12. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λοιπὸν ἐκτεθέντων, γίνεται καταφανὲς, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἄλυσός τις περιόδων: πρῶτον μὲν κατὰ δεκάδας (4.) ἔπειτα δὲ κατὰ χιλιάδας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Καθότι ἂν ἐγὼ λάβω δεκάκις ἢ τὸ 1, ἢ τὰ 5, ἢ τὰ 9, ἔξω 10, ἢ 50, ἢ 90. Καὶ ἂν λάβω δεκάκις τὰ 10, ἢ 50, ἢ 90 · ἔξω 100, ἢ 500, ἢ 900. Καὶ τέλος ἂν λάβω δεκάκις τὰ 100, ἢ 500, ἢ 900 · ἔξω 1000, ἢ 5000, ἢ 9000. Καὶ ἰδοὺ μία περίοδος συγκειμένη ἐκ μονάδων, δεκάδων, καὶ ἑκατοντάδων, τὸ πέρας τῆς ὁποίας εἶναι χιλιάδες.

Τώρα θέλων ἐγὼ νὰ προχωρήσω περαιτέρω, λέγω τὰ ὅμοια: τουτέςι μονάδες χιλιάδος, δεκάδες χιλιάδος, ἑκατοντάδες χιλιάδος, καὶ τοῦτο μέχρι τῶν 999999, ἔνθα ἂν προσθέσω μίαν μονάδα, ἔξω ἓν μιλλιόνιον. Ὥςε μέχρι τοῦ μιλλιονίου ἐγὼ ἔχω δύο περιόδους συγκειμένας ἐκ τριῶν χαρακτήρων, ἢ ἂν θέλῃς τὸ μιλλιόνιον ἔχει μεθ' ἑαυτὸ δύο τριάδας. Καὶ οὗτος εἶναι ὁ λόγος δι' ὅνπερ ἐφάνη ἀρεςὸν εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς τοῦ νὰ ςίζωσιν ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας εἰς πάντα ἀριθμὸν, ἀρχόμενοι δηλ. ἀπὸ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριςερὰ, ἢ ἂν θέλῃς ἀπὸ τῶν μονάδων, ὥσπερ 1,234,567, ἢ καὶ ἁπλῶς οὕτως: 1 234 567, ἔνθα δηλονότι ἡ μὲν πρώτη ἐκ τῶν δεξιῶν τριὰς περιέχει μονάδας, δεκάδας, καὶ ἑκατοντάδας μονάδων · ἡ δὲ δευτέρα μονάδας, δεκάδας, καὶ ἑκατοντάδας χιλιάδος.

13. Ἐκεῖνο ὅμως, ὅπερ ἠκολούθησε μέχρι τῶν ἑπτὰ χαρακτήρων, εἴτε ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ μιλ-

λιονίου, ἀκολουθεῖ βέβαια ἀπαραλλάκτως καὶ εἰς τοὺς ἀκολούθους ἑπτὰ χαρακτῆρας· καὶ οὕτω λαμβάνει ὄνομα τὸ πέρας αὐτῶν διλλιόνιον, καὶ μετ' ἄλλους ἑπτὰ, τριλλιόνιον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὡς ὁρᾶται εἰς τοῦτον τὸν ἀριθμόν: 7, 6 5 4, 3 2 1, 2 3 4, 5 6 7.

7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
διλλιόνια.	ἑκ. χιλ. μιλ.	δεκ. χιλ. μιλ.	μ. χιλ. μιλλιονίου,	ἑκ. μιλ.	δεκ. μιλ.	μ. μιλλιονίου.	ἑκ. χιλ.	δεκ. χιλιάδος.	μ. χιλιάδος.	ἑκατοντάδες.	δεκάδες.	μονάδες.

ὅς τις δηλονότι προφέρεται ὧδέπως, ἑπτὰ διλλιόνια, ἑξακόσιαι πεντήκοντα τέσσαρες χιλιάδες, τριακόσια εἴκοσι ἓν μιλλιόνια, διακόσιαι τριάκοντα τέσσαρες χιλιάδες, πεντακόσιαι ἑξήκοντα ἑπτὰ (μονάδες δηλονότι.)

Ὥςε εἶναι οἴκοθεν σαφὲς, ὅτι οἷον λόγον ἔχει τὸ μιλλιόνιον πρὸς τὴν μονάδα, τὸν αὐτὸν καὶ τὸ διλλιόνιον πρὸς τὸ μιλλιόνιον.. καὶ ἐξ ἐναντίας ὡς ἡ μονὰς περιέχεται εἰς τὸ μιλλιόνιον· οὕτω καὶ τὸ μιλλιόνιον εἰς τὸ διλλιόνιον.. ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ τριλλιόνιον ἔχει πρὸς τὸ διλλιόνιον, ὡς τὸ διλλιόνιον πρὸς τὸ μιλλιόνιον.

Μονὰς	1
Ἓν μιλλιόνιον	1,000,000
Ἓν διλλιόνιον	1,000,000,000,000
Ἓν τριλλιόνιον	1,000,000,000,000,000,000
Ἓν τετραλλ.	1,000,000,000,000,000,000,000,000

Οἱ Γάλλοι ὅμως ἔχουσι διαφόρως πως τὰς ὀνομασίας τῶν χαρακτήρων τῶν ἀνωτέρω τοῦ μιλλιονίου: ὅ ἐςιν, ὀνομάζουσι διλλιόνιον, ὄχι τὸν δέκατον τρίτον χαρακτῆρα ἑνὸς ἀριθμοῦ· ἀλλὰ τὸν δέκατον· καὶ τετραλλιόνιον τὸν δέκατον τρίτον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

14. Εἶναι ἴσως ἄξιον σημειώσεως, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ διαιροῦνται ὑπὸ τῶν ἀριθμητικῶν εἰς δύο, εἰς Περιττοὺς καὶ Ἀρτίους, καὶ ὀνομάζουσιν ἀρτίους πάντας ἐκείνους, οἵτινες διαιροῦνται δίχα. Οὕτω τὰ 2, 4, 6, 8, 10, κ. τ. ξ. εἶναι ἄρτιοι· καὶ περιττοὶ τὰ 3, 5, 7, 9, 11, κ. τ. ξ. Διαιροῦσιν ἔτι τοὺς ἀριθμοὺς εἰς ἀφῃρημένους καὶ συγκεκραμμένους. Πλὴν ἡ τοιαύτη διαίρεσις, ὡς ἐγὼ νομίζω, εἶναι ἀσύςατος. Καθότι ἂν ἀριθμὸς ἄλλο δὲν ἦναι κατ' αὐτοὺς, εἰμὴ ἰδέα (3).. καὶ ἂν αἱ ἰδέαι ἦναι ὄχι συγκεκραμμέναι· δῆλον ὅτι οὔτε ὁ ἀριθμός. Πλὴν τοῦτο θέλομεν τὸ ἐξετάσει λεπτομερῶς κατὰ διαφόρους τόπους, ὡς ὂν οὐσιωδέςατον.

15. Μετὰ τὴν μέχρι τοῦδε διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν: ὅ ἐςιν ἀφ' οὗ ἐμάθομεν καὶ τὴν ἀπόλυτον σημασίαν ἑκάςου χαρακτῆρος (7), καὶ τὴν τοπικὴν, ἢ σχετικὴν (8), καὶ ὅτι ἄλλο δὲν εἶναι ἕκαςος τῶν ἀριθμῶν, εἰμὴ σειρὰ περιόδων ἐκ τριῶν χαρακτήρων· ἡμεῖς δὲν θέλομεν βέβαια ἀπαντήσει δυσκολίαν τινὰ τὸ νὰ γράψωμεν πάντα ἀπαγγελθέντα ἀριθμόν.

Μοὶ λέγει τις, φέρε εἰπεῖν, νὰ γράψω δέκα ἐννέα. Ἐγὼ λοιπὸν ςοχαζόμενος ἀμέσως ὅτι οὗτος ὁ ἀριθμὸς εἶναι κατώτερος τῶν ἑκατὸν, συνάγω ὅτι σύγκειται ἐκ μόνων δύο χαρακτήρων (10): τουτέςιν ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων.. καὶ ἔτι ἐπειδὴ ἡ μὲν δεκὰς εἶναι μία, ἐννέα δ' αἱ μονάδες· τούτου ἕνεκεν τὰ γράφω καὶ ἐγὼ οὕτως 19.

Α'ν ὅμως καί μοι εἴπῃ νὰ γράψω εἴκοσι ‹ τότε ἐπειδὴ καὶ οὗτος ὁ ἀριθμὸς περιέχει μόνον δεκάδας, καὶ τελείως μονάδας ‹ διὰ τοῦτο καὶ ἐγὼ θέλω γράψει μηδὲν μὲν μονάδας, δεκάδας δὲ 2, οὕτως 20 (9).

Μοὶ λέγει τις νὰ γράψω πεντακόσια ἑξήκοντα τρία. Ε'γὼ λοιπὸν εὐθὺς ςοχάζομαι, ὅτι οὗτος ὁ ἀριθμὸς ἄρχεται ἐκ τῶν ἑκατοντάδων: ὅ ἐςιν ὅτι σύγκειται ἐκ τριῶν χαρακτήρων: πέντε ἑκατοντάδων δηλ. ἕξ δεκάδων, καὶ τριῶν μονάδων, ὥςε τὰ γράφω οὕτω 563. Εἰ δὲ καί μοι εἴπῃ νὰ γράψω πεντακόσια ἑξήκοντα ‹ τότε ἐπειδὴ καὶ οὗτος ὁ ἀριθμὸς περιέχει μὲν τελείως μονάδας, δεκάδας δὲ καὶ ἑκατοντάδας ‹ καὶ ἐγὼ πρέπει νὰ γράψω μηδὲν μονάδας, οὕτω 560. Εἰ δὲ καὶ προφέρει πεντακόσια τρία ‹ τότε ἐπειδὴ καὶ οὗτος ὁ ἀριθμὸς περιέχει τελείως δεκάδας ‹ διὰ τοῦτο ἐγὼ πρέπει νὰ γράψω μηδὲν εἰς τὸν τόπον αὐτῶν, οὕτω 503 (αὐτόθι).

Μοὶ λέγει τις νὰ γράψω χίλια πεντακόσια ἑξήκοντα τρία. Ἐγὼ λοιπὸν ςοχάζομαι εὐθὺς, ὅτι οὗτος ὁ ἀριθμὸς ἄρχεται ἐκ χιλιάδος: ὅ ἐςιν ὅτι σύγκειται ἐκ τεσσάρων χαρακτήρων, καὶ ὅτι ὁ πρῶτος εἶναι μονὰς, ὁ δεύτερος πέντε, ὁ τρίτος ἕξ, καὶ ὁ τέταρτος τρία ‹ ὥςε τὰ γράφω καὶ ἐγὼ οὕτω 1563.

Τοῦτο αὐτὸ λοιπὸν πρέπει νὰ ἐκτελῇ τις εἰς τὴν ἀπαγγελίαν παντὸς ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ πλειόνων χαρακτήρων. Ἂν, λέγω, καὶ ὁ ἀπαγγελόμενος ἀριθμὸς ἄρχηται ἐκ δεκάδων χιλιάδος ‹ πρέπει νὰ γράψῃ τις αὐτὸν διὰ πέντε χαρακτήρων: καὶ ἂν ἐξ ἑκατοντάδων χιλιάδος, δι' ἓξ· καὶ ἂν ἐκ μιλλιονίων. δι' ἑπτὰ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἅπασα ὅμως ἡ δυσκολία περὶ τῆς γραφῆς καὶ ἀναγνώσεως τῶν ἀριθμῶν ἐξομαλίζεται διὰ μόνης τῆς γυμνάσεως· ἡ δὲ γύμνασις ἀποκτᾶται ἐξ οὐδενὸς ἄλλου, ἢ ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν ἐργασιῶν, τουτέςι προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως, εἰς ἅπερ ἤδη ἐμβαίνομεν.

ΚΕΦ. Β'.

Περὶ Σημείων.

16. Πρὶν ὅμως νὰ ἔμβωμεν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμητικῶν ἐργασιῶν, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκτεθῇ διδασκαλία τις περί τινων σημείων, ἅπερ εἶναι ἀναγκαιότατα εἰς τὴν διάλεκτον τῶν μαθητικῶν.

Ἡμεῖς λοιπὸν εἴδομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἔργον τοῦ νοὸς (3): τουτέςιν ἰδέα, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ, εἶναι ἀφηρημένον καὶ ἄνευ ὑποςηρίγματος. Ἀλλ' εἶναι οἴκοθεν σαφὲς, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ δὲν ἐδημιουργήθησαν ἁπλῶς καὶ ἐπὶ ματαίῳ· ἀλλ' ἕνεκα τινός: τουτέςι πρὸς ἐφαρμογὴν ὄντων αὐθυπάρκτων. Ὥςε ἐν ᾧ τις ἀριθμεῖ, αὐτὸς ἐκφωνεῖ καὶ τὸ εἶδος τῶν μονάδων, λέγων δηλονότι 5 ἄνθρωποι, 5 πλοῖα κ.τ.ξ. Πλὴν τὸ σκοπούμενον τοῦ ἀριθμοῦντος δὲν εἶναι τοῦτο μόνον· εἶναι ἐν ταυτῷ τὰ νὰ φανερώσῃ καὶ τίνος εἶναι κτήματα τὰ ἀριθμούμενα. Ὅθεν λέγων τις 100 πρόβατα, αὐτὸς προςίθεται καὶ τὸ ἐμὰ, ἢ σὰ, ἢ ἐκείνου.. καὶ λέγων τὸ, ὁ ςόλος εἶναι 100 νηῶν, προςίθεται καὶ τὸ Ἀγγλικὸς, ἢ Ῥωσσικὸς, ἢ καὶ τ. ξ. ἔνθα δηλονότι διὰ τοῦ ἐπιθέτου παρίςησι τὴν ἀναφορὰν, ἢ κτῆσιν τῶν ἀριθμουμένων πρὸς τὸν κτήτορα.

Πολλάκις ὅμως ἀντὶ τῶν κτητικῶν ἡμεῖς μεταχειριζόμεθα τὸ ἔχω ῥῆμα, λέγοντες ἔχω 100 πρόβατα, ἢ 100 πλοῖα, ἢ ἄλλο τι: ἔνθα δηλονότι τὸ ἔχω ἐμφανίζει τὴν κτῆσιν, ἢ ἀναφορὰν τοῦ ἀριθμουμένου. Ταύτην λοιπὸν λέγω τὴν ἀναφορὰν οἱ Γεωμέτραι τὴν ἐκφράζουσι διὰ τούτου τοῦ σημείου +, εἰς ὅπερ ἐγὼ δίδω ὄνομα Θέσει. Ὥςε θέλων νὰ ἐκθέσω ὅτι ἔχω 100 γρόσια καὶ ἄλλα 5, τὰ γράφω οὕτως 100 + 5, ὅπερ δηλ. ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ 105. Ὡσαύτως καὶ τὰ 100 + 5 + 3 + 120, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὰ 228 ‹ ὅπερ δηλονότι σημαίνει, ὅτι εἰς τὰς ἑκατὸν μονάδας πρῶτον πρέπει νὰ προσθέσω πέντε ‹ εἶτα εἰς τὰς ἑκατὸν πέντε, ἄλλας τρεῖς ‹ καὶ τέλος εἰς τὰς ἑκατὸν ὀκτὼ, ἄλλας ἑκατὸν εἴκοσι. Ὥςε τὸ σημεῖον θέσει ἄλλο δὲν ἐμφανίζει, εἰμὴ σύνθεσιν ἀριθμῶν, ἢ μερῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ ‹ μερῶν ὅμως ἀνίσων ἀλλήλοις, ἀλλέως ἤθελεν εἶναι πολλαπλασιασμὸς, καὶ ὄχι ἀρίθμησις. Συμπέρασμα λοιπὸν, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς σύγκειται καὶ ἐξ ἴσων, καὶ ἀνίσων ἀλλήλοις μερῶν.

17. Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ διὰ τοῦ θέσει σημείου ἐγὼ ἐκτίθημι τὰ μέρη τοῦ ὅλου.. καὶ ἐπειδὴ τὰ μέρη ἑνὸς ὅλου εἶναι ἴσα μὲ αὐτὸ τὸ ὅλον ‹ τούτου ἕνεκεν ἐγὼ δύναμαι νὰ ἐκθέσω τοῦτο διά τινος σημείου ‹ καὶ τοῦτο εἶναι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ὡς τὸ =, ὅπερ καὶ Σημεῖον Ἰσότητος ὀνομάζεται. Οὕτω τὰ 100+5+3+120

$=228$, θέλει νὰ εἰπῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $100+5+3+120$ εἶναι ἴσοι μὲ τὸν ἀριθμὸν 228. Ὥςε τὸ σημεῖον $=$ σημαίνει ἰσότητα εἰς τὰ δύο μέρη, ἅπερ παράκεινται ἑκατέρωθεν αὐτοῦ. Τὸ πᾶν ὅμως: ὃ ἐςὶ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος μετὰ τῶν ἑκατέρωθεν αὐτοῦ μερῶν ὀνομάζεται Ἐξίσωσις, μέλη δὲ τῆς ἐξισώσεως, οἱ παρακείμενοι ἐξ ἑκατέρου τῶν μερῶν τοῦ σημείου ἀριθμοί. Οὕτως εἰς τὴν ἐξίσωσιν $100+5+3+120=228$, τὸ πρῶτον μέλος εἶναι $100+5+3+120$, τὰ δὲ 228, τὸ δεύτερον· ἔνθα, ὡς ὁρᾶται, τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως εἶναι μία καὶ ἡ αὐτὴ ποσότης, ὑπὸ διαφόρων ὅμως μορφῶν. Ὥςε ἂν ἦν ἡ ἐξίσωσις τὸ $\alpha=\beta+\gamma$. τοῦτο ἤθελε νὰ εἰπῇ ὅτι τὸ $\overline{\alpha}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\overline{\beta}$ θέσει τοῦ $\overline{\gamma}$· ἂν δηλονότι ὑπετίθετο νὰ παριςῶσι ποσότητας γενικὰς τὰ γράμματα α, β, γ. Ἐπειδὴ ὅμως καὶ πᾶς ἀριθμὸς εἶναι τοιοῦτον ὅλον, ὥςε νὰ σύγκηται καὶ ἐκ διαφορετικῶν μερῶν (16): ὃ ἐςὶ μεθερμηνευόμενον, ἐπειδὴ καὶ πᾶς ἀριθμὸς ὡς ὅλον θεωρούμενος, εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκτεθῇ διὰ διαφόρων μορφῶν· τούτου ἕνεκεν, εἰς τὰς ἐξισώσεις, δὲν εἶναι ἀνάγκη τὸ νὰ ἦναι τὸ ἓν μέλος πάντοτε ὅλον· ἀλλ᾽ εἶναι τὸ αὐτὸ, καὶ ἂν ἔχῃ μορφὴν διάφορον. Οὕτως ἐπειδὴ καὶ τὸ $3+7$ εἶναι ἴσον μὲ 10· διὰ τοῦτο δύναμαι νὰ τὸ βάλω εἰς ἐξίσωσιν λέγων $3+7=10$. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ τὸ $4+6$ εἶναι ἐπίσης ἴσον μὲ 10· διὰ τοῦτο εἶναι ὄχι ὀλιγώτερον ὀρθὸν καὶ τὸ $3+7=4+6$. ὡσαύτως καὶ τὸ $4+6=2+3+1+4$, καὶ ἄλλως διαφόρως.

18. Τοῦτο δὲ τὸ σημεῖον — σημαίνει ἀφαίρεσιν: ὃ

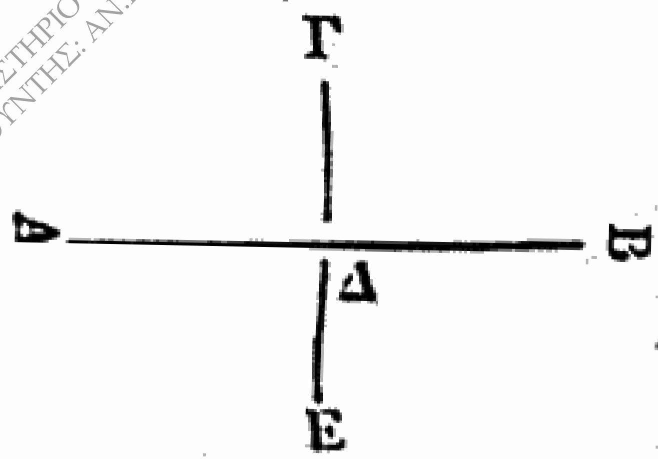
ἐςιν ἐμφανίζει, ὅτι ὁ μετ' αὐτὸ ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ πρὸ αὐτοῦ, εἰς ὅπερ ἐγὼ δίδω ὄνομα Ἀποθέσει. Οὕτως $100-5$, θέλει νὰ εἰπῇ ὅτι ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ ἑκατὸν ἀφήρηται 5. Ὅθεν δύναμαι νὰ θέσω τὸ πρᾶγμα καὶ εἰς ἐξίσωσιν ὠδὲ πως $100-5=95$. Τοιαύτη εἶναι καὶ ἡ ἐξίσωσις $100-5=80+15$, καὶ ἄλλως διαφόρως (17). Ὥςε καὶ τὸ $a-\beta=\gamma$ σημαίνει ὅτι τῆς ποσότητος $\overline{\beta}$ ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς ποσότητος $\overline{a}$, τὸ κατάλοιπον εἶναι ἴσον μὲ τὴν ποσότητα $\overline{\gamma}$.

Σημειωτέον ὅμως ὅτι πᾶς ἀριθμὸς δεχόμενος τὸ σημεῖον $+$ ὀνομάζεται Θετικὸς, καὶ Ἀποφατικὸς, ἢ Ἀποθετικὸς, ὅταν τὸ $-$. Πᾶς ὅμως ἀριθμὸς, ὅςις ςερεῖται τοῦ $+$, ἢ $-$ σημείου, οὗτος ἔχει σιωπηλῶς πως ὑπονοούμενον τὸ $+$ σημεῖον. Καὶ πρὸς τούτοις εἴθισαι εἰς ἑκάτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως νὰ προτίθηται ἡ θετικὴ ποσότης, καὶ οὐδέποτε ἡ ἀποθετική.

19. Διὰ νὰ λάβῃ ὅμως τις ἰδέαν καθαρὰν τῶν θετικῶν καὶ ἀποθετικῶν ἀριθμῶν, ἢ ποσοτήτων, εἶναι ἀνάγκη πᾶσα νὰ ςοχασθῇ, ὅτι ἡ λέξις θετικὸς καὶ ἀποθετικὸς δὲν σημαίνει πρᾶγμα, εἴτε ποσότητα, ἀλλ' ἀναφορὰν ποσότητος πρός τινα. Καὶ ἑπομένως θετικοὶ καὶ ἀποθετικοὶ ἀριθμοὶ διαφέρουσιν ὁλοτελῶς ἀλλήλων: εἶναι δηλονότι πραγματικῶς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ, καὶ διαφέρουσι μόνον κατὰ τὴν ἀναφορὰν, ὅπερ ἤθελε γένη σαφέςερον ἐπὶ παραδειγμάτων.

Οἱ Ἀριθμητικοὶ παριςῶσι τὴν μὲν περιουσίαν αὐτῶν διὰ τοῦ θετικοῦ σημείου, τὸ δὲ χρέος διὰ τοῦ ἀποθετικοῦ. Ὥςε ὅταν ἔχω ἑκατὸν γρόσια, ἐγὼ τὰ γράφω οὕτως $+$

100=: καὶ ὅταν χρεωςῶ πεντήκοντα, τὰ γράφω οὕτω —50.. καὶ ἂν τις χρεωςῶνμοι γρόσια 100, μοὶ ἔφερνε τὰ 10, ἐγὼ ἔπρεπε νὰ τὰ γράψω οὕτως 100—10. Ἀλλ' εἶναι ἐκτὸς πάσης ἀντιλογίας, ὅτι τὰ γρόσια εἶναι ἀείποτε γρόσια: τουτέςι μονάδες μεταλλικαί: καὶ ἐν ᾧ δηλ. εἶναι εἰς τὴν ἐμὴν ἐξουσίαν, καὶ ἐν ᾧ εἰς ἄλλου. Ὥςε τὸ θετικὸς καὶ τὸ ἀποθετικὸς διαφέρουσι μόνον κατὰ τὴν ἀναφορὰν, εἴτε κατὰ τὸ ποιόν. Τοῦτο αὐτὸ ἀκολουθεῖ καὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν. Ἔςω λέγω μία εὐθεῖα,



εἴτε μία ποσότης, ὡς ΑΒ.. ἐπὶ ταύτης κατάγω μίαν εὐθεῖαν καθέτως, τὴν ΓΔ. εἴτε μίαν ἄλλην ποσότητα, ἥτις εἶναι βεβαία ποσότης θετική. Τώρα ἂν κατάξω καὶ ἄλλην ἐκ τοῦ ἀπέναντι μέρους, ὡς τὴν ΕΔ, ἐπ' αὐτῆς ταύτης τῆς ΑΒ, αὕτη θέλει εἶναι ὄχι ὀλιγώτερον ποσότης, ποσότης ὅμως ἀποθετική: ὅ ἐςιν ἕξει ἀναφορὰν πρὸς τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἐναντίαν, ἢ ἡ ΓΔ εὐθεῖα. Σημειωτέον ὅμως ὅτι ἔκειτο παρ' ἐμοὶ τὸ νὰ λάβω διὰ θετικὴν ποσότητα καὶ τὴν ΕΔ. Πλὴν ἂν τοῦτο ἐποίουν, ἦν ἀδύνατον εἰς ἐμὲ τὸ νὰ μὴν ἐκλάβω πλέον τὴν ΓΔ εὐθεῖαν δι' ἀποθετικὴν ποσότητα. Σημειωτέον δ' ἔτι, ὅτι αἱ ἀποθετικαὶ ποσότητες εἶναι κατὰ τὴν ἀναφορὰν ἐλάσσονες τοῦ 0. Καθότι ἐγὼ εἰμὶ πλουσιώτερος, ὅταν ἡ ἐμὴ περιουσία εἶναι μηδὲν, ἢ ὅταν χρεωςῶ: ὅ ἐςιν ὅταν ἔχω —5000γρ'.

Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ οἱ ἀποθετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ὄχι ὀλιγώτερον ἀριθμοὶ, τούτου ἕνεκεν ἐγὼ δύναμαι νὰ ἐκτελέσω καὶ διὰ μόνων αὐτῶν ἐξίσωσιν. Οὕτως — 10 — 5 = -15, καὶ — 100 — 5 — 3 — 120 = -228. Πλὴν ὡς ἔχομεν σημεῖα ἐξισώσεως ‹ οὕτω καὶ ἀνισότητος.

20. Καθότι τοῦτο τὸ σημεῖον > σημαίνει ὑπεροχὴν, πρὸς ὅπερ μέρος κεῖται κεχηνός ‹ καὶ οὕτω μὲν > κείμενον, ὀνομάζεται πλέον ‹οὕτω δὲ < › ἧττον. Οὕτω τὰ 4 > 3 σημαίνουσιν ὅτι τὰ 4 εἶναι μείζονα τῶν 3. Ὡσαύτως καὶ ἂν ἦν α > β, τοῦτο ἤθελε σημάνοι ὅτι ἡ ποσότης α εἶναι μείζων τῆς β, χωρὶς ὅμως νὰ λέγῃ, καὶ ὁποῖαί τινες εἶναι αἱ ποσότητες α, β. Τὰ δὲ 3 < 4 σημαίνουσιν ὅτ τὰ 3 εἶναι ἐλάσσονα τῶν 4. Καὶ ἂν ἐν γένει ἦν β < α ἤθελε σημάνοι ὅτι ἡ ποσότης β εἶναι ἐλάσσων τῆς ποσότητος α. Ταῦτα εἰσὶ σημεῖα πολλάκις χρήσιμα ‹ καθότι οἱ μαθηματικοὶ πολλάκις ἔχουσι χρείαν εἰς τοὺς λογαριασμοὺς αὐτῶν, ὄχι μόνον ἐξισώσεως, ἀλλὰ καὶ ἁπλῶς συγκρίσεως, ὑπεροχῆς, ἢ ὑφέσεως δηλονότι ποσότητος πρὸς ποσότητα.

21. Τοῦτο δὲ τὸ σημεῖον × σημαίνει πολλαπλασιασμόν: τουτέστιν οἱ ἀριθμοὶ, οἵτινες κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτοῦ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ὑπ' ἀλλήλων. Οὕτως 4 × 6 προφέρεται 4 ἐπὶ τὸ 6, ἢ 4 πολλαπλασιασθὲν διὰ τοῦ 6: ἢ καὶ ἂν θέλῃς, σημαίνει νὰ λάβῃ τις ἑξάκις τὰ 4 ‹ καὶ τούτου ἕνεκεν δύναμαι νὰ τὸ ἐκθέσω καὶ οὕτω. 4 × 6 = 24, ὁμοίως καὶ 3 × 15 = 45, καὶ 10 × 10 = 100.

Πολλάκις ὅμως οἱ μαθηματικοὶ μεταχειρίζονται διὰ σημεῖον πολλαπλασιασμοῦ μίαν στιγμὴν, παρεντιθεμένην μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν, οὕτως 4.6 = 24, καὶ 10.

10 = 100. Ἐνίοτε πάλιν καὶ παρένθεσιν, οὕτω $(3+4)2 = 3\times2+4\times2$: ὅ ἐςι, σημαίνει ὅτι τὰ 2 πολλαπλασιάζουσι καὶ τὰ 3, καὶ τὰ 4.

22. Τέλος πάντων μία γραμμὴ ὁριζόντιος, κειμένη μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, εἶναι σημεῖον διαιρέσεως: τουτέςιν ὁ μὲν ἄνωθεν παρίςησι τὸ ὅλον (ὁ δὲ ὑποκάτωθεν ὅτι τοιοῦτον μέρος: ὅ ἐςι ποσάκις εἰσέρχεται εἰς αὐτό. Οὕτως $\frac{24}{6} = 4$, καὶ $\frac{100}{10} = 10$.

Οὐδαμῶς ὅμως ὀλιγώτερον εἶναι σημεῖον διαιρέσεως καὶ δύο ςιγμαὶ παρεντιθέμεναι μεταξὺ δύο ἀριθμῶν. Οὕτως 24 : 6 = 4, καὶ 100 : 10 = 10.

ΚΕΦ. Γ'.

Περὶ Προσθέσεως καὶ Ἀφαιρέσεως.

23. Τὸ πρῶτον λοιπὸν πάθος, ἢ ἰδιότης τῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἡ πρόσθεσις. Καὶ τὸ νὰ ἐκθέσῃ τις δι' ἑνὸς μόνου ἀριθμοῦ τὴν σημασίαν πολλῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ὀνομάζεται Πρόσθεσις. Ὥςε πρόσθεσις εἶναι ἀριθμητικὸν πρόβλημα, δοθέντων τῶν μερῶν ἑνὸς ὅλου, νὰ εὕρῃ τις τὸ ὅλον. Κεφάλαιον δ' ὀνομάζεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, ἢ τὸ ὅλον.

Καὶ ἂν μὲν ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἦναι ὁ εἷς μονὰς, τότε εἶναι χρεία οὐδενὸς κανόνος. Καθότι ἂν μοὶ δοθῇ νὰ προσθέσω εἰς τὸν ἀριθμὸν 10 τὸν 7 (ἐγὼ θέλω προσθέσει αὐτὸν κατὰ τὰς ἀρχὰς τῆς ἐπαριθμήσεως: ὅ ἐςι θέλω προσθέσει εἰς τὰς 10 μονάδας ἄλλας 7, καὶ ἔξω

17, ἅπερ δύναμαι νὰ βάλω καὶ εἰς ἐξίσωσιν ὧδέπως 10+7=17. Καὶ ἂν ἦναι χρεία νὰ προσθέσω εἰς τὸν ἀριθμὸν 228 τὸν 7, ἐγὼ θέλω προσθέσω 7 μονάδας· καὶ ἔξω διὰ κεφάλαιον 235: ὅ ἐςι τὸ πᾶν ἐκτελεῖται διὰ μόνης τῆς μνήμης. Ἂν ὅμως οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ σύγκηνται ἐκ πολλῶν χαρακτήρων· τότε εἶναι χρεία πρὸς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν ὁ ἑξῆς τρόπος.

Γράφω τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς κατὰ τάξιν, ὥςε αἱ μὲν μονάδες τοῦ ἑνὸς νὰ ὑπόκηνται ὑπὸ τῶν μονάδων τοῦ ἄλλου, αἱ δὲ δεκάδες ὑπὸ τῶν δεκάδων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς: ὅ ἐςιν αἱ μὲν μονάδες αὐτῶν νὰ ἐκτελῶσι μίαν ςήλην, αἱ δὲ δεκάδες ἄλλην, καὶ ἄλλην αἱ ἑκατοντάδες, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.. εἶτα ἄγω μίαν γραμμὴν ὑπὸ πάντων τῶν ἀριθμῶν.

Ἔπειτα α΄. ἄρχομαι τῆς προσθέσεως, ἣν ἔμαθον (16) ἐκ τῆς ςήλης τῶν μονάδων, γράφων τὸ κεφάλαιον αὐτῶν ὑποκάτω τῶν μονάδων.. β΄. ςοχάζομαι τὰς δεκάδας ὡς μονάδας, καὶ ἐκτελῶ εἰς αὐτὰς τὸ ὅμοιον.. γ΄. ςοχάζομαι τὰς ἑκατοντάδας ὡς μονάδας, καὶ ἐκτελῶ τοῦτο αὐτὸ· καὶ οὕτως ἐπακολουθῶ νὰ ἐκτελῶ τὸ αὐτὸ εἰς ὅσας ςήλας ἤθελον ἔχοι οἱ δοθέντες ἀριθμοί.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, τὸ κεφάλαιον τῶν ἀριθμῶν 64392, 1603. Γράφω λοιπὸν αὐτοὺς ὡς ἐνταῦθα ὁρῶνται, ἄγων ὑπ' αὐτῶν γραμμὴν ὁριζοντίως.

$$\begin{array}{rr} & 64392 \\ & 1603 \\ \hline \text{Κεφάλ.} & 65995 \end{array}$$

Ἔπειτα ἄρχομαι ἐκ τῶν μονάδων, ὧδέ πως. 3 καὶ 2 ποιοῦσι 5, ἅπερ γράφω ὑποκάτω τῆς πρώτης ςήλης.. β΄. περνῶ εἰς τὰς δεκάδας, λέγων 0 καὶ 9 ποιοῦσιν 9, ἅπερ γράφω ὑποκάτω τῆς δευτέρας ςήλης.. γ΄. ἔρχομαι εἰς τὴν τρίτην ςήλην, λέγων 6 καὶ 3 ποιοῦσιν 9, ἅπερ γράφω ὑποκάτω ταύτης.. δ΄. ἐρχόμενος εἰς τὴν τετάρτην ςήλην, λέγω 1 καὶ 4 ποιοῦσι 5, ἅπερ γράφω ὑποκάτω ταύτης.. καὶ τέλος ἔρχομαι εἰς τὴν πέμπτην ςήλην, λέγων μηδὲν καὶ 6 ποιοῦσι 6, καὶ γράφω ταῦτα ὑποκάτω αὐτῆς. Ὥςε ὁ ἀριθμὸς 65995 εἶναι τὸ ζητούμενον κεφάλαιον τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν.. ἐκ τοῦ διότι περιέχει τὰς μονάδας αὐτῶν, τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας, τὰς μονάδας χιλιάδος, καὶ τὰς δεκάδας χιλιάδος, ὡς ἐκ τῆς ἐργασίας ὁρᾶται.

β΄. Ζητείσθω τὸ κεφάλαιον τῶν ἑξῆς τεσσάρων ἀριθμῶν: 65995, 64392, 1603, 18, οὕςπερ ἐγὼ γράφω ὡς ὁρῶνται.

	65995
	64392
	1603
	18
Κεφάλ.	132008

Εἶτα ἀρχόμενος, ὡς καὶ ἀνωτέρω, ἐκ τῆς ςήλης τῶν μονάδων, λέγω $8+3+2+5=18$ (καὶ ἔπρεπε μὲν νὰ ὑπογράψω τὰς 18 μονάδας, εἴτε τὴν μίαν δεκάδα, καὶ τὰς 8 μονάδας (ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἡ ἐργασία εἶναι ἀτελείωτος: ὅ ἐςιν ἐπειδὴ καὶ ἔχω νὰ γράψω καὶ ἄλλας δεκάδας (τούτου ἕνεκεν γράφω μόνον τὰς μονάδας: τὰ 8 λέγω, καὶ κρατῶ ἀνὰ χεῖρας τὰ 10, διὰ νὰ τὰ ἑνώσω ὡς ἄλλην μονάδα εἰς τοὺς χαρακτῆρας τῆς ἑξῆς ςήλης..

καὶ διὰ τοῦτο λέγω $1+1+0+9+9=20$, ἐξ ὧν γράφω μόνον τὸ 0 ὑποκάτω ταύτης τῆς ςήλης, καὶ κρατῶ ἀνὰ χεῖρας τὰς 2 ἑκατοντάδας, διὰ νὰ τὰς ἑνώσω ὡς ἄλλας μονάδας εἰς τοὺς χαρακτῆρας τῆς ἑξῆς ςήλης. Ὥςε λέγω $2+6+3+9=20$, ἐξ ὧν γράφω μόνον τὸ 0 ὑποκάτω ταύτης τῆς ςήλης, καὶ κρατῶ ἀνὰ χεῖρας τὰς 2 χιλιάδας, διὰ νὰ τὰς ἑνώσω ὡς ἄλλας μονάδας εἰς τοὺς χαρακτῆρας τῆς ἑξῆς ςήλης. Ὥςε λέγω $2+1+4+5=12$, ἐξ ὧν γράφω μόνον τὰ 2 ὑποκάτω ταύτης τῆς ςήλης, καὶ κρατῶ ἀνὰ χεῖρας τὸ 1, εἴτε τὴν δεκάδα τῆς χιλιάδος, διὰ νὰ τὴν ἑνώσω, ὡς ἄλλην μονάδα, εἰς τοὺς χαρακτῆρας τῆς ἑξῆς ςήλης. Ὥςε λέγω $1+6+6=13$, ἐξ ὧν γράφω μόνον τὰ 3 ὑποκάτω ταύτης τῆς ςήλης.. καὶ ἐπειδὴ δὲν εἶναι πλέον ἄλλη ςήλη, διὰ τοῦτο γράφω καὶ τὴν ἀνὰ χεῖρας μονάδα εἰς τὸν πρὸ ταύτης χῶρον, ὡσὰν δηλ. νὰ ἦν καὶ ἄλλη ςήλη. Ὥςε ὁ ἀριθμὸς 132008 εἶναι τὸ ζητούμενον κεφάλαιον τῶν τεσσάρων δοθέντων ἀριθμῶν.. καὶ τοῦτο, ἐκ τοῦ διότι περιέχει ἁπάσας τὰς μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας, μονάδας χιλιάδος, καὶ δεκάδας χιλιάδος αὐτῶν.

24. Εἶναι βέβαια ἄξιον σημειώσεως ά. ὅτι ἡ δεκὰς τῶν χαρακτήρων τῆς δευτέρας ςήλης δὲν εἶναι ἁπλῶς δεκὰς, ἀλλ᾽ ἑκατοντὰς, καὶ ἡ δεκὰς τῆς τρίτης, ὄχι δεκὰς, ἀλλὰ χιλιὰς, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Καὶ ὁ λόγος εἶναι οἴκοθεν σαφής. Καθότι ὅταν εἰς τὴν ςήλην τῶν δεκάδων εἶπον $1+1+0+9+9=20$, ἦν τὸ αὐτὸ ὡσὰν νὰ ἔλεγον $10+10+00+90+90=200$, ἔνθα δηλ. τὰ

2 δὲν εἶναι δεκάδες ἀλλ' ἑκατοντάδες. Τοῦτο αὐτὸ ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ τῶν ἑξῆς ςηλῶν.

β'. Ὅτι πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρεθῆ εἰς πολλοὺς μετὰ μηδενικῶν. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς $18 = 10 + 8$, καὶ ὁ $65995 = 5 + 90 + 900 + 5000 + 60000$.. ἐκ τοῦ διότι.

$$\begin{array}{r} 60000 \\ 5000 \\ 900 \\ 90 \\ 5 \\ \hline 65995 \end{array}$$

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν, ὅτι ἡ πρόσθεσις εἶναι ἐπαρίθμησίς τις, ἔχουσα τὰς μονάδας, ἢ μέρη ἄνισα ἀλλήλοις (16).

25. Ἡ ἐργασία δὲ τῆς Ἀφαιρέσεως εἶναι ἐκ διαμέτρου ἐναντία μὲ τὴν τῆς προσθέσεως. Ὥςε ἀφαίρεσις εἶναι, δοθέντων δύο ἀριθμῶν νὰ εὕρῃ τις τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μείζονος, ὡς πρὸς τὸν ἐλάσσονα. Διαφορὰ ὀνομάζεται αὕτη ἡ ὑπεροχὴ, Ἀφαιρετέος ὁ ἐλάσσων, καὶ Μειωτέος ἤθελεν ὀνομασθῆ ὁ μείζων.

Διὰ νὰ ἐκτελέσῃ λοιπόν τις ταύτην τὴν ἐργασίαν, εἶναι ἀνάγκη, πρῶτον νὰ γράψῃ τὸν μείζονα ἀριθμὸν, εἴτε τὸν μειωτέον, καὶ δεύτερον ὑπ' αὐτοῦ τοῦ ἐλάσσονα, εἴτε τὸν ἀφαιρετέον, κατὰ ςήλην τῶν μονάδων, δεκάδων, καὶ τ. ξ. ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν δηλαδὴ, καὶ ἀγαγὼν γραμμὴν ὑποκάτω αὐτῶν, νὰ ἄρξηται τῆς ἀφαιρέσεως ἀνὰ μέρος: μονάδων δηλονότι ἐκ μονάδων, δεκάδων ἐκ δεκάδων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ ἀφαίρεσις τοῦ ἀριθμοῦ 1603 ἀπὸ τοῦ 65995. Καὶ ἐγὼ τοὺς γράφω, ὡδέπως·

$$\begin{array}{r} 65995 \\ 1603 \\ \hline \text{Διαφορ. } 64392 \end{array}$$

Ἄρχομαι δὲ τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τῶν μονάδων, λέγων 3 μέχρι τῶν 5, 2.. ἐκ τοῦ διότι 5 — 3 = 2.. ὥςε ὑπογράφω 2 ὑπὸ τῆς ςήλης τῶν μονάδων. Καὶ μεταβαίνων εἰς τὴν διαφορὰν τῶν δεκάδων λέγω, 0 μέχρι τῶν 9, 9.. ἐκ τοῦ διότι 9 — 0 = 9 · ὥςε ὑπογράφω τὰ 9 ὑπὸ τῆς ςήλης τῶν δεκάδων. Καὶ ἐρχόμενος εἰς τὴν ςήλην τῶν ἑκατοντάδων λέγω, 6 μέχρι τῶν 9, 3.. ἐκ τοῦ διότι 9 — 6 = 3 · ὥςε ὑπογράφω τὰ 3 ὑπὸ τῆς ςήλης τῶν ἑκατοντάδων. Ὡσαύτως ἐρχόμενος εἰς τὴν ςήλην τῶν χιλιάδων λέγω, 1 μέχρι τῶν 5, 4 · ἐκ τοῦ διότι 5 — 1 = 4 · ὥςε ὑπογράφω τὰ 4 ὑπὸ τῆς ςήλης τῶν χιλιάδων. Καὶ τέλος μεταβαίνων εἰς τὴν ςήλην τῶν δεκάδων τῆς χιλιάδος · ἔνθα ἐπειδὴ καὶ ὁ ἀφαιρετέος δὲν ἔχει χαρακτῆρα πλέον · διὰ τοῦτο ὑπογράφω ὁλόκληρον τὸν χαρακτῆρα 6 τοῦ μειωτέου. Καὶ οὕτως ἔχω 64372 διὰ ζητουμένην διαφοράν. Ἦν ὅμως δυνατὸν οἱ χαρακτῆρες τοῦ μειωτέου νὰ ἦναι μείζονες τῶν τοῦ ἀφαιρετέου · καὶ τότε τὸ πρᾶγμα ἤθελεν εἶναι ἧττον ἁπλούςερον, ὡς εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

Ζητείσθω ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 255234, καὶ 64392, οὕς περ τάττω ὡς ἀνωτέρω.

$$\begin{array}{r} 255234 \\ -64392 \\ \hline \text{Διαφ. } 190842 \end{array}$$