τις ὁμοειδῆ δύο κλάσματα εἶναι ἀνάγκη εἰς αὐτὸν νὰ πολλαπλασιάσῃ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος διὰ τοῦ παρονομαςοῦ τοῦ δευτέρου· εἶτα διὰ τοῦ παρονομαςοῦ τοῦ πρώτου, τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος. Οὕτω διὰ νὰ κάμω ὁμοειδῆ τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, εἴτε διὰ νὰ τὰ φέρω εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν, πολλαπλασιάζω ἄνω καὶ κάτω τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ διὰ τοῦ 5, καὶ ἔχω $\frac{2}{3}=\frac{2\times5}{3\times5}=\frac{10}{15}$ (53).. ὡσαύτως πολλαπλασιάζων ἄνω καὶ κάτω καὶ τὸ $\frac{4}{5}$ διὰ τοῦ 3, ἔχω $\frac{4}{5}=\frac{4\times3}{5\times3}=\frac{12}{15}$. Καὶ οὕτως ἐγὼ μετέβαλον τὰ δοθέντα κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ εἰς τὰ $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$, ἅπερ εἶναι καὶ ὁμοειδῆ καὶ ἰσοδύναμα μὲ τὰ δοθέντα.

Ὁμοιόν τι ἤθελεν ἐκτελέσει τις· ἂν τὰ δοθέντα κλάσματα ἦσαν πλέον τῶν δύο: τουτέςι διὰ νὰ μεταβάλῃ τις πολλὰ δοθέντα κλάσματα εἰς ὁμοειδῆ, εἶναι ἀνάγκη πρῶτον νὰ πολλαπλασιάσῃ τὸν ἀριθμητὴν ἑκάςου κλάσματος διὰ τοῦ γινομένου τῶν παρονομαςῶν τῶν λοιπῶν κλασμάτων. ἐξ οὗ ἕξει τοὺς ἀριθμητὰς ἁπάντων τῶν κλασμάτων· καὶ δεύτερον νὰ πολλαπλασιάσῃ ἅπαντας ὁμοῦ τοὺς παρονομαςὰς· καὶ οὕτως ἕξει τὸ γινόμενον αὐτῶν κοινὸν παρονομαςήν. Ἔςωσαν, φέρε εἰπεῖν, δοθέντα κλάσματα τὰ

$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{7}$. Τώρα πολλαπλασιάζω τὸν ἀριθμητὴν ἑκάστου διὰ τῶν παρονομαστῶν τῶν λοιπῶν· καὶ οὕτως ἔχω τὸ μὲν $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 7} = \frac{70}{105}$· τὸ δὲ $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3 \times 7}{3 \times 5 \times 7} = \frac{84}{105}$· καὶ τὸ $\frac{1}{7} = \frac{3 \times 5}{3 \times 5 \times 7} = \frac{15}{105}$. Ὥστε τὰ κλάσματα $\frac{70}{105}, \frac{84}{105}$, καὶ $\frac{15}{105}$ εἶναι καὶ ὁμοειδῆ καὶ ἰσοδύναμα μὲ τὰ δοθέντα. Καὶ ἂν ἦσαν $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}$· ἤθελον τὰ μεταβάλοι εἰς τὰ $\frac{56}{84}, \frac{60}{84}, \frac{63}{84}$.

Ἐνίοτε ὅμως λυτροῦται τις ἐκ τοῦ κόπου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ ἐκτελεῖ ὁμοειδῆ τὰ δοθέντα κλάσματα διὰ μόνης τῆς διαγραφῆς. Καθότι ἔστωσαν δοθέντα κλάσματα τὰ $\frac{3}{6}, \frac{2}{4}, \frac{1}{2}$. Τότε ἐπειδὴ καὶ ἐγὼ βλέπω ὅτι τὸ μὲν $\frac{3}{6} = \frac{3 \times 1}{3 \times 2}$, τὸ δὲ $\frac{2}{4} = \frac{2 \times 1}{2 \times 2}$ καὶ ἐπειδὴ $\frac{3}{3} = 1$, καὶ $\frac{2}{2} = 1$· διὰ τοῦτο διαγράφων ἄνω καὶ κάτω τὰ 3 καὶ τὰ 2, ἔξω ταῦτα τὰ τρία κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, ἅπερ δηλονότι εἶναι καὶ ὁμοειδῆ καὶ ἰσοδύναμα μὲ τὰ δοθέντα.

Ὁμοιόντι ἤθελεν ἐκτελέσοι τις, ἂν τὰ δοθέντα κλάσματα ἦσαν ταῦτα $\frac{50}{100}, \frac{6}{8}$. Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὸ μὲν $\frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, τὸ δὲ $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{3}{2 \times 2}$· τούτου ἕνεκεν ἂν πολλαπλασιάσῃ μόνον τὸ πρῶτον κλάσμα ἄνω καὶ κάτω διὰ τοῦ 2, ἔξει ὁμοειδῆ καὶ ἰσοδύναμα μὲ τὰ δοθέντα κλάσματα τὰ $\frac{2}{4}, \frac{3}{4}$.