Ὥςε ἡ ἰδέα τοῦ κλάσματος συνέχει ἐν ἑαυτῇ δύο τινα.

α'. τὸ εἶδος, ἢ μέγεθος τῶν μερῶν τῆς δοθείσης ποσότητος, ἢ μονάδος: τουτέςι πόσα ἐξ αὐτῶν πρέπει νὰ συνέλθωσι πρὸς ἐκτέλεσιν αὐτῆς· καὶ β'. τὸν ἀριθμὸν τῶν λελημμένων μερῶν, ἢ μονάδων. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν λελημμένων μερῶν λαμβάνει ὄνομα Ἀριθμητὴς, ἀπὸ τοῦ ἀριθμῶ δηλονότι· καὶ Παρονομαςὴς τὰ μέρη, ἢ μονάδες, εἰς ἅςπερ ἐδιαιρέθη ἡ δοθεῖσα ποσότης, ὡς ἐξ αὐτῶν λαμβάνοντος τὴν μορφὴν, ἢ ὄνομα τοῦ κλάσματος. Οὕτω $\frac{4}{5}$, ὅπερ ἐκφράζεται τέσσαρα πέμπτα, σημαίνει νὰ διαιρέσῃ τις μίαν ποσότητα λελημμένην ὡς μονάδα, εἰς πέντε ἴσα ἀλλήλοις μέρη, καὶ ἐξ αὐτῶν νὰ λάβῃ τὰ τέσσαρα: ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ, νὰ μὴ λάβῃ ὁλόκληρον τὴν δοθεῖσαν ποσότητα· ἀλλὰ μέρη αὐτῆς, ἔνθα δηλ. ὁ μὲν ἀριθμητὴς τούτου τοῦ κλάσματος εἶναι τὰ 4, ὁ δὲ παρονομαςὴς, τὰ 5, καὶ κοινῷ ὀνόματι πάλιν ὅ, τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαςὴς, ὀνομάζονται Ὅροι τοῦ κλάσματος. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμητὴς παντὸς κλάσματος γράφεται ἄνωθεν μιᾶς γραμμῆς· ὁ δὲ παρονομαςὴς ὑποκάτωθεν αὐτῆς, καὶ προφέρονται ὡδέπως.

$\frac{1}{2}$ – – ἥμισυ

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ – ἓν, ἢ δύο τρίτα, ἢ τριτημόρια.

$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ ἓν, ἢ δύο, ἢ τρία τέταρτα, ἢ τεταρτημόρια.

$\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ ἓν, ἢ δύο, ἢ τρία, ἢ τέσσαρα πέμπτα, ἢ πεμπτημόρια.. καὶ τ. ξ.

Ὥςε κυρίως κλάσματα ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἀριθμοὶ εἰδοπεποιημένοι, ἢ μερικοὶ, ἔχοντες δηλονότι

5 *

ἀναφορὰν, ὡς πρὸς τὴν διαίρεσιν μιᾶς ἄλλης ποσότητος. Οὕτως τὰ μὲν 20 σημαίνουσιν ἀριθμὸν ἀφηρημένον ‹ μετὰ δὲ τῆς προσθήκης παράδων σημαίνουσιν εἴκοσι μονάδας ἀργυρᾶς, ςρογγύλας, λεπτάς.. τὰ δὲ $\frac{20}{40}$ τῶν παράδων σημαίνουσι καὶ εἴκοσι παράδας, καὶ ὅτι τεσσαράκοντα ἐξ αὐτῶν ποιοῦσι μίαν ἄλλην μονάδα, ἥτις καὶ γρόσιον ὀνομάζεται. ὀνομάζονται δὲ ὁμοειδῆ, ὅσα τῶν κλασμάτων ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαςήν, ὡς τὰ $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$ ‹ καὶ ἑτεροειδῆ, τὰ μὴ, ὡς τὰ $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{6}$.

50. Ἕπονται λοιπὸν ἐντεῦθεν δύο τινά: ά. ὅτι μόνος τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος ὁ ἀριθμητὴς εἶναι, ὅςις ἀριθμεῖται, καὶ ὁ παρονομαςὴς χρησιμεύει εἰς οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ εἰς γνῶσιν τοῦ μεγέθους τῶν ἀριθμουμένων μονάδων. Οὕτω τὰ μὲν $\frac{4}{5}$ ὀνομάζονται τέσσαρα πέμπτα ‹ τὰ δὲ $\frac{4}{6}$ τέσσαρα ἕκτα παρωνόμαςαι, τὰ δὲ $\frac{4}{100}$ τέσσαρα ἑκατοςά.

β'. Ὅτι πᾶν κλάσμα εἶναι ἔλλαττον μονάδος ‹ καὶ τούτου ἕνεκεν ὠνομάσθη καὶ κλάσμα: ὃν δηλ. διατομὴ, ἢ τμῆμα ποσότητος, εἴτε ἀριθμοῦ ‹ ὅθεν καὶ ὁ ὅρος ἀριθμητὴς εἶναι πάντοτε ἐλάσσων τοῦ παρονομαςοῦ. Πάντοτε ὅμως περιέχει ἡ μονὰς τὸ κλάσμα, ὡς ὁ παρονομαςὴς τὸν ἀριθμητήν. Οὕτως τὸ 1 περιέχει τὰ $\frac{20}{40}$ ‹ ὡς 40 τὰ 20: ὅ ἐςι τὸ 1 τὸ $\frac{1}{2}$ ‹ ὡς τὰ 2 τὸ 1, ὅπερ δηλονότι εἶναι ἐναντίον τῆς διαιρέσεως τῶν ὁλοσχερῶν ‹ ὡς ἐκεῖ περιεχομένης τῆς μονάδος εἰς τὸ πηλίκον, ὡς ὁ διαιρέτης εἰς τὸν διαιρετέον (38): ὅ ἐςιν τὸ 1 περιέχεται εἰς τὰ $\frac{40}{20}$ ‹ καθὼς τὰ 20 εἰς τὰ 40.

51. Πλὴν δὲν εἶναι σπάνιον νὰ ἀπαντήσῃ τις ἐκ-

φράσεις εἰς μορφὴν κλασμάτων, ἔνθα ὁ παρονομαστὴς νὰ ἦναι ἴσος, ἢ καὶ ἐλάσσων τοῦ ἀριθμητοῦ. Ὅταν ὅμως ὁ παρονομαστὴς ἦναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμητὴν· τότε τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα. οὕτως $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{10}{10} = 1$, $\frac{99}{99} = 1$ (40), καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Εἰ δὲ καὶ ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἐλάσσων τοῦ ἀριθμητοῦ· τότε ἡ σημασία τοῦ κλάσματος εἶναι μείζων μονάδος: τουτέστιν εἶναι ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς· πλὴν ὑπὸ μορφὴν κλάσματος. Οὕτω $\frac{12}{3} = 4$, καὶ $\frac{49}{7} = 7$, καὶ $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$. Καὶ τούτου ἕνεκεν τὰ κλάσματα ἐδιαιρέθησαν εἰς δύο: εἰς *κύρια*, καὶ *καταχρηστικά*· καὶ ὠνομάσθησαν κύρια μὲν· ὅσα καὶ μορφὴν καὶ σημασίαν ἔχουσι κλασματικὴν, καταχρηστικὰ δὲ· ὅσα μόνον μορφὴν ἔχουσι κλασματικήν. *Κλασματίαι* δ' ἀριθμοὶ ὀνομάζονται, ὅσοι σύγκεινται ἐξ ὁλοσχεροῦς καὶ κλάσματος, ὡς ὁ $11\frac{1}{9}$. Ἂν ὅμως ὁ εἷς ἀριθμὸς περιέχῃ τινὰ ἅπαξ καὶ ἥμισυ, ὀνομάζεται *ἡμιόλιος*, ὡς ὁ 3 τὸν 2· οὕτως $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{6}{4}$, τὰ $\frac{9}{6}$, καὶ τὰ $\frac{12}{8}$, καὶ τ. ξ. Καὶ ἂν περιέχῃ τὸν ἕτερον $1\frac{1}{3}$, ὡς ὁ 4 τὸν 3, καὶ ὁ 12 τὸν 9, *ἐπίτριτος*· καὶ *ἐπόγδοος*, ἂν ἅπαξ $1\frac{1}{8}$, ὡς ὁ 9 τὸν 8· οὕτως $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς κλάσμα, διαιρούμενος διὰ τῆς μονάδος, χωρὶς δηλονότι νὰ ἀλλάξῃ σημασίαν. Οὕτω τὰ $\frac{3}{1} = 3$ καὶ τὰ $\frac{10}{1} = 10$, καὶ τὸ $\frac{1}{1} = 1$.

Συμπέρασμα β'. ὅτι ἂν πᾶς ἀριθμὸς διαιρούμενος δι' ἑαυτοῦ $= 1$. καὶ ἂν ὄντος καὶ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου ἀριθμοῦ · τοιοῦτον τι πρέπῃ νὰ ἦναι καὶ τὸ πηλίκον · ἡ μονὰς εἶναι ἀριθμὸς (3), ἀλλέως $\frac{10}{10}$, καὶ $\frac{100}{100}$ εἶναι μὴ ἀριθμοὶ, ἐν ᾧ τὰ $\frac{20}{10}$ καὶ τὰ $\frac{200}{100}$ διδάσιν ἀριθμόν.

Εἶτα ἂν τὸ 1 δὲν ἦναι ἀριθμὸς, τὰ δὲ 10 εἶναι, καὶ ἂν τὸ 0 δὲν ἀλλάττῃ τὴν φύσιν τῶν χαρακτήρων, εἰμὴ τὸ μέγεθος αὐτῶν (9) · πῶς – ἄραγε ἤλλαξε τὴν φύσιν τῆς μονάδος, καὶ ἐκ μὴ ἀριθμοῦ τὴν ἀπεκατέστησεν ἀριθμόν; Τὸ μηδὲν, ὡς φαίνεται, θαυματουργεῖ!

52. Ἀλλ' ἐπειδὴ, ὡς ἡμεῖς εἴδομεν (41), εἰς πᾶσαν διαίρεσιν μετὰ λειψάνου, τὸ μὲν λείψανον τίθεται ἄνωθεν μιᾶς γραμμῆς, ὁ δὲ διαιρέτης ὑποκάτω αὐτῆς · τούτου ἕνεκεν, πᾶν λείψανον μιᾶς διαιρέσεως εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκληφθῇ ὡς κλάσμα (49), ἔνθα ὁ μὲν διαιρέτης νὰ ἔχῃ τόπον δοθείσης μονάδος, καὶ διαιρεθείσης εἰς ἴσα μέρη · τὸ δὲ λείψανον τόπον τῶν ἀριθμουμένων μερῶν. Ὥστε κλάσμα ἄλλο δὲν ἤθελεν εἶναι, εἰμὴ διαίρεσίς τις, ἔνθα ὁ διαιρέτης νὰ εἶναι μείζων τοῦ διαιρετέου. Ὥστε εἰπόντες, ὅτι διαίρεσις εἶναι τὸ νὰ εὕρῃ τις, ποσάκις ὁ διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην (38), ἂν εἴπωμεν ποσάκις ὁ διαιρέτης περιέχει τὸν διαιρετέον, τοῦτο ἤθελεν εἶναι κλάσμα, ὅπου τὸ πηλίκον εἶναι ἔλασσον μονάδος.

Οὕτω τὰ μὲν $\frac{12}{3}$ εἶναι διαίρεσις · τὰ δὲ $\frac{3}{12}$ εἶναι κλάσμα, εἴτε σεσημειωμένη διαίρεσις. ἔνθα δηλονότι ἐπειδὴ καὶ τὰ 3 δὲν συνέχουσι τὰ 12 · τούτου ἕνεκεν καὶ ἐγὼ σημειῶ μόνον ταύτην τὴν διαίρεσιν, ὡς φθάσαντες εἴπομεν.

53. Ἡμεῖς μέχρι τοῦδε ἐξελάβαμεν τὰ κλάσματα,

ὡς μέρη μιᾶς μονάδος εἰς ἴσα διαιρεθείσης, καὶ λελημμένα τινὰ ἐξ αὐτῶν, ἔνθα δηλονότι ὁ μὲν παρονομαςὴς παρίςησι τὸ μέγεθος τῶν δευτέρων μονάδων, ὁ δ' ἀριθμητὴς τὸν ἀριθμὸν τῶν λελημμένων ἐξ αὐτῶν (49). Πλὴν δὲν εἶναι δύσκολον νὰ ἐκληφθῇ τὸ κλάσμα καὶ ὡς μία διαίρεσις (52), ἔνθα ὁ μὲν ἀριθμητὴς νὰ παριςᾷ ποσότητα τινὰ, ὥςε νὰ διαιρεθῇ εἰς τοσαῦτα μέρη, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ παρονομαςὴς · ὁδὲ παρονομαςὴς διαιρέτην.

Ὥςε εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ, ἢ ὁ παρονομαςὴς νὰ παριςᾷ τὸ εἶδος τῶν μονάδων, καὶ ὁ ἀριθμητὴς τὸν ἀριθμὸν, ἢ ὁ ἀριθμητὴς τὸ εἶδος τῶν μονάδων, καὶ ὁ παρονομαςὴς τὸ ποσάκις εἰσέρχεται εἰς αὐτόν. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ γροσίου, κατὰ μὲν τὴν πρώτην σημασίαν σημαίνει νὰ διαιρέσῃ τις τὸ νόμισμα γρόσιον εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, καὶ νὰ λάβῃ ἐξ αὐτῶν τὰ 3, ἅπερ $=$ 30 παρ. · κατὰ δὲ τὴν δευτέραν θέλει σημαίνει τὸν μὲν ἀριθμητὴν 3 γρόσια, τὸν δὲ παρονομαςὴν τὸ νὰ λάβῃ τις ἐξ αὐτῶν τὸ τέταρτον μέρος: ὅπερ δηλονότι εἶναι $= \frac{120}{4}$ παρ. $=$ 30 παρ. Καὶ ἑπομένως γροσίου $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ γροσίοις $= \frac{3 \times 40}{4}$ παρ. $=$ 30 παρ.. Καὶ ὀκάδ. $\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ ὀκα. $= \frac{1600}{5}$ δραμ. $=$ 320 δρ. Ὡσαύτως καὶ κανδ. $\frac{7}{8} = \frac{7}{8}$ κανδ. $= \frac{7 \times 44}{8}$ ὀκ. $= {}^{\text{ὀκ δρ}}_{38,200}$: ὃ ἐςὶ μεθερμηνευόμενον, καθ' ἑκάτερα τὸ κλάσμα ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἀναφορὰ ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν, εἴτε πηλίκον.

54. Καθότι ἂν καὶ τὸ κλάσμα ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ σεσημειωμένη διαίρεσις.. καὶ ἂν διαίρεσις δὲν ἦναι ἄλλο τι πραγματικῶς, εἰμὴ ἀναφορὰ ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν, ὅπερ καὶ πηλίκον ὀνομάζομεν (38) · ἑπόμενον εἶναι καὶ πᾶν κλάσμα νὰ μὴν ἦναι ἄλλο τι, εἰμὴ ἀναφορά τις.

Καὶ ἂν τοῦτο (ἀκόλουθον εἶναι, πολλὰ κλάσματα νὰ ἔχωσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν σημασίαν. Ὥςε $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{50}{100}$ καὶ τ. ξ. εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.. ὡσαύτως καὶ $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{50}{150}$ καὶ τ. ξ. Καθότι διαφέρει ὁλοτελῶς τὸ νὰ διαιρέσῃ τις μίαν μονάδα δίχα, καὶ νὰ λάβῃ τὸ ἓν μέρος, ἢ νὰ διαιρέσῃ αὐτὴν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, καὶ νὰ λάβῃ τὰ δύο.. ὡσαύτως εἶναι τὸ αὐτὸ τὸ νὰ διαιρέσῃ τις μίαν μονάδα εἰς τρία ἴσα μέρη, καὶ νὰ λάβῃ τὸ 1 (ἢ εἰς 6, καὶ νὰ λάβῃ τὰ 2, ὅπερ δηλονότι εἶναι σαφὲς καὶ ἐκ τῶν προτέρων. Καθότι $\frac{2}{4} = \frac{2}{2 \times 2}$ (ἀλλὰ $\frac{2}{2} = 1$.. ὥςε $\frac{2}{4} = \frac{2 \times 1}{2 \times 2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Ὅμοιόν τι ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν τοιούτων κλασμάτων, ἅπερ δηλ. εἶναι τὰ αὐτὰ κλάσματα πολλαπλασιαζόμενα διὰ τῆς μονάδος: ὅ ἐςι μόνον κατὰ τὴν μορφὴν διαφέροντα. Ὥςε πᾶν κλάσμα, οὗ τινος ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἢ διαιροῦνται, ἢ πολλαπλασιάζονται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ταυτοχρόνως, διαμένει ἀμετάβλητον κατὰ τὴν σημασίαν.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι κεῖται ἐπ' ἐμοί, ἢ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος, ἢ νὰ διαιρέσω τὸν παρονομαςήν, ἢ τὸ ἀνάπαλιν διὰ τῆς διαιρέσεως. Οὕτως ὄντος $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$, εἶναι ἐπίσης $\frac{6 \times 2}{60} = \frac{2}{10}$, καὶ $\frac{6}{\frac{60}{2}} = \frac{2}{10}$.. ὡσαύτως καὶ $\frac{6:2}{60} = \frac{1}{20}$, καὶ $\frac{6}{60 \times 2} = \frac{1}{20}$: ὅ ἐςιν ἡ διαίρεσις τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι πολλαπλασιασμὸς τοῦ παρονομαςοῦ, καὶ τὸ ἀνάπαλιν (7).

Συμπέρασμα β'. ὅτι πᾶν κλάσμα εἶναι δυνατὸν νὰ λάβῃ ἄλλην μορφήν, χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ σημασίαν.

Τὸ αὐτὸ βέβαια ἔχει χώραν καὶ εἰς τὰ καταχρηςικῶς κλάσματα: ὅ ἐςὶ μεθερμηνευόμενον πολλὰ κλάσματα ἔχουσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν σημασίαν. Καθότι $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} =$ καὶ τ. ξ. ‹ καὶ $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{100}{50}$ καὶ τ. ξ. Καθότι $\frac{4}{2} = \frac{2 \times 2}{2 \times 1}$, καὶ $\frac{6}{3} = \frac{3 \times 2}{3 \times 1}$, καὶ $\frac{100}{50} = \frac{50 \times 2}{50 \times 1}$.

Ταῦτα λοιπὸν τὰ κλάσματα, ἅπερ δηλ. ἔχουσι κοινὸν παράγοντα εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους, ὀνομάζονται σύμμετρα (41).

55. Ἂν λοιπὸν καὶ πᾶν κλάσμα πολλαπλασιασθὲν, ἢ διαιρεθὲν ταυτοχρόνως κατὰ τοὺς δύο ὅρους, διʼ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἀλλάττῃ ὁλοτελῶς σημασίαν ‹ ἑπόμενον εἶναι ἂν ἕνα κλάσμα πολλαπλασιασθῇ, ἢ διαιρεθῇ καθʼ ἕνα μόνον ὅρον, νὰ μεταβάλληται κατὰ τὴν σημασίαν.. ἐκ τοῦ διότι δηλ. πᾶν κλάσμα ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ πηλίκον ἐκ δύο ἀριθμῶν (52) ‹ ἐξ οὗ ἕπονται ταῦτα:

ά. Νὰ μεγεθύνηται πᾶν κλάσμα, ὅταν ἢ πολλαπλασιάσῃ τις μόνον τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ, χωρὶς νὰ βάλῃ χεῖρα εἰς τὸν παρονομαςὴν, ἢ διαιρέσῃ μόνον τὸν παρονομαςὴν αὐτοῦ, χωρὶς νὰ βάλῃ χεῖρα εἰς τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ. Οὕτως ἂν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{20}{40}$ ἐγὼ πολλαπλασιάσω μόνον τὰ 20 ‹ τὸ ἀποκαθιςῶ μεῖζον ἑαυτοῦ.. ἐκ τοῦ διότι $\frac{20 \times 2}{40} > \frac{20}{40}$. Καὶ ἂν διαιρέσω μόνον τὰ 40 ‹ τὸ ἀποκαθιςῶ ὡσαύτως μεῖζον ἑαυτοῦ.. ἐκ τοῦ διότι $\frac{20}{20} < \frac{20}{20} > \frac{20}{40}$.

β΄. Νὰ σμικρύνηται πᾶν κλάσμα ‹ ὅταν ἢ διαιρέσῃ τις μόνον τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ, χωρὶς νὰ βάλῃ χεῖρα εἰς τὸν παρονομαςὴν, ἢ πολλαπλασιάσῃ μόνον τὸν παρονομαςὴν χωρὶς νὰ βάλῃ χεῖρα εἰς τὸν ἀριθμητήν. Οὕτως ἂν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{20}{40}$ διαιρέσω ἐγὼ μόνον τὰ 20 διὰ τοῦ 2 ‹

τὸ ἀποκαθιςῶ ἔλασσον ἑαυτοῦ : ἐκ τοῦ διότι $\frac{20:2}{40} = \left(\frac{10}{40}\right) < \frac{20}{40}$. Καὶ ἂν πολλαπλασιάσω μόνον τὰ 40 διὰ τοῦ 2 ‹ τὸ ἀποκαθιςῶ ἔλασσον ἑαυτοῦ : ἐκ τοῦ διότι $\frac{20}{40\times 2} = \left(\frac{20}{80}\right) < \frac{20}{40}$.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι ὅσον τις διὰ μείζονος πολλαπλασιασμοῦ πολλαπλασιάση τὸν παρονομαςὴν ἑνὸς κλάσματος : ὅ ἐςιν ὅσον αὐξήση αὐτὸν ‹ τοσοῦτον τὸ κλάσμα σμικρύνεται. Ὅθεν τὸ $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$, καὶ τὸ $\frac{1}{5} > \frac{1}{5\times 2} > \frac{1}{5\times 4} > \frac{1}{5\times 8}$, καὶ τ.ξ. Ὥςε ἂν αὐξήση τις ἀπείρως τὸν παρονομαςὴν, τὸ κλάσμα θέλει μεταβληθῆ εἰς μηδὲν ‹ οὕτως $\frac{1}{\infty} = 0$. Καὶ ἐκ τούτου ἤθελε συνάξοι τις ὅτι $\frac{1}{0} = \infty$,, ὡς φθάσαντες εἴπομεν (40), καὶ ὡς τοῦτο θέλομεν ἰδεῖ ἐχομένως.

56. Ὥςε ἐκ πρώτης ὄψεως ἤθελε διακρίνοι τις τὸ μεῖζον τῶν κλασμάτων. Καθότι ἐκ τῶν $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ ‹ τὸ μὲν $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ ‹ τὸ δὲ $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ ‹ τὸ δὲ $\frac{1}{10} > \frac{1}{100}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.. ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{2}{3} > \frac{2}{4} > \frac{2}{5}$: καὶ οὕτως ἐφεξῆς : ὅ ἐςὶν ὄντων τῶν αὐτῶν ἀριθμητῶν, μεῖζον τῶν κλασμάτων θέλει εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ἔχει ἔλασσον τὸν παρονομαςήν.

Καὶ ἐξ ἐναντίας, ὄντων τῶν αὐτῶν παρονομαςῶν, μεῖζον τῶν κλασμάτων θέλει εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ἔχει μείζονα τὸν ἀριθμητήν. Οὕτω τὰ $\frac{9}{10} > \frac{8}{10} > \frac{7}{10} > \frac{6}{10}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἐνίοτε ὅμως ἀπαντᾷ τις δυσκολίαν τινὰ τοῦ νὰ ἀποφασίση ἐκ πρώτης ὄψεως, ὁποῖον ἐκ δύο ‹δοθέντων κλασμάτων εἶναι τὸ μεῖζον ‹ καὶ διὰ τοῦτο τότε εἶναι χρεία τεχνεύματος τινὸς, εἰς ὅπερ δίδω ὄνομα ἐπαγωγή, ἥτις ἐφεδράζει εἰς τὸ νὰ μεταμορφώσῃ τις τὰ κλάσματα εἰς ὁμοειδῆ (49), ὃ ἐστι νὰ τὰ φέρῃ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν. Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, ὁποῖον τῶν δύο τούτων κλασμάτων $\frac{8}{9}$, καὶ $\frac{6}{7}$ εἶναι μεῖζον; Τότε ἐγὼ διὰ νὰ φυλάξω τὴν σημασίαν αὐτῶν ἀμετάβλητον, πολλαπλασιάζω ἑκατέρους τοὺς ὅρους αὐτῶν δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ (54), καὶ τοῦ μὲν πρώτου διὰ τοῦ 7, τοῦ δὲ δευτέρου διὰ τοῦ 9, καὶ ἔχω $\frac{8 \times 7}{9 \times 7} = \frac{56}{63}$, καὶ $\frac{6 \times 9}{7 \times 9} = \frac{54}{63}$: ἔνθα δηλ. τὸ $\frac{56}{63} > \frac{54}{63}$, ἐξ οὗ συνάγω ὅτι τὰ $\frac{8}{9} > \frac{6}{7}$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἐγὼ ἐνταῦθα ἔλαβον ὄχι κατὰ τύχην τοὺς πολλαπλασιαστὰς (ἀλλὰ κατ' ἐκλογὴν.. καὶ αὕτη ἦν νὰ λάβω τοὺς παρονομαστὰς αὐτῶν (τούτου ἕνεκεν διὰ νὰ φέρῃ τις δύο κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν: ἢ ἂν θέλῃς διὰ νὰ τὰ ἀποκαταστήσῃ ὁμοειδῆ, εἶναι ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιάσῃ τοὺς ὅρους θατέρου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἑτέρου.

57. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ ἀνθρώπινος νοῦς ζητεῖ νὰ μάθῃ, ὄχι μόνον τὴν ὑπεροχὴν ἑνὸς κλάσματος ὡς πρὸς ἄλλο (ἀλλὰ δυσαρεστεῖται καὶ εἰς τὰ δύσληπτα.. καὶ ἐπειδὴ τοιαῦτα εἶναι ἅπαντα τὰ κλάσματα, ὅσα ἔχουσιν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους μεγάλους.. καὶ ἐπειδὴ πᾶν κλάσμα, οὗ τινος ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς διαιρεῖται ταυτοχρόνως διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, μεταβάλλεται ὁλοτελῶς κατὰ τὴν σημασίαν (55) (τούτου ἕνεκεν καὶ οἱ ἀριθμητικοὶ ἐφεῦρον τρόπον τοῦ νὰ μεταμορφοῦσιν, ἔνθα εἶναι δυνατὸν, τὰ κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα (πλὴν εὐ-

ληπτα, εἴτε μικροτέρων ὅρων, ὅπερ δηλονότι ἔχει χώραν τότε μόνον ‹ ὅτε ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἑνὸς κλάσματος διαιροῦνται δὲ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ: ἢ ἂν θέλῃς ‹ ὅταν τὸ κλάσμα ἦναι σύμμετρον (53). Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ ζητούμενος κοινὸς διαιρέτης εἰς τὴν μεταμόρφωσιν ἑνὸς κλάσματος εἶναι συγκεκραμμένος, καὶ εὑρίσκεται διὰ ψηλαφισμοῦ ‹ τούτου ἕνεκεν εἶναι ἀναγκαῖοι οἱ ἑξῆς κανόνες.

α΄. Πᾶς ἀριθμὸς λήγων εἰς χαρακτῆρα ἄρτιον εἶναι καὶ αὐτὸς ἄρτιος: ὃ ἐςὶ διαιρεῖται διὰ τοῦ 2. Ὥςε πᾶν κλάσμα ἔχον ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἀρτίους, διαιρεῖται διὰ τοῦ 2. ὃ ἐςὶ τὰ 2 εἶναι κοινὸν μέτρον αὐτῶν. Οὕτως τὰ $\frac{12}{18}=\frac{6}{9}$, καὶ τὰ $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$: ἔνθα δηλονότι τὸ $\frac{1}{2}$ εἶναι ἁπλούςερον τοῦ $\frac{2}{4}$. Προςεθείσθω ὅμως εἰς τοὺς ἀρτίους τὸ, ἂν οἱ ἔσχατοι δύο χαρακτῆρες διαιρῶνται διὰ τοῦ 4 ‹ τότε τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ δὶς 2, εἴτε διὰ τοῦ 4. Οὕτω τὰ $\frac{88}{104}=\frac{44}{82}=\frac{22}{41}$, ἢ ἀμέσως $\frac{88}{104}=\frac{22}{41}$. Καὶ ἔτι ἂν οἱ ἔσχατοι τρεῖς χαρακτῆρες διαιρῶνται διὰ τοῦ 8 ‹ τότε τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ τετράκις 2, εἴτε διὰ τῶν 8. Οὕτω τὰ $\frac{888}{2432}$ διαιροῦνται διὰ τοῦ τετραπλασίονος τοῦ 2, εἴτε διὰ τῶν 8 ‹ καὶ διὰ τοῦτο $\frac{888}{2432}=\frac{444}{1216}=\frac{222}{608}=\frac{111}{304}$ ‹ ἢ ἀμέσως $\frac{888}{2432}=\frac{111}{304}$.

β΄. Πᾶς ἀριθμὸς, οὗτινος τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτήρων εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, διαιρεῖται διὰ τοῦ 3. Καθότι ἐπειδὴ καὶ πᾶς ἀριθμὸς, εἴτε διαιρούμενος διὰ τοῦ 9, εἴτε ἀφαιρουμένων ἐξ αὐτοῦ ἁπάντων τῶν ἐν αὐτῷ 9, δίδει τὸ αὐτὸ λείψανον (37), εἰς τρόπον ὅτι ἂν εἷς ἀριθμὸς διαιρῆται ἐξηκριβωμένως διὰ τοῦ 9: τουτέςιν ἂν δίδῃ μηδὲν λείψανον, μηδὲν λείψανον θέλει δώσει, καὶ ἂν ἀφαιρεθῶσιν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἅπαντα τὰ 9.. καὶ ἐπειδὴ τὸ 9 εἶναι τετράγωνον τῶν 3 ‹ ἄρα καὶ τὰ 3 πρέπει νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ἰδιότητα μὲ τὰ 9. Ὥςε πᾶν κλάσμα ἔχον ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοιούτους, εἶναι τοιοῦτον. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{102}{438}$, ἔνθα οἱ μὲν τοῦ ἀριθμητοῦ $1+2=3$, οἱ δὲ τοῦ παρονομαςοῦ $4+3+8=15$, διαιρεῖται διὰ τοῦ 3.. ὅθεν $\frac{102}{438}=\frac{36}{146}$. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ τοῦτο λήγει εἰς χαρακτῆρας ἀρτίους ‹ διὰ τοῦτο διαιρεῖται πάλιν διὰ τοῦ 2 (α΄.) ὅπερ θέλει νὰ εἰπῇ, ὅτι τὸ δοθὲν κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ 6. Καθότι πᾶς ἀριθμὸς ἄρτιος διαιρετέος διὰ τοῦ 3, διαιρεῖται διὰ τοῦ 6.

γ΄. Πᾶς ἀριθμὸς λήγων εἰς 5, ἢ εἰς 0, εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 5. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{35}{145}$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 5, καὶ εἶναι $=\frac{7}{29}$.. ὡσαύτως καὶ τὸ $\frac{75}{290}=\frac{15}{58}$.

δ΄. Πᾶς ἀριθμὸς, οὗ τινος τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτήρων εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9, διαιρεῖται διὰ τοῦ 9. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{27}{918}$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 9 καὶ εἶναι $=\frac{3}{102}$.

ε΄. Πᾶς ἀριθμὸς, ὡς εἶναι γνωςὸν (46), λήγων εἰς μηδὲν, εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 10. Οὕτω $\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$.

ς΄. Πᾶς ἀριθμὸς, οὗ τινος τὸ κεφάλαιον τῶν ἐναλλὰξ χαρακτήρων εἶναι ἴσον, διαιρεῖται διὰ τοῦ 11. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{121}{4350}$, διαιρεῖται διὰ τοῦ 11, καὶ εἶναι $=\frac{11}{390}$.. ἀλλ ἐπειδὴ καὶ πάλιν τὸ κεφάλαιον τῶν ἐναλλὰξ χαρακτήρων αὐτοῦ εἶναι ἴσον ‹ διὰ τοῦτο πάλιν διαιρεῖται διὰ τοῦ 11, καὶ εἶναι $=\frac{1}{30}$.

58. Πλὴν μεταβαίνων τις ἐκ τῶν μερικῶν εἰς τὰ

γενικὰ, ἤθελεν εἰποῖ, ὅτι ταῦτα πάντα ὁμοῦ συμπεριλαμβάνονται, εἰς τὸ νὰ εὕρῃ τις τὸ κοινὸν μέτρον τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος· πλὴν τὸ μέγιςον, ὅπερ καὶ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης ὀνομάζεται, ὡς ὄντος δυνατοῦ νὰ εὑρίσκωνται εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος, πλέον τοῦ ἑνὸς κοινοὶ διαιρέται. Καὶ ἰδοὺ ἡ τούτου μέθοδος. Νὰ διαιρέσῃ τις τὸν μείζονα ὅρον τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἐλάσσονος.. β΄. ἂν μείνῃ λείψανον, δι᾽ αὐτοῦ νὰ διαιρέσῃ τὸν ἐλάσσονα ὅρον.. γ΄. ἂν μείνῃ λείψανον, δι᾽ αὐτοῦ νὰ διαιρέσῃ τὸ πρῶτον λείψανον, καὶ οὕτως ἀκολούθως, ἕως οὗ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ μηδέν. Καὶ οὕτως ὁ τελευταῖος διαιρέτης θέλει εἶναι ὁ κοινὸς μέγιςος διαιρέτης. Εἰ δὲ καὶ ὁ τελευταῖος διαιρέτης ἤθελεν εἶναι μονὰς· τότε τοῦτο ἤθελεν ἐμφανίσοι ὅτι το κλάσμα εἶναι ἀσύμμετρον.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, ὁ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης τοῦ κλάσματος $\frac{12}{18}$. Ἐγὼ λοιπὸν λέγω, ὅτι ἂν ἔχῃ οὗτος ἀδυνατεῖ νὰ ἦναι μείζων τοῦ 12, ὡς ὄντων τῶν 12 κοινοῦ μέτρου τοῦτε παρονομαςοῦ καὶ ἀριθμητοῦ. Ὥςε διαιρῶ τὰ 18 διὰ τοῦ 12, καὶ ἔχω λείψανον 6. ὃ ἔςι τὸ δοθὲν κλάσμα μετεμορφώθη εἰς τὸ $\frac{12}{12+6}$. Τώρα διαιρῶ τὸν διαιρέτην 12 διὰ τοῦ λειψάνου 6.. ἐκ τοῦ διότι, ἂν τὸ κλάσμα $\frac{12}{12+6}$ ἔχῃ κοινὸν μέτρον· τοῦτο ἀδυνατεῖ νὰ ὑπερβῇ τὸν 6 ἀριθμόν. Διαιρῶν λοιπὸν αὐτὸν διὰ τοῦ 6, ἔχω λείψανον μηδὲν.. ὥςε συνάγω ὅτι τὰ 6 εἶναι κοινὸς διαιρέτης· καὶ εἶναι καὶ ὁ μέγιςος τῶν λοιπῶν: τῶν τε 2 καὶ 3 δηλονότι.