105. Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ τὰ δεκαδικὰ εἶναι εὐκολώτατα εἰς τὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας (92).. καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸν κοινωνικὸν ἡμῶν βίον, ἡμεῖς ἔχομεν ἀναγκαίως μονάδας μείζονας διῃρημένας εἰς ἐλάσσονας (60) · τούτου ἕνεκεν ἤθελεν εἶναι εὐκταῖον · ἂν ἡ τούτων διαίρεσις ἦν εἰς 10, ἢ 100, ἢ κ. τ. ξ. Πλὴν δὲν ὑπῆρξεν ἓν τοιοῦτον, ἐξαιρεῖται μόνον ἡ μνᾶ τῶν Ἑλλήνων.

Οἱ Γάλλοι λοιπὸν τὴν σήμερον ἐάσαντες τὰ ἑαυτῶν μέτρα ἀντεκατέστησαν νέα, διαιρέσαντες καὶ ὑποδιαιρέσαντες τὰς μονάδας αὐτῶν εἰς δεκαδικά. Οὕτω διαιρέσαντες τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ γηΐνου μεσημβρινοῦ, εἴτε ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ μέχρι τοῦ πόλου, εἰς 30784440 ἴσα μέρη, ὠνόμασαν αὐτὰ μέτρα · καὶ ἑπομένως 1° = 307844, 4 μέτροις (αὐτόθι). Τὴν μονάδα πάλιν τοῦ ὄγκου ὠνόμασαν στερρὸν, ἢ κυβικὸν μέτρον · τὴν δὲ τῆς διαχωρήσεως λίτραν · τοῦ δὲ βάρους γράμμα. Καὶ ἑπομένως ἡ μονὰς τῆς ἐκτάσεως, ἢ μέτρον = $3^{\text{ποδ}}$ $11^{\text{γρ}}$ 44 = 0, $513074^{\text{όργ}}$, ἐξ οὗ ὀργυιὰ 1 = 1, 94903 μέτ.

τοῦ ὄγκου, ἢ στερρὸν = 29, 173 ποδ. κυβικοῖς

τῆς διαχωρήσεως, ἡ λίτρα = 50, 412 δακ. κυβικ. = $\frac{1}{10}$ μέτρου κυβικοῦ

τοῦ βάρους, ἢ γράμμα = 18, 83 χοκ. · ἐξ οὗ ἓν μέτρον κυβικὸν νεροῦ = 2042 λιτ 14 όγ 0 δρ 14 χο.

ΚΕΦ. Ι΄.

Περὶ τετραγώνων, καὶ τετραγωνικῶν ῥιζῶν, ἢ περὶ δυνάμεων.

106. Ἡμεῖς μέχρι τοῦδε ἐθεωρήσαμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ὅλα, πλὴν ἅπαντας ὡς ὅλα συγκείμενα ἐκ μερῶν ἰσομεγεθῶν, ἢ μονάδων. Δὲν εἶναι ὅμως δύσκολον νὰ θεωρήσῃ τις αὐτοὺς καὶ ἀπολύτως τῶν κοινῶν μονάδων, εἰς τρόπον ὅτι ἕκαστος αὐτῶν νὰ σύγκηται ἐκ διαφορετικῶν μονάδων: ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἀντὶ νὰ θεωρῇ τις τοὺς ἀριθμοὺς ὡς κεφάλαια, νὰ τοὺς θεωρῇ ὡς γινόμενα, γινόμενα ὅμως ἴσων ἀλλήλοις παραγόντων. Καὶ τότε λοιπὸν ἀλλάσσουσιν ὄνομα οἱ ἀριθμοὶ, καὶ ὀνομάζονται τ ε τ ρ ά γ ω ν α, ὡς πρὸς τὸν ἐξ οὗ δηλονότι παράγονται παράγοντα αὐτῶν (31). Οὕτως ἂν ἐγὼ λάβω δὶς τὰ δύο, ἔξω 4.. καὶ ἂν τρὶς τὰ 3, 9.. καὶ ἂν τετράκις τὰ 4, 16.. καὶ ἂν δεκάκις τὰ τὰ 10, 100, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Τὰ μὲν 4 λοιπὸν ὀνομάζονται τετράγωνον τῶν 2, τὰ δὲ 9 τῶν 3, τὰ δὲ 16, τῶν 4, τὰ δὲ 10, τῶν 100, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, καὶ γράφονται οὕτω $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $10^2 = 100$. Οὕτω λοιπὸν θεωρούμενοι οἱ ἀριθμοὶ ὠνομάσθησαν τετράγωνα, ὡς ἐκ τῆς γεωμετρίας βέβαια, ἔνθα ἐκεῖ τὸ τετράγωνον εἶναι σχῆμα ἔχον τέσσαρας πλευρὰς ἴσας ἀλλήλοις, καὶ γωνίας ὀρθὰς, ὡς δηλονότι καὶ οἱ ἀριθμοὶ θεωρούμενοι τετραγωνικῶς, ἔνθα δηλ. τὰ τετράγωνα αὐτῶν ἔχουσιν ἴσας πρὸς ἀλλή-

λας τὰς πλευράς. Οὕτω τὸ $3^2 = \begin{smallmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{smallmatrix}$: ἴσον δηλονότι μὲ ἐννέα μονάδας τετραγωνικῶς θεωρουμένας. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν δύναταί τις νὰ τὸν ἐκλάβῃ ὡς πρόσθεσιν (29)· τούτου ἕνεκεν καὶ ἐγὼ δύναμαι νὰ εἰπῶ $2+2=4=2^2$, καὶ $3+3+3=9=3^2$, καὶ $4+4+4+4=16=4^2$: ὅ ἐςι τὸ μὲν 4 τετράγωνον ἔχει μονάδας τὰ 2· τὸ δὲ 9, τὰ 3· τὸ δὲ 16, τὰ 4· τὸ δὲ 100 τὰ 10, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὅπερ εἶναι ἴδιον τῶν ἀριθμητικῶν τετραγώνων. Καθότι εἰς τὴν γεωμετρίαν: ἢ ἂν θέλῃς εἰς τὸ συνεχὲς ποσὸν, αἱ μονάδες τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου διαφέρουσιν οὐσιωδῶς τῶν μονάδων τοῦ τετραγώνου· ἐν ᾧ εἰς τὰ τετράγωνα τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι τῆς αὐτῆς φύσεως εἰς ἑκάτερα τὰ μέρη.

107. Ἂν ὅμως ἀντὶ νὰ θεωρῇ τις πῶς εἷς ἀριθμὸς γεννᾶται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐφ᾽ ἑαυτὸν ἑνὸς ἄλλου, θεωρῇ τὸ ἀνάπαλιν: ὅ ἐςι τὸ, εἷς δοθεὶς ἀριθμὸς ἐκληφθεὶς ὡς τετράγωνον, ὁποίαν ἔχει πλευρὰν τετραγωνικήν· τότε οὗτος ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ὀνομάζεται **ῥίζα τετραγωνική**, ἢ ἁπλῶς **ῥίζα**. Οὕτως ἡ ῥίζα τῶν 4 εἶναι τὰ 2.. καὶ ἡ ῥίζα τῶν 9, τὰ 3.. καὶ ἡ ῥίζα τῶν 25, τὰ 5, καὶ γράφεται οὕτως $\surd$: τουτέςι $\surd 4=2$, καὶ $\surd 9=3$, καὶ $\surd 100=10$. Ὥςε ἐπειδὴ ῥίζα τετραγωνικὴ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι εἷς ἀριθμὸς, ὅς τις πολλαπλασιασθεὶς ἐφ᾽ ἑαυτὸν γεννᾷ τὸν εἰρημένον ἀριθμόν· τούτου ἕνεκεν ἐξαγαγεῖν τὴν ῥίζαν ἑνὸς ἀριθμοῦ θέλει νὰ εἰπῇ νὰ εὕρῃ τις ἕνα ἀριθμὸν, ὅς τις πολλαπλασιασθεὶς ἐφ᾽ ἑαυτὸν νὰ γεννᾷ τὸν δοθέντα, ὅπερ δηλ. εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ σαφὴς διαίρεσις, ὡς ἐναντία τοῦ τετραγωνισμοῦ (105).

Ὥςε φυσικῶς πως ἕπεται τό, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα νὰ περιέχῃ τὴν μονάδα· ὡς τὸ τετράγωνον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν (29): ὡς, φέρε εἰπεῖν, τὰ 5 περιέχουσι τὸ 1· οὕτω καὶ τὰ 25 τὰ 5.

108. Τώρα ἐπειδὴ καὶ ἓν τετράγωνον εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα πολλαπλασιασθεῖσα ἐφ᾽ ἑαυτήν: ἢ ἂν θέλῃς μία καὶ ἡ αὐτὴ ποσότης (πλὴν ἀνωτέρου βαθμοῦ, ἢ δυνάμεως) τούτου ἕνεκεν καθ᾽ ἑαυτοὺς μὲν οἱ ἀριθμοὶ θεωρούμενοι ὀνομάζονται πρώτης δυνάμεως, ἢ βαθμοῦ· δευτέρας δὲ, ἢ δευτέρου βαθμοῦ τὰ τετράγωνα αὐτῶν, εἴτε οἱ γεννώμενοι ἀριθμοὶ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς πρώτης δυνάμεως. Ὥςε ἡ λέξις ἀριθμὸς πρώτης δυνάμεως ἢ βαθμοῦ, καὶ ῥίζα τετραγωνικὴ εἶναι λέξεις συνώνυμοι· ὡσαύτως καὶ ἡ λέξις ἀριθμὸς δευτέρας δυνάμεως, ἢ βαθμοῦ εἶναι λέξις συνώνυμος μὲ τὴν λέξιν τετράγωνον.

Ἀλλ᾽ ἂν ἓν γινόμενον ἀναφερόμενον ὡς πρὸς τὸν ἐξ οὗ παρήχθη παράγοντα ὠνομάσθη δευτέρα δύναμις.. καὶ ἂν ἐγὼ δύναμαι ὄχι ὀλιγώτερον νὰ πολλαπλασιάσω πάλιν αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἴδιον παράγοντα: ἢ ἂν θέλῃς τὴν δευτέραν δύναμιν ἐπὶ τὴν πρώτην· δῆλον ὅτι τὸ νέον γινόμενον θέλει εἶναι ἀνωτέρας δυνάμεως, ἢ βαθμοῦ.. καὶ τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ὀνομάζεται τρίτης δυνάμεως, ἢ βαθμοῦ, ἢ κύβος. Οὕτως εἰς τὸ $5\times5\times5=25\times5=125$, τὰ μὲν 5 εἶναι πρώτης δυνάμεως, τὰ δὲ 25 δευτέρας, τὰ δὲ 125 τρίτης, ἢ κύβος. Ὅθεν τὰ 5 εἰμὲν καὶ ἀναφέρεται ὡς πρὸς τὰ 25 ὀνομάζεται τετραγωνικὴ ῥίζα, εἰδὲ ὡς πρὸς τὰ 125, κυβικὴ (καὶ γράφεται οὕτως $\sqrt[3]{125}=5$. Ὡσαύτως ἐπειδὴ $2\times2\times2=8$, καὶ $3\times3\times3=27$, καὶ $4\times4\times4=64$· τούτου ἕνεκεν $\sqrt[3]{8}=2$, καὶ $\sqrt[3]{27}=3$, καὶ $\sqrt[3]{64}=4$, καὶ προφέρεται ῥίζα κυβικὴ, τὰ μὲν 2 τῶν 8, τὰ δὲ 3 τῶν 27· τὰ δὲ 4 τῶν 64.

Τὰ ὀνόματα λοιπὸν τετράγωνον καὶ κύβος ἐλήφθησαν ἐκ τῆς γεωμετρίας· τὸ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης δυνάμεως εἶναι τῆς ἀριθμητικῆς, ἢ ἀλγέβρης.

Δῆλον ὅμως ὅτι δίδονται καὶ ἀνωτέρων δυνάμεων, ἢ βαθμῶν ἀριθμοί: τετάρτης δηλονότι, καὶ πέμπτης, κ. τ. ξ. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς $2\times2\times2\times2=16$ εἶναι τετάρτης δυνάμεως, καὶ ὁ $2\times2\times2\times2\times2=32$ πέμπτης, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὡσαύτως καὶ $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ εἶναι δευτέρας δυνάμεως, καὶ $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ τρίτης δυνάμεως, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὅθεν $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$. Ὥςε πολλαπλασιάζων τις ἕνα ἀριθμὸν ἐφ' ἑαυτὸν ἅπαξ, δὶς, τρὶς, ἕξει τὰς δυνάμεις β', γ', κ. τ. ξ. Οὕτως

α'.	β'.	γ'.	δ'.	ε'.	ϛ'.	ζ'.	η'.	θ'.
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125

109. Ὁ Καρτέσιος ὅμως ἐφεῦρε τρόπον ἄριςον διὰ νὰ ἐμφανίζῃ ἕνα ἀριθμὸν ὁποίας δυνάμεως, ἢ βαθμοῦ εἶναι, ὅς τις εἶναι νὰ γράφῃ τις ἄλλον ἀριθμὸν ἐπ' αὐτοῦ, εἰς ὅπερ ἤθελε δοθῆ ὄνομα ἐ κ θ έ τ η ς. Οὕτω τὸ μὲν 1 ἐκ-

θέτης σημαίνει ὅτι ὁ ὑπ' αὐτὸ ἀριθμὸς εἶναι τῆς πρώτης δυνάμεως· τὰ δὲ 2, δευτέρας· τὰ δὲ 3, τρίτης, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Οὕτω τὸ $2^2 = 2\times 2=4$, καὶ τὸ $2^3 = 2\times 2\times 2=8$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὥςε ἂν εἷς ἀριθμὸς ἔχῃ ἐκθέτην 10· τοῦτο θέλει νὰ εἰπῇ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἑαυτοῦ ἐννεάκις: ὃ ἐςι πάντοτε ἧττον ἅπαξ τοῦ ἐκθέτου. ἐκ τοῦ διότι $2^2=2\times 2$· καὶ $2^3=2\times 2\times 2$· καὶ $2^{10}=2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2=1024$· καὶ ἐντεῦθεν $\sqrt[10]{1024}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$, κ.τ.ξ.

110. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λοιπὸν ἐκτεθέντων ἤθελε μαντεύσαι τις, ὅτι δύο εἰδῶν εἶναι μόνον τὰ περὶ τῶν δυνάμεων προβλήματα: α'. δηλ. δοθέντος ἑνὸς ἀριθμοῦ, νὰ εὕρῃ τις τὴν τοιάνδε αὐτοῦ δύναμιν, ἢ βαθμόν. β'. δοθείσης τῆς τοιᾶσδε δυνάμεως νὰ εὕρῃ τὴν ῥίζαν αὐτοῦ. Πλὴν δὲν εἶναι ὀλιγώτερον σαφὲς ὅτι τοῦ μὲν πρώτου εἴδους τὰ προβλήματα δέονται οὐδεμιᾶς διδασκαλίας, ὡς ὄντα ἁπλοῦς πολλαπλασιασμὸς τοῦ αὐτοῦ παράγοντος (106). Οὕτως ἄν τις ζητήσῃ τὸ τετράγωνον τῶν 5· τοῦτο θέλει εἶναι $5\times 5=25$· καὶ ἂν τὸ τετράγωνον τῶν 10· τοῦτο θέλει εἶναι $10\times 10=100$· καὶ ἂν τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{1}{2}$· τοῦτο θέλει εἶναι $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$· καὶ ἂν τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{1}{10}$, τοῦτο θέλει εἶναι $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$. Ὁμοιόντι ἤθελε λεχθῇ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν δυνάμεων, ἢ βαθμῶν.

Δὲν ἀκολουθεῖ ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους, ὅπερ καὶ ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης ὀνομάζεται: ἐνταῦθα λέγω εἶναι ἀναγκαία καί τις διδασκαλία τῆς μηθόδου. Ὥςε ἀρξώμεθα τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης: ὅ ἐςι δοθέντος ἑνὸς ἀριθμοῦ, νὰ εὕρῃ τις ὁποῖος ἀριθμὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐφ' ἑαυτοῦ, γεννᾷ τὸν δοθέντα.

111. Σημειωτέον ὅμως πρῶτον ταῦτα.. α'. ὅτι ἰδιότης τῆς μονάδος εἶναι τὸ νὰ ἦναι ἡ αὐτὴ πάσης δυνάμεως: τουτέςι $1 \times 1 = 1$, καὶ $1 \times 1 \times 1 = 1$ · καὶ διὰ τοῦτο $\sqrt{1} = 1$, καὶ $\sqrt[5]{1} = 1$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

β'. Ὅτι τὸ τετράγωνον τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐξ ἑνὸς χαρακτήρων δὲν ὑπερβαίνει τοὺς δύο χαρακτῆρας. Καθότι τὸ τετράγωνον τοῦ 10, ὅς τις εἶναι ἀριθμὸς ἐκ δύο χαρακτήρων, εἶναι ὁ πρῶτος ἀριθμὸς τῶν ἐκ τριῶν χαρακτήρων συγκείμενος, εἴτε = 100. Ἰδοὺ καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ἐξ ἑνὸς χαρακτῆρος ἀριθμῶν εἰς τοῦτον τὸν πίνακα.

ἀριθμοὶ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Τετράγωνα αὐτῶν	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Ὅς τις δηλονότι εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ μέρος τοῦ Πυθαγορικοῦ πίνακος (30), εἴτε τὰ γινόμενα τῶν ἴσων μόνον παραγόντων. γ'. Ὅτι τὸ τετράγωνον τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐκ δύο χαρακτήρων ἔχει ὅρια τρεῖς καὶ τέσσαρας χαρακτῆρας. Καθότι τὸ μὲν τοῦ πρώτου αὐτῶν: τοῦ 10 τὸ τετράγωνον, εἶναι = 100 · τοῦ δὲ τοῦ ἐσχάτου: τοῦ 99, εἶναι = 9801.

δ'. Ὅτι τὸ τετράγωνον τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐκ τριῶν χαρακτήρων ἔχει ὅρια πέντε καὶ ἓξ χαρακτῆρας. Καθότι τὸ μὲν τοῦ πρώτου αὐτῶν: τοῦ 100 τετραγώνου, εἶναι

= 10000 · τὸ δὲ τοῦ ἐσχάτου: τοῦ 999, εἶναι = 998001. Καὶ οὕτως ἀκολούθως.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν α΄. ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἐξ ἑνὸς ἢ δύο χακτήρων συγκείμενος, ἔχει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν συγκειμένην ἐξ ἑνὸς μόνου χαρακτῆρος: τουτέστιν ἐκ μόνων μονάδων.

Συμπέρασμα β΄. ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἐκ τριῶν, ἢ τεσσάρων χαρακτήρων συγκείμενος, ἔχει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν συγκειμένην ἐκ δύο μόνων χαρακτήρων: τουτέστιν ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων.

Συμπέρασμα γ΄. ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἐκ πέντε, ἢ ἓξ χαρακτήρων συγκείμενος, ἔχει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἐκ τριῶν χαρακτήρων. Ἀλλὰ ταῦτα πάντα — τί ἄλλο εἶναι, εἰμὴ ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν συγκειμένην ἐκ τοσούτων χαρακτήρων, ὅσα ζεύγη ἔχει αὐτὸς οὗτος;

112 Ἂν λοιπὸν καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς, οὗ τινος δηλονότι ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, σύγκηται ἐκ δύο χαρακτήρων · τότε δεῖται οὐδεμιᾶς διδασκαλίας.. ἐκ τοῦ διότι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ πίνακος (111). Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ ἐκεῖ αἱ ῥίζαι εἶναι μόνον ἐννέα · οἱ δ᾽ ἀριθμοὶ οἱ ἐκ δύο καὶ ἑνὸς χαρακτῆρος εἶναι 99 · τοῦτο ἐμφανίζει ὅτι ἡ ῥίζα αὐτῶν ἤθελεν εὑρεθῇ ὡς ἔγγιστα, καὶ οὐδέποτε ἐξηκριβωμένως. Ἂν, φέρε εἰπεῖν, ζητηθῇ ἡ ῥίζα τοῦ 78 · αὕτη θέλει κεῖται μεταξὺ τῶν 8 καὶ 9 · ὡς τοῦ τετραγώνου 78 κειμένου μεταξὺ τῶν 64 καὶ 81 τετραγώνων: ὅ ἐστιν εἶναι 8 καὶ κλάσμα · κλάσμα ὅμως, οὗτινος ἡ σημασία δὲν ἤθελεν εὑρεθῇ ποτὲ ἐ-

ξηκριβωμένως· ἀγκαλὰ, ὡς θέλομεν ἰδεῖ μετ' οὐ πολὺ, δύναταί τις νὰ πλησιάσῃ, ὅσον θέλει.

Ἄ ῤ ῥ η τ ο ς λοιπὸν ὀνομάζεται πᾶσα ῥίζα, ἥτις δὲν εὑρίσκεται ἐξηκριβωμένως.

113 Ὥςε ἂς ἔλθωμεν εἰς τὰ τετράγωνα τὰ ἐκ πλέου τῶν δύο χαρακτήρων συγκείμενα. Δῆλον ὅμως, νομίζω ἐγὼ, ὅτι ἤθελε λάβοιτις τότε μόνον γνῶσιν ἀκριβεςέραν τοῦ πράγματος· ἂν πρῶτον ἐμάνθανε τὰ μέρη, ἐξ ὧν ἕκαςον τῶν τετραγώνων σύγκειται; ὅπερ βέβαια εἶναι τὸ νὰ προχωρῇ τις ἀναλυτικῶς.

Νὰ τετραγωνίσω λοιπὸν ἕνα ἀριθμὸν σημαίνει οὐδὲν ἄλλο, ἢ νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν ἐφ' ἑαυτόν. Νὰ πολλαπλασιάσω πάλιν ἕνα ἀριθμὸν ἐφ' ἑαυτὸν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ πολλαπλασιάσω ἅπαντα τὰ μέρη αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτά. Οὕτω $25 \times 25 = (20+5)\ (20+5) = 625$. Ὥςε ἐκτελῶ τὸν πολλαπλασιαμὸν τῶν $20+5$ ἐφ' ἑαυτὰ, καὶ ἔχω

$$\begin{array}{r} 20+5 \\ 20+5 \\ \hline 20^2+2\times20\times5+5^2=625 \end{array}$$

Ἔνθα δηλονότι, ὡς εἶναι ὁρατὸν, τὸ τετράγωνον $20^2+2\times20\times5+5^2$ σύγκειται ἐκ τριῶν ὅρων διαφορετικῶν: τουτέςιν ἐκ δύο τετραγώνων τῶν δύο χαρακτήρων τῆς ῥίζης: τῶν 20 λέγω καὶ 5, καὶ ἐκ τοῦ δὶς γινομένου τούτων αὐτῶν τῶν δύο χαρακτήρων: τουτέςι τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας.

Ὥςε ἄν μοι ζητηθῇ ἡ ῥίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ τριῶν χαρακτήρων, ὡς τοῦ 625· ἐγὼ ἀμέσως γνωρίζω α΄. ὅτι ἡ ῥίζα αὐτοῦ σύγκειται ἐκ δύο χαρακτήρων: μονάδων δηλονότι καὶ δεκάδων (111)· καὶ ἐπομένως διαχωρίζω αὐτὸν εἰς δύο ζεύγη οὕτω 6,25.. καὶ β΄. ὅτι ἡ τοῦ πρώτου ζεύγους ῥίζα εἶναι 2.. ὅθεν ζητῶ μόνον τῶν 6 τὴν ῥίζαν, ἥτις θέλει εἶναι δεκάδες. Καθότι ἐπειδὴ καὶ πᾶς ἀριθμὸς συγκείμενος ἐκ δύο χαρακτήρων ἔχει ῥίζαν μονάδα (αὐτόθι)· τούτου ἕνεκεν ἡ ζητουμένη ῥίζα τῶν μὲν μονάδων εὑρίσκεται εἰς τοὺς δύο τελευταίους χαρακτῆρας: τὰ 25, τῶν δὲ δεκάδων εἰς τὰς ἑκατοντάδας, εἰς τὰ 600 λέγω

	25
	6,25
	4
4	225
	20
	25
	0

Ἡ ῥίζα λοιπὸν τῶν 6, λέγω, εἶναι μείζων τῶν 2, καὶ ἐλάσσων τῶν 3· ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ σαφὴς διαίρεσις (107)· τούτου ἕνεκεν προκρίνω τὰ 2, τῶν 3, καὶ τὰ γράφω, ὡς ἄλλο πηλίκον ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, εἶτα τετραγωνίζων αὐτό, ἀφαιρῶ τὸ τετράγωνον ἀπὸ τῶν 6, καὶ ἔχω διαφορὰν 2, εἰς τὰ δεξιὰ τῶν ὁποίων καταβιβάζω τὸν δεύτερον χαρακτῆρα 2 τοῦ δοθέντος, καὶ ἔχω διαιρετέον τὸν ἀριθμὸν 22: ἔνθα δηλονότι εὑρίσκονται αἱ μονάδες τῆς ζητουμένης ῥίζης. Ὥστε διὰ νὰ τὰς εὕρω, διπλασιάζω τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν: τῶν δεκάδων, λέγω τὰ 2, καὶ ἔχω διὰ διαιρέτην 4, ὅστις εἰσέρχεται πεντάκις εἰς τὸ 22: ὅθεν γράφω 5 εἰς τὰ δεξιὰ τῆς εὑρεθείσης ῥίζης· καὶ οὕτως ἔχω 25 διὰ ζητουμένην ῥίζαν. Πρὸς πληροφορίαν λοιπὸν πρῶτον πολλαπλασιάζω τὴν ῥίζαν 5 διὰ τοῦ διαιρέτου 4, καὶ ἔχω 20· εἶτα εἰς ἑαυτήν, καὶ ἔχω 25 (δῆλον δ᾽ ὅτι τὰ 20 εἶναι δεκάδες, εἴτε = 200), καὶ ἀφαιρῶν αὐτὰ ἀπὸ τῶν 225, ἔχω διαφορὰν μηδέν. Ὥςε συνάγω ὅτι τὰ 25 εἶναι ῥίζα ἀκριβὴς τοῦ 625 ἀριθμοῦ

114. Ὁμοιόντι θέλει λεχθῇ, καὶ ἂν ἡ ζητουμένη ῥίζα σύγκηται ἐκ μᾶλλον τῶν δύο χαρακτήρων, πάντοτε δηλονότι τὸ τετράγωνον αὐτῆς σύγκειται ἔκτε τῶν τετραγώνων τῶν ἰδίων αὐτῆς μερῶν, καὶ ἐκ τῶν δὶς γινομένων αὐτῶν πρὸς ἄλληλα.

Καθότι ζητείσθω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 390625, ἥτις δηλονότι εἶναι 625. Τώρα $625=600+20+5$. Ὥςε ἢ τὸ ὅλον, ἢ τὰ μέρη αὐτοῦ νὰ τετραγωνίσω, τ' τετράγωνον θέλει εἶναι τὸ αὐτό. Ὥςε

$$\begin{array}{l} 600+20+5 \\ \underline{600+20+5} \\ 600^2+20\times600+5\times600, \\ \quad +600\times20+600\times5\ +20^2+5\times20 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +20\times5+5^2 \\ 600^2+2\times600\times20+20^2+2\times620\times5+5^2= \\ 390625 \end{array}$$

Ἔνθα δηλονότι, ὡς ὁρᾶται, τοῦτο τὸ τετράγωνον σύγκειται ά. ἐκ τῶν τριῶν τετραγώνων τῶν χαρακτήρων τῆς ῥίζης, καὶ β΄. ἐκ τῶν τριῶν δὶς γινομένων πρὸς ἀλλήλους τῶν χαρακτήρων. Καὶ ἐπειδὴ ὁ πρῶτος χαρακτὴρ τῆς ζητουμένης ῥίζης εἶναι ἡ ῥίζα τῶν 600^2, εἴτε τὰ 6, ἂν διὰ τοῦ δὶς τούτου διαιρέσω τὸν δεύτερον ὅρον: τὸν $2\times600\times20$ λέγω, ἔξω πηλίκον 2 (=20).. καὶ ἂν αὖθις διαιρέσω τὸν ἀκόλουθον ὅρον διὰ τῆς δὶς ῥίζης 62: εἴτε τὸν $2\times620\times5$, ἔξω διὰ πηλίκον 5, ὅπερ δηλ. εἶναι ὁ τρίτος χαρακτὴρ τῆς ζητουμένης ῥίζης. Καὶ ἰδοὺ πῶς ἐκτελῶ τὴν ἐργασίαν.

	6	2	5
	39	06	25
	36		
12	3	06	
	2	4	
		4	
124		62	2
		62	0
			25
			0

Διαιρῶ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς ζεύγη, ἀνὰ δύο χαρακτῆρας λέγω, ἀρχόμενος πάντοτε ἐκ τῶν δεξιῶν· καὶ οὕτω βλέπω ἀμέσως ὅτι ἡ ζητουμένη ῥίζα σ'γκειται ἐκ τριῶν χαρακτήρων. Διὰ νὰ μὴ συμβῆ ὅμως εἰς τὴν διαίρεσιν σύγχυσίς τις, ἄγω καθέτους ἀπὸ τῶν τομῶν, ὡς ἄλλας ςήλας. Καὶ οὕτως ἐγὼ ζητῶ τὴν ῥίζαν μόνου τοῦ πρώτου τμήματος: τουτέςι τοῦ 39, ἥτις δηλονότι εἶναι 6 (111). Τὴν γράφω λοιπὸν ὡς ἄλλο πηλίκον ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.. τὴν τετραγωνίζω, καὶ ἀφαιρῶν τὸ τετράγωνον αὐτῆς ἀπὸ τοῦ πρώτου τμήματος, ἔχω διαφορὰν 3, εἰς τὰ δεξιὰ τῶν ὁποίων κατάγω τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ δευτέρου τμήματος· καὶ ἔχω 3ο, ὅςτις δηλ. εἶναι ὁ δεύτερος διαιρετέος. Διαιρῶν λοιπὸν αὐτὸν διὰ τοῦ δὶς 6, ἔχω πηλίκον 2, ὅπερ δηλονότι εἶναι ἡ ῥίζα τῶν δεκάδων· καὶ τὴν γράφω εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ῥίζης 6. Τώρα ἀφαιρῶν τό, τε γινόμενον τοῦ πηλίκου 2 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 12, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ 4 ἀπὸ τῶν 306, ἔχω διαφορὰν 62, εἰς τὰ δεξιὰ τῶν ὁποίων κατάγων τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ τρίτου τμήματος, ἔχω 622, ὅςτις δηλονότι εἶναι ὁ τρίτος διαιρετέος· διαιρέτην δ' ἔχω τὸ διπλάσιον τῆς ῥίζης 62, εἴτε τὸ 124.. καὶ οὕτω μοὶ προκύπτει πηλίκον 5, ὅπερ εἶναι ἡ ῥίζα τῶν μονάδων.. Ὅθεν καὶ τὴν γράφω εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ῥίζης 62. Καὶ ἐδῶ κάμνω τὰ ὅμοια: ὅ, ἐςιν ἀφαιρῶ καὶ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου 5 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 124, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ 25. Καὶ ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ εἶναι μηδὲν, συνάγω ὅτι ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶναι = 625.

Ὥςε εἰς πάντα δοθέντα ἀριθμὸν ἐγὼ θέλω ἐκτελεῖ τὰ ὅμοια. Καθότι ζητείσθω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 11948691929344.

	3	4	5	6	6	8	8
	11	94	86	91	92	93	44
	9						
6	2	9					
	2	4					
		16					
68		38	8				
		34	0				
			25				
690		4	61	9			
		4	14	0			
				36			
6912			47	55	9		
			41	47	2		
					36		
69132			6	08	36	9	
			5	53	05	6	
						64	
691336				55	30	69	4
				55	30	68	8
							64
						0	

Χωρίζω εἰς ζεύγη αὐτὸν, καὶ ἔχω ζεύγη ἑπτά. Ἑπτὰ λοιπὸν λέγω ὅτι εἶναι οἱ χαρακτῆρες τῆς ζητουμένης ῥίζης· πρὸς εὕρεσιν τῶν ὁποίων, ἀφ᾽ οὗ κατάξω ἀπὸ τῶν τομῶν γραμμὰς, ζητῶ ἀνὰ μέρος ἑκάςου τμήματος τὴν ῥίζαν. Ἡ ῥίζα λοιπὸν τοῦ 11 εἶναι 3.. τὴν γράφω ὡς ἄλλο πηλίκον· καὶ ἀφαιρῶν τὸ ταύτης τετράγωνον ἔχω 2 διαφοράν.

Εἰς ταύτην τὴν διαφορὰν καταβιβάζων τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ δευτέρου τμήματος, ἔχω διὰ μὲν διαιρετέον 29, διὰ δὲ διαιρέτην 6: τὸ διπλάσιον δηλ. τῆς ῥίζης 3, ἐξ οὗ δηλονότι μοὶ προκύπτει πηλίκον 4, ὅπερ εἶναι ὁ δεύτερος χαρακτὴρ τῆς ζητουμένης ῥίζης. Τώρα ἀφαιρῶ καὶ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου 4 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 6, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ 16.. εἶτα εἰς τὴν διαφορὰν 38 κατάγω τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ τρίτου τμήματος, ὅπερ θέλει γένει ὁ τρίτος διαιρετέος, καὶ διαιρέτης τὸ διπλάσιον τῆς ῥίζης 34. Καὶ οὕτως ἐπακολουθῶν, ἐγὼ ἔξω διὰ ῥίζαν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ = 3456688, ἥτις δηλ. ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἑαυτὴν θέλει μοι δώσει τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

115. Σπάνιοι ὅμως εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἔχοντες ῥίζας τετραγωνικὰς ἐξηκριβωμένας. Καθότι ἂν παρατηρήσῃ τις εἰς τὸν πίνακα (111) ‹ ἤθελεν ἰδεῖ ὅτι ἐκ τῶν ἐννενήκοντα ἐννέα ἀριθμῶν, μόνοι ἐννέα εἶναι οἱ ἔχοντες ῥίζας ἐξηκριβωμένας. Καὶ ἔτι ὅμως σπανιώτεροι εἶναι ὅσοι τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀνωτέρω τῶν 100. Καθότι ἂν $10 \times 10 = 100$ ‹ καὶ ἂν $34 \times 34 = 1156$ ‹ δῆλον ὅτι μόνοι 24 ἀριθμοὶ παρευρίσκονται ἀκριβεῖς τετράγωνοι εἰς 1056 ἀριθμούς.

Ὅταν λοιπὸν ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἦναι ἐντελὲς τετράγωνον ‹ τὸ μόνον μέσον τοῦ νὰ φθάσῃ τις ὡς ἔγγιστα εἰς τὴν ἀληθῆ ῥίζαν, εἶναι ἡ χρῆσις τῶν δεκαδικῶν: ἥτις δηλονότι ἐφεδράζει εἰς τὸ νὰ προσθέτῃ τις εἰς τὸ λείψανον τοσαῦτα ζεύγη μηδενικῶν, ὅ ἐστι 12^2, 100^2 ‹ ὅσα δεκαδικὰ θέλει εἰς τὴν ῥίζαν, ἐπακολουθῶν τὴν ἐργασίαν κατὰ τὸ εἰωθὸς δηλονότι (113). Οἱ τοιοῦτοι λοιπὸν ἀριθμοὶ ὀνομάζονται ἄλογοι, καὶ ῥητοὶ οἱ ἐναντίοι, ὡς οὔσης ἀνεκφράστου τῆς ἐκφράσεως αὐτῶν, καὶ σημειοῦνται μόνον οὕτως $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$.

Ἔστω, φέρε εἰπεῖν, νὰ ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα τοῦ 26, ὅστις δηλονότι εἶναι ἄλογος ἀριθμός.