ΚΕΦ. Θ'.

Περὶ Δεκαδικῶν κλασμάτων.

88. Κλάσματα δεκαδικὰ, ἢ καὶ ἁπλῶς δεκαδικὰ, ὀνομάζονται, ὅσα τῶν κλασμάτων ἔχουσι παρονομαςὴν τὸ 10, ἢ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτὸ: τουτέςι τὸ 100, 1000, κ. τ. ξ. ὡς ταῦτα $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{31415926535}{10000000000}$, κ. τ. ξ. Ὥςε τὰ δεκαδικὰ διαφέρουσι μὲν ὁλοτελῶς τῶν λοιπῶν κλασμάτων· εἶναι ὅμως ἐπιτηδειότερα εἰς τὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας· καὶ τούτου ἕνεκεν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκτεθῇ ἀνὰ μέρος ἡ θεωρία αὐτῶν. Καθότι ἐπειδὴ καὶ 10 χιλιοςὰ $=$ 1 ἑκατοςῷ.. καὶ 10 ἑκατοςὰ $=$ 1 δεκάτῳ.. καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν ἓν χιλιοςὸν γράφεται οὕτως $\frac{1}{1000}$, τὸ δ' ἓν ἑκατοςὸν οὕτως $\frac{1}{100}$, τὸ δὲ δέκατον οὕτως $\frac{1}{10}$· ἑπόμενον εἶναι οἱ παρονομαςαὶ τῶν δεκαδικῶν νὰ ἦναι τῆς αὐτῆς κλίμακος, ἧς περ εἴδομεν ὅτι εἶναι καὶ οἱ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ (8)· πλὴν ἐναντίας. Ὥςε δύναταί τις νὰ κάμῃ πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τούτων τῶν κλασμάτων, χωρὶς νὰ μεταμορφώσῃ αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμοειδῆ, ὡς ὄντα δηλονότι τοιαῦτα ἐκ φύσεως. Καθότι ἐπειδὴ καὶ $\frac{321}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{1}{100} = \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000}$· τούτου ἕνεκεν, ἂν μοὶ δοθῶσι νὰ προσθέσω ταῦτα τὰ κλάσματα $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{1}{1000}$· ἐγὼ ἀμέσως θέλω γράψοι $\frac{321}{1000}$.. ἐκ τοῦ διότι ὡς φαίνεται τὰ 300 χιλιοςὰ, εἶναι ἴσα μὲ 3 δέκατα· καὶ τὰ 20 χιλιοςὰ εἶναι τὰ αὐτὰ μὲ τὰ 2 ἑκατοςά.

89. Ἂν λοιπὸν καὶ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα ὑπόκηνται εἰς τὸν αὐτὸν νόμον τῶν ὁλοσχερῶν· δῆλον ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἀφαιρέσῃ τις ἐξ αὐτῶν τὴν κλασματικὴν μορφήν: τουτέστι τὴν ὁριζόντιον γραμμὴν, καὶ νὰ τὰ γράφῃ, ὡς ἄλλους ὁλοσχερεῖς ἀριθμούς· καὶ οὕτω νὰ ἐκτελῇ τὰς ἀριθμητικὰς εργασίας εἰς αὐτὰ· ὡς καὶ τῷ ὄντι ἠκολούθησε.

Συνέθεντο λοιπὸν οἱ γεωμέτραι ἐκ συνθήκης, νὰ γράφωσι τὰ δεκαδικὰ τότε, ἀφ' οὗ πρῶτον γράψουσι κόμμα. Οὕτω τὰ μὲν $25\frac{321}{1000} = 25, 321$, καὶ προφέρονται εἴκοσι πέντε μονάδες, 321 χιλιοστὰ· τὰ δὲ $\frac{31415926535}{10000000000} = 3, 1415926535$, καὶ προφέρονται τρία, καὶ 141592 6535 δεκάκις χιλιάκις μιλλιοστά. Εἰ δὲ καὶ τὰ δεκαδικὰ εἶναι ἄνευ ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν· τότε πρὸ τοῦ κόμματος τίθεται μηδενικόν. Οὕτω $0, 3 = \frac{3}{10}$, καὶ $0, 32 = \frac{32}{100}$ καὶ $0, 321 = \frac{321}{1000}$. Ἀλλ' ἂν $0, 3 = \frac{3}{10}$, καὶ $0, 32 = \frac{32}{100}$, καὶ $0, 321 = \frac{321}{1000}$· δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἀνάπαλιν εἶναι πλέον, ἢ ἀληθές: τουτέστι $\frac{3}{10} = 0, 3$, καὶ $\frac{32}{100} = 0, 32$, καὶ $\frac{321}{1000} = 0, 321$. Ἀλλὰ $\frac{3}{10}$, καὶ $\frac{32}{100}$, καὶ $\frac{321}{1000}$ ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ διαίρεσις τις: ἢ ἂν θέλῃς πηλίκον· ἄρα καὶ τὰ 0, 3 καὶ 0, 32 καὶ 0, 321 εἶναι τοιαῦτα.

90. *Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι μετὰ τὸ κόμμα, τὰ μὲν δεκαδικὰ κατέχουσι τὸν πρῶτον χῶρον· τὰ δὲ ἑκατοστὰ, τὸν δεύτερον· τὰ δὲ χιλιοστὰ, τὸν τρίτον καὶ οὕτως ἐφεξῆς· καὶ ἑπομένως ἕκαστος αὐτῶν χαρακτὴρ εἶναι δεκάκις μείζων τοῦ ἑξῆς* (88). Ὥστε ἂν ἦναι νὰ γράψῃ τις

$\frac{1}{100}$, πρέπει νὰ τὸ γράψῃ οὕτως, 0, 01.. καὶ ἂν $\frac{1}{1000}$, οὕτως 0, 001.. καὶ ἂν $\frac{1}{10000}$ οὕτως 0,0001; καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὥςε τιθέμενα τὰ μηδενικὰ πρὸ τῶν χαρακτήρων, σμικρύνουσι τὴν σημασίαν αὐτῶν. Ὅθεν εἷς χαρακτὴρ ‹ ὅσον ἡ τοποθεσία αὐτοῦ ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κόμματος ‹ τοσαῦτα μηδενικὰ ἤθελεν ἔχοι ὑποκάτω ἑαυτοῦ ‹ ἂν δηλ. ἐλάμβανε μορφὴν κλασματικήν. Οὕτω τὸ 0, 0001 εἶναι $=\frac{1}{10000}$ ‹ καὶ τὸ 0, 001 $=\frac{1}{1000}$, καὶ τὸ 0.01 $=\frac{1}{100}$, καὶ τὸ 0, 1 $=\frac{1}{10}$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ τὰ δεκαδικὰ χωροῦσιν ἐναντίως μὲ τοὺς ὁλοσχερεῖς.. ἐκ τοῦ διότι, φέρε εἰπεῖν, τῶν τριῶν χιλιάδων γράφεται οὕτως 3000: ὅ ἐςι τοῦ κατέχοντος τὸν τέταρτον χῶρον πρὸς τὰ ἀριςερὰ ‹ τὸ τρία χιλιοςὰ γράφεται οὕτως 0,003: ὅ ἐςι κατέχει τὸν τρίτον χῶρον μετὰ τὸ κόμμα, ἢ τὸν τέταρτον συναριθμουμένου καὶ τοῦ ὁλοσχεροῦς ‹ τούτου ἕνεκεν οἱ ἀριθμοὶ μετὰ τῶν δεκαδικῶν φυλάττουσι τὸν νόμον τὸν γενικὸν τῶν ἀριθμῶν: ὅ ἐςιν ἡ σημασία ἑνὸς χαρακτῆρος αὐξάνει δεκάκις ‹ ὅταν ἐκ τῶν δεξιῶν προχωρῇ πρὸς τὰ ἀριςερὰ μίαν τοποθεσίαν (8). Οὕτως εἰς τὸν ἀριθμὸν 111, 111, ἐκ τῶν ἀριςερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ, ὁ πρῶτος χαρακτὴρ εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ δευτέρου ‹ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ‹ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου, ὁ τέταρτος τοῦ πέμπτου, καὶ ὁ πέμπτος τοῦ ἕκτου: ὅ ἐςι $111,111=100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$: ἔνθα δηλονότι ὁ χῶρος τῶν μονάδων εἶναι ὅριον, καὶ τῶν ὁλοσχερῶν καὶ τῶν δεκαδικῶν.

91. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ οἱ δεκαδικοὶ χαρακτῆρες ἔχουσιν ὀνομασίας, ἐναντίας μὲ τὰς τῶν ὁλοσχερῶν (89) ‹

τούτου ἕνεκεν ὅσα ἐξ αὐτῶν κατέχουσι μετὰ τὸ κόμμα τὸν πρῶτον χῶρον, ὀνομάζονται δεκαδικὰ (καὶ ἑκατοςὰ, ὅσα τὸν δεύτερον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς (ἐξ οὗ ἀκολουθεῖ ἡ πρόσθεσις τῶν μηδενικῶν ἐκ τῶν δεξιῶν (ὡς δηλονότι εἰς τοὺς ὁλοσχερεῖς ἐκ τῶν ἀριςερῶν) νὰ ἀλάττῃ τελείως τὴν σημασίαν αὐτῶν. Οὕτως $0,30=0,3$, καὶ $0,3200 =0,32=\frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{0}{1000}+\frac{0}{10000}$, καὶ $0,321000 =0,321$, καὶ $0,0010=0,001$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Καθότι ἐπειδὴ εἷς χαρακτὴρ δεκαδικὸς αὐξάνεται κατὰ τὴν σημασίαν, ὅσον πλησιάζει εἰς τὸ κόμμα (καὶ σμικρύνεται (ὅσον αὐτοῦ ἀπομακρύνεται. καὶ ἐπειδὴ πρόσθεσις τῶν μηδενικῶν ἀπὸ τῶν δεξιῶν, τὸν ἀπομακρύνει ὁλοτελῶς ἀπὸ τοῦ κόμματος (ἑπόμενον εἶναι ἡ πρόσθεσις τῶν μηδενικῶν ἀπὸ τῶν δεξιῶν νὰ ἀλλάττῃ ὁλοτελῶς τὴν σημασίαν ἑνὸς δεκαδικοῦ χαρακτῆρος. Ὥςε ἂν εὑρεθῇ ἐν τῷ μεταξὺ μηδὲν (τοῦτο θέλει ἀλλάξαι ὁλοτελῶς τὴν σημασίαν τοῦ πρὸ αὐτοῦ χαρακτῆρος. Οὕτως τὰ 25, 301 προφέρονται εἰκοσιπέντε μονάδες, τριακόσια ἓν χιλιοςά. Ἐξ ἐναντίας ὅμως τὰ μηδενικὰ τιθέμενα πρὸ τοῦ χαρακτῆρος ἀλλάττουσι τὴν σημασίαν αὐτοῦ (αὐτόθι). Ὥςε $0,1>0,01>0,001$, κ. τ. ξ. ἐκ τοῦ διότι τὸ μὲν $0,1=\frac{1}{10}$, τὸ δὲ $0,01=\frac{1}{100}$, καὶ τὸ $0,001 =\frac{1}{1000}$.

92. *Συνάγεται* λοιπὸν ἐκ τῶν ἐκτεθέντων, ὅτι καὶ αἱ τέσσαρες ἐργασίαι τῶν δεκαδικῶν πρέπει νὰ γένωνται, ὡσὰν νὰ ἦσαν ἀριθμοὶ ὁλοσχερεῖς. Ὥςε ἂν μοὶ δοθῶσιν δεκαδικὰ, ἢ ὁλοσχερεῖς μετὰ δεκαδικῶν διὰ νὰ ἐκτελέσω

τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν ‹ ἐγὼ δὲν ἔχω νὰ κάμω ἄλλο, εἰμὴ νὰ τάξω κατὰ ςήλην τὰ κόμματα, χάριν τοῦ ὁποίου δηλονότι ἔχουσι νὰ τεθῶσιν ἐπίσης εἰς ςήλας καὶ αἱ δεκαδικαὶ μονάδες, καὶ αἱ ἑκατοςαὶ, κ. τ. ξ. τῶν τε ὁλοσχερῶν καὶ τῶν κλασμάτων ‹ καὶ οὕτω νὰ κάμω ἀρχὴν τῆς ἐργασίας.

Οὕτως ἄν μοι ζητηθῇ τὸ κεφάλαιον τῶν 4852, 701 ‹ 4,00745 ‹ 2,7 ‹ 0, 0049 ‹ ἐγὼ ἤθελον κάμη τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν ὡσὰν νὰ ἦσαν ὁλοσχερεῖς (23), φθάνει μόνον νὰ θέσω εἰς τὸ κεφάλαιον τὸ κόμμα ὑπὸ τῶν ἄνω κομμάτων, ὡς ὁρᾶται.

4852, 701
4,00745
2,7
0, 0049
4859, 41335

Τοῦτο αὐτὸ ἤθελον ἐκτελέσοι καὶ εἰς τὰ ἑξῆς τρία παραδείγματα.

65, 995	498, 650	1, 50
64, 392	1, 350	23, 67
1, 603	500, 000	25, 17
0, 018		
132, 008		

93. Ἀλλ' ὡς ἡ πρόσθεσις ‹ οὕτω καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων γίνεται, ὡς ἡ τῶν ὁλοσχερῶν, ὡς ὁρᾶται ἐνταῦθα, τῶν κομμάτων μόνον τιθεμένων κατὰ ςήλην (92).

23, 67	498, 650	6, 0043	6,
-1, 50	-1, 350	-0, 17	-0, 17
22, 17	497, 300	5, 8343	5, 83

Καὶ ἡ βάσανος δ' ἐνταῦθα τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι ἡ πρόσθεσις, καὶ ἡ τῆς προσθέσεως ἡ ἀφαίρεσις ‹ ὡς δηλονότι καὶ εἰς τοὺς ὁλοσχερεῖς (26).

94. Καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς δὲ τῶν δεκαδικῶν εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ὁλοσχερῶν. Καθότι ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ πολλαπλασιαστέου, δι' ἑκάστου χαρακτῆρος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ χωρὶς νὰ γίνεταί τις φροντὶς περὶ τῶν κομμάτων αὐτῶν‹ εἰς τὸ γινόμενον ὅμως εἶναι ἀνάγκη νὰ τεθῇ τὸ κόμμα οὕτως ‹ ὥστε νὰ διαμείνωσιν ἐκ τῶν δεξιῶν τοσοῦτοι δεκαδικοὶ χαρακτῆρες ‹ ὅσον εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν δεκαδικῶν χαρακτήρων, τοῦτε πολλαπλασιαστοῦ καὶ πολλαπλασιαστέου.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, τὸ γινόμενον τῶν 60, 24 ἐπὶ τὸ 1, 25. Καὶ ἐπειδὴ $6024 \times 125 = 753000$ ‹ τούτου ἕνεκεν, ἐγὼ πρέπει νὰ διαχωρήσω ἐξ αὐτοῦ τέσσαρας δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, εἴτε τοὺς 3000, ὡς τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ περιεχόντων τέσσαρας: ἑκατέρου δηλονότι δύο.

Ὁμοιόντι ἤθελον ἐκτελέσαι καὶ εἰς τὰ ἑξῆς παραδείγματα, ὡς ὁρᾶται.

```
21, 32            1, 22          43, 3
 0, 100103        0, 9               33
---------       -------       ---------
    6396          1, 098           1311
   2132                            1311
2132                           ---------
---------                         14421
2,13419596
```

Εἰς τὸ τρίτον παράδειγμα, ὡς ὁρᾶται, ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦν ὁλοσχερὴς ‹ πλὴν τὸ πρᾶγμα ἦν τὸ αὐτό, ὡσὰν νὰ ἦσαν ἀμφότεροι κλασματίαι: ὅθεν τὸ κόμμα, εις τὸ γινόμενον ἐτέθη οὕτως, ὥςε νὰ διαχωρήσῃ ἕνα χαρακτῆρα δεκαδικὸν.. ἐκ τοῦ διότι δηλονότι ἀμφότεροι οἱ παράγοντες περιεῖχον, ὄχι πλέον τοῦ ἑνὸς δεκαδικοῦ χαρακτῆρος.

95. Ὁ δὲ λόγος, δι' ὅν περ τὸ κόμμα διαχωρίζει τοσαῦτα δεκαδικὰ εἰς τὸ γινόμενον, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ τοῦτε διαιρετέου καὶ διαιρέτου, εἶναι τεθεμελιωμένος ἐπὶ τὸν γενικὸν νόμον τῶν κλασμάτων: ὅτι δηλονότι τὸ γινόμενον πρέπει νὰ περιέχηται εἰς τὸν ἕνα τῶν παραγόντων, ὡς ὁ ἕτερος εἰς τὴν μονάδα (73). Καθότι ἔςω νὰ πολλαπλασιασθῇ $\frac{1}{10}$ ἐπὶ τὸ $\frac{1}{100}$.. τότε τὸ γινόμενον τούτων θέλει εἶναι $= \frac{1}{1000} = 0,001$ (90). Ὥςε καὶ τὸ 0, $1 \times 0,01$ πρέπει νὰ μοὶ δώσῃ διὰ γινόμενον τὸ 0,001 ἔνθα τὸ 0,001 περιέχεται εἰς τὸ 0,01 ‹ ὡς τὸ 0, 1 εἰς τὴν μονάδα, ἀλλέως ἡ ἀναλογία δὲν ἤθελεν ἔχοι χώραν. Ὥςε, ὡς ὁρᾶται, τὸ κόμμα ἐτέθη εἰς τὸ γινόμενον οὕτως, ὥςε νὰ διαχωρίσῃ τρεῖς χαρακτῆρας δεκαδικοὺς ἰσαρίθμους δηλ. μὲ τοὺς εἰς τὸ 0, 1, καὶ 0. 01.

96. Ἂν ὅμως καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν δεκαδικῶν, ὁ μὲν πολλαπλασιαςέος ἦναι δεκαδικὸς, ὁ δὲ πολλαπλασιαςὴς καὶ ὁλοσχερὴς καὶ μονὰς μετὰ δεκαδικῶν ‹ τότε ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν ἄλλο δὲν ἤθελεν εἶναι, εἰμὴ ἁπλῶς μετακόμησις τοῦ κόμματος πρὸς τὰ δεξιὰ τοσοῦτον ‹ ὅσα μηδενικὰ περιέχει ὁ πολλαπλασιαςής.

Οὕτως ἂν ζητηθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 6,1234 ἐπὶ τὸν ὁλοσχερῆ 10 ‹ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἔςαι 6,1234

$\times 10 = 61,234..$ ὡσαύτως καὶ τὸ τοῦ $6,1234 \times 100$ $612,34..$ καὶ τὸ τοῦ $6,1234 \times 1000 = 6123,4..$ καὶ τὸ τοῦ $6,1234 \times 10000 = 61234$. Καθότι ὄντος τοῦ $6,1234 = \frac{61234}{10000}$, τὸ $6,1234 \times 10000$ ἦν τὸ αὐτὸ ὡσὰν νὰ ἦν $\frac{61234}{10000} \times 10000 = 61234$. Ἂν ὅμως καὶ ὁ μὲν 100000 ἦν πολλαπλασιαστὴς, ὁ δὲ 6,1234 πολλαπλασιαστέος· τότε τὸ γινόμενον ἤθελεν εἶναι 612340: ὃ ἐστιν ὄχι μόνον ἤθελε γένει μετακομιδὴ εἰς τὸ κόμμα, ἀλλὰ καὶ προσθήκη ἑνὸς μηδενικοῦ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Καὶ ἡ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὅμως τῶν δεκαδικῶν βάσανος, γίνεται ὡς ἡ τῶν ὁλοσχερῶν (37): ὃ ἐστι καὶ διὰ τῆς διαγραφῆς τῶν 9, καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως.

97. Πλὴν καὶ ἡ διαίρεσις τῶν δεκαδικῶν εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τῶν ὁλοσχερῶν· τὸ κόμμα ὅμως τίθεται εἰς τὸ πηλίκον οὕτως· ὥστε οἱ διαχωριζόμενοι πρὸς τὰ δεξιὰ χαρακτῆρες νὰ ἦναι ἴσοι μὲ τὴν ὑπεροχὴν τῶν δεκαδικῶν τοῦ διαιρετέου, ὡς πρὸς τὰ δεκαδικὰ τοῦ διαιρέτου, ὡς ὁρᾶται ἐνταῦθα.

$$\frac{1442,1}{33} = 43,7. \quad \frac{1,098}{0,9} = 1,22. \quad \frac{2,13419596}{0,100103}$$

Ἂν ὅμως καὶ ὁ διαιρετέος ἔχῃ δεκαδικοὺς χαρακτῆρας ἐλάσσονας τοῦ διαιρέτου, ὥστε νὰ μὴ δίδωται ὑπεροχὴ· τότε εἶναι ἀνάγκη νὰ προστεθῶσι μηδενικὰ εἰς τὸν διαιρετέον, ἅπερ δηλονότι ἀλλάττουσιν ὁλοτελῶς τὴν σημασίαν αὐτοῦ (90)· ὥστε νὰ δοθῇ ὑπεροχὴ εἰς τὰ δεκαδικὰ τοῦ διαιρετέου, ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην.

Οὕτως ἂν ἐζητεῖτο ἡ διαίρεσις τῶν 49,1 διὰ τῶν

20,074: οὗ τινος τὸ πηλίκον ἤθελεν εἶναι περὶ $2\frac{1}{2}$· ἐγὼ ἔπρεπε νὰ προσθέσω τέσσαρα μηδενικὰ εἰς τὸν διαιρετέον, μεταβάλλων αὐτὸν εἰς τὸν $49,10000 = 49,1$.. καὶ οὕτως ἐκτελῶν τὴν διαίρεσιν, νὰ ἔχω διὰ πηλίκον 244: τουτέςι $\frac{40.10000}{20,074} = 2,44$. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ $\frac{1442.1}{33} = \frac{1442.1}{33,0}$, καὶ $\frac{1.008}{0,9} = \frac{1,008}{0.900}$, καὶ $\frac{40.1}{20,074} = \frac{49.100}{30,074}$ τούτου ἕνεκεν δύναταί τις πρὶν τῆς διαιρέσεως νὰ προσθέση μηδενικὰ εἰς θάτερον τῶν ὅρων, ὥςε νὰ ἐξισωθῶσι τὰ δεκαδικὰ, καὶ νὰ ἀφαιρέση τὸ κόμμα. Καθότι $\frac{1,008}{0,9} = \frac{1.008}{0,900} = \frac{1008}{900} = 1,22$.. καὶ $\frac{40.1}{20,074} = \frac{40,100}{20,074} = \frac{40100}{20074} = 2\frac{8052}{20074} = 2,44$.. καὶ $\frac{0.212}{0,0000106} = \frac{0,2120000}{0,0000106} = 2000$.. ἐκ τοῦ διότι $20000 \times 0,0000106 = 0,212$.

98. Ὁ δὲ λόγος, δι' ὅνπερ τὸ κόμμα τίθεται εἰς τὸ πηλίκον οὕτως, ὥςε νὰ διαιρέση πρὸς τὰ δεξιὰ τοσούτους χαρακτῆρας, ὅση εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τῶν δεκαδικῶν τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸν διαιρέτην, εἶναι τεθεμελιωμένος ἐπὶ τὸν γενικὸν νόμον τῆς τῶν κλασμάτων διαιρέσεως: ὅτι δηλ. τὸ πηλίκον πρέπει νὰ περιέχη τὴν μονάδα, ὡς ὁ διαιρετέος τὸν διαιρέτην (79). Οὕτως ἂν διαιρέση τις τὸ 0,1 διὰ τοῦ 0,01, εἴτε τὸ $\frac{1}{10}$, διὰ τοῦ $\frac{1}{100}$, ἔχει νὰ προκύψη πηλίκον 10.. ἐκ τοῦ διότι $\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{100}} = \frac{100}{10} = 10$· ἔνθα τὰ 10 ἔχουσι πρὸς τὸ 1· ὡς τὸ $\frac{1}{10}$ πρὸς τὸ $\frac{1}{100}$.

Ὅθεν ἐπειδὴ καὶ $\frac{1442,1}{33} = 43,7$ (96)· τούτου ἕνεκεν καὶ τὸ πηλίκον 43,7 περιέχει τὴν μονάδα, ὡς ὁ διαιρετέος 1442,1 τὸν διαιρέτην 33, ἐν ᾧ ἂν τὸ κόμμα δὲν ἐτίθετο πρὸ τοῦ 87 εἰς τὸ πηλίκον, αὕτη ἡ ἀναλογία δὲν ἐδύνετο νὰ λάβῃ χώραν.

99. Ἂν ὅμως καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ὁ διαιρέτης ἦναι καὶ ὁλοσχερὴς καὶ μονὰς μετὰ δεκαδικῶν, τότε ἡ διαίρεσις δὲν θέλει εἶναι ἄλλοτί, εἰμὴ μετακομιδὴ τοῦ κόμματος ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ, καὶ τοσούτων χαρακτήρων, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης. Οὕτω τὰ $\frac{612,34}{10}=61,234..$ καὶ τὰ $\frac{612,34}{100}=6,1234..$ καὶ τὰ $\frac{612,34}{1000}=0,61234..$ ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{31415926535}{10000000000}$ $=3,1415926535$.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι πᾶν κλάσμα δεκαδικὸν δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς πηλίκον, προκύψαν ἐκ διαιρέσεως διαιρέτου ὁλοσχεροῦς συγκειμένου ἐκ μονάδος μετὰ μηδενικῶν. Οὕτω τὸ 0, 1 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ $\frac{1}{10}$, καὶ τὸ 0, 9 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὰ $\frac{9}{10}$, καὶ τὸ 0, 01, ἢ 0, 99 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ $\frac{1}{100}$, ἢ $\frac{99}{100}$. Ὥστε ἂν μοὶ δοθῇ κλάσμα δεκαδικὸν διὰ νὰ τὸ διαιρέσω ἄνω καὶ κάτω ἐν ταυτῷ διὰ τοῦ 10, ἐγὼ βέβαια πρέπει νὰ κάμω οὐδὲν ἄλλο, ἢ νὰ φέρω εἰς τὰ ὀπίσω ἕνα χαρακτῆρα εἰς ἑκατέρους τοὺς ὅρους τὸ κόμμα. Οὕτω τὰ $\frac{40,1:10}{20,074:10}=$ $\frac{4,01}{2,0074}$. Καὶ ἐξεναντίας ἂν ζητηθῇ νὰ πολλαπλασιάσω τὸ δεκαδικὸν κλάσμα ἄνω καὶ κάτω διὰ τοῦ 10, ἐγὼ βέβαια δὲν ἔχω νὰ κάμω ἄλλο, εἰμὴ νὰ φέρω εἰς τοὔμπροσθεν ἕνα χαρακτῆρα εἰς ἑκατέρους τοὺς ὅρους τὸ κόμμα. Οὕτως $\frac{40,1\times10}{20,074\times10}=\frac{401}{200,74}$. Ὁμοιόντι ἤθελον ἐκτελέσει, καὶ ἂν ὁ πολλαπλασιαςὴς περιεῖχε πλέον τοῦ ἑνὸς μηδενικοῦ.

Συμπέρασμα ἐντεῦθεν ὅτι ἡ κίνησις τοῦ κόμματος εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ειμὴ πολλαπλασιασμὸς, ἢ διαίρεσις διὰ τοῦ 10.

100. Ἂν ὅμως καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν οἱ δεκαδικοὶ χαρακτῆρες ἦναι πολλοὶ · τότε δὲν θέλει σχεδὸν ἁμαρτήσοι τις · ἂν ἀποῤῥίψη τοὺς ἐσχάτους, ὡς σχεδὸν μηδὲν σημαίνοντας. Οὕτως εἰς τὸ δεκαδικὸν 0, 890002, ἄν τις ἀποῤῥίψη τὸ 2, αὐτὸς δὲν θέλει σμικρύνοι τὴν ποσότητα πλέον τῶν $\frac{2}{1000000}$.. πρᾶγμα δηλονότι εὐκαταφρόνητον · ὅθεν καὶ ὁ σμικρυσμὸς τῆς ποσότητος ἀνεπαίσθητος.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ πάντοτε ἤθελεν εἶναι ἁμάρτημα τὸ τοιοῦτον · ὅσον σμικρὰ καὶ ἂν ἦναι ἡ διαγραφεῖσα ποσότης · τούτου ἕνεκεν, ὅταν ἦναι δυνατὸν, πρέπει τις νὰ τὸ ἐπιδιορθῇ ὁπωσοῦν, ὅπερ ὑφίςαται εἰς τὸ νὰ προσθέτη εἰς τὸν ἔσχατον τῶν καταλελειμμένων χαρακτήρων μονάδα · ἂν ὁ πρῶτος τῶν διαγραφέντων ὑπερέχη τὸν 5. Οὕτως ἂν εἰς τὸ δεκαδικὸν 0, 123456789 διαγράψη τις τοὺς ἐσχάτους τέσσαρας χαρακτῆρας, τὰ 6789 λέγω · τὸ ἁμάρτημα θέλει εἶναι ναὶ ἔλασσον ἑνὸς $\frac{1}{10000}$.. πλὴν ἤθελε σμικρυνθῇ ἔτι · ἂν εἰς τὸν ἔσχατον χαρακτῆρα τοῦ 0, 12345 προςεθῇ μονὰς.. ἐκ τοῦ διότι τὸ 0,12346000 πλησιάζει εἰς τὸ 0, 123456789 μᾶλλον, ἢ τὸ 0, 12345 0000. Ὥςε ἂν ὁ πρῶτος τῶν διαγραφομένων χαρακτήρων ἦναι ἀνώτερος τοῦ 5, ἢ καὶ 5 μετ' ἄλλων ἀκολούθων · ἡ πρόσθεσις τῆς μονάδος εἰς τὸν ἔσχατον τῶν διαλειπομένων, θέλει εἶναι ἐπικερδεςέρα. Ἐν γένει ὅμως εἰς τοὺς κοινοὺς λογαριασμοὺς εἶναι σπανιωτάτη ἡ χρῆσις τῶν ἓξ δεκαδικῶν χαρακτήρων· καὶ τρεῖς μόνοι ἤθελεν εἶναι ἱκανώτατοι.

Εἰ δὲ καὶ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα περατοῦνται εἰς μηδενικὰ· τότε βέβαια ἡ διαγραφὴ τῶν μηδενικῶν, ὡς μηδὲν σημαινόντων (91), εἶναι παντελῶς ἀθώα. Οὕτω 0, 123460000 = 0, 12346.

101. Ἐκτὸς ὅμως ταύτης τῆς ὡραίας ἰδιότητος τῶν δεκαδικῶν, πρόσεστιν εἰς αὐτὰ καὶ ἄλλη, ἥτις εἶναι νὰ μεταβάλλωσιν εἰς δεκαδικὰ ἅπαντα τὰ κλάσματα, χάριν τοῦ ὁποίου δηλονότι, ὡς καὶ τὰ συνεχῆ (85), ἐκλαμπρύνουσι τὰ σκιαρὰ τῶν κλασμάτων, ὅπερ ἐφεδράζει εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάζῃ τις τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ 10, ἢ 100, ἢ κ. τ. ξ. καὶ νὰ ἐπακολουθῇ τὴν διαίρεσιν. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ διὰ τοῦ 10 πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι δεκάκις μεγεθυσμὸς τοῦ πηλίκου· τούτου ἕνεκεν διὰ νὰ δοθῇ ἡ ὀρθὴ σημασία εἰς αὐτὸ, εἶναι ἀνάγκη νὰ ταχθῇ εἰς τὸν χῶρον τῶν δεκαδικῶν. Καὶ ἰδοὺ πῶς γίνεται αὕτη ἡ μεταβολή.

Ἡμεῖς εἴδομεν ὅτι ἂν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 753410 διὰ τοῦ 125· δίδει πηλίκον 6027, καὶ λεῖψανον $\frac{35}{125}$ (44), ὅπερ ἀφήσαμεν ἐκεῖ εἰς τοιαύτην μορφήν. Τώρα ὅμως ἐγὼ πολλαπλασιάζω τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ 10, καὶ ἔχω $= \frac{350}{125} = 2\ \frac{100}{125}$. Ὥςε προςιθέμενος τὰ 2 πηλίκον εἰς τὸ πρῶτον, ἔξω 60272. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἐγὼ διὰ τούτου ηὔξησα τὸ πηλίκον δεκάκις· τούτου ἕνεκεν διὰ νὰ δώσω εἰς αὐτὸ τὴν ὀρθὴν σημασίαν, πρέπει νὰ διαχωρίσω τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα διὰ τοῦ κόμματος, καὶ ἔξω διὰ ὀρθὸν πηλίκον 6027, 2 $\frac{100}{125}$. Τώρα πολλαπλασιάζω αὖθις τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος $\frac{100}{125}$ διὰ τῶν 10, καὶ διαιρῶν ἔχω πηλίκον 8, ὅπερ προςιθέμενος εἰς τὸ πηλίκον, ἔχω 6027, 28. Ὥςε συνάγω ὅτι τὰ $\frac{753410}{125}$ $= 6027,28$.

Ἔτι ἡμεῖς εἴδομεν ὅτι $\frac{62}{7} = 8\frac{6}{7}$ (41). Ὥςε ἂν θελήσω νὰ μεταβάλω τὰ $\frac{6}{7}$ εἰς δεκαδικὰ, διὰ νὰ ἰδῶ σαφεςέρως τὴν σημασίαν αὐτῶν, ἰδοὺ τί ἐκτελῶ. Πολλαπλασιάζω τὰ 6 διὰ τῶν 10.. διαιρῶ τὸ γινόμενον διὰ τῶν 7.. τὸ δὲ λείψανον 4 πολλαπλασιάζω αὖθις διὰ τῶν 10.. καὶ μετὰ τὴν διαίρεσιν διὰ τῶν 7 πολλαπλασιάζω αὖθις διὰ τῶν 10 τὸ λείψανον 5, καὶ ἐδῶ ἵςαμαι. Καὶ ἔχω διὰ πηλίκον $\frac{62}{7} = 8,859$, πλὴν ὄχι ἐξηκριβωμένως.

```
   8,859
  ------
7| 62
 | 56
  ----
   60
   56
   ----
    40
    35
    ----
     50
```

Ὥςε αὕτη ἡ μέθοδος, ὡς ὁρᾶται, κεῖται εἰς τὸ νὰ προςθέτῃ τις ἓν μηδενικὸν εἰς ἕκαςον λείψανον, διὰ νὰ γίνηται δυνατὴ ἡ διαίρεσις.. καὶ ἐπειδὴ διὰ τούτου ἀποκαθιςᾷς τὸ λείψανον δεκάκις μεῖζον ἑαυτοῦ, θέλει ἐπιδιορθῇς τὸ ἁμάρτημα, σμικρύνων τὸ πηλίκον διὰ τῆς μετὰ τοῦ κόμματος τάξεως τῶν δεκαδικῶν.

102. Πολλάκις ὅμως συμβαίνει, ἐνῷ τις μεταβάλλει ἓν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν, νὰ πίπτῃ εἰς πηλίκα μερικὰ ὅμοια πρὸς ἄλληλα, ἅπερ καὶ π ε ρ ι ο δ ι κ ὰ κ λ ά σ μ α τ α

ὀνομάζω, ἔνθα δηλονότι λυτροῦταί τις πλέον τοῦ κόπου τῆς διαιρέσεως, ἰδὼν ἅπαξ τὸν νόμον τῆς προόδου.

Οὕτω τὸ $\frac{1}{3}=0,3333...$, καὶ τὰ $\frac{2}{3}=0,6666...$, καὶ τὸ $\frac{1}{9}=0,1111...$, ὅθεν καὶ τὸ $\frac{1}{99}=0,010101...$, καὶ τὸ $\frac{1}{999}=0,001001001...$, καὶ τὰ $\frac{3}{11}=0,272727...$, καὶ τὰ $\frac{12}{37}=0,324324....$ καὶ τὸ $\frac{1}{7}=142857....$

Ἐνίοτε ὅμως ἡ περίοδος ἄρχεται ὄχι εὐθὺς, ἀλλὰ μετὰ δύο, ἢ τρεῖς χαρακτῆρας. Οὕτω τὰ $\frac{5}{12}=0\ 41666....$ τὸ $\frac{1}{6}=0,1666...$ καὶ τὰ $\frac{7}{12}=0,58333...$, καὶ τὰ $\frac{16}{75}=0,21333$. Δῆλον ὅμως ὅτι ὅσας περιόδους καὶ ἂν λάβῃ τις, ποτὲ δὲν θέλει φθάσει εἰς τὴν ἀληθῆ σημασίαν τοῦ κλάσματος.

103. Πολλὰ ὅμως τῶν τοιούτων κλασμάτων μεταβάλλονται εἰς ἐξηκριβωμένα δεκαδικά. Καθότι τὸ $\frac{1}{2}=0,5..$ καὶ τὸ $\frac{1}{4}=0,25..$ καὶ τὸ $\frac{1}{5}=0,20..$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}=0,75..$ Ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ $\frac{10}{20}=0,5$, καὶ τὰ $\frac{10}{40}=0,25$, καὶ τὰ $\frac{30}{40}=0,75$, ἐξ οὗ δηλονότι ἀποκαθίςαται ψηλαφητὸν τὸ, ἂν ἓν κλάσμα πολλαπλασιασθῇ ὁμοῦ ἄνω καὶ κάτω διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ σημασία αὐτοῦ διαμένει ἡ αὐτή. Ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ μὲν κλάσμα $\frac{35}{125}$ (101) μετεβλήθη, ὡς εἴδομεν, εἰς δεκαδικὰ ἄνευ τινὸς λειψάνου: ὃ ἐςι $\frac{35}{125}=0,28..$ τὸ δὲ $\frac{1}{8}=0,125$. Καὶ εἶναι εὔκολον νὰ προβλέψῃ τις, ποῦ ἔχει

τοῦτο νὰ ἐπακολουθήσῃ. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἐνταῦθα ὁ ἀριθμητὴς ἔχει παράγοντα τὸ 10, οὗ τινος οἱ διαιρέται εἶναι 2 καὶ 5 ‹ δῆλον ὅτι ἂν ὁ παρονομαστὴς ἔχῃ τοὺς αὐτοὺς παράγοντας, 2 ἢ 5 λέγω, ἢ τὰ τούτων πολλαπλάσια ‹ τὸ κλάσμα ἐξ ἀναγώγου θέλει τραπεῖ εἰς ἀγωγικόν.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι ἀντὶ νὰ λάβῃ τις τὸ $\frac{1}{2}$ μιᾶς μονάδος: ἑνὸς γροσίου, φέρε εἰπεῖν, ἢ μιᾶς ὀργυιᾶς, ἢ κ. τ. ξ. αὐτὸς δύναται νὰ λάβῃ τὰ 0, 5.. καὶ ἀντὶ τῶν $\frac{3}{4}$, τὰ 0, 75.. καὶ ἀντὶ τοῦ $\frac{1}{4}$, τὰ 0, 25.. καὶ ἀντὶ τοῦ $\frac{1}{5}$, τὰ 0, 20.

104. Ἂν ὅμως καὶ ἦναι εὐκολωτάτη ἡ μεταμόρφωσις παντὸς κλάσματος εἰς δεκαδικὸν ‹ πλὴν ὄχι καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ἐξαιρουμένων τῶν ἐξηκριβωμένως δεκαδικῶν (103) καὶ τῶν περιοδικῶν. Καθότι τὸ 0, 75 $= \frac{75}{100} = \frac{5}{4}$, καὶ τὸ 0, 125 $= \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$. Ὅταν ὅμως τὸ δεκαδικὸν ἦναι μὴ ἐξηκριβωμένως ‹ ἀλλ' ὡς ἔγγιστα ‹ τότε τὸ πρόβλημα ἔχει ἀπείρους τὰς λύσεις, καὶ μένει ἀπροσδιόριστον. Οὕτως ἕκαστον τῶν δεκαδικῶν 0, 751..., 0 752..., 0, 753..., εἶναι $= \frac{3}{4}$ μετάτινος κλάσματος ἀγνώστου.

Τὰ περιοδικὰ ὅμως δεκαδικὰ ἐπιστρέφονται ἄριστα εἰς τὰ ἀρχικὰ διὰ τῆς τῶν 9 διαιρέσεως. Πλὴν ἐπειδὴ καὶ ταῦτα εἶναι δύο εἰδῶν: ὅ ἐστι ἢ ἄρχονται ἐκ τοῦ κόμματος, ἢ μετέπειτα (102) ‹ τούτου ἕνεκεν καὶ ἡ μέθοδος ἤθελεν εἶναι διττή. Καὶ εἶναι αὕτη. Ἡμεῖς εἴδομεν (αὐτόθι) ὅτι $\frac{1}{9}=0,1111...$, καὶ $\frac{1}{99}=0,010101...$, καὶ $\frac{1}{999}=0,001001...$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὥςε δύναταί τις νὰ ἐκλάβῃ ἑκάςην περίοδον δεκαδικῶν ὡς γινόμενον ἐξ ἑαυτῆς καὶ τῆς μονάδος διαιρουμένης διὰ τοσούτων 9, ἐξ ὅσων χαρακτήρων σύγκειται ἡ περίοδος. Οὕτως εἰς τὸ δεκαδικὸν $\frac{2}{3}=0,666...$ (αὐτόθι), συγκειμένης τῆς περιόδου ἐξ ἑνὸς χαρακτῆρος, δύναταί τις νὰ τὴν ἐκβάλῃ ὡς γινόμενον ἐκ τοῦ 6 καὶ 0, 111... ὅθεν $0,666...=6\times0,111...=6\times\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$.. ὡσαύτως καὶ τὸ $0,2727...=27\times0,0101...=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}$, ὡς εἴδομεν εἰς τὸν (αὐτὸν).. καὶ τὸ $0,342342...=\frac{342}{999}=\frac{4}{111}$.. καὶ τὸ $0,571428571428...=\frac{571428}{999999}=\frac{392857}{592857}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{7}$. Ἂν ὅμως καὶ ἡ περίοδος ἄρχηται ὄχι ἐκ τοῦ κόμματος, τότε εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκληφθῇ τὸ δεκαδικὸν ὡς κεφάλαιον, ἢ διαφορὰ περιοδικοῦ, καὶ μή. Οὕτω τὸ $0,58333...=0,33333...+0,25=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$... καὶ τὸ $0,21333...=0,33333...-0,12=\frac{1}{3}-\frac{3}{25}=\frac{16}{75}$.. καὶ τὸ $0,1666...=0,6666...-0,5=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$. Πλὴν ἦν δυνατὸν ἀμέσως νὰ φθάσῃ τις εἰς τὸ αὐτὸ συναγόμενον ὧδέ πως. $0,1666...=0,\frac{16}{9}=0,1\frac{2}{3}=\frac{1}{10}+\frac{2}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$. Ὥςε συνάγω ὅτι τοῦτο ἐκτυλίχθη ἐκ τοῦ $\frac{1}{8}$. Πλὴν ἦν ἄδηλον εἰς ἐμὲ ἂν ἓν δοθὲν δεκαδικὸν, ὡς τὸ 0,125, ἦν ἐξηκριβωμένως, ἢ ὡς ἔγγιςα. Καθότι ὡς $\frac{1}{8}=0,125$, οὕτω $\frac{100}{799}=0,125...$,