Τούτων οὕτω λοιπὸν ἐχόντων, διττῶς δύναται νὰ θεωρηθῇ τὸ πρᾶγμα: ἢ ὡς ἐκ τοῦ ὅλου δηλ. πρὸς τὰ μέρη, ἢ ὡς ἐκ τῶν μερῶν πρὸς τὸ ὅλον (καθ᾽ ἑκάτερον ὅμως παρεντίθενται δύο στιγμαὶ μεταξὺ αὐτῶν, οὕτω 360: 90, ἢ 90:360, ὧνπερ τὸ μὲν πρῶτον ἐμφανίζει ὁποῖον εἶναι τὸ ὅλον πρὸς τὸ μέρος αὐτοῦ, τὸ δὲ δεύτερον ὁποῖον εἶναι τὸ μέρος ὡς πρὸς τὸ ὅλον αὐτοῦ.. καὶ τοῦτο εἶναι ὁ λόγος εἰς τὴν ἀριθμητικὴν, ὅς τις δηλονότι σύγκειται ἐκ δύο ὅρων πάντοτε, ὧνπερ ὁ πρῶτος ὀνομάζεται ἡγούμενον, καὶ ἑπόμενον ὁ δεύτερος.

Ἀλλ᾽ ἡμεῖς εἴδομεν ὅτι τοῦτο τὸ σημεῖον τοῦ λόγου παρίστησιν ἐν ταυτῷ καὶ διαίρεσιν (22) (τούτου ἕνεκεν πᾶσα διαίρεσις ἄλλο δὲν ἤθελεν εἶναι, εἰμὴ εἷς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν.. ὥστε καὶ πᾶς λόγος ἄλλο δὲν ἤθελεν εἶναι; εἰμὴ διαίρεσίς τις. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ ἡ διαίρεσις παρίσταται διὰ κλάσματος (τούτου ἕνεκεν πᾶν κλάσμα ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ λόγος δύο ἀριθμῶν. Οὕτως ἐπειδὴ $360:90=4$, καὶ $\frac{360}{90}=4$ (τούτου ἕνεκεν καὶ $360:90=\frac{360}{90}$. Ὡσαύτως ἐπειδὴ καὶ $90:360=\frac{1}{4}$, καὶ $\frac{90}{360}=\frac{1}{4}$ (τούτου ἕνεκεν καὶ $90:360=\frac{90}{360}$. Καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν ὑφίσταται εἰς οὐδὲν ἄλλο, ἢ ὡς πρὸς τὸ τέλος. Καθότι εἰς μὲν τὴν διαίρεσιν ζητεῖται πόσον ἔχει τις νὰ λάβῃ (εἰς δὲ τὸν λόγον, τοῦτο τὸ ὅλον πόσα μέρη ἔχει ἐν ἑαυτῷ ἴσα μὲ τὸ ἑπόμενον, ἢ τοῦτο τὸ μέρος ποσάκις ἂν ληφθῇ ἐκτελεῖ τὸ ἑπόμενον ὅλον: ὅ ἐστι μεθερμηνευόμενον εἰς μὲν τὸν λόγον εἶναι ἁπλῆ θεωρία, εἰς δὲ τὴν διαίρεσιν, καὶ πρᾶξις ἢ συναγόμενον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ συναγόμενον εἶναι ἔξωθεν· τούτου ἕνεκεν εἰς τὴν ἔκφρασιν ὁ λόγος διαφέρει ὁλοτελῶς τοῦ κλάσματος. Καὶ ἐπειδὴ ἡμεῖς ὡμιλήσαμεν περὶ κλασμάτων καὶ διαιρέσεως, ἄρα ὡμιλήσαμεν καὶ περὶ λόγου.

128. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ λόγος σημαίνει ὄχι μόνον τὸ, ποσάκις εἷς ἀριθμὸς περιέχει, ἢ περιέχεται ὑπ' ἄλλου· ἀλλ' ἁπλῶς ἀναφορὰν δύο ἀριθμῶν, ἢ ποσοτήτων.. καὶ ἡ ἀναφορὰ ἔχει ὄχι μόνον τὴν ἀνωτέρω σημασίαν (127)· ἀλλ' ἁπλῶς πᾶσαν παραβολὴν δύο ἀριθμῶν, ἢ ποσοτήτων.. καὶ ἐπειδὴ δύναταί τις νὰ παραβάλῃ δύο ἀριθμοὺς, ὄχι μόνον κατὰ τὸ, ποσάκις περιέχει, ἢ περιέχεται ὁ εἷς ὑπὸ τοῦ ἑτέρου· ἀλλὰ καὶ πόσον ὁ εἷς εἶναι μείζων, ἢ ἐλάσσων τοῦ ἑτέρου: ἢ ἂν θέλῃς, τὴν ὑπεροχὴν, ἢ καθυπόβασιν τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερον· τούτου ἕνεκεν ὁ λόγος διαιρεῖται εἰς δύο: εἰς γεωμετρικὸν καὶ ἀριθμητικόν. Καὶ ὀνομάζεται γεωμετρικὸς, ἢ ὁ ἁπλῶς λόγος ὁ ἀνωτέρω (αὐτόθι)· καὶ ἀριθμητικὸς· ὅταν ζητῇ τις τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν. Οὕτως ἄν τις συγκρίνῃ τὰ 7 μὲ τὰ 5, ἢ τὰ 5 μὲ τὰ 7, διὰ νὰ εὕρῃ τὴν ὑπεροχὴν, ἢ τὴν ὕφεσιν καὶ καθυπέβασιν, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ, νὰ εὕρῃ τις τὴν διαφορὰν αὐτῶν· τοῦτο λέγεται λόγος ἀριθμητικός. Διὰ νὰ ἐμφανισθῇ ὅμως ἡ σύγκρισις τῶν δύο ἀριθμῶν, παρεντίθεται μεταξὺ αὐτῶν μία στιγμὴ, οὕτω 7· 5, καὶ 5 · 7. Ἡγούμενον ὀνομάζεται καὶ ἐνταῦθα ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ λόγου, καὶ ἑπόμενον ὁ δεύτερος.

Ὥστε διὰ νὰ εὕρῃ τις τὸν ἀριθμητικὸν λόγον δὲν ἔχει νὰ κάμῃ ἄλλο, εἰμὴ νὰ ἀφαιρέσῃ τὸν ἕνα ὅρον ἐκ τοῦ ἑτέρου. Οὕτω 5 · 7=2, καὶ 7 · 5=—2. Ἕκαστος ὅμως ὁρᾷ, ὅτι τὸ ὄνομα γεωμετρικὸς λόγος, καὶ ἀριθμητικὸς δὲν ἐπέτυχε κατὰ σκοπὸν τὴν σημασίαν.

129. Εἶναι ὅμως ἄξιον σημειώσεως ὅτι εἷς λόγος γεωμετρικὸς ἀλλάττεται ὁλοτελῶς κατὰ τὴν σημασίαν, ἂν πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσιν ἑκάτεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Οὕτως ὁ λόγος τῶν 3: 12 εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν 6: 24, καὶ μὲ τὸν 30: 120.. καὶ ὁ τῶν 30: 120 εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν 6: 24 καὶ μὲ τὸν 3: 12, καὶ μὲ τὸν 1: 4. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ὁ γεωμετρικὸς λόγος εἶναι οὐδὲν ἄλλο πραγματικῶς, εἰμὴ κλάσμα (127).. καὶ ἐπειδὴ παντὸς κλάσματος, ἑκατέρων τῶν ὅρων πολλαπλασιασθέντων, ἢ διαιρεθέντων δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἡ σημασία διαμένει ἀμετάβλητος ‹ τούτου ἕνεκεν καὶ ὁ γεωμετρικὸς λόγος θέλει μείνει ἀμετάβλητος ‹ ἂν ἀμφότεροι οἱ ὅροι πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶς λόγος ἀριθμητικὸς διαμένει ἀμετάβλητος ‹ ἂν εἰς ἑκατέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ προσθέσῃ τις, ἢ ἀφαιρέσῃ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Οὕτως ὄντος $5 \cdot 7 = 6 \cdot 8$, εἶναι καὶ $2 \cdot 4 = 3 \cdot 5$. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ὁ ἀριθμητικὸς λόγος εἶναι οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν (128) ‹ δῆλον ὅτι ἂν αὐξηθῶσιν, ἢ μειωθῶσιν ἐπίσης ὅ,τε μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος, ἡ διαφορὰ αὐτῶν θέλει μείνει ἡ αὐτή.

Συμπέρασμα λοιπὸν ὅτι ἡμεῖς δυνάμεθα κάλλιςα νὰ μεταμορφώσωμεν ἕνα λόγον εἰς ἁπλούςερον, χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὴν σημασίαν αὐτοῦ. Οὕτως ἂν ὁ δοθεὶς λόγος ἦν $3 : 120$, ἡμεῖς ἠθέλαμεν τὸν μεταβάλοι εἰς τὸν $3 : 12$, ἢ $1 : 4$.

130. Εἰς τὸν γεωμετρικὸν λόγον ὁ Εὐκλείδης ὀνομάζει μέρος *) ἐκεῖνον τὸν ὅρον, ὅςτις καταμετρεῖ ἐξηκριβωμένως τὸν ἕτερον. Οὕτως εἰς τὸν λόγον $12 : 3$, τὰ 3 εἶναι μέρος τῶν 12. Καὶ ὀνομάζει μέρη **) ἐκεῖνον τὸν ὅρον, ὅςτις δὲν καταμετρεῖ ἐξηκριβωμένως τὸν ἕτερον.. Οὕτως εἰς τὸν λόγον $12 : 5$, τὰ 5 λέγονται μέρη τῶν 12. Καὶ ἑπομένως τὸ μέρος ἔχει χώραν πάντοτε, ὅταν ὁ εἷς τῶν ὅρων ἦναι πολλαπλάσιος τοῦ ἑτέρου (29). Ὥςε μέρος καὶ πολλαπλάσιον εἶναι λέξεις συνώνυμοι.

Ἔτι ἐπειδὴ λόγος γεωμετρικὸς εἶναι οὔτε τὸ ἡγούμενον, οὔτε τὸ ἑπόμενον, ἀλλ' ἡ τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἑπόμενον ἀναφορὰ (127).. καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀναφορὰ δύο ἴσων ἀλλήλοις ἀριθμῶν εἶναι μονὰς, ἑπόμενον εἶναι ὅσον τὸ ἡγούμενον εἶναι μεῖζον, ὄχι ἀπολύτως, ἀλλ' ὡς τὸ ἑπόμενον, τοσοῦτον καὶ ὁ λόγος αὐτῶν νὰ ἦναι μείζων, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. Οὕτως ἐπειδὴ $3 : 3 = 1$, καὶ $12 : 6 = 2$, καὶ $12 : 3 = 4$, καὶ $6 : 12 = \frac{1}{2}$, καὶ $3 : 12 = \frac{1}{4}$, τούτου ἕνεκεν $12 : 3 > 12 : 6 > 3 : 3 > 6 : 12 >$. Καθότι ταῦτα τρέπονται εἰς τὰ $4 > 2 > 1 > \frac{1}{2}$. Ὥςε ὁ λόγος τῶν $12 : 3$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν $20 : 5$.. ὡσαύτως καὶ ὁ τῶν $3 : 12$ μὲ τὸν τῶν $5 : 20$. Ἀλλὰ τὸ νὰ ἔχῃ τις δύο λόγους ἴσους, οὗτος τί ἄλλο ἔχει, ἢ ἐξίσωσίν τινα;

*) Εἰς τὴν Γεωμετρίαν

**) αὐτόθι

131. Ὥςε τὸ νὰ ἔχῃ τις δύο λόγους ἴσους ἀλλήλοις, τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ὀνομάζεται ἀναλογία. Ὥςε ἀναλογία εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἐξίσωσις δύο λόγων. Οὕτως ἐπειδὴ ὁ λόγος τῶν 12 : 3 εἶναι ἴσος ἢ ὁ αὐτὸς, μὲ τὸν λόγον τῶν 20 : 5· οὗτοι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ὀνομάζονται ἀνάλογα, καὶ γράφονται οὕτως 12 : 3 : : 20 : 5.. καὶ προφέρονται ὡδέπως, 12 πρὸς 3, καθὼς 20 πρὸς 5 : ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ, οἷον ὅλον εἶναι τὰ 12 τῶν 3, τοιόνδε καὶ καὶ τὰ 20 τῶν 5. Ἐκ τῶν τεσσάρων λοιπὸν ὅρων τῆς ἀναλογίας 12 : 3 : : 20 : 5, οἱ μὲν 12 καὶ 5 ὀνομάζονται ἄκροι, οἱ δὲ 3 καὶ 20 μέσοι.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ λόγος πραγματικῶς ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ κλάσμα (127).. καὶ ἐπειδὴ ἀναλογία εἶναι ἰσότης δύο λόγων, τούτου ἕνεκεν ἀναλογία ἄλλο δὲν ἤθελεν εἶναι, εἰμὴ ἰσότης δύο κλασμάτων. Καθότι ἂν 12 : 3 $= \frac{12}{3}$.. καὶ 2 : 5 $= \frac{20}{5}$, ἑπόμενον εἶναι καὶ τὸ 12 : 3 : : 20 : 5 νὰ ἦναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$. Ὥςε καὶ ἐξεναντίας $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$ εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ 12 : 3 : : 20 : 5. Καὶ ἂν μέντις θεωρῇ τὸ $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$ ὡς κλάσμα, λέγει ὅτι τὰ 3 διαιροῦσι τὰ 12, ὡς τὰ 5 τὰ 20.. εἰδὲ ὡς ἀναλογίαν, τότε λέγει τὰ 12 περιέχουσι τὰ 3 τετράκις, ὡς καὶ τὰ 20 τὰ 5.

Ἀλλ' ἐπειδὴ πάλιν καὶ τὰ μὲν $\frac{12}{3} = \frac{4 \times 3}{1 \times 3} = \frac{4}{1} \times 1$, τὰ δὲ $\frac{20}{5} = \frac{4 \times 5}{1 \times 5} = \frac{4}{1} \times 1$, τούτου ἕνεκεν πᾶσα ἀναλογία ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ μία καὶ ἡ αὐτὴ ποσότης πολλαπλασιασθεῖσα διὰ τῆς μονάδος, διάφορον μορφὴν ἐχούσης. Οὕτως ἐπειδὴ $5 = 5$, καὶ $\frac{6}{6} = \frac{7}{7} = 1$, τούτου ἕνεκεν θέλει εἶναι ὡσαύτως καὶ $\frac{5\times6}{6}=\frac{5\times7}{7}$ εἴτε $\frac{30}{6}=\frac{35}{7}$ · καὶ διὰ τοῦτο 30 : 6 : : 35 : 7. Πρὸς τούτοις ἐπειδὴ $\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$, καὶ $\frac{6}{6}=\frac{7}{7}=1$ · τούτου ἕνεκεν θέλει εἶναι ὡσαύτως καὶ $\frac{6}{5\times6}=\frac{7}{5\times7}$ · καὶ διὰ τοῦτο 6 : 30 : : 7 : 35. ἢ καὶ οὕτως ἐπειδὴ $5=5$, καὶ $\frac{6}{6}=\frac{7}{7}$, καὶ ἐκ τούτου $5\times\frac{6}{6}=5\times\frac{7}{7}$, εἴτε $\frac{30}{6}=\frac{35}{7}$ · διὰ τοῦτο 30 : 5 : : 35 : 7. Ἂν ὅμως καὶ εἴπω, ὡς τὰ 30 περιέχουσι τὰ 5, οὕτω τὰ 7 περιέχονται εἰς τὰ 35 · τότε ὁ λόγος λέγεται ἀντιπεπονθώς.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι πᾶσα ἀναλογία τρέπεται εἰς ἐξίσωσιν, καὶ πᾶσα ἐξίσωσις εἰς ἀναλογίαν.

132. Ὥςε τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων. Καθότι ἂν μία ἀναλογία ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἐξίσωσις δύο κλασμάτων, καὶ ἂν μία ἐξίσωσις φθείρηται ὁλοτελῶς · ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι δἰ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ · ἑπόμενον εἶναι, ἄντις πολλαπλασιάσῃ τὰ ἴσα κλάσματα διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἰδίων παραγόντων · νὰ σχῇ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων τῆς ἀναλογίας ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων. Οὕτως ἐπειδὴ ἡ ἀναλογία 12 : 3 : : 20 : 5 ἐγεννήθη ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\frac{12}{3}=\frac{20}{5}$ (131), ἥτις μεταμορφοῦται εἰς τὴν $12\times5=20\times3$, ἀμφοτέρων δηλ. τῶν μελῶν αὐτῆς πολλαπλασιασθέντων διὰ τοῦ 3×5 ἀριθμοῦ · τούτου ἕνεκεν ἡ ἐξίσωσις $12\times5=20\times3$ εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ δύο γινόμενα, ὧνπερ ἑκάτερον σύγκειται ἐκ τῶν δύο ὅρων τῆς ἀναλογίας 12 : 3 : : 20 : 5 : τοῦτε πρῶτον λέγω ὅρον ἐπὶ τὸν τέταρτον,

καὶ τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον: ὅ ἐςι μεθερμηνευόμενον, τὸ γινόμενον τῶν μέσων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν, ἂν εἰς μίαν ἀναλογίαν ὁ πρῶτος, ἢ ὁ τέταρτος ὅρος ἦναι μονὰς ‹ τότε τὸ γινόμενον τῶν μέσων νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸν τέταρτον, ἢ πρῶτον ὅρον. Οὕτως ἐπειδὴ $1:3::6:18$, καὶ $18:6::3:1$ ‹ τούτου ἕνεκεν $18=3\times6$.

Συμπέρασμα β΄. ὅτι ἂν μία ἀναλογία δὲν ἦναι ἄλλο, εἰμὴ ἐξίσωσις γινομένων ἔκ τε τῶν ἄκρων καὶ μέσων αὐτῆς ὅρων.. καὶ ἂν ἐξίσωσις ἄλλο δὲν ἦναι, εἰμὴ εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς ἑκάτερα αὐτῆς τὰ μέλη (131) ‹ ἑπόμενον εἶναι ἡ ἀναλογία νὰ μὴν ἦναι ἄλλοτε, εἰμὴ τέσσαρες παράγοντες, ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Οὕτως ἐπειδὴ $60=12\times5$, καὶ $=20\times3$ ‹ διὰ τοῦτο καὶ $12:3::20:5$.. ὡσαύτως ἐπειδὴ $24=8\times3$, καὶ $=6\times4$ ‹ διὰ τοῦτο $8:4::6:3$: ὅ ἐςιν ἐκλαμβάνονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων οἱ ὅροι ἀντιπεπονθότως (αὐτόθι).

133. Ἂν ὅμως καὶ εἰς μίαν ἀναλογίαν τὸ ἑπόμενον τοῦ πρώτου λόγου ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἡγούμενον τοῦ δευτέρου ‹ τότε αὕτη ἡ ἀναλογία ὀνομάζεται συνεχής, ἀλλέως, ὡς ἡ ἀνωτέρω (132), διακεκριμένη.

Οὕτως ἡ ἀναλογία $24:12::12:6$ εἶναι συνεχής, καὶ γράφεται οὕτω $\div\!\div\ 24:12:6$, ἔνθα δηλονότι ἡ κεραία μετὰ τῶν τεσσάρων ςιγμῶν ἐμφανίζει ὅτι πρέπει τις νὰ λάβῃ δὶς τὸν μέσον ὅρον. Ὥςε εἰς τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου (131): ὅ ἐςι $24\times6=12^2$

Δῆλον ὅμως ὅτι ἡ συνεχὴς ἀναλογία δύναται νὰ συνιςᾶται ἐκ πλέον, ἢ τριῶν ὅρων. Οὕτω $\div\div$ 2: 4: 8: 16 : 32 : 64 : κ. τ. ξ. εἶναι συνεχὴς ἀναλογία, ἥτις μεταμορφοῦται εἰς ταύτην $\div\div$ 2: 2^2 : 2^3 : 2^4 : 2^5 : κ. τ. ξ., ἥτις καὶ γεωμετρικὴ σειρὰ ὀνομάζεται.. τοιαύτη ἤθελεν εἶναι καὶ αὕτη $\div\div$ α: $α^2$: $α^3$: $α^4$: κ. τ. ξ.

134. Ἐκεῖνο, ὅπερ ἐλέχθη περὶ δύο ἴσιων λόγων γεωμετρικῶν (131), ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ ἀριθμητικῶν: ὅτι δηλονότι δύο λόγοι ἴσοι ἀλλήλοις ἀριθμητικοὶ ἐκτελοῦσιν ἀναλογίαν ἀριθμητικὴν, καὶ γράφονται οὕτως 7 · 5: 4 · 2, καὶ προφέρονται 7 πρὸς 5, καθὼς 4 πρὸς 2.

Καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν λοιπὸν ἀναλογίαν θεωρεῖται ἐξίσωσις, καὶ ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων. Οὕτω $7+2=5+4$.

Καὶ, ὡς εἰς τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν ἔχομεν συνεχῆ (133), οὕτω καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν, καὶ γράφεται οὕτω $\div$ 7 · 5 · 3: ἔνθα δηλ. ἡ κεραία μετὰ τῶν δύο ςιγμῶν ἐμφανίζει ὅτι πρέπει τις νὰ ἐκλάβῃ δὶς τὸν μέσον ὅρον. Δῆλον ὅμως ὅτι καὶ ἔνθα ἡ συνεχὴς ἀναλογία δύναται νὰ συνιςᾶται ἐκ πλέον, ἢ τριῶν ὅρων, ᾧδέπως $\div$ 1. 2. 3. 4. 5. 6. κ. τ. ξ.

Τὸ νὰ ἐκτανθῇ ὅμως τις πλέον περὶ τῆς ἀναλογίας, τοῦτο δὲν ἤθελεν εἶναι πλέον τῆς ἀριθμητικῆς, ἀλλὰ τῆς ἀλγέβρης.

135. Εἶναι ὅμως ἄξιον βέβαια σημειώσεως τοῦτο, ὅτι πρὶν νὰ μάθωμεν τό,τί ἐςιν ἡ ἀναλογία, ἡμεῖς τὴν ἐ-

μεταχειριζόμεθα. Καθότι ὅταν ἡμεῖς ἐλέγομεν, ὅτι εἰς πάντα πολλαπλασιασμὸν τὸ γινόμενον περιέχει θάτερον τῶν παραγόντων τοσάκις, ὁσάκις ὁ ἕτερος τὴν μονάδα (29) ‹ τί – ἄλλο ἐλέγομεν, εἰμὴ ὅτι οὗτοι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογα; Καὶ ὅταν ἐλέγομεν, ὅτι εἰς τὴν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην τοσάκις ‹ ὁσάκις τὸ πηλίκον τὴν μονάδα (38) ‹ τοῦτο – τί ἄλλο ἐσήμαινεν, εἰμὴ ὅτι οὗτοι οἱ τέσσαρες ὅροι εἶναι ἀνάλογα; Ὁμοίου θεωρεῖται καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν τῶν κλασμάτων.

Πρὸς τούτοις ὁ τετραγωνισμὸς ἑνὸς ἀριθμοῦ τί – ἄλλο εἶναι, εἰ μὴ εὕρεσις τοῦ τρίτου ὅρου μιᾶς συνεχοῦς ἀναλογίας, ἔνθα ἡ μονὰς εἶναι πρῶτος ὅρος, καὶ δεύτερος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα; Οὕτως ὄντος, φέρε εἰπεῖν, 9 τετραγώνου τῶν 3, καὶ τῶν 16 τῶν 4 ‹ ἐγὼ ἔχω ταύτας τὰς ἀναλογίας $1:3::3:9$, καὶ $1:4::4:16$.

Ὡσαύτως καὶ ὁ κυβισμὸς ἑνὸς ἀριθμοῦ τί – ἄλλο εἶναι, ἡ εὕρεσις τοῦ τετάρτου ὅρου μιᾶς ἀναλογίας, ἔνθα ὁ μὲν πρῶτος ὅρος εἶναι μονὰς, ὁ δεύτερος ἡ κυβικὴ ῥίζα, καὶ ὁ τρίτος τὸ τετράγωνον αὐτῆς; Οὕτως ὄντων 27 κύβου τῶν 3, καὶ τὰ 9 τετραγώνου τῶν 3, ἐγὼ ἔχω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $1:3::9:27$: ἢ ἂν θέλῃς ταύτην $1:3::3^2:3^3$, ὡς δηλονότι εἴδομεν εἰς τὸν (133). Ἡ δὲ ἐξαγωγὴ τῆς τε τετραγωνικῆς καὶ κυβικῆς ῥίζης, τί – ἄλλο εἶναι, εἰ μὴ εὕρεσις ὅρου μιᾶς ἀναλογίας, ἔνθα εἶναι δεδομένοι οἱ λοιποί;

136. Δευτέρα σημείωσις ἐνταῦθα ἤθελεν εἶναι αὕτη. Πᾶς ἀριθμὸς θεωρούμενος ὄχι ὡς κεφάλαιον μονάδων ‹

ἀλλ᾽ ὡς γινόμενον δύο παραγόντων (127), ὀνομάζεται ἐπίπεδος. Καὶ ὁ λόγος εἶναι ὅτι ὁ μὲν εἷς τῶν παραγόντων δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς βάσις, ὁ δ᾽ ἕτερος ὡς ὕψος, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δηλονότι τῶν ὁποίων νὰ συνιςᾶται ὀρθογώνιον. Ὥςε ἑκάτερα τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἀριθμοὶ ἐπίπεδοι. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ ἐν ταυτῷ εἶναι καὶ ἴσα ἀλλήλοις τὰ μέλη· τούτου ἕνεκεν εἶναι ἀνάγκη οἱ παράγοντες αὐτῶν νὰ ἀντιπάσχωσιν (132). Οὕτως ὄντος $60 = 12 \times 5$, καὶ $= 20 \times 3$· ἡ ἀναλογία αὐτῶν ἤθελε γένη οὕτως $12 : 3 :: 20 : 5$ (αὐτόθι): ὅ ἐςι τῶν ὅρων λαμβανομένων ἀντιπεπονθότως, ὧνπερ αἱ μὲν βάσεις ὀνομάζονται ὅροι ὁμοειδεῖς, ἢ ὁμόλογοι, τὰ δὲ ὕψη ὡσαύτως.

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ εἶναι ἀδιάφορον, α. ὁποῖον τῶν ὀρθογωνίων νὰ ἐκλάβῃ τις πρῶτον, β΄. ὁποίαν τῶν πλευρῶν αὐτῶν νὰ ἐκλάβῃ διὰ βάσιν, ἢ ὕψος· τούτου ἕνεκεν ἡ ἐξίσωσις $12 \times 5 \doteq 20 \times 5$, εἴτε ἡ ἀναλογία $12 : 3 :: 20 : 5$ ἤθελε λάβει πολλὰς μορφάς, ὡς ὁρᾶται.

$$12 : 3 :: 20 : 5$$
$$12 : 20 :: 3 : 5$$
$$5 : 20 :: 3 : 12$$
$$5 : 3 :: 20 : 12$$
$$3 : 12 :: 5 : 20$$
$$3 : 5 :: 12 : 20$$
$$20 : 12 :: 5 : 3$$
$$20 : 5 :: 12 : 3$$

Ἔνθα δηλονότι, ὡς ὁρᾶται, εἰς ἑκάςην ἀναλογίαν διασώζεται ὁ γενικὸς νόμος: τουτέςι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων: τουτέςι 60 (132). Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ αὐτὸς ὁ νόμος φυλάττεται καὶ εἰς τὴν ἀναλογίαν $12+20:3+5::12:3$ ‹ τούτου ἕνεκεν εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ κεφάλαιον τῶν ἡγουμένων ἔχει πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν ἑπομένων, ὡς ἓν ἡγούμενον πρὸς τὸ ἴδιον ἑπόμενον. Ὡσαύτως ἐπειδὴ καὶ $20-12:5-3::12:3$ ‹ τούτου ἕνεκεν εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων ἔχει πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἑπομένων, ὡς ἓν ἡγούμενον πρὸς τὸ ἴδιον ἑπόμενον.

Εἰ δὲ καὶ θελήσειτις νὰ παραβάλῃ δύο ἐπιπέδους ἀριθμοὺς πρὸς ἀλλήλους, ἤθελεν ἰδεῖ ὅτι ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν λόγων τῶν παραγόντων αὐτῶν. Οὕτως ὁ λόγος $60:20$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν $12\times5:10\times2$, εἴτε $\frac{12}{10}\times\frac{5}{2}$. Καθότι $60:20=3$, καὶ $12\times5:10\times2$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν $12:10\times5:2$, εἴτε $\frac{12}{10}\times\frac{5}{2}=1\frac{1}{5}\times2\frac{1}{2}=3$.. ὡσαύτως καὶ $60:20=30\times2:10\times2=30:10\times2:2$, ἢ $30:2\times2:10=\frac{30}{2}\times\frac{2}{10}=15\times\frac{1}{5}=3$, ὅς τις καὶ λόγος σύνθετος, ἢ συγκείμενος ὀνομάζεται.

137. Ἂν λοιπὸν, ὅπερ εἶναι ἡ κυριωτέρα χρῆσις τῆς ἀναλογίας, καὶ μία ἀναλογία ἦναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ μία ἰσότης τῶν γινομένων ἔκ τε τῶν ἄκρων καὶ μέσων αὐτῆς ὅρων ‹ ἀκόλουθον εἶναι, δοθέντων τῶν τριῶν ὅρων μιᾶς ἀναλογίας, νὰ εὕρῃ τις τὸν τέταρτον. Καθότι ὁ τοιοῦτος ἄλλο δὲν ἤθελεν εἶναι, εἰμὴ τὸ πηλίκον τὸ προκύπτον ἐκ μιᾶς διαιρέσεως, ἔνθα ὁ μὲν διαιρετέος νὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν μέσων, διαιρέτης δὲ ὁ πρῶτος ὅρος. Οὕτως

ἔςω ἄγνωςος ὁ τέταρτος ὅρος εἰς τὴν ἀναλογίαν 12 : 3 : : 20 : χ. Καὶ ἑπομένως ἔξω $20 \times 3 = 12\chi$ (132). Ὥςε διαιρῶν ἑκάτερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ: τοῦ 12 λέγω, ἔξω $\chi = \frac{20 \times 3}{12} = 5$.

Ἂν δὲ καὶ ἡ ἀναλογία ἦναι συνεχὴς, καὶ ἄγνωςος ὁ μέσος ὅρος, τότε εἶναι ἀνάγκη πρὸς τοῖς ἄλλοις καὶ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης. Οὕτως ἔςω εἰς τὴν ἀναλογίαν 1 : 3 : : 3 : 9, εἴτε εἰς τὴν $\div$ 1 : 3 : 9, ἄγνωςος ὁ μέσος ὅρος, ὅπερ ὀνομάζω ψ, τότε ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν 1 : ψ : : ψ : 9, καὶ διὰ τοῦτο $\psi^2 = 9$, ὅθεν $\psi = \sqrt{9} = 3$. Καὶ τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ὀνομάζεται μέθοδος τῶν τριῶν.

ΚΕΦ. ΙΒ'.

Περὶ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

138. Ἡ μέθοδος λοιπὸν τῶν τριῶν δὲν εἶναι ἄλλοτι, εἰμὴ ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία, ἔνθα ὄντων διδομένων τῶν τριῶν ὅρων, ζητεῖται ὁ τέταρτος. Εἶναι ὅμως τοσοῦτον ἀναγκαία εἰς τὴν πολιτείαν, ὥςε εἰς πᾶν βῆμα ποδὸς εἰς τὸν ἐμπορικὸν βίον τὴν ἀπαντᾷ τις. Καὶ τούτου ἕνεκεν ἡ ἀναλογία εἶναι τῶν ὧν οὐκ ἄνευ, ὄχι μόνον εἰς τὰς ἐπιςήμας, ἀλλ' οὐδαμῶς ὀλιγώτερον καὶ εἰς τὸν πολιτικὸν βίον, εἴτε εἰς τὸ ἐμπόριον καὶ τὰς λοιπὰς τέχνας.

Καὶ ἀγκαλὰ ἡ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ σαφὴς ἀναλογία, διὰ τὴν σύμπτωσιν ὅμως τινῶν περιςάσεων, ἠθέλησαν οἱ ἀριθμητικοὶ νὰ δώσωσιν εἰς αὐτὴν διάφορα ὀνόματα, ὀνομάσαντες αὐτὴν εὐθεῖαν ἁπλῆν, ἁπλῆν ἀντιπεπονθυῖαν, σύνθετον, σύνθετον ἀντιπεπονθυῖαν, τῆς συντροφίας, κ. τ. ξ. ἅπερ πραγματικῶς εἶναι οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ μία καὶ ἡ αὐτὴ ἀναλογία, καὶ διαφέρουσι ταῦτα πάντα μόνον τῷ ὀνόματι, ὡς ἕκαςος θέλει πληροφορηθῆ ἐξ αὐτῶν τῶν πραγμάτων.

Εἶναι ὅμως οἴκοθεν σαφὲς, ὅτι εἰς τὴν μέθοδον τῶν τριῶν πρέπει νὰ ὑπονοῆται ἀμετάβλητον τὸ πρᾶγμα, καὶ οἱ ὅροι αὐτῆς οἱ ὁμοειδεῖς (136) νὰ κατέχωσι τὸν χῶρον αὐτῶν, ἀλλέως τὸ συναγόμενον ἤθελεν εἶναι ἡμαρτημένον. Οὕτω λέγωντες, ἂν εἷς ἐργάτης ἔσκαψέ τι εἰς 10 ἡμέρας· πέντε ἐργάται εἰς 20 ἡμέρας πόσον — ἤθελον σκάψοι; πρέπει νὰ ὑπονοῆ ὅτι ὁ πρῶτος ἐργάτης ἔπρεπε νὰ σκάπτῃ ἐπίσης καθεκάςην, καὶ ὅτι οἱ πέντε ἐργάται νὰ ἦναι καὶ τῆς αὐτῆς δυνάμεως, καὶ νὰ σκάπτωσιν ἐπίσης· καὶ ἔτι ἂν ὁ εἷς ἐργάτης ἦν ἄνθρωπος· ἄνθρωποι νὰ ἦναι καὶ οἱ πέντε.

Περὶ τῆς ἁπλῆς καὶ εὐθείας μεθόδου τῶν τριῶν.

139. Ἡ ἁπλῆ λοιπὸν καὶ εὐθεῖα μέθοδος τῶν τριῶν ὠνομάσθη ἁπλῆ μὲν, ἐκ τοῦ διότι τὸ πρόβλημα δὲν περιέχει μᾶλλον τῶν τεσσάρων ὅρων· εὐθεῖα δὲ· ἐκ τοῦ διότι ἐκ τῶν τεσσάρων ὅρων οἱ δύο ὄχι μόνον ἀναφέρονται πρὸς τοὺς λοιποὺς δύο· ἀλλὰ καὶ εἶναι καὶ

αἴτια αὐτῶν, ἢ ἴσα, ὅπερ ἤθελε σαφηνισθῇ διὰ παραδειγμάτων.

Παράδειγμα ά. 20 ἐργάται ἔσκαψαν εἴς τινα χρόνον 124 ὀργυιὰς τετραγωνικάς. 30 ἐργάται εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, πόσας ὀργυιὰς ἔχουσι νὰ σκάψωσι; Ὀνομάζω χ τὰς ζητουμένας ὀργυιὰς καὶ ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $\overset{\text{ἐρ}}{20} : \overset{\text{ὀρ}}{124} :: \overset{\text{ἐρ}}{30} : χ$, ἢ καὶ οὕτως $\overset{\text{ἐρ}}{20} : \overset{\text{ἐρ}}{30} :: \overset{\text{ὀρ}}{124} : χ$, τουτέςι $\overset{\text{ἐρ}}{2} : \overset{\text{ἐρ}}{3} :: \overset{\text{ὀρ}}{124} : \overset{\text{ὀρ}}{χ}$: ὅ ἐςι $2χ = \overset{\text{ὀρ}}{124} \times 3$, καὶ $χ = \frac{124 \times 3}{2} = \overset{\text{ὀρ}}{186}$.

Παράδειγμα β΄. $\overset{o}{1}$ τοῦ οὐρανοῦ εἶναι ἴση μὲ 25 Γαλλικὰς λέγας, ἐπὶ τῆς γῆς. ζητεῖται λοιπὸν $\overset{o}{360}$ τοῦ μεσημβρινοῦ, ἢ ἂν θέλῃς ἡ περιφέρεια τῆς γῆς, πόσας λέγας συνέχουσι; Ὀνομάζω χ ταύτας τὰς λέγας καὶ ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $\overset{o}{1} : \overset{λ}{25} :: \overset{o}{360} : \overset{λ}{χ}$, ἢ καὶ οὕτω $\overset{o}{1} : \overset{o}{360} : \overset{λ}{25} . \overset{λ}{χ}$: ὅ ἐςι $χ = 360 \times \overset{λ}{25} = \overset{λ}{8700}$.

Παράδειγμα γ΄. ἐδόθησαν $\overset{\text{γρ}}{62}\ \overset{\text{παρ}}{28}$ πρὸς οἰκοδομὴν $\overset{\text{ὀρ}}{7}\ \overset{π}{5}\ \overset{δ}{5}$ καὶ ζητεῖται πόσα ἔχει νὰ δώσῃ τις διὰ $\overset{\text{ὀρ}}{23}\ \overset{π}{3}\ \overset{δ}{3}$ τῆς αὐτῆς οἰκοδομῆς; Ὀνομάζω χ τὴν ζητουμένην τιμὴν τῆς οἰκοδομῆς καὶ ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $\overset{\text{ὀρ}}{7}\ \overset{π}{5}\ \overset{δ}{5} : \overset{\text{γρ}}{62}\ \overset{\text{παρ}}{28} :: \overset{\text{ὀρ}}{23}\ \overset{π}{3}\ \overset{δ}{3} : χ$, ἢ καὶ οὕτως $\overset{\text{ὀρ}}{7}$

$\overset{\pi}{5}\ \overset{\delta}{5} : \overset{o\rho}{23}\ \overset{\pi}{3}\ \overset{\delta}{3} : \overset{\gamma\rho}{62}\ \overset{\pi\alpha\rho}{28} : \chi$, ἢ μεταβάλλων ταῦτα εἰς τὰς μικροτάτας μονάδας, ἔξω $\overset{\delta}{564} : \overset{\delta}{1692} :: \overset{\pi\alpha\rho}{2508} : \overset{\pi\alpha\rho}{\chi}$ καὶ διὰ τοῦτο $\overset{\delta}{141} : \overset{\delta}{423} :: \overset{\pi\alpha\rho}{2508} : \overset{\pi\alpha\rho}{\chi}$ ὅθεν $\chi = \overset{\gamma\rho}{186}\ \overset{\pi\alpha\rho}{13}$.

Παράδειγμα δ'. 10 πήχεις ὑφάσματος σηρικοῦ ἐκτιμῶνται 30 γροσίων.. καὶ ζητεῖται πόση — εἶναι ἡ τιμὴ 25 πηχῶν τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος; Ὀνομάζω χ τὴν ζητουμένην τιμὴν καὶ ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν, $\overset{\pi\eta}{10} : \overset{\gamma\rho}{30} :: \overset{\pi\eta}{25} : \overset{\gamma\rho}{\chi}$, ἢ καὶ οὕτως $\overset{\pi\eta}{10} : \overset{\pi\eta}{25} :: \overset{\gamma\rho}{30} : \chi$, εἴτε $\overset{\pi\eta}{2} : \overset{\pi\eta}{5} :: \overset{\gamma\rho}{30} : \chi$ ὅθεν $\chi = \frac{\overset{\gamma\rho}{30} \times 5}{2} = \overset{\gamma\rho}{75}$.

Ἔνθα δηλονότι οἱ ὁμοειδεῖς ὅροι, οἱ ὄντες εἰς μὲν τὸ α'. παράδειγμα, οἱ ἐργάται εἰς δὲ τὸ β'. αἱ μοῖραι εἰς δὲ τὸ γ'. αἱ ὀργυιαὶ εἰς δὲ τὸ δ'. οἱ πήχεις, δύνανται νὰ ἐκληφθῶσι καὶ ἡγούμενα τῶν δύο λόγων, καὶ ὅροι τοῦ ἑνὸς μόνου λόγου, ὅπερ ἀδυνατεῖ νὰ ὑπάρξῃ εἰς τὴν ἁπλῆν καὶ ἀντιπεπονθυῖαν μέθοδον τῶν τριῶν, ἐξ οὗ καὶ τὸ ὄνομα ἔλαβε.

Περὶ τῆς ἁπλῆς καὶ ἀντιπεπονθυίας μεθόδου τῶν τριῶν.

140. Ἡ ἁπλῆ λοιπὸν καὶ ἀντιπεπονθυῖα μέθοδος τῶν τριῶν ὠνομάσθη μὲν ἁπλῆ ἐκ τοῦ διότι τὸ πρόβλημα