τὴν ἐκτελῶ, καὶ ἔχω διὰ γινόμενον 1680288, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον: τουτέςιν εἶναι $= 2283 \times 736$. Καθότι ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαςὴς $736 = 700 + 30 \times 6$.. καὶ ἐπειδὴ ἐγὼ ἐπολλαπλασίασα τὸν ἀριθμὸν 2283, πρῶτον διὰ τοῦ 6. β΄. διὰ τοῦ 30, καὶ γ΄. διὰ τοῦ 700, ὧνπερ τὸ γινόμενον εἶναι $= 1680288$ · τούτου ἕνεκεν οὗτος ὁ ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Πλὴν ἐπειδὴ καὶ ὡς $2283 \times 736 = 1680288$, οὕτω καὶ $736 \times 2283 = 168288$ · τούτου ἕνεκεν κεῖται ἐπ᾽ ἐμοὶ νὰ λάβω διὰ πολλαπλασιαςὴν, ὅποιον τῶν δοθέντων θέλω · εἶναι ὅμως εὐκολώτερον νὰ λαμβάνη τις τὸν μικρότερον.

35 Σημειωτέον ὅμως α΄. ὅτι ἂν ὁ εἷς τῶν παραγόντων, ἢ καὶ ἀμφότεροι, λήγη εἰς μηδενικὰ · τότε ἡ ἐργασία τελειοῦται συντομωτέρως · ἂν δηλ. τις ςοχασθῇ αὐτὰ ὡς μὴ παρόντα.

Ἔςωσαν, φέρε εἰπεῖν, οἱ παράγοντες 2280, 700, οὕςπερ τάττων ὡς ἀνωτέρω, ἐκτελῶ τὴν ἐργασίαν, καὶ ἔχω διὰ γινόμενον 157600.

$$\begin{array}{r} 2280 \\ 700 \\ \hline 0000 \\ 0000 \\ 15960 \\ \hline 1596000 \end{array} \quad) \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r} 228 \\ 7 \\ \hline 1596 \end{array}$$

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ $228 \times 7 = 1596$ · τούτου ἕνεκεν εἰς τὴν ἐργασίαν ἐγὼ δύναμαι νὰ παραβλέψω τὰ μηθενικὰ ‹ πλὴν νὰ προσθέσω τὸ κεφάλαιον (τρία) αὐτῶν εἰς τὸ γινόμενον: τουτέςι ἓν τοῦ πολλαπλασιαςέου, καὶ δύο τοῦ πολλαπλασιαςοῦ ‹ καὶ οὕτως ἔξω τὸ αὐτὸ γινόμενον.

β΄. Ὅτι ἂν ὁ εἷς τῶν παραγόντων σύγκηται ἐκ μηδενικῶν, καὶ μονάδος ‹ τότε δὲν εἶναι χρεία νὰ γένῃ πολλαπλασιασμὸς, ἀλλὰ πρόσθεσις τῶν μηδενικῶν μόνον. Ἂν, φέρε εἰπεῖν, ζητηθῇ νὰ πολλασιάσῃτις 2280 ἐπὶ τὰ 100 ‹ τότε προςιθέμενα μόνον τὰ δύο μηδενικὰ τῶν 100 εἰς τὰ 2280, θέλει ἔχει τὸ ζητούμενον γινόμενον = 228000.

γ΄. Ὅτι ἂν ἐν τῷ μεταξὺ κῆνται μηδενικὰ ‹ τότε ἐπειδὴ καὶ τὰ γινόμενα αὐτῶν εἶναι μηδὲν ‹ τούτου ἕνεκεν ἤθελεν εἶναι περιττὸς ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς. Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 2003, 736. Ἐγὼ λοιπὸν ἐκλέγω διὰ πολλαπλασιαςὴν τὸν ἀριθμὸν 2003, καὶ ἀφ᾽ οὗ πολλαπλασιάσω τὸν πολλαπλασιαςέον διὰ τοῦ 3, καὶ ὑπογράψω τὸ γινόμενον 2208 ‹ πολλαπλασιάζω αὐτὸν εὐθὺς διὰ τοῦ 2 . . πλὴν ἐπειδὴ καὶ τοῦτο εἶναι χιλιάδες ‹ τούτου ἕνεκεν τάττω τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ γινομένου 1472 εἰς τὴν ςήλην τῶν χιλιάδων: ὅ ἐςιν ὀπισθοδρομῶ τρεῖς χώρους, ὡς ὁρᾶται.

$$\begin{array}{r} 736 \\ 2003 \\ \hline 2208 \\ 1472 \\ \hline 1474208 \end{array}$$

δ΄. Ὅτι ἂν οἱ παράγοντες ἦναι πλέον τῶν δύο εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ‹ τότε γίνεται πρῶτον ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν δύο, εἶτα τοῦ γινομένου διὰ τοῦ τρίτου παράγοντος, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ‹ ἂν ἦσαν καὶ πλείονες. Οὕτως $10 \times 20 \times 30 = 200 \times 30 = 6000$.

ε'. Εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ, ἢ τὸ γινόμενον νὰ πολλαπλασιάσῃ τις, ἢ ἕνα τῶν παραγόντων. Οὕτως ὄντος $20 = 4 \times 5$, καὶ $20 \times 3 = 4 \times 3 \times 5$ ‹ εἴτε τὰ 20 νὰ πολλαπλασιάσῃ τις διὰ τοῦ 3, εἴτε τὸν παράγοντα αὐτοῦ 4 ‹ ἔξει τὸ αὐτὸ γινόμενον 60.

36. Τὸ πλέον ὅμως ἀξιοσημείωτον ἐνταῦθα: εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν λέγω, εἶναι ὅτι οἱ ὑπὸ τῶν ἀριθμητικῶν ὀνομαζόμενοι συγκεκραμμένοι ἀριθμοὶ (14) εἶναι ἀνύπαρκτόν τι.. καὶ ἐγὼ λέγω ὅτι ὑπῆρξεν οὐδέποτε ἀριθμὸς συγκεκραμμένος. Ὥςε ὅταν οὗτοι λέγωσιν ὅτι πολλαπλασισμὸς τῶν ἀριθμουμένων ὄντων, δι' ἀριθμουμένων ὄντων, εἶναι πολλαπλασιασμὸς συγκεκραμμένου διὰ συγκεκραμμένου: ὡς 6 ὀκάδες ἐλαίου διὰ 52 παράδες, τοῦτο εἶναι σαφὴς ἀπάτη. Καθότι, ποῖος, παρακαλῶ, καὶ μικρὰν γνῶσιν ἔχων οὐχ ὁρᾷ ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐνταῦθα ὑπάρχει πολλαπλασιασμὸς, οὐχὶ τῶν 52 ὀκάδων ‹ ἀλλ' ἀφῃρημένως 52 μονάδων, καὶ ὅτι ἔγινεν ὄχι διὰ τῶν 6 παράδων: ἀλλὰ ἁπλῶς, εἴτε ἀφῃρημένως, δὶ 6 μονάδων ‹ καὶ ἑπομένως ὅτι τὸ γινόμενον εἶναι ὁλοτελῶς 312 παράδες ‹ ἀλλ' ἀφῃρημέναι 312 μονάδες.. καὶ ὅτι εἰς τὸ μετέπειτα ἐφαρμόζεται εἰς συγκεκραμμένας μονάδας: ὃ ἐςὶ γίνεται ἀτομικόν.

Ἔπειτα οἱ ἀριθμητικοὶ ὁμολογοῦσιν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ πρόσθεσις μερῶν ἴσων ἀλλήλοις (29). Ὥςε τὸ ἡμέτερον ζήτημα: τουτέςι τὸ νὰ πολλαπλασιάσῃ τις 6 ὀκάδες ἐλαίου ἐπὶ 52 παράδες, δύναμαι νὰ τὸ λύσω καὶ οὕτω 52+52+52+52+52 +52=312, τραπεζίτης δηλ: εἰς σημεῖον + τῆς ὀκᾶς: πρᾶγμα τῷ ὄντι τερατῶδες!

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τοῦτο τὸ γινόμενον, εἴτε τὸ κεφάλαιον, 312, ἔλαβε τὴν ὕπαρξιν ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 52 καὶ τοῦ σημείου + (ἢ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 6 καὶ τοῦ σημείου +, ὡς ἦν δυνατὸν) δῆλον ὅτι καὶ τὸ σημεῖον +, κατὰ τοὺς ἀριθμητικοὺς, εἶναι συγκεκραμμένον, ὅπερ εἶναι ἄτοπον. Ἀλλ' ἂν τοῦτο εἶναι ἀφηρημένον.. καὶ ἂν ἐκ τούτου καὶ ἐκ τοῦ 52 ἀριθμοῦ ἐγεννήθη ὁ ἀριθμὸς 312 (ἀναγκαίως καὶ ὁ ἀριθμὸς 312 εἶναι ἀφηρημένος. Οἷα τὰ μέρη, τοιοῦτον ταὶ τὸ ὅλον.

Τέλος πάντων ποιαν πιθανολογίαν ἔχει, τὸ νὰ λάβῃ τις ἐλαίου μονάδας μεταλλικῶς, καὶ τοῦτο νὰ μεταμορφωθῇ εἰς μεταλλικὰς μονάδας; Τοιοῦτον τραγέλαφον ἦν ἀδύνατον νὰ κατασκευάσῃ καὶ ὁ πλέον φαντασιώδης τῶν ἀνθρώπων! Ὥςε

6 . .	ἐλαίου	καὶ ἔτι	52 .	ἐλαίου
52 . .	ἀργύρου		6 .	ἀργύρου
312 . .	ἀργύρου		312 .	ἀργύρου

ὅ ἐςιν εἴτε τὸ ἔλαιον λάβει τις μεταλλικῶς, εἴτε τὸ μέταλλον ἐλαϊκῶς (οὗτος κατασκευάζει μέταλλον, εἰς ὅπερ ἡ μεταφυσικὴ δυσαρεςεῖται.

37 Ἡ βάσανος ὅμως, εἴτε ἡ δοκιμὴ τοῦ ἂν εἷς πολλαπλασιασμὸς ἔγινεν ὀρθὸς, εἶναι πολλαπλῆ. Καὶ εἶναι τὸ νὰ μεταβάλῃ τις τὸν πολλαπλασιαςὴν εἰς πολλαπλα-

σιαςέου, καὶ νὰ ἐκτελέσῃ αὖθις τὴν ἐργασίαν · καὶ ἂν τὸ γινόμενον τῆς δευτέρας ἐργασίας ἦναι σύμφωνον μὲ τὸ γινόμενον τῆς πρώτης · τότε ἡ ἐργασία ὑπῆρξεν ἄπταιςος. Οὕτως ἐπειδὴ καὶ ἐγὼ πολλαπλασιάσας τὰ 2283 διὰ τῶν 736, εὗρον διὰ γινόμενον τὸν ἀριθμὸν 1680288 (34) · τούτου ἕνεκεν ἂν πολλαπλασιάσω τὰ 736 διὰ τῶν 2283 καὶ εὕρω τὸ αὐτὸ γινόμενον · θέλω συνάξει ὅτι ἡ ἐργασία ὑπῆρξεν ὀρθή. β΄. Βάσανος, καὶ μᾶλλον ἐν χρήσει εἶναι ἡ λεγομένη διὰ τῶν 9.. καὶ ἔχει ὧδέπως. Πρῶτον ἀνακεφαλαιῶ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ πολλαπλασιαςέου, καὶ ἀφαιρῶν ἐκ τοῦ κεφαλαίου τὸ ἐννεαπλοῦν, εἴτε πάντα τὰ ἐν αὐτῷ 9, γράφω εἰς ἓν μέρος τὸ λείψανον. Δεύτερον ἀνακεφαλαιῶ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ πολλαπλασιαςοῦ, καὶ ἀφαιρῶν ἐκ τοῦ κεφαλαίου τὸ ἐννεαπλοῦν, γράφω τὸ λείψανον ὑποκάτω τοῦ πρώτου λειψάνου, ἀφ᾽ οὗ διαχωρήσω ταῦτα τὰ λείψανα διάτινος γραμμῆς. γ΄. Ἀνακεφαλαιῶ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ γινομένου, καὶ ἀφαιρῶν ἐκ τοῦ κεφαλαίου τὸ ἐννεαπλοῦν, γράφω τὸ λείψανον εἰς τὰ πλάγια τοῦ πρώτου λειψάνου, ἀφ᾽ οὗ διαχωρήσω ταῦτα διά τινος γραμμῆς. δ΄. Πολλαπλασιάζω τὰ δύο λείψανα τοῦτε πολλαπλασιαςέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ, καὶ ἐκ τοῦ γινομένου ἀφαιρῶ τὸ ἐννεαπλοῦν., καὶ τότε ἂν τοῦτο τὸ λείψανον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον λείψανον · ἡ ἐργασία εἶναι ὀρθή.

Ἐγὼ, φέρε εἰπεῖν, εὗρον ὅτι $2283 \times 736 = 1680288$ (34).. τώρα ἀνακεφαλαιῶν τοὺς χαρακτῆρας καὶ τῶν τριῶν ἀριθμῶν, καὶ ἀφαιρῶν τὸ ἐννεαπλοῦν, γράφω, ὡς εἶπον, ἀνὰ μέρος τὰ λείψανα αὐτῶν. α΄. λοιπὸν λέγω 2+2+8+3=15 · ἀλλὰ καὶ 15 — 9=6 · ὥςε γράφω 6 εἰς ἓν μέρος.

6|6
———
7|6

β'. Λέγω 7+3+6=16 · ἀλλὰ καὶ 16—9=7 · ὥςε γράφω 7, ὡς ὁρᾶται, ὑποκάτω τοῦ 6, ἀφ' οὗ δηλ. ἄξω τὴν μεταξὺ αὐτῶν ὁριζόντιον γραμμήν.. γ'. Λέγω 1+6+8+0+2+8+8=33 · ἀλλὰ 33 — 3×9=6 · ὥςε γράφω 6, ὡς ὁρᾶται εἰς τὰ πλάγια τοῦ πρώτου 6, ἀφ' οὗ πρῶτον ἄξω μίαν γραμμὴν μεταξὺ αὐτῶν καθέτως. Τέλος πάντων πολλαπλασιάζων τὰ δύο λείψανα, τοῦτε πολλαπλασιαςέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ: τουτέςι 6×7=42, καὶ ἀφαιρῶν ἐξ αὐτῶν τὸ ἐννεαπλοῦν: τουτέςι 42 — 4×9=6, γράφω 6 εἰς τὰ πλάγια τοῦ 7 δεξιόθεν. Καὶ ἐπειδὴ ὁρῶ ὅτι θεωρεῖται συμφωνία μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ λειψάνου τοῦ γινομένου · συνάγω ὅτι ἡ ἐργασία ὑπῆρξεν ἄπταιςος.

Ὡσαύτως ἐπειδὴ 2280×700=1596000 (35) · τούτου ἕνεκεν λαμβάνων τὰ λείψανα ἐκ τῶν κεφαλαίων τῶν δύο παραγόντων μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ ἐννεαπλοῦ: τουτέςι τὰ 3, καὶ 7, ὧνπερ τὸ γινόμενον εἶναι=21 · καὶ διὰ τοῦτο 21—2×9=3 · εὑρίσκω αὐτὸ ἴσον μὲ τὸ λείψανον τοῦ 1+5+9+6=21=2×9+3, ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῆ ἐξ αὐτοῦ τὸ ἐννεαπλάσιον.

3|3
———
7|3

Ὁ λόγος βέϐαια ταύτης τῆς βασάνου εἶναι ἡ θαυμαςὴ ἰδιότης τοῦ 9: ἥτις δηλονότι εἶναι τὸ εἴτε ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ νὰ ἀφαιρέσῃ τις τὸ ἐννεαπλάσιον, εἴτε ἐκ τοῦ κεφαλαίου τῶν χαρακτήρων αὐτοῦ, τὸ λείψανον θέλει εἶναι τὸ αὐτό. Οὕτως ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ 2283=2000+200+80+3=222×9+2+22×9+2+8×9+8+3=222×9+22×9+8×9+9+6‹ ἂν ἀφαιρέσω τὸ ἐννεαπλάσιον, ἔξω λείψανον 6. Πλὴν ἔξω ὡσαύτως 6 λείψανον ‹ καὶ ἂν ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τῶν χαρακτήρων αὐτοῦ ἀφαιρέσω τὸ ἐννεαπλάσιον αὐτοῦ.. ἐκ τοῦ διότι 2+2+8+3=15=9+6. Αὕτη ὅμως ἡ ξένη ἰδιότης τῆς συμφωνίας ἑκάςου ἀριθμοῦ μετὰ τοῦ κεφαλαίου τῶν χαρακτήρων αὐτοῦ γεννᾶται ἐκ τῶν δεκαπλασίων αὐτῶν. Καθότι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 10, 100, 1000 καὶ τ. ξ. μετὰ τὴν τοῦ ἐνναπλασίου ἀφαίρεσιν ἔχουσι λείψανον 1. Οὕτω καὶ μετὰ τὴν διὰ τοῦ 9 διαίρεσιν.. καὶ ὡς οἱ ἀριθμοὶ 20, 200, 2000, καὶ τ. ξ. 2.. καὶ οἱ ἀριθμοὶ 30, 300, 3000, καὶ τ. ξ. 3, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ‹ οὕτω καὶ μετὰ τὴν τοῦ 9 διαίρεσιν. Ὥςε πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλάσιος τοῦ 9, ἔχει καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτήρων αὐτοῦ ἴσον μὲ τὸ 9:. Πρὸς τούτοις ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, εἶναι πολλαπλάσιοι τοῦ 9 ‹ ὡσαύτως καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ 9: ὅ ἐςιν 1+8=9, 2+7=9, 3+6=9, 4+5=9, 5+4=9, 6+3=9, 7+2=9, 8+1=9: ὅ ἐςι τὸ λείψανον αὐτῶν εἶναι 0, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ ἐννεαπλασίου. Ὅσον ὡραία ὅμως καὶ ἂν ἦναι ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἡ διὰ τοῦ 9 ‹ εἶναι δυνατὸν νὰ παρεμπίσῃ καί τι λάθος. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἐνταῦθα ζητεῖται οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἡ ταυτότης τῶν λειψάνων τοῦ γινομένου, καὶ τοῦ γεννομένου ἐκ τῶν λειψάνων τῶν δύο παραγόντων· εἶναι δυνατὸν νὰ παρεμπέσῃ τὸ αὐτὸ λάθος εἰς ἀμφότερα τὰ μέρη τῆς ἐργασίας, καὶ οὕτω νὰ λάβῃ χώραν ἡμαρτημένη ταυτότης. Ἀγκαλὰ καὶ πολλὰ δυσκόλως δύναται νὰ συμβῇ ἓν τοιοῦτον λάθος· πλὴν ἐπειδὴ καὶ εἶναι δυνατὸν· τούτου ἕνεκεν οἱ μαθηματικοὶ ἐπρόκριναν τὴν βάσανον τὴν διὰ τῆς διαιρέσεως, εἰς ἥνπερ ἤδη ἐμβαίνομεν.

ΚΕΦ. Ε'.

Περὶ Διαιρέσεως.

38. **Διαίρεσις** εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ νὰ εὕρῃ τὶς, ποσάκις ἐκ δύο δοθέντων ἀνίσων ἀριθμῶν ὁ μείζων περιέχει τὸν ἐλάσσονα. Καὶ ὁ μὲν ποσάκις περιέχων ὀνομάζεται **Διαιρετέος**, ὁ δὲ ποσάκις περιεχόμενος **Διαιρέτης**, καὶ **Πηλίκον** αὐτὸ τὸ ποσάκις, εἴτε ὁ προκύπτων ἐκ τῆς διαιρέσεως ἀριθμός. Οὕτως ἄν μοι δοθῇ νὰ διαιρέσω τὸ 12 διὰ τοῦ 3· ἐγὼ ἤθελον εὕροι ὅτι τὸ 3 περιέχεται τετράκις εἰς τὸ 12, καὶ τὸ γράφω οὕτω $\frac{12}{3} = 4$ (22), ἔνθα τὸ μὲν 12 εἶναι ὁ διαιρετέος, τὸ δὲ 3 ὁ διαιρέτης, τὸ δὲ 4 τὸ ζητούμενον πηλίκον. Ὥστε εἰς τὴν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην τοσάκις, ὁσάκις τὸ πηλίκον τὴν μονάδα. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τὸ γινόμενον γίνεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασοῦ, προστιθεμένου τοσάκις, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ πολλαπλασιαστὴς (29):

ὅ ἐςιν ἐπειδὴ καὶ τὸ γινόμενον περιέχει θάτερον τῶν παραγόντων, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ ἕτερος· τούτου ἕνεκεν ἡ διαίρεσις εἶναι ἐργασία ἐκ διαμέτρου ἐναντία μὲ τὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὥςε ἂν πολλαπλασιάσῃ τις τὸν διαιρέτην διὰ τοῦ πηλίκου· ἔξει τὸν διαιρετέον διὰ γινόμενον. καὶ ἂν διαιρέσῃ τὸ γινόμενον δι᾽ ἑνὸς τῶν παραγόντων· ἔξει τὸν ἕτερον παράγοντα διὰ πηλίκον. Ὥςε διαίρεσις ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἓν ὅλον δοθὲν, ἐξεταζόμενον ποσάκις περιέχει ἓν μέρος δοθέν.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ, εἴτε τὸ πηλίκον τις νὰ πολλαπλασιάσῃ, εἴτε τὸν διαιρετέον, ἢ τὸν διαιρέτην νὰ διαιρέσῃ. Καθότι ὄντος $\frac{12}{3}=4$· εἶναι ἐπίσης καὶ $\frac{12\times 5}{3}=4\times 5$, καὶ $\frac{12}{\frac{3}{5}}=4\times 5$.

Δεύτερον εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ εἴτε τὸ πηλίκον τὶς νὰ διαιρέσῃ, εἴτε τὸν διαιρετέον, ἢ τὸν διαιρέτην νὰ πολλαπλασιάσῃ. Οὕτω $\frac{\frac{12}{3}}{2}=\frac{4}{2}=2$ καὶ $\frac{12}{3.2}=\frac{4}{2}=2$.

39. Ἂν λοιπὸν καὶ ἡ διαίρεσις ἦναι ἐργασία ἐκ διαμέτρου ἐναντία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. καὶ ἂν ὁ πολλαπλασιασμὸς ἦναι πρόσθεσίς τις (29)· ἑπόμενον εἶναι καὶ ἡ διαίρεσις νὰ ἦναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἀφαίρεσίς τις. Καθότι ὡς ἐγὼ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 12 διὰ τοῦ 3 εὗρον, ὅτι τὸ 3 περιέχεται εἰς τὸ 12 τετράκις (38)· οὕτω δύναμαι νὰ φθάσω ἐπίσης εἰς αὐτὴν ταύτην τὴν γνῶσιν, διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου ἀφαιρέσεως, ὧδέπως. $12-3=9$, καὶ $9-3=6$, καὶ $6-3=3$, καὶ $3-3=0$· καὶ οὕτω συνάγω ὅτι τὰ 3 περιέχονται τετράκις εἰς τὰ 12.

ἐκ τοῦ διότι διὰ νὰ μηδενισθῇ ὁ ἀριθμὸς 12, ἔγινε χρεία νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ 3 τετράκις, ὅπερ καὶ πηλίκον ὀνομάζεται. Δῆλον ὅμως ὅτι ἡ διαίρεσις διαφέρει πραγματικῶς τῆς ἀφαιρέσεως ‹ καὶ ἡ τούτων ταυτότης εἰς ἄλλο δὲν ὑφίσαται, εἰμὴ εἰς τὸ ὅτι εὑρίσκεται ἐπίσης καὶ δὶ ἑκατέρων τὸ πηλίκον. Καθότι εἰς μὲν τὴν διαίρεσιν θεωρεῖτις καὶ ὁποῖον μέρος εἶναι ὁ διαιρέτης τοῦ διαιρετέου: ὅ ἐστιν εἶναι θεωρία ὅλου συγκειμένου ἔκ τινων μερῶν ἴσων ἀλλήλων ‹ εἰς δὲ τὴν ἀφαίρεσιν ἀφαιρουμένου ἀλληλοδιαδόχως ἑνὸς μέρους ἐκ τοῦ ὅλου, θεωρεῖται ποσάκις αὐτὸ τὸ μέρος ἀφηρέθη.

40. Ἡ διαίρεσις ὅμως ἔχει καί τινα ἴδια, καὶ εἶναι ταῦτα.

α'. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεθεὶς δὶ ἑαυτοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὴν μονάδα. Οὕτως $\frac{2}{2}=1$, $\frac{3}{3}=1$, $\frac{100}{100}=1$. Ὅθεν καὶ $\frac{1}{1}=1$.

β'. $\frac{0}{0}=1$: ὅ ἐστι τὸ μηδὲν περιέχει ἑαυτὸ ἅπαξ.

γ'. Τὸ μηδὲν διαιρεθὲν διά τινος ἀριθμοῦ, δίδει πηλίκον μηδέν. Οὕτως $\frac{0}{2}=0$, $\frac{0}{3}=0$, $\frac{0}{100}=0$: ὅ ἐστιν εἷς ἀριθμὸς εἶναι ὁλοτελῶς μέρος τοῦ μηδενός.

δ'. Εἷς ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ τοῦ μηδενὸς, ὡς $\frac{9}{0}$, σημαίνει ἄπειρόν τι: τουτέστιν ὅτι τὸ 0 εἶναι μέρος ἀπειροστὸν τοῦ 9, καὶ γράφω οὕτως $\frac{9}{0}=\infty$. Ὥστε συνάγεται ἐκ τοῦ πρώτου ὅτι πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιασθεὶς καὶ διαιρεθεὶς δὶ ἑαυτοῦ εἶναι ἴσος ἑαυτῷ. Οὕτως $\frac{5 \times 4}{4}=5$, καὶ $\frac{4 \times 100}{100}=4$, καὶ ἐν γένει $\frac{\beta \times \alpha}{\alpha}=\beta$.

41. Ἂν λοιπὸν καὶ ἡ διαίρεσις εἶναι ἐργασία ἐναν-

τία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.. καὶ ἂν ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο ἀριθμῶν ἁπλῶν ἐδεήθη οὐδενὸς κανόνος, εἰμὴ τῆς γυμνάσεως τοῦ Πυθαγορείου πίνακος (32) ‹ δῆλον ὅτι καὶ ἡ διαίρεσις παντὸς ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ μόνων δύο χαρακτήρων, καὶ τοῦ διαιρέτου ἐξ ἑνὸς ‹ ἤθελεν ἐκτελεσθῆ διὰ μόνου τοῦ πίνακος τοῦ Πυθαγόρου. Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 63 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 7. Πρῶτον εὑρίσκω εἰς τὴν πρώτην πρὸς ὀρθὰς ςήλην τὰ 7.. β΄. ζητῶ κατ' εὐθεῖαν τῶν 7 ὁριζοντίως τὰ 63.. γ΄. ἀνέρχομαι ἐξ αὐτοῦ πρὸς τὰ ἄνω πρὸς ὀρθὰς, μέχρι τῆς τελευταίας ςήλης, καὶ ἀπαντῶ τὰ 9.. ὥςε λέγω ὅτι τὰ 9 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον: ὅ ἐςι $\frac{63}{7}=9$ ‹ καὶ τούτου ἕνεκεν καὶ $7\times9=63$.

Ἂν ὅμως ὁ δοθεὶς διαιρετέος δὲν περιέχηται ἐντὸς τοῦ πίνακος ‹ δῆλον ὅτι τότε ἡ διαίρεσις δὲν θέλει γένοι ἐξηκριβωμένως ‹ ἀλλὰ θέλει μείνοι καὶ λείψανόν τι. Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ διαίρεσις τῶν 62 διὰ τῶν 7. τότε ἐγὼ βλέπων ὅτι ἄντικρυ τοῦ 7 δὲν εὑρίσκονται τὰ 62 ‹ συνάγω ὅτι τὰ 62 δὲν διαιροῦνται ἐξηκριβωμένως διὰ τῶν 7.. ἐκ τοῦ διότι $62=8\times7+6$. Καὶ ἐπειδὴ τὰ 62 κεῖνται μεταξὺ τῶν 63 καὶ 54 ἀριθμῶν, οἵτινες εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ πίνακος ‹ ἐγὼ προκρίνω τὰ 56 ‹ καὶ βλέπων ὅτι ἀντικρίζουσι μὲ τὸν ἀριθμὸν 8, κείμενον ἐν τῇ ἀνωτάτῳ ςήλῃ ‹ συνάγω ὅτι τὰ 8 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον μὲ λείψανον 6 ‹ καὶ τὰ γράφω οὕτως $8\frac{6}{7}$, εἴτε $\frac{62}{7}=8\frac{6}{7}$. Καθότι $7\times8\frac{6}{7}=62$.

Τὸ εἰρημένον ὅμως πηλίκον ἐγὼ ἤθελον εὕροι καὶ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως, οὕτως.. $62-7=55$, καὶ $55-7$

$=48$, ϰ $48-7=41$, ϰ $41-7=34$, ϰ $34-7=27$, ϰ $27-7=20$, ϰ $20-7=13$, ϰ $13-7=6$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐπειδὴ καὶ δὲν ἀφαιροῦνται πλέον τὰ 7 ‹ τὰ γράφω οὕτως $\frac{6}{7}$, καὶ τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ὀνομάζεται κλάσμα ‹ καὶ ἑπομένως καὶ κλασματικὸν τὸ πηλίκον $8\frac{6}{7}$. Ἂν λοιπὸν καὶ ὁ διαιρέτης εἰσέρχηται ἐξηκριβωμένως εἰς τὸν διαιρετέον ‹ τότε λαμβάνει ὄνομα μέρος σύμμετρον, εἰδὲμή, ἀσύμμετρον. Οὕτω τὰ 7 εἶναι μέρος σύμμετρον τοῦ 63 ἀριθμοῦ, καὶ ἀσύμμετρον τοῦ 62.

42. Πλὴν ἂν ὁ δοθεὶς διαιρετέος σύγκηται ἐκ πλέον τῶν δύο χαρακτήρων: τοῦ διαιρέτου δηλονότι διαμένοντος ἐξ ἑνὸς, τότε εἶναι χρεία κανόνων, οἵτινες ὅμως καταντῶσι καὶ οὗτοι εἰς τοῦτο αὐτό: τουτέστιν εἰς τὸ νὰ διαιρέσῃ τις ἕνα ἢ δύο μόνον χαρακτῆρας (41). καὶ ἰδοὺ πῶς.

Γράφω τὸν διαιρετέον.. ἄγω καὶ ἄνωθεν αὐτοῦ καὶ πλαγίως ἐκ τῶν ἀριστερῶν γραμμὴν..: τίθημι πλαγίως ἐκ τῶν δεξιῶν τοῦ διαιρετέου τὸν διαιρέτην.. Εἶτα ἄρχομαι τῆς διαιρέσεως ἐκ τῶν ἀριστερῶν ‹ πλὴν ὄχι ὁλικῶς ‹ ἀλλὰ μερικῶς: ἑνὸς δηλονότι χαρακτῆρος, ἢ καὶ δύο: ἂν δηλονότι ὁ εἷς χαρακτὴρ δὲν περιέχει τὸν διαιρέτην ‹ καὶ γράφω τὸ μερικὸν τοῦτο πηλίκον ἄνωθεν τοῦ διαιρετέου. β΄. Πολλαπλασιάζω τὸν διαιρέτην διὰ τοῦ εἰρημένου πηλίκου ‹ καὶ γράφω τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ ἤδη διαιρεθέντος μέρους τοῦ διαιρετέου ‹ καὶ τὸ ἀφαιρῶ. γ΄. Εἰς ταύτην τὴν διαφορὰν κατάγω τὸν ἑξῆς χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου, καὶ ἔχω ἄλλον νέον μερικὸν διαιρετέον, καὶ ἐκτελῶ εἰς αὐτὸν ὡς καὶ ἀνωτέρω, καὶ οὕτως ἀκολούθως, ἕως οὗ νὰ μηδενίσω τὸν ὁλόκληρον διαιρετέον, ὡς ὁρᾶται ἐπὶ παραδειγμάτων.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 13698, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 6.

Γράφω λοιπὸν αὐτοὺς ὡς ὁρῶνται· καὶ ἄρχομαι τῆς διαιρέσεως ἐκ τῶν ἀριστερῶν τοῦ διαιρετέου, εἴτε ἐκ τῆς δεκάδος χιλιάδος. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ τὰ 6 δὲν εἶναι μέρος τῆς μονάδος· διὰ τοῦτο λαμβάνων καὶ τὰ 3 ὁμοῦ, λέγω τὰ 6 εἰς τὰ 13 εἰσέρχεται δὶς, ὅπερ γράφω ἄνω τοῦ διαιρετέου.

```
      2283
  6 | 13698
    | 12
      16
      12
       49
       48
        18
        18
        00
```

Πολλαπλασιάζω τὸν διαιρέτην 6 διὰ τοῦ πηλίκου 2, καὶ ἔχω 12 γινόμενον, ὅπερ γράφω ὑπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 13· καὶ ἐκτελῶν τὴν ἀφαίρεσιν, ἔχω λείψανον 1: ὅπερ καὶ ὑπογράφω ἄγων γραμμὴν ὁριζόντιον, καὶ εἶναι χιλιάς.

Εἰς τὰ πλάγια τοῦ 1 κατάγω τὸν ἀκόλουθον χαρακτῆρα 6 τοῦ διαιρετέου· καὶ οὕτως ἔχω 16 διὰ μερικὸν διαιρετέον· ἔνθα ἐπακολουθῶν τὴν διαίρεσιν, λέγω τὰ 6 εἰς τὰ 16 εἰσέρχονται δὶς· ὥστε γράφω τὰ 2 εἰς τὴν δεξιὰν τοῦ πρώτου πηλίκου 2.

Ὡς εἰς τὴν πρώτην πρᾶξιν, πολλαπλασιάζω τὸν διαιρέτην 6 διὰ τοῦ νέου πηλίκου 2, καὶ ἔχω 12 γινόμενον, ὅπερ γράφω ὑπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 16.. καὶ ἐκτελῶν τὴν ἀφαίρεσιν, ἔχω λείψανον 4, ὅπερ δηλονότι εἶ-