

Καὶ λέγω  $4 - 2 = 2$  (καὶ ὑπογράφω τὸ 2 ὑπὸ τῆν σήλην τῶν μονάδων. Ἐρχόμενος ὁμως εἰς τῆν σήλην τῶν δεκάδων, ἐπειδὴ καὶ βλέπω ὅτι τὰ 9 δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῶν 3 (τούτου ἕνεκεν δανειζόμενος μίαν μονάδα ἐκ τοῦ ἐξῆς χαρακτήρος 2) τοῦ μειωτέου, ἥτις εἶναι βέβαια ἴση μὲ δεκά μονάδας, ὡς κατέχουσα τῆν δευτέραν τοποθεσίαν, λέγω,  $13 - 9 = 4$ , καὶ ὑπογράφω τὰ 4. Ἐρχόμενος δ' εἰς τῆν σήλην τῶν ἑκατοντάδων, λέγω, 3 οὐχὶ μέχρι τῶν 2, ἀλλὰ μέχρι τοῦ 1.. ἐκ τοῦ οἷοτι δὴλ. ἐδανείσθην ἐξ αὐτοῦ μίαν μονάδα.. ἀλλ' ἐπειδὴ πάλιν καὶ τὸ 3 δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 1 (τούτου ἕνεκεν δανείζομαι μίαν μονάδα ἐκ τοῦ ἐγγύς χαρακτήρος 5, καὶ οὕτως ἔχω  $11 - 3 = 8$ , καὶ ὑπογράφω τὰ 8. Ἐρχομαι δ' εἰς τῆν σήλην τῶν χιλιάδων, λέγων 4, μέχρι τῶν 4, 0.. ἐκ τοῦ οἷοτι δὴλονότι ἐδανείσθην παρ' αὐτοῦ μονάδα, καὶ ὑπογράφω τὸ 0. Καὶ τέλος ἐρχόμενος εἰς τῆν σήλην τῶν δεκάκισ χιλιάδων, λέγω 6 μέχρι τῶν 15, 9 (καὶ ὑπογράφω τὰ 9. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰς ἑκατοντάκισ χιλιάδας τοῦ ἀραιοτέου ἐρχόμενος δὲν εὐρίσκω τίποτε, ἔπρεπε γὰρ ὑπογράψω τὰ 2 τοῦ μειωτέου (ἀλλ' ἐπειδὴ ἐδανείσθην ἐξ αὐτῶν μίαν μονάδα (γράφω 1, καὶ ἔχω διὰ διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν 190842.

Ζητεῖσθω τρίτον ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 500 000, 1350, οὓς περ τάττω ὡς ἀνωτέρω.

$$\begin{array}{r} 500\ 000 \\ -1350 \\ \hline \text{Διαφ.} \quad 498650 \end{array}$$

Καὶ λέγω  $0 - 0 = 0$  (καὶ ὑπογράφω 0. Μετα-

βαίνω εἰς τὴν δευτέραν στήλην, καὶ βλέπων ὅτι τὸ 5 δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 0, βιάζομαι νὰ δανεισθῶ μίαν μονάδα ἐκ τοῦ ἐγγύς χαρακτήρος. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ οὗτος εἶναι μηδέν, ὡσαύτως καὶ οἱ μετ' αὐτὸν (διὰ τοῦτο δανεῖζομαι τὴν μονάδα ἀπὸ τοῦ χαρακτήρος 5 (καὶ οὕτω τρέπω τὸν δευτέρα ἀριθμὸν εἰς δύο, ὡς ἔπικες,  $500000 = 400000 + 100000$ , εἶτα ἐκ τοῦ 100000 ἀριθμοῦ δανεῖζομαι αὖθις μονάδα ὑπὲρ τοῦ μετ' αὐτὸν μηδενικοῦ, καὶ οὕτως ἀκολουθῶς. ὅθεν ἦν ὡσάν να εἶχον  $500000 = 400000 + 100000 = 400000 + 90000 + 10000 = 400000 + 90000 + 9000 + 1000 = 400000 + 90000 + 9000 + 900 + 100 = 400000 + 90000 + 9000 + 900 + 90 + 10 = 499990 + 10$  καὶ τότε λέγω  $10 - 5 = 5$ : καὶ ὑπογράφω τὰ 5. Ἐἵτα μεταβαίνων εἰς τὴν τρίτην στήλην, λέγω  $9 - 3 = 6$  καὶ ὑπογράφω τὰ 6. Καὶ ἐρχόμενος εἰς τὴν τετάρτην στήλην, λέγω  $9 - 1 = 8$  καὶ ὑπογράφω τὰ 8. Ἐρχόμενος δ' εἰς τὴν πέμπτην στήλην (ἐπειδὴ δὲν εὐρίσκω τι πρὸς ἀφαίρεσιν, ἔπρεπε μὲν νὰ ὑπογράψω τὸ 10 (ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ προέλαβον μονάδα (ὑπογράφω τὰ 9. Ὡσαύτως καὶ εἰς τὴν ἕκτην στήλην ὑπογράφω 4 ἀντὶ τῶν 5 καὶ οὕτως ἔχω διαφορὰν 498650.

26. Ἡ βίαστος δὲ εἴτε δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως: τοῦ ἂν δηλονότι δὲν παρενέπεσε λάθος τι, γίνεται διὰ τῆς προσθέσεως. Καθότι ἐπειδὴ καὶ αὗται εἶναι δύο ἐργασίαι ἐκ διαμέτρου ἐναντίαι (25) (δῆλον ὅτι ἂν τις προσθέσῃ εἰς τὸν ἀφαιρέτεον τὴν διαφορὰν (ἔξει διὰ κεφάλαιον τὸν μειωτέον, εἴτε τὸν μείζονα τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Οὕτως ἐπειδὴ καὶ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 1350,

ἀπὸ τοῦ 500000 εὖρον διαφοράν 498650 (αὐτόν) εἰς  
 ὄηλον ὅτι διὰ τῆς προσθέσεως τῶν ἀριθμῶν τῶν 478640  
 +1350, ἔξω διὰ κεφάλαιον τὸν 500000, ὡς καὶ ὁράται.

$$\begin{array}{r} 478650 \\ + 1350 \\ \hline 500000 \end{array}$$

ὅπερ ὀηλονότι ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ, ἂν ᾖναι 500000—  
 1350=478650 εἶσαι ὡσαύτως καὶ 500000=4786  
 50+1350.

27. Ὡσε καὶ ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως ἤθελε γέναι  
 διὰ τῆς ἀφαιρέσεως. Καθότι ἂν ᾖναι ἀληθὲς ὅτι τὰ 500000  
 =498650+1350 εἰς ἐπίσης θελεῖ εἶναι ἀληθὲς καὶ τὸ  
 τούτου ἐναντίον: ὅ ἐσιν ὅτι 500000—1350=498650.

Πλὴν ἡ τοιαύτη ἀπόπειρα ἤθελεν εἶναι ἐπιμοχθοτά-  
 τη, ὅταν οἱ προσθέμενοι τῶν ἀριθμῶν ᾖναι πολλοὶ εἰς καὶ  
 διὰ τοῦτο προκριτέως ὁ ἐξῆς τρόπος.

$$\begin{array}{r} 65995 \\ 64392 \\ 1603 \\ 18 \\ \hline 12 \\ 10 \\ 18 \\ 19 \\ 18 \\ \hline 132008 \end{array}$$

Τάττω δηλ. τοὺς ἀσθέντας ἀριθμοὺς ὡς ἀνωτέρω (22) εἰς  
 καὶ ἀρχομαι τῆς προσθέσεως αὐτῶν εἰς πλὴν ὅχι ἐκ τῶν

ἀξιών (ἀλλ' ἐκ τῶν ἀρισερῶν λέγων  $6+6=12$  (καὶ γράφω ὑπὸ τῆς σήλης αὐτῶν καὶ τὰ 12. Μεταβαίνω εἰς τὴν ἐξῆς σήλην λέγων  $5+4+1=10$  (καὶ γράφω ὑποκάτω ταύτης τῆς σήλης τὰ 10. Μεταβαίνω εἰς τὴν τρίτην σήλην λέγων  $9+3+6=18$  (καὶ ὑπογράφω τὰ 18. Μεταβαίνω εἰς τὴν τετάρτην σήλην λέγων  $9+9+0+1=19$  (καὶ γράφω ὑποκάτω ταύτης τῆς σήλης τὰ 19. Καὶ τέλος φθάσας εἰς τὴν σήλην τῶν μονάδων λέγω  $5+2+3+8=18$  (καὶ ὑπογράφω τὰ 18 (καὶ ὣτως ἔχω διὰ κεφάλαιον τὸν ἀριθμὸν 132008, ὡς δὴλονότι καὶ κατὰ τὸν ἄλλον τρόπον (αὐτόθι).

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι καὶ ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἐξίσιωσις τις (17).

28. Εἶναι βέβαια ἄξιον σημειώσεως ὅτι οὔτε τὸ σημεῖον — σημαίνει πάντοτε ἀφαίρεσιν, ἀλλὰ καὶ πρόσθεσιν (οὔτε τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως + σημαίνει πάντοτε πρόσθεσιν, ἀλλὰ καὶ ἀφαίρεσιν. Πράγμα δὴλονότι ἐναντίον τῆς κοινῆς ἰδέας τῶν μαθηματικῶν. Καθότι κυρίως τὸ σημεῖον — τί-ἄλλο σημαίνει, ἢ πρόσθεσιν, ἢ ὑπαρξιν ποσότητος τινὸς (πλὴν ἀποθετικῆς; Ὡς εἴαν ἡ πρὸ αὐτοῦ ποσότης ἦναι ἐπίσης ἀποθετικὴ (τότε τοῦ ὅλου ἀποκαθιστάμενου μείζονος, ἢ πρότερον (τὸ σημεῖον — προσέθετο καὶ δὲν ἀφείλε βέβαια. Οὕτως εἴαν μοι ζητηθῆ νὰ ἀφαιρέσω 100 μονάδας ἐκ τῶν —150 (πῶς- ἄλλως ἔχω νὰ τὰ γράψω, ἢ οὕτως—150 — 100: ἄπερ δὴλονότι εἶναι—250, ἔνθα τὰ—250 >—150; Ὡς εἴαντι νὰ ἐπακλουθήσῃ ἐλάττωσις εἰς τὸν θεθέντα ἀριθμὸν, συνέδη αὔξησις (καὶ τοῦτο ἡμεῖς, ὡς φαίνεται, τὸ ὀνομάζομεν πρόσθεσιν.

"Ἐτι ἂν μοι ζητηθῆ νὰ προσθέσω 50 μονάδας εἰς τὰς —150 ἢ πῶς — ἄλλως ἔχω νὰ τὰ γράψω, ἢ οὕτως —150 + 50 : ὅπερ δηλονότι εἶναι = —100, ἔνθα τὰ —100 < —150; "Ὡς ἀντὶ νὰ ἐπακολουθήσῃ αὐξήσις εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, συνέβη ἐλάττωσις καὶ τοῦτο ἡμεῖς, ὡς φαίνεται, τὸ ὀνομάζομεν ἀφαίρεσιν.

"Ὡς ἀφαίρεσις ἐν γένει ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἐναντιότης σημείων εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς δοθέντας.. καὶ πρόσθεσις ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ταυτότης σημείων εἰς αὐτοὺς, εἴτε θετικὰ δηλονότι ἤθελεν εἶναι, εἴτε ἀποθετικὰ τὰ σημεία.

## Κ Ε Φ. Δ΄.

### Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ.

29. Συμβαίνει ὅμως πολλάκις εἰς τὴν πρόσθεσιν οἱ ἀριθμοὶ νὰ ἦναι ἴσοι ἀλλήλοις, ὡς  $3 + 3 + 3 + 3 = 12$  καὶ τότε ἡ πρόσθεσις ἀλλάττει ὄνομα, καὶ ὀνομάζεται Πολλαπλασιασμός, ἣτις ἐκτίθεται οὕτως  $3 \times 4 = 12$  (20). Πολλαπλασιασμός λοιπὸν ἄλλο δὲν εἶναι, εἰ μὴ ἐκ δύο δοθέντων ἀριθμῶν νὰ λάβῃ τις θάτερον τοσάκις, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ ἕτερος. Οὕτως  $3 \times 4$ , ὅπερ προφέρεται 3 ἐπὶ τὸ 4, σημαίνει ἔτι πρέπει νὰ λάβῃ τις τετράκις τὰ 3, εἴτε  $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ .

Εἰς πάντα λοιπὸν πολλαπλασιασμὸν θεωροῦνται τρεῖς ἀριθμοὶ: ἐκεῖνος, ὅς τις πολλαπλασιάζεται, ὡς ἐνταῦθα ὁ 3, ὅς τις καὶ Πολλαπλασιασέος ὀνομάζεται καὶ

ἐκεῖνος, ὅς τις πολλαπλασιάζει, ὡς ὁ 4, ὅς τις καὶ Πολ-  
 λαπλασιασῆς ἔλαβεν ὄνομα καὶ τέλος ὁ ἐκ τῆς ἐρ-  
 γασίας ἀναφυόμενος, εἴτε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, ὡς ὁ 12,  
 ὅς τις καὶ Γινόμενον ὀνομάζεται. Ὁ πολλαπλασιασῆς  
 ὅμως καὶ ὁ πολλαπλασιασῆς λαμβάνουσι καὶ ἄλλο κοινὸν  
 ὄνομα, Παράγοντες λεγόμενοι. ἐκ τοῦ διότι ἐκ τῆς  
 ἀμφοτέρων συνελεύσεως λαμβάνει τὴν ὑπαρξίν ὁ ζητούμε-  
 νος ἀριθμὸς: ὅπερ ἐστὶν ἐξ αὐτῶν παράγεσθαι. Ὡς τὸ  
 γινόμενον, ἢ παραγόμενον, περιέχει τοσοῦτον θάτερον τῶν  
 παραγόντων ὅσον ὁ ἕτερος αὐτῶν τὴν μονάδα. Οὕτω τὰ  
 12 περιέχουσι τὸςάκις τὰ 3 ὡςάκις τὰ 4 τὸ 1.. ὡσαύ-  
 τως δὲ καὶ τὰ 12, τὰ 4 τὸςάκις ὡςάκις ὁ ἕτερος τῶν πα-  
 ραγόντων, τὰ 3, περιέχει τὸ 1.

Σημειωτέον δ' ὅτι ἡ λέξις πολλαπλασιασμός ἐγεν-  
 νήθη ἠδὲπως. Ἐγὼ ἂν λάβω ἅπαξ τὸν ἕνα ἀριθμὸν, τοῦτο  
 ὀνομάζεται ἐπαρίθμησις, ἢ πρόσθεσις.. εἰδὲ καὶ τὸν λάβω  
 δύο, τοῦτο ὀνομάζεται διπλασιασμός.. ἂν τὸν λάβω τρεῖς,  
 τριπλασιασμός.. ἂν τετράκις, τετραπλασιασμός, καὶ οὕ-  
 τως ἐφεξῆς. Ταῦτα λοιπὸν πάντα ὀνομάζεται πολλαπλα-  
 σιασμός, καὶ Πολπλασιασίων, τὸ γινόμενον θάτερου  
 τῶν παραγόντων καὶ διὰ τοῦτο Ὑποπολλαπλασιασίων,  
 ὁ παράγων τοῦ γινομένου. Ὡς ἂν ἤθελεν εἰποῖτις, καὶ τὸ  
 γινόμενον λαμβάνη τὸ εἶναι ἐκ τῶν δύο ὁμοῦ παραγόντων  
 δῆλον ὅτι εἶναι ἀδιάφορον τὸ νὰ λάβῃ τις ἕποιον τῶν δύο  
 παραγόντων θέλει διὰ πολλαπλασιασῆος: ὅ ἐστιν εἶναι  
 $3 \times 4 = 4 \times 3$ , εἴτε  $= 3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4 = 12$ .

30. Ὡς ἂν τις ἐξετάσῃ τὴν οὐσίαν τοῦ πολλαπλα-  
 σιασμοῦ ἢ θελεν ἰδοῖ ὅτι πολλαπλασιασμός, πρόσθεσις,

καὶ ἐπαριθμησις πραγματικῶς σημαίνουσιν ἓν καὶ τὸ αὐτὸς καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν ὑφίσταται εἰς οὐδὲν ἄλλο, ἢ εἰς τὴν μορφήν τῶν ἰδίων μερῶν. Καθότι ἐπαριθμῶ σημαίνει οὐδὲν ἄλλο, ἢ προσίθημι μονάδα πάντοτε ἐπὶ μονάδων: τουτέστι  $1+1=2$   $2+1=3$   $3+1=4$   $4+1=5$   $5+1=6$  καὶ τ. ζ. εἴτε οὕτως

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & \frac{1}{4} & 1 & 1 & 1 \\ & & & \frac{1}{5} & 1 & 1 \\ & & & & \frac{1}{6} & 1 \end{array}$$

Προσίθημι δὲ σημαίνει οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ ἐπαριθμῶ διὰ μὴ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, εἴτε διὰ μερῶν ἀνίσων ἀλλήλοισι (22), ὡς ὁρᾶται.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ 16 \\ 130 \\ 200 \\ \hline 350 \end{array}$$

Καὶ πολλαπλασιάξω εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ νὰ προσέθω πολλάκις τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ὡς ὁρᾶται.

$$\begin{array}{r} 52 \\ 52 \\ 52 \\ 52 \\ 52 \\ 52 \\ 52 \\ \hline 364 \end{array}$$

"Ὅπερ συντομίας χάριν ἐκτίθημε οὕτως  $52 \times 7$ . Ὡς ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς θεωρούμενος μὲν ὡς παραγόμενος ἐκ δύο παραγόντων, ὀνομάζεται γινόμενον, καὶ ἡ ἐργασία πολλαπλασιασμός.. ὡς δὲ συγκείμενος ἐκ μερῶν ἀνίστων ἀλλήλοις, κεφάλαιον, καὶ ἡ ἐργασία πρόσθεσις.. ὡς δὲ συγκείμενος ἐκ μερῶν ἴσων ἀλλήλοις, καὶ ταῦτα τὰ μέρη νὰ ἦναι ὁμοειδή (3), ἀριθμὸς, καὶ ἡ ἐργασία, ἐπαριθμησις. Ὡς πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἐκληφθῆ καὶ ὡς γινόμενον, καὶ ὡς κεφάλαιον.

31. Ἀγκαλὰ καὶ ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἄλλη πρόσθεσις ἢ πλην ἔχει ἰδιότιμα καὶ ταῦτα εἶναι τὰ ἑξῆς:

α. Πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὴν μονάδα εἶναι ἴσος ἑαυτῷ. Οὕτως  $2 \times 1 = 2$ , καὶ  $3 \times 1 = 3$ , καὶ  $100 \times 1 = 100$  καὶ οὕτως ἑφεξῆς. Ὡς καὶ ἡ μονὰς πολλαπλασιασθεῖσα ἐφ' ἑαυτὴν εἶναι ἴση ἑαυτῇ: τουτέστι  $1 \times 1 = 1$ .

Πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ μηδέν, ἢ πολλαπλασιάζας τὸ μηδέν, ἐκτελεῖ γινόμενον μηδέν οὕτως  $0 \times 5 = 0$  καὶ  $5 \times 0 = 0$ . Καθότι τὸ μὲν  $0 \times 5 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$  τὸ δὲ  $5 \times 0$  σημαίνει νὰ λάβῃ τις ὀλοτελῶς τὸν 5 ἀριθμὸν.

Σημειωτέον δὲ ὅταν ὁ πολλαπλασιασθῆς, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς ἦναι εἰς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς τότε τὸ γινόμενον ὀνομάζεται Τετράγωνον. Οὕτως εἰς τὸ  $5 \times 5 = 25$ , τὰ 25 λέγεται τετράγωνον τῶν 5.. καὶ εἰς τὸ  $6 \times 6 = 36$ , τὰ 36 τῶν 6., καὶ εἰς τὸ  $100 \times 100 = 10000$ , τὰ 10000 τῶν 100. Εἰ δὲ καὶ πολλαπλασιασθῆ ἀριθμὸς τις εἰς ἐφ' ἑαυτὸν τότε τὸ γινόμενον ὀνομάζε-



ται κύβος τοῦ εἰρημένου ἀριθμοῦ. Οὕτως εἰς τὸ  $5 \times 5 \times 5 = 125$  εἰς τὰ 125 λέγεται κύβος τοῦ 5.

32. Καὶ ὅταν μὲν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐκά-  
τεροι οἱ παράγοντες σύγκηνται ἐξ' ἐνὸς μόνου χαρακτῆ-  
ρος τότε τὸ πρᾶγμα δεῖται οὐθενὸς κανόνος, εἰμὴ μόνου  
γυμνάσεως ἐπιζαμένης εἰς τὴν πρόθεσιν (29), ὥνπερ τὰ  
γινόμενα, ἢ κεφάλαια εἶναι ταῦτα.

|            |            |            |
|------------|------------|------------|
| 2 × 2 = 4  | 3 × 7 = 21 | 5 × 8 = 40 |
| 2 × 3 = 6  | 3 × 8 = 24 | 5 × 9 = 45 |
| 2 × 4 = 8  | 3 × 9 = 27 | 6 × 6 = 36 |
| 2 × 5 = 10 | 4 × 4 = 16 | 6 × 7 = 42 |
| 2 × 6 = 12 | 4 × 5 = 20 | 6 × 8 = 48 |
| 2 × 7 = 14 | 4 × 6 = 24 | 6 × 9 = 54 |
| 2 × 8 = 16 | 4 × 7 = 28 | 7 × 7 = 49 |
| 2 × 9 = 18 | 4 × 8 = 32 | 7 × 8 = 56 |
| 3 × 3 = 9  | 4 × 9 = 36 | 7 × 9 = 63 |
| 3 × 4 = 12 | 5 × 5 = 25 | 8 × 8 = 64 |
| 3 × 5 = 15 | 5 × 6 = 30 | 8 × 9 = 72 |
| 3 × 6 = 18 | 5 × 7 = 35 | 9 × 9 = 81 |

Ταῦτα ὅμως ἄλλο ὄν εἶναι, εἰμὴ ὁ πίναξ τοῦ με-  
γάλου Πυθαγόρου, οὗτινος ἡ κατασκευὴ ἔχει ὡσδέπως.

Ἐκτελῶ τὸ τετράγωνον μιᾶς γραμμῆς, ὡς τῆς ΑΒ..  
διακῶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ: τὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς ἐννέα ἴσα  
ἀλλήλοις τμήματα.. ἄγω ἐκ τῶν τομῶν εὐθείας παραλλή-  
λους μετὰ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ (καὶ οὕτω μοι προκύπτουσι  
81 τετραγωνίδια. Τότε ἐν τῇ πρώτῃ κατὰ κάθετον στήλῃ,  
ὡσαύτως καὶ ἐν τῇ ἀνωτάτῃ καθ' ὀρίζοντα, γράφω τοὺς

ἀπλοῦς χαρακτήρας: ὅ ἐστι τοὺς ἐκ τῆς μονάδος μέχρι τῶν ἐννέα εἰτα πολλαπλασιάζων ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς μιᾶς σήλης δι' ἕκαστου τῆς ἐτέρας, ἔχω ἅπαντα τὰ γινόμενα αὐτῶν, ὧν ἕκαστον ὁηλοῦται κεῖται οὕτως; ὥς γὰ ἀντικρίσει καὶ μετὸν πολλαπλασιασῆν καὶ μετὸν πολλαπλασιασέον: τὸ 5, φέρε εἰπεῖν, τῆς μιᾶς σήλης καὶ τὸ 6 τῆς ἐτέρας ἀντικρίξουσι μετὸν τετραγωνίδιον, ἔνθα εἶναι ἐγγεγραμμένος ὁ ἀριθμὸς 30.

B

Γ

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 2 | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Α

Καὶ ὡς φαίνεται ἄνευ τοῦ ἀποσηθίσματος τοῦ Πυθαγορικοῦ πίνακος εἶναι ἀδύνατον νὰ γένητις ἀριθμητικός.

33. Καθότι πᾶς πολλαπλασιασμός, καὶ τῶν μεγίστων ἀριθμῶν, συνέχεται εἰς τοῦτον τὸν πίνακα, καὶ ἔτι πλεον καὶ αὐτὴ ἡ διαίρεσις: ὅ ἐστὶν οἱ κανόνες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τῶν πλεον μεγάλων ἀριθμῶν, καταπτῶσιν εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάσῃτις ἓνα μόνον πάντοτε χαρακτήρα δι' ἑνὸς μόνου χαρακτήρος, ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ τῆς διαίρε-

σειως. Καὶ ἰδοὺ πῶς τάττονται οἱ παραγοντες, καὶ πῶς ἐκτελεῖται ἡ ἐργασία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Γράφω τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ ὑπ' αὐτὸν τὸν πολλαπλασιαστὴν, χωρὶς νὰ φροντίσω περὶ τῆς τοποθεσίας αὐτοῦ.. σύρω ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὀριζόντιον, ὡς εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐργασίας τῆς τε προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως. "Ἐσω δὲ ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐξ ἑνὸς χαρακτήρος. "Ἀρχομαι α'. νὰ πολλαπλασιάσω διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τὸν τελευταῖον χαρακτήρα τοῦ πολλαπλασιαστέου (32), καὶ γράφω τὸ γινόμενον ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων (πλήν ὄχι ὀλόκληρον ἀλλὰ τὰς μονάδας μόνον, τὰς δὲ δεκάδας τὰς κρατῶ ἀνὰ χεῖρας διὰ νὰ τὰς προσθέσω, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν (22), εἰς τὸ ἐξῆς γινόμενον τῶν δεκάδων. β'. Πολλαπλασιάσω διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τὸν δεύτερον χαρακτήρα τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ προσθέμενος εἰς τοῦτο τὸ μερικὸν γινόμενον, ἂν ἐκράτουν ἀνὰ χεῖρας μονάδας δεκάδων, ὑπογράψω τὸ κεφάλαιον (πλήν ὄχι ὀλόκληρον ἀλλὰ μόνον τὰς μονάδας, τὰς δὲ δεκάδας, ἂν ἔχη, τὰς κρατῶ ἀνὰ χεῖρας διὰ νὰ τὰς προσθέσω εἰς τὸ ἐξῆς γινόμενον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ζητήσω, φέρε εἰπεῖν, τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 2283, 6 : ἢ ἂν θέλῃς 2283 ὀργυικῶς; ἐκάστη ἐξ ἑξ ποσῶν, πόσους πόδας κάμνουσιν;

$$\begin{array}{r}
 2283 \quad . \quad . \quad \text{πολλαπλασιαστέος} \\
 6 \quad . \quad . \quad \text{πολλαπλασιαστής} \\
 \hline
 13698 \quad . \quad . \quad \text{γινόμενον}
 \end{array}$$

Ἀρχομαι λοιπὸν ἐκ τῶν μονάδων λέγων  $3 \times 6 = 18$ , καὶ γράφω ὑπὸ τῆς στήλης τῶν μονάδων τὰ 8, κρατῶ

τὴν δεκάδα ἀνά χεῖρας.. β'. ἐγὼ λέγω  $8 \times 6 = 48$ , καὶ 1, ὅπερ ὀηλ. ἐκράτου ἀνά χεῖρας  $= 49$  καὶ ὑπογράφων τὰ 9, κρατῶ ἀνά χεῖρας τὰ 4.. γ'. ἐγὼ λέγω  $2 \times 6 = 12$ , καὶ 4, ἅπερ ἐκράτου ἀνά χεῖρας  $= 16$  καὶ ὑπογράφων τὰ 6, κρατῶ ἀνά χεῖρας τὸ 1. δ'. ἐγὼ λέγω  $2 \times 6 = 12$ , καὶ 1, ὅπερ ἐκράτου ἀνά χεῖρας  $= 13$ , καὶ ὑπογράφω καὶ τὰ 13.. ἐκ τούτου διότι ἐτελείωσεν ἡ ἐργασία. Καὶ ἐπομένως ἔχω διὰ γινόμενον 13698: ὁ ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς 13698 εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον, καθότι εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ, ἢ νὰ λάθῃ τις ἐξάκις ὀλόκληρον τὸν ἀριθμὸν 2283, ἢ νὰ λάθῃ ἀνὰ μέρος ἐξάκις πρῶτον τὰς μονάδας αὐτοῦ, εἶτα τὰς δεκάδας, εἶτα τὰς ἑκατοντάδας, καὶ τέλος τὰς μονάδας χιλιάδας.

Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου ἤθελεν εὑροῖτε ὅτι καὶ  $2283 \times 3 = 6849$ , καὶ ὅτι  $2283 \times 7 = 15981$ .

34 Ἄν ὁμῶς καὶ ἐκάτεροι τῶν παραγόντων σύγκληται ἐκ πολλῶν χαρακτήρων (τότε ἐγὼ θέλω κάμει δι' ἐκάστου χαρακτήρος τοῦ πολλαπλασιασοῦ, ὅπερ ἐποίησα, ὄντος τοῦ πολλαπλασιασοῦ ἐξ ἑνὸς μόνο (32): ὁ ἐστὶν ἡμεῖς θέλομεν εἶσθαι εἰς τὸ ἐγνωσμένον συμβεβηκὲς, καὶ ἡ διαφορὰ θέλει ὑφίσταται εἰς οὐδὲν ἄλλο, ἢ εἰς τὴν τάξιν τῶν ἀνὰ μέρος γινομένων, ὅπερ ἔχει ὡςῆπως.

Πολλαπλασιάζω διὰ τοῦ χαρακτήρος τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιασοῦ τὸν πολλαπλασιαστέον ὀλόκληρον, ὡς ἀνωτέρω, ὑπογράφων τὸ γινόμενον.. β'. Πολλαπλασιάζω διὰ τοῦ χαρακτήρος τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιασοῦ τὸν πολλαπλασιαστέον ὀλόκληρον, ὡς ἀνωτέρω ἔ καὶ ὑπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ὑπογράφω τοῦτο τὸ δεύτερον γινό-

μενου.. πλην ἐπειδὴ καὶ τοῦτο τὸ γινόμενον ἔλαβε τὸ εἶναι ἐκ τῶν δεκάδων, τούτου ἕνεκεν τάττω τὸν πρῶτον αὐτοῦ χαρακτήρα ὑπὸ τοῦ δευτέρου χαρακτήρος τοῦ πρώτου γινόμενου: ὃ ἐστὶν εἰς τὴν σήλην τῶν δεκάδων.. γ'. πολλαπλασιάζω διὰ τοῦ χαρακτήρος τῶν ἑκατοντάδων τὸν πολλαπλασιασθέντα καὶ ὑπογράφω τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ δευτέρου γινόμενου.. πλην ἐπειδὴ καὶ τοῦτο τὸ γινόμενον ἔλαβε τὸ εἶναι ἐκ τῶν ἑκατοντάδων (τούτου ἕνεκεν τάττω τὸν πρῶτον αὐτοῦ χαρακτήρα ὑπὸ τοῦ δευτέρου γινόμενου: ὃ ἐστὶν εἰς τὴν σήλην τῶν ἑκατοντάδων.. καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Εἶτα προσέθημι ταῦτα πάντα τὰ μερικὰ γινόμενα & καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ζητήσθω, φέρε εἰπεῖν, τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

$$2283, 736, \quad 2283 \dots \text{πολλαπλασιαστέος}$$

$$736 \dots \text{πολλαπλασιαστής.}$$

$$\begin{array}{r} 13698 \\ 6849 \\ \hline 15981 \\ \hline 1680288 \dots \text{γινόμενον.} \end{array}$$

Τάττω αὐτούς ὡς ἀνωτέρω. Εἶτα πολλαπλασιάζω τὸν πολλαπλασιασθέντα 2283 ἀ. διὰ τοῦ 6: μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, εἴτε  $2283 \times 6 = 13698$ .. β'. διὰ τοῦ 3: δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, εἴτε  $2283 \times 3 = 6849$ .. καὶ τέλος διὰ τοῦ 7: ἑκατοντάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, εἴτε  $2283 \times 7 = 15981$ .. ὑπογράφω δὲ ταῦτα τὰ τρία μερικὰ γινόμενα ὑπὸ τῆς γραμμῆς οὕτως, ὥστε αἱ δεκάδες αὐτῶν, αἱ χιλιάδες, καὶ τὰ ἐξῆς νὰ ἦναι τεταγμένα εἰς σήλας: ὥστε ὀηλοῦσι νὰ δύναμαι νὰ κάμω τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν (22)..