Ἂν λοιπὸν, φέρε εἰπεῖν, θελήσῃ τις νὰ φθάσῃ ἧττον ἑνὸς χιλιοςοῦ εἰς τὴν ἀληθῆ ῥίζαν τῶν 26, πρέπει νὰ προσθέσῃ εἰς αὐτὰ τρία ζεύγη μηδενικῶν, καὶ οὕτω νὰ ἐξάγῃ τὴν ῥίζαν κατὰ τὸν ἐγνωσμένον τρόπον, ἥτις εἶναι 5,099. ἔνθα ὡς ὁρᾶται, ἐπειδὴ καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν ἔμεινε λείψανον 199, καὶ ὄχι μηδὲν, διὰ τοῦτο τὰ 5,099 δὲν εἶναι ῥίζα ἀκριβὴς τῶν 26. Εἶναι ὅμως ἄξιον παρατηρήσεως ὅτι ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 5099 εἶναι τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 26000000, καὶ ἐγὼ δὲν ζητῶ τὴν ῥίζαν τοῦ 26000000, ἀλλὰ τοῦ 26: ὅ ἐςιν ἐπειδὴ καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσετέθησαν ἓξ δεκαδικὰ, τούτου ἕνεκεν ὁ εἷς τῶν παραγόντων, ὁ 5099 λέγω, πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ ἥμισυ τῶν δεκαδικῶν, ὡς τοῦτο εἴδομεν εἰς τὸν (91).

```
              5,099
        |26, 00, 00| 00
        |25
   100|  1   00  0
            |90  0
                 81
  1018|  9   19  0
         9   16  2
                 81
                199
```

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἤθελεν ἐξάξοι τις καὶ τὴν ῥίζαν τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3. Καθότι $\sqrt{2}=1,4142136$, καὶ $\sqrt{3}=1,7320508$: ἔνθα δηλονότι ἔγινε πρόσθεσις μηδενικῶν ἑπτὰ ζευγῶν εἰς ἑκάτερον, καὶ διὰ τοῦτο τὸ ἁμάρτημα εἶναι ἔλασσον ἑνὸς μιλλιονιςοῦ.

116. Εἰ δὲ καὶ ἤθελε ζητηθῆ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τινὸς κλάσματος, τότε ἦν ἀνάγκη νὰ ἐξαχθῆ ἡ ῥίζα τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαςοῦ ἀνὰ μέρος, καὶ τοῦτο ἤθελεν εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα. Καθότι ἂν ὁ πολλαπλα-

σιασμὸς ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα δὲν γίνηται ἄλλως, εἰμὴ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμητῶν καὶ τῶν παρονομαστῶν (73)· τούτου ἕνεκεν διὰ νὰ ἐξάξῃ τις τὴν ῥίζαν ἑνὸς κλάσματος, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐξάξῃ τὴν ῥίζαν ἑκατέρων: τουτέστι ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ λέγω. Οὕτως ἡ ῥίζα τοῦ $\frac{4}{9}$ εἶναι $= \frac{2}{3}$: τουτέστι $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.. ἐκ τοῦ διότι δηλονότι $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.. ὡσαύτως καὶ ἡ τοῦ $\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$, καὶ ἡ τοῦ $\sqrt{\frac{1}{10000}} = \frac{1}{100}$.. ἐκ τοῦ διότι ἡ μὲν ῥίζα τοῦ 1 εἶναι 1, ἡ δὲ τοῦ 10000, εἶναι 100, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

117. Πλὴν ἂν ἦναι σπάνιοι οἱ ἀριθμοὶ οἵτε τετράγωνοι, ἢ λογικοὶ· πολὺ πλέον ἤθελον εἶναι τοιαῦτα τὰ κλάσματα. Καὶ ἐπομένως ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν αὐτῶν ἤθελε γένοι διὰ τῶν δεκαδικῶν (115). Εἰδὲ καὶ ὁ εἷς μόνος τῶν ὅρων ἑνὸς κλάσματος εἶναι ῥητὸς, καὶ ὁ ἕτερος ἄλογος· τότε τοῦ μὲν ἑνὸς θέλει ἐξαχθείη ἐξηκριβωμένως ἡ ῥίζα· τοῦ δὲ ἑτέρου ὡς ἔγγιστα. Οὕτω $\sqrt{\frac{26}{49}} = \frac{5,099}{7} =$ 0, 728, καὶ $\sqrt{\frac{4}{10}} = \frac{2}{3,162} =$ 0, 632.

Δῆλον ὅμως ὅτι πᾶν κλάσμα ἄλογον κατὰ τοὺς δύο ὅρους, μεταβάλλεται κατὰ τὸν ἕτερον μόνον· προτιμᾶται δὲ κατὰ τὸν ἀριθμητὴν, μεταβαλλομένου δηλ. εἰς ἐντελὲς τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ, ὡς παριστῶντος τὸν ἀριθμὸν τῶν μερῶν τῶν ἐν τῇ μονάδι. Οὕτως ἄν μοι ζητηθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{2}{3}$· ἐγὼ τὸ μεταμορφῶ εἰς τὸ $\frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9}$, ἔνθα δηλονότι $\sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{1\sqrt{6}}{3} = \frac{2,449}{3} =$ 0,

816. Ὡσαύτως καὶ $\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3\times 7}{7\times 7}} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{4.583}{7} =$ 0, 655. Ὡσαύτως καὶ $\sqrt{(3\frac{5}{7})} = \sqrt{\frac{26}{7}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{182}{7}} = \frac{13.4007}{7} = 1, 9272.$

118. Εἰ δὲ καὶ τὸ δοθὲν κλάσμα εἶναι δεκαδικὸν ϲ τότε εἶναι ἀνάγκη προςιθέμενός τις μηδενικὰ νὰ ἐκτελέτῃ ἄρτια τὰ δεκαδικὰ, ὅπερ δηλονότι ἐκτελεῖται διὰ τῆς προσθέσεως 3, ἢ 5, ἢ κ. τ. ξ. μηδενικῶν. Οὕτω διὰ νὰ ἐξάξω τὴν ῥίζαν τοῦ 0, 457 προςίθημι τρία ἢ πέντε μηδενικά: ἡ πρόσθεσις τῶν ὁποίων δηλονότι ἀλλάττει ὁλοτελῶς τὴν σημασίαν αὐτοῦ ϲ καὶ οὕτως ἐξάγω τὴν ῥίζαν τῶν 457000: ςοχαζόμενος δηλονότι αὐτὸν ὡς ὁλοσχερῆ, ὅς τις ἔχει διὰ ῥίζαν 676, εἴτε 0, 676. Ὡσαύτως καὶ ἡ ῥίζα τοῦ 21, 935, εἴτε τοῦ 21,935000 εἶναι $= 4,683$.

Καὶ τέλος ἂν τὸ δοθὲν κλάσμα συνέχῃ καὶ χαρακτῆρας ὁλοσχερεῖς, εἴτε ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἦναι κλασματίας ϲ τότε πρῶτον τις μεταβάλλει αὐτὸν εἰς κλάσμα ἐντελὲς ϲ εἶτα ἐξάγει τὴν ῥίζαν αὐτοῦ (116). Οὕτω διὰ νὰ ἐξάξω τὴν ῥίζαν τοῦ $8\frac{3}{7}$ ϲ πρῶτον τὸν μεταβάλλω εἰς τὸν $\frac{59}{7} = \frac{413}{49}$ ϲ καὶ οὕτως ἐξάγω τὴν ῥίζαν αὐτοῦ, ἥτις εἶναι $\frac{20.322}{7} = 2, 903.$ Ὡσαύτως καὶ ἡ $\sqrt{66\frac{1278}{3600}} = \sqrt{\frac{238878}{3600}} = \frac{1}{60}\sqrt{238878}.$

ΚΕΦ. ΙΑ΄.

Περὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης.

119. Ἡμεῖς εἴδομεν ὅτι κύβος ἑνὸς ἀριθμοῦ ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἡ τρίτη αὐτοῦ δύναμις (108), ἢ ἂν θέλης, εἶναι εἷς ἀριθμὸς γεννόμενος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ τετραγώνου ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν. Ὥςε εἶναι χρεία οὐδεμιᾶς μεθόδου τοῦ νὰ ἐκτελέσῃ τις τὸν κύβον παντὸς ἀριθμοῦ. Καὶ ἰδοὺ οἱ κύβοι τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν.

ἀριθμοὶ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τετράγωνοι αὐτῶν	1	4	9	16	25	36	49	64	81
κύβοι αὐτῶν	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Ὥςε πᾶς κύβος ἀριθμοῦ ἐξ ἑνὸς χαρακτῆρος σύγκειται ὄχι πλέον, ἢ ἐκ τριῶν χαρακτήρων, ὡς δηλονότι ἐκ δύο τὰ τετράγωνα αὐτῶν (111). β΄. Ἐπειδὴ ὁ κύβος τοῦ πρώτου ἐκ δύο χαρακτήρων ἀριθμοῦ: τοῦ 10 λέγω, σύγκειται ἐκ τεσσάρων χαρακτήρων, ὡς ὄντος $10 \times 10 \times 10 = 1000$, καὶ ὁ κύβος τοῦ πρώτου ἐκ τριῶν χαρακτήρων ἀριθμοῦ: τοῦ 100 λέγω, σύγκειται ἐξ ἑπτὰ, ὡς ὄντος $100 \times 100 \times 100 = 1000000$ ‹ ἑπόμενον εἶναι παντὸς ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ δύο χαρακτήρων, ὁ κύβος νὰ μὴ ὑπερβῇ τοὺς ἓξ χαρακτῆρας.. ἐκ τοῦ διότι δηλονότι ὁ μέγιςος αὐτῶν, ὁ 99, σύγκειται ἀπὸ ἓξ χαρακτήρων, εἴτε $99 \times 99 \times 99 = 970299$.

γ'. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ κύβος τοῦ ἐκ τριῶν χαρακτήρων ἀριθμοῦ ἀδυνατεῖ νὰ ὑπερβῇ τοὺς ἐννέα χαρακτῆρας. Καθότι ὁ κύβος τοῦ μεγίςου τῶν ἐκ τριῶν χαρακτήρων, εἴτε τοῦ 999, σύγκειται ἐξ ἐννέα χαρακτήρων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

120. Ἐξ οὗ δηλονότι ἕπονται ταῦτα. ά. ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς σύγκειται ἐκ δύο, ἢ τριῶν χαρακτήρων < ἡ κυβικὴ ῥίζα νὰ σύγκηται ἐξ ἑνὸς μόνου χαρακτῆρος < καὶ ἑπομένως εἶναι χρεία ὐδεμιᾶς διδασκαλίας περὶ τῶν τοιούτων ἀριθμῶν, ὡς ἐξαρκοῦντος περὶ τούτου τοῦ πίνακος (119). β'. Πᾶς ἀριθμὸς συγκείμενος ἐκ τεσσάρων, ἢ πέντε, ἢ ἓξ χαρακτήρων νὰ ἔχῃ κυβικὴν ῥίζαν ἀριθμὸν ἐκ δύο χαρακτήρων. Καθότι ἂν ὁ πρῶτος τῶν ἐκ τεσσάρων: ὁ 1000, ἔχῃ τὰ 10.. καὶ ἂν ὁ πρῶτος τῶν ἐξ ἑπτὰ: ὁ 1000000, ἔχῃ ῥίζαν κυβικὴν τὸν πρῶτον τὸν ἐκ τριῶν: τὸν 100 < ἑπόμενον εἶναι ἅπαντες οἱ κύβοι οἱ μεταξὺ τῶν 100 καὶ 1000 000 νὰ ἔχωσι κυβικὴν ῥίζαν συγκειμένην ἐκ δύο χαρακτήρων. γ'. Πᾶς ἀριθμὸς συγκείμενος ἐξ ἑπτὰ, ἢ ὀκτὼ, ἢ ἐννέα χαρακτήρων νὰ ἔχῃ κυβικὴν ῥίζαν συγκειμένην ἐκ τριῶν χαρακτήρων, ὡς ὄντος $100 \times 100 \times 100 = 1000\,000$, καὶ $1000 \times 1000 \times 1000 \times = 1000000000$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὥςε συνάγεται ὅτι πρέπει τις νὰ διαχωρίζῃ τὸν δοθέντα κύβον ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας ἀρχόμενος πάντοτε ἐκ τῶν δεξιῶν. Ὥςε ἐκ πρώτης ὄψεως ἤθελε γνωρίσοι τις ἐκ πόσων χαρακτήρων σύγκειται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

121. Λείπεται λοιπὸν τώρα ὁ τρόπος, δι' οὗπερ ἤθελεν εὕροι τις αὐτοὺς τοὺς χαρακτῆρας τῆς κυβικῆς ῥίζης. Καὶ

οὕτως ἤθελεν εἶναι, νομίζω ἐγώ, ἡ διάγνωσις τῶν μερῶν τοῦ κύβου, ἐξ ὧν δηλονότι παρήχθη.

Νὰ κυβίσω λοιπὸν ἕνα ἀριθμὸν σημαίνει οὐδὲν ἄλλο, ἢ νὰ πολλαπλασιάσω ἐπ' αὐτὸν τὸ τετράγωνον αὐτοῦ. Ὥςε ἂν πολλαπλασιάσω τὸ $25^2=20^2+2\times20\times5+5^2$ (113), ἐπὶ τὰ $20+5$· ἔξω τὸν κύβον τῶν 25, ὅς τις δηλ. εἶναι $=15625$, τουτέςι:

$$\begin{array}{l}
20^2+2\times20\times5+5^2 \\
\qquad 20+5 \\
\hline
20^3+2\times20^2\times5+20\times5^2 \\
\qquad +20^2\times5\;+2\times20\times5^2+5^3 \\
\hline
20^3+3\times20^2\times5+3\times20\times5^2+5^3=15625
\end{array}$$

$=25^2\times25$.

Ἔνθα ὡς ὁρᾶται ὁ κύβος 15625 τοῦ 25 ἀριθμοῦ σύγκειται ά. ἐκ τῶν δύο κύβων τῶν χαρακτήρων τῆς ῥίζης· β'. ἐκ τοῦ τρὶς γινομένου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας· καὶ γ'. ἐκ τοῦ τρὶς γινομένου τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας.

Ἂν λοιπόν μοι ζητηθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 15625· ἐγὼ ἐκ πρώτης ὄψεως θέλω γνωρίσει πρῶτον ὅτι αὕτη σύγκειται ἐκ δύο χαρακτήρων: ἢ ἂν θέλῃς ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων· δεύτερον ὅτι ἡ τῶν δεκάδων εὑρίσκεται εἰς μόνους τοὺς πρώτους δύο χαρακτῆρας: τουτέςιν εἰς τὰ 15, ἥτις δηλ. εἶναι $=2$ (119)· καὶ τρίτον ὅτι διὰ νὰ εὕρω καὶ τὸν χαρακτῆρα τῶν μονάδων τῆς ῥίζης, εἶναι ἀνάγκη νὰ διαιρέσω τὸ λείψανον διὰ τοῦ τρὶς τετραγώνου 2: τουτέςι διὰ τοῦ 3×2^2. (ἔνθα δηλονότι τὸ 2^2 εἶναι δεκάδες). Καὶ ἰδοὺ πῶς ἐκτελῶ τὴν ἐργασίαν.

```
      2   5
    15|625
     8|
12|  7|6
     6|0
     1|50
      |125
        0
```

Διαχωρίζω αὐτὸν εἰς δύο τμήματα ‹ ζητῶ τὴν κυβικὴν ῥίζαν μόνου τοῦ πρώτου τμήματος, ἥτις δηλονότι εἶναι. 2 (αὐτόθι) ‹ γράφω αὐτὴν ὡς πηλίκον ἄνωθεν τοῦ κύβου: εἶτα κυβίζων αὐτά, ἀφαιρῶ τὸν κύβον ἀπὸ τῶν 15, καὶ εἰς τὴν διαφορὰν 7 καταβιβάζω τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ δευτέρου τμήματος ‹ καὶ οὕτως ἔχω διὰ διαιρετέον 76, ἔνθα δηλ. εὑρίσκεται ἡ κυβικὴ ῥίζα τῶν μονάδων. Ὥςε λαμβάνω διὰ διαιρέτην τὸ τρὶς τετράγωνον τῶν 2: τουτέςι τὰ 12, ἐξ οὗ μοι προκύπτει πηλίκον 5, ὅπερ γράφω εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ῥίζης 2.. καὶ οὕτως ἔχω διὰ ῥίζαν κυβικὴν τὰ 25. Πλὴν πρὸς πληροφορίαν ἀφαιρῶ τρία τινά: ά. τὸ τρὶς τετράγωνον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, εἴτε τὸ $3\times 2^2 \times 5=60$.. β'. τὸ τρὶς τετράγωνον τῶν μονάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας, εἴτε τὸ $3\times 5^2 \times 2=150$.. καὶ γ'. τὸν κύβον τῶν μονάδων, εἴτε τὸ $5^2 =125$.. Καὶ ἐπειδὴ μετὰ τὴν τούτων ἀφαίρεσιν ἐγὼ εὑρίσκω μηδὲν διαφορὰν ‹ συνάγω ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἔχει κυβικὴν τὰ 25.

122. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λοιπὸν ἤθελεν εὕροι τις τὴν κυβικὴν ῥίζαν παντὸς ἀριθμοῦ. Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 244140625.

Ἐπειδὴ βλέπω τοῦτον τὸν ἀριθμὸν συγκείμενον ἐξ ἐννέα χαρακτήρων ‹ ἐγὼ ἐννοῶ ἀμέσως ὅτι ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα σύγκειται ἐκ τριῶν, καὶ ἰδοὺ πῶς τοὺς εὑρίσκω. Τέμνω

```
               6  2  5
     ______________________
         |244 |140,|625
         |216 |    |
    108| ‾28  |1   |
       |  21  |6   |
              |72  |
              |   8|
   11532|5    |812 |6
        |5    |766 |0
              |  46|50
              |    |125
              ___________
               000 000
```

αὐτὸν ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας· ζητῶ τὴν κυβικὴν ῥίζαν μόνου τοῦ πρώτου τμήματος, εἴτε τῶν 244, ἥτις δηλονότι εἶναι 6 (119), ἥνπερ γράφω ὡς ἄλλο πηλίκον ἄνω τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Κυβίζω τὰ 6, καὶ τὸν κύβον αὐτῶν 216 ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν 244.. καὶ εἰς τὰ δεξιὰ τῆς διαφορᾶς 28 καταβιβάζω τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ δευτέρου τμήματος, καὶ οὕτως ἔχω διὰ νέον διαιρετέον 281. Διὰ δὲ διαιρέτην ἐγὼ λαμβάνω τὸ τρὶς τετράγωνον τῆς ἐξαχθείσης ῥίζης 6, εἴτε τὰ 108 (121), καὶ οὕτω μοι προκύπτει πηλίκον τὰ 2, ἅπερ δηλ. εἶναι ἡ ῥίζα τῶν δεκάδων· ὅθεν καὶ τὰ γράφω εἰς τὰ δεξιὰ τῶν 6.

Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν λοιπὸν τοῦ πράγματος, καὶ ἐν ταυτῷ πρὸς κατοχὴν καὶ τοῦ λειψάνου, ὥςε νὰ εὕρω καὶ τὴν ῥίζαν τῶν μονάδων, ἀφαιρῶ τρία τινα: α΄. τὸ τρὶς τετράγωνον τῶν δεκάδων (οἵτινες τῷ ὄντι εἶναι ἑκατοντάδες) ἐπὶ τὰς μονάδας, εἴτε $3 \times 6^2 \times 2 = 216$.. β΄. τὸ τρὶς τετράγωνον τῶν μονάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας, εἴτε $3 \times 2^2 \times 6 = 72$.. καὶ γ΄. τὸν κύβον τῶν δεκάδων, εἴτε $2^2 = 8$, ὧνπερ δηλονότι τὸ κεφάλαιον εἶναι $= 21600 + 720 + 8 = 22328$. Εἰς τὴν διαφορὰν λοιπὸν 5812 καταβιβάζω τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ τρίτου κόμματος, καὶ οὕτως ἔχω διὰ νέον διαιρέτην τὸν 58126.

Διὰ δὲ διαιρέτην ἐγὼ λαμβάνω, ὡς καὶ ἀνωτέρω, τὸ τρὶς τετράγωνον τῆς ῥίζης 62, εἴτε $3 \times 62^2 = 11532$ (ὅμοιον ἤθελον ἐκτελέσει, καὶ ἂν οἱ χαρακτῆρες τῆς ἐξαχθείσης ῥίζης ἦσαν τρεῖς καὶ τέσσαρες, κτξ.)· καὶ οὕτω μοὶ προκύπτει πηλίκον τὰ 5, ὅπερ εἶναι ὁ χαρακτὴρ τῶν μονάδων τῆς ῥίζης, ὅθεν καὶ τὸ θέτω εἰς τὰ δεξιὰ τῶν 62.

Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν λοιπὸν τοῦ πράγματος ἀφαιρῶ, ὡς ἀνωτέρω, τρία τινά, α΄. τὸ τρὶς τετράγωνον τῶν δεκάδων 62 ἐπὶ τὰς μονάδας 5, εἴτε $3 \times 62^2 = 57660$.. β΄. τὸ τρὶς τετράγωνον τῶν μονάδων 5 ἐπὶ τὰς δεκάδας 62, εἴτε $3 \times 5^2 \times 62 = 4650$.. καὶ γ΄. τὸν κύβον τῶν μονάδων, εἴτε 125, ὧνπερ τὸ κεφάλαιον εἶναι $= 5766000 + 46500 + 125 = 5812625$. Καὶ ἐπειδὴ ἔχω μηδὲν διαφορὰν· συνάγω ὅτι ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶναι $= 625$, πρὸς ἐπιβεβαίωσιν τοῦ ὁποίου ἂν κυβίσω αὐτὴν· ἕξω τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

Εἶναι, ἴσως, περιττὸν τὸ νὰ σημειώσωμεν καὶ ἐνταῦθα, ὅτι τὸ πηλίκον, ἢ ῥίζα λαμβάνεται οὐδέποτε μᾶλλον τοῦ 9 εἰς μίαν διαίρεσιν.. καὶ ὅτι ἂν ἦναι ἡ ἀφαίρεσις ἀδύνατος· τοῦτο ἤθελεν εἶναι σημεῖον, ὅτι ὁ χαρακτὴρ τῆς ῥίζης ἐλήφθη μείζων τοῦ ὀρθοῦ.

123. Πλὴν ἂν, ὅσοι τῶν ἀριθμῶν ἔχουσιν ἐξηκριβωμένας ῥίζας τετραγωνικὰς ἦναι σπάνιοι (115)· πολὺ πλέον ἤθελον εἶναι τοιοῦτοι, ὅσοι ἔχουσι κυβικάς. Καθότι ἐκ τῶν χιλίων ἀριθμῶν, ὡς ἕκαστος τοῦτο ὁρᾷ, μόλις εἶναι δέκα τοιοῦτοι (119). Καὶ εἰς τοιαύτην λοιπὸν περίστασιν ἢ σημειοῦται τὸ πρᾶγμα διὰ τοῦ ῥιζώδους σημείου $\sqrt[3]{}$, ἔνθα δηλονότι τὸ 3 ἐμφανίζει τὴν κυβικὴν ῥί-

ζαν, ἢ διὰ τῆς προσθέσεως τῶν δεκαδικῶν.. τουτέστι 10^3 πλησιάζει τις ὅσον θέλει εἰς τὴν ἀλήθειαν.

Καθότι ζητείσθω ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 26. Τότε διὰ νὰ φθάσω ἧττον ἑνὸς χιλιοστοῦ εἰς τὴν ἀληθῆ αὐτοῦ ῥίζαν, ἐγὼ προστίθημι τρεῖς τριάδας μηδενικῶν εἰς αὐτὸν, καὶ διαιρῶν αὐτὸν ὡς ἀνωτέρω εἰς τμήματα, ἄρχομαι νὰ ζητῶ τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου μόνου τμήματος, εἴτε τῶν 26, ἥτις δηλονότι εἶναι 2.

	2,	9	6	2
	26,	000,	000,	000
	8			
	18	0		
	10	8		
	4	86		
		729		
2523	1	611	0	
	1'	513	8	
		31	32	
			216	
262848		65	664	0

Ἐκτελῶ ὡς εἰς τὸν (122).. καὶ οὕτω διὰ μὲν τοῦ δευτέρου τμήματος εὑρίσκω ῥίζαν τὰ 9, διὰ δὲ τοῦ τρίτου τὰ 6, διὰ δὲ τοῦ τετάρτου τὰ 2. Καὶ οὕτως ἔχω διὰ ζητουμένην ῥίζαν ὡς ἔγγιστα τὰ 2,962 · ἧς περ δηλονότι ὁ ἐξηκριβωμένος κύβος εἶναι $=$ 25,986941128. Δῆλον δ' ὅτι ἐπειδὴ ὁ δοθεὶς κύβος εἶχεν ἐννέα χαρακτῆρας δεκαδικῶν · διὰ τοῦτο ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἔπρεπε νὰ σχῇ τρεῖς. Ὡσαύτως εὑρίσκω ὅτι καὶ $\sqrt[3]{3} = 1,442249$..

124. Ἐπειδὴ δὲ καὶ διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τις τὸ τετράγωνον ἑνὸς κλάσματος ἄλλο δὲν ἔκαμεν, εἰμὴ νὰ πολλαπλασιάσῃ τὸν ἀριθμητὴν ἐφ' ἑαυτὸν, καὶ τὸν παρονομαστὴν ὡσαύτως (116) · τούτου ἕνεκεν διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τις τὸν κύβον ἑνὸς κλάσματος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσῃ τὸν ἀ-

ριθμητὴν τοῦ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, καὶ τὸν παρανομαςὴν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαςὴν ἐκείνης. Οὕτως ἐπειδὴ $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2^2}{3^2}$ ‹ διὰ τοῦτο καὶ $\frac{2^2}{3^2} \times \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$. Ὥςε ἐξ ἐναντίας διὰ νὰ ἐξάξῃ τις τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἑνὸς κλάσματος, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐξάξῃ τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀνὰ μέρος τοῦτε ἀριθμητοῦ, καὶ τοῦ παρονομαςοῦ, καὶ τὸ προκύπτον κλάσμα θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα. Οὕτως $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$, καὶ $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$. Καὶ ἐπειδὴ ἡμεῖς ἐμάθομεν νὰ ἐξάγωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν παντὸς ἀριθμοῦ (122) ‹ ἄρα καὶ τῶν κλασμάτων.

125. Πλὴν ἂν ἦναι σπάνιοι, ὅσοι τῶν ἀριθμῶν εἶναι κύβοι ἀκριβεῖς ‹ πολλὺ πλέον ἤθελον εἶναι τοιαῦτα τὰ κλάσματα. Ἡμεῖς ὅμως πάντοτε δυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν θάτερον τῶν ὅρων ἑνὸς κλάσματος εἰς κύβον ἐντελῆ, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸ ἄνω καὶ κάτω διὰ τοῦ τετραγώνου, ἢ τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ τοῦ παρονομαςοῦ ‹ πλὴν προτιμᾶται ἡ τοῦ παρονομαςοῦ ‹ καὶ οὕτως ἀνάγεται τὸ πρᾶγμα εἰς τὸ ἀνωτέρω συμβεβηκὸς (123). Καθότι ζητείσθω ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$. Τότε εἶναι ὁρατὸν ὅτι $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 3^2}{3 \times 3^2}} = \sqrt[3]{\frac{18}{27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{18}$.. ὡσαύτως καὶ $\sqrt[3]{\frac{3}{7}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 7^2}{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{147}}{7} = \frac{5{,}27}{7}$ 0,75 ‹ ὡς ἔγγιςα δηλονότι: τουτέςιν ἧττον ἑνὸς ἑκατοςοῦ.

Ἐνίοτε ὅμως: ὅταν λέγω τὰ κλάσματα ἦναι περιοδικά, εἶναι ἴσως ἁπλούςερον μετὰ τὴν διαίρεσιν νὰ ἐξάξη τις τὴν κυβικὴν ῥίζαν. Καθότι ζητείσθω ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{5}{9}$ μετὰ τριῶν δεκαδικῶν. Τότε γράφω αὐτὸν οὕτως $\frac{5,000000000}{9}$, ὅπερ δηλ. εἶναι $= 0, 555555555$: οὗτινος δηλονότι ἡ κυβικὴ ῥίζα εἶναι ὡς ἔγγιστα $=$ 0,822.

126. Ἂν ὅμως καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἦναι κλασματίας, εἴτε ὁλοσχερὴς μετὰ κλάσματος· τότε εἶναι ἀνάγκη νὰ μεταβάλῃ τις αὐτὸν πρῶτον εἰς κλάσμα ἐντελὲς, εἶτα ἐχομένως νὰ ἐξάγῃ τὴν κυβικὴν αὐτοῦ ῥίζαν, ὡς ἀνωτέρω (125). Οὕτω $\sqrt[3]{17\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{53}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{477}$.

Πολλάκις ὅμως συμφέρει μᾶλλον νὰ μεταβάλῃ τις πρῶτον τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν· εἶτα νὰ ἐξάξῃ τὴν κυβικὴν ῥίζαν αὐτοῦ (αὐτόθι). Οὕτω ζητείσθω ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ $7\frac{3}{11}$ ἧττον ἑνὸς χιλιοσοῦ. Τότε ἐπειδὴ $\frac{3}{11} = 0, 272727272$· τούτου ἕνεκεν $\sqrt[3]{7\frac{3}{11}} = \sqrt[3]{7, 272727272} = 1, 937$.

Ἂν ὅμως καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς περιέχῃ καὶ δεκαδικὰ, ὡς ὁ 26, 26 φέρε εἰπεῖν· τότε εἶναι ἀνάγκη προσιθέμνός τις εἰς αὐτὸν δεκαδικὰ, νὰ ἐκτελέσῃ τριάδας τοὺς μετὰ τὸ κόμμα χαρακτῆρας· ὅθεν ἐνταῦθα πρέπει νὰ προσθέσῃ ἢ τέσσαρα, ἢ ἑπτὰ μηδενικὰ, ἢ κ.τ.ξ. Ὥστε ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $26, 260, 000, 000 = 2, 978$, ὡς ἔγγιστα.

Ἡ δ' ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης τῶν ἐνωτέρω τῆς τρίτης δυνάμεως θέλει ἔχει βέβαια χώραν μὲ τὴν τῆς δευτέρας καὶ τρίτης· ἀλλ' ἐπειδὴ οὔτε ἡ ἀριθμητικὴ ποιεῖ χρῆσιν τινα αὐτῶν, καὶ τὸ πρᾶγμα εἶναι περιπεπλεγμένον· τούτου ἕνεκεν πέμποντες τοῦτο εἰς τὴν ἄλγεβραν, ἡμεῖς ἐμβαίνομεν εἰς ἄλλο οὐσιῶδες μέρος τῆς ἀριθμητικῆς, ὅπερ εἶναι οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ αὐτὰ ταῦτα τὰ κλάσματα ἄλλως πως θεωρούμενα· καὶ τότε λαμβάνουσιν ὄνομα **λόγος**, καὶ ἐκ τούτου **ἀναλογία**.

ΚΕΦ. ΙΒ΄.

Περὶ ἀναλογίας.

127. Ἡμεῖς εἴπομεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ὅλον, οὗτινος τὰ μέρη εἶναι μονάδες, καὶ τοῦτο εἶναι ἡ ἐπαρίθμησις (1). Ἔτι εἴδομεν ὅτι εἶναι δυνατὸν οἱ ἀριθμοὶ νὰ ἐκληφθῶσιν ὡς ὅλα, ἅπερ ἀντὶ νὰ ἔχωσι μονάδας διὰ μέρη, νὰ ἔχωσι τὴν τετραγωνικὴν αὐτῶν ῥίζαν (106). Τώρα ὅμως λέγομεν ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκληφθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὡς ὅλα, ὧνπερ τὰ μέρη νὰ ἦναι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν: τουτέστι καὶ τὰ 2, καὶ τὰ 3, καὶ τὰ 100, κ. τ. ξ. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς 3600, ὅστις δηλονότι σύγκειται ἐκ 3600 μονάδων, καὶ ὅστις $= 60^2$, ἂν μὲν θεωρηθῇ ὡδέπως $\frac{3600}{2}$· τότε εἶναι ὅλον συγκείμενον ἐκ δύο μερῶν, ὧνπερ θάτερον $= 1800$.. εἰδὲ καὶ οὕτω $\frac{3600}{3}$· τότε σύγκειται ἐκ τριῶν μερῶν, ὧνπερ ἕκαστον $= 1200$.· εἰδὲ καὶ οὕτω $\frac{3600}{4}$· τότε σύγκειται ἐκ τεσσάρων μερῶν, ὧνπερ ἕκαστον $= 900$.. εἰδὲ οὕτω $\frac{3600}{90}$· τότε σύγκειται ἐξ ἐννενήκοντα μερῶν, ὧνπερ ἕκαστον $= 40$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.