Ὁμοιόντι ἤθελεν] ἀκολουθήσοι· καὶ ἂν ἐζητεῖτο τὸ γινόμενον τινῶν κλασμάτων, ὧν περ ὁ παρονομαςὴς ἐνίων νὰ ἦναι ἢ παράγων, ἢ ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ἀριθμητὴν τῶν λοιπῶν. Οὕτως ἂν ἐζητεῖτο τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, κ. τ. ξ. τότε ἀντὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐγὼ διαγράφων ἄνω καὶ κάτω τοὺς κοινοὺς παράγοντας: τοὺς 3, 4, καὶ 5 λέγω· ἔξω διὰ γινόμενον $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.. ἐκ τοῦ διότι $\frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Ὡσαύτως καὶ $\frac{3}{7} \times \frac{21}{40} \times \frac{8}{9} = \frac{1}{5}$.

78. Ἀπορία ὅμως οὐσιώδης προκύπτει ἐνταῦθα τὸ, τίνος-ἕνεκεν, οὔτε προσθέσεως οὔτε ἀφαιρέσεως γινομένης εἰς κλάσματα ἑτεροειδῆ (65), νὰ γίνηται πολλαπλασιασμός; Ἐγὼ ὅμως λέγω, ὅτι πρὸς ἀποφυγὴν τοῦ κόπου τοῦτο γίνεται, καὶ ὅτι τὸ πρᾶγμα εἶναι δοκόμενον, καὶ ὄχι πραγματικόν: ὅ ἐςι καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς γίνεται ὄχι εἰς ἑτεροειδῆ· ἀλλὰ εἰς ὁμοειδῆ, καὶ ἡ διαφορὰ ὑφίσαται εἰς οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ εἰς τὸ ὅτι γίνεται πρῶτον ὁ πολλαπλασιασμὸς· εἶτα τότε διὰ τῆς διαιρέσεως μεταβάλλεται τὸ γινόμενον εἰς ὁμοειδές. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ ἐργασία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δὲν εἶναι ἁπλῆ· ἀλλὰ σύνθετος (71)· δῆλον ὅτι συνέχει ἐν ἑαυτῇ, ὄχι μόνον πολλαπλασιασμὸν κλάσματος ἐπὶ κλάσμα, ἀλλὰ καὶ μεταμόρφωσιν τινὰ, ὅπερ καὶ διὰ τῶν πραγμάτων ἀποδεικνύεται. Καθότι ἐπειδὴ, ὡς εἶναι γνωςὸν, ἂν πολλαπλασιασθῇ $\frac{1}{2}$ ἐπὶ τὸ $\frac{1}{3}$· γεννᾶται $\frac{1}{6}$, εἴτε $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$· δῆλον ὅτι ἂν ἐγὼ πρὶν νὰ κάμω τὸν πολλαπλασιασμὸν, φέρω εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν τὰ κλάσματα· ἔξω ὡσαύτως $\frac{1}{6}$,.

ὡς ὄντος $\frac{3}{2\times3}\times\frac{2}{2\times3}=\frac{3\times2}{2\times3\times2\times3}=\frac{1}{6}$. Ὥϛε ἤθελεν εἶναι μάταιον τὸ πρὶν τῆς ἐργασίας νὰ φέρῃ τις εἰς τὸν παρονομαϛὴν τὰ κλάσματα. Ὅμοιον βέβαια ἤθελεν ἐπακολουθήσοι καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν κλασμάτων.

## Περὶ διαιρέσεως τῶν κλασμάτων.

79. Ἂν ἡ διαίρεσις τῶν ὁλοσχερῶν ἦναι ἐργασία ἐναντία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑπόμενον εἶναι καὶ ἡ διαίρεσις τῶν κλασμάτων νὰ μὴν ἦναι ἄλλοτι, εἰμὴ πολλαπλασιασμὸς μὲν τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν παρονομαϛὴν τοῦ διαιρέτου, τοῦ δὲ παρονομαϛοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν ἐκείνου: ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ ἀνατρέψῃ τις τὸν διαιρέτην, καὶ νὰ ἐκτελέσῃ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν δύο κλασμάτων. Οὕτω νὰ διαιρέσῃ τις τὰ $\frac{4}{5}$ διὰ τῶν $\frac{2}{3}$ θέλει νὰ εἰπῇ νὰ ἀνατρέψῃ τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ νὰ ἐκτελέσῃ τὸν πολλαπλασιασμὸν οὕτω $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{12}{10}=1+\frac{1}{5}$, τὰ γράφω δ' οὕτω $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}$

Καὶ ὁ λόγος τούτου εἶναι οὗτος. Νὰ διαιρέσῃ τις ἕνα ἀριθμὸν ὁποιονδήποτε ὁλοσχερῆ διὰ τοῦ 2, δὲν θέλει νὰ εἰπῇ ἄλλο, εἰμὴ νὰ λάβῃ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. Οὕτω νὰ διαιρέσῃ τὰ 4, τὰ 10, τὰ 100, κ. τ. ξ. διὰ τῶν 2, θέλει νὰ εἰπῇ νὰ λάβῃ 2, 5, 50, κ. τ. ξ. Ἀλλὰ τὰ κλάσματα εἶναι ἀριθμοί. Ὥϛε νὰ διαιρέσῃ τις καὶ τὰ κλάσματα $\frac{4}{10}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{100}{200}$, κ. τ. ξ. διὰ τοῦ 2, δὲν θέλει νὰ εἰπῇ ἄλλο, εἰμὴ νὰ λάβῃ τὸ ἥμισυ αὐτῶν: τουτέϛι

$\frac{2}{10}$, $\frac{5}{20}$ $\frac{50}{200}$, κ. τ. ξ. Ὥςε καὶ ἐν γένει νὰ διαιρέσῃ τις ἓν κλάσμα δι' ὁλοσχεροῦς, θέλει νὰ εἰπῇ νὰ διαιρέσῃ μόνον τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ, χωρὶς νὰ βάλῃ χεῖρα εἰς τὸν παρονομαςήν: Ἀλλ' ἡ διαίρεσις τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι τοῦτο αὐτὸ μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ παρονομαςοῦ (73), τούτου ἕνεκεν, νὰ διαιρέσῃ τις ἓν κλάσμα δι' ἑνὸς ὁλοσχεροῦς ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ πολλαπλασιάσῃ τὸν παρονομαςὴν αὐτοῦ. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τὸ πρόβλημα ἐνταῦθα δὲν εἶναι τὸ νὰ διαιρέσῃ τις τὸ κλάσμα δι' ὁλοσχεροῦς, ἀλλὰ διὰ κλάσματος, τούτου ἕνεκεν τὸ πηλίκον τὸ προκύπτον θέλει εἶναι ἔλασσον τοῦ ὀρθοῦ. Καθότι εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν $\frac{4}{5}$ διὰ τῶν $\frac{2}{3}$ δὲν ζητεῖται ποσάκις τὰ 2 εἰσέρχονται εἰς τὰ $\frac{4}{5}$, ἀλλὰ ποσάκις τὰ $\frac{2}{3}$. Ὥςε εἶναι ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιάσῃ τις τὸν παρονομαςὴν τῶν $\frac{4}{5}$ διὰ τοῦ 3, εἴτε διὰ τοῦ παρονομαςοῦ τοῦ διαιρέτου. Ὥςε νὰ διαιρέσῃ τις τὰ $\frac{4}{5}$ διὰ τῶν $\frac{2}{3}$ θέλει νὰ εἰπῇ νὰ πολλαπλασιάσῃ τὰ $\frac{4}{5}$ διὰ τῶν $\frac{3}{2}$. Ὥςε καὶ ἡ διαίρεσις τῶν κλασμάτων εἶναι διπλῆ ἐργασία, ὡς ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν. Ὡς ὅμως εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν ὁλοσχερῶν (38), οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἔχει χώραν ὁ γενικὸς νόμος, πλὴν ὄχι καὶ ἐναντίως: ὅτι δηλονότι τὸ πηλίκον περιέχει τὴν μονάδα, ὡς ὁ διαιρετέος τὸν διαιρέτην. Οὕτω διαιρῶν $\frac{1}{2}$ διὰ τοῦ $\frac{1}{3}$, εἴτε $\frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = 1 + \frac{1}{2}$, ἔχω πηλίκον $1 + \frac{1}{2}$, ὅπερ περιέχει τὸ 1, ὡς τὸ $\frac{1}{2}$ τὰ $\frac{1}{3}$. Σημειωτέον ὅμως ὅτι ἂν καὶ ἐλάμβανον τὸ μεῖζον κλάσμα διὰ διαιρέτην, εἴτε τὸ $\frac{1}{2}$, τότε τὸ πηλίκον ἤθελε περιέχεται εἰς τὴν μονάδα, καὶ ὄχι νὰ τὴν περιέχῃ, ὡς ὁ διαιρετέος εἰς τὸν διαιρέτην.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι αὕτη ἡ $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}$ εἶναι μορφὴ ἰσοδύναμος μὲ τὴν $\frac{4\times3}{5\times2}$· ὅ ἐςὶ τὰ δύο ἄκρα, ὡσαύτως καὶ τὰ μέσα νὰ πολλαπλασιασθῶσι πρὸς ἄλληλα.

80. Ἰδοὺ ὅμως καὶ ἄλλο ἀλλόκοτον (74) εἰς τὰ κλάσματα: ὅ ἐςι τὸ πηλίκον εἶναι μεῖζον καὶ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου. Καὶ ἔπρεπεν

α΄. Ἐπειδὴ καὶ ἡ διαίρεσις εἶναι ἐργασία ἐναντία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων τὸ γινόμενον εἶναι ἔλασσον ἑκατέρου τῶν παραγόντων (αὐτόθι)· τούτου ἕνεκεν ἐνταῦθα τὸ πηλίκον ἔπρεπε νὰ ἦναι μεῖζον καὶ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου, ἀλλέως ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ πηλίκου μετὰ τοῦ διαιρέτου δὲν ἤθελε δώσοι τὸν διαιρετέον, ὅπερ εἶναι ἄτοπον (48). Καθότι ἂν ἦναι $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = 1+\frac{1}{5}$· ἑπόμενον εἶναι καὶ $\left(1+\frac{1}{5}\right)\frac{2}{3} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

β΄. Ἂν πᾶς ἀριθμὸς διαιρεθεὶς δι' ἑαυτοῦ δίδῃ μονάδα (40).. καὶ ἂν τὰ κλάσματα ἦναι ἀριθμοί, ἑπόμενον εἶναι καὶ ἓν κλάσμα διαιρεθὲν δι' ἑαυτοῦ νὰ δίδῃ μονάδα. Οὕτω $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = 1$, καὶ $\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}} = 1$ καὶ ἐν γένει $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\alpha\times\beta}{\alpha\times\beta} = 1$.. ὅπερ δηλονότι δὲν ἤθελεν ἔχοι χώραν ἂν ἡ ἀνατροπὴ εἰς τὸν διαιρέτην δὲν ἐγίνετο. Ἀλλὰ τούτου γινομένου, ἕπεται ἀναγκαίως τὸ πηλίκον νὰ ἦναι μεῖζον καὶ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου, ὡς ὁρᾶται ἐξ ἑαυτοῦ.

81. Ἂν ὅμως καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν κλασμάτων ὁ διαι-

ρέτης ἦναι ὁλοσχερὴς ‹ τότε εἶναι ἀνάγκη πρῶτον νὰ τὸν μεταβάλῃ τις εἰς κλάσμα, εἶτα νὰ τὸν ἀνατρέψῃ. Οὕτως ἂν ἐζητεῖτο ἡ διαίρεσις τῶν $\frac{4}{5}$ διὰ τῶν 2 ‹ τὸ πηλίκον ἤθελεν εἶναι $\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. καὶ ἂν διὰ τῶν 5 ‹ τὸ πηλίκον ἤθελεν εἶναι $= \frac{4}{5} \times \frac{5}{1} = 4$. Ὥςε, ἤθελε συνάξοι τις, πᾶν κλάσμα διαιρεθὲν δι' ὁλοσχεροῦς ἴσου μὲ τὸν παρονομαστὴν, δίδει πηλίκον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{4}{5} \times 5 = \frac{\frac{4}{5}}{5} = \frac{4}{5:5} = 4$, τούτου ἕνεκεν ἡ διαίρεσις τοῦ παρονομαστοῦ παντὸς κλάσματος δι' ὁλοσχεροῦς εἶναι πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ ὁλοσχεροῦς.

Εἰ δὲ καὶ τὰ δοθέντα εἶναι ἀριθμοὶ κλασματίαι ‹ τότε πρῶτον πρέπει τις νὰ μεταβάλῃ αὐτὰ εἰς ἐντελῆ κλάσματα, ἢ κᾂν τὸν διαιρέτην, εἶτα νὰ ἐκτελέσῃ τὴν διαίρεσιν. Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ διαίρεσις τῶν $7 + \frac{1}{3}$ διὰ τῶν $3 + \frac{2}{9}$. Τότε μεταβαλὼν αὐτοὺς εἰς τὰ $\frac{22}{3}$, $\frac{29}{9}$ ‹ ἔξω διὰ πηλίκον $= \frac{198}{87} = 2\ \frac{8}{29}$.

Εἰ δὲ καὶ ἐζητεῖτο ἡ διαίρεσις τῶν $193328\frac{1}{3}$ διὰ τῶν $3406\frac{2}{3}$ ‹ τότε ἐγὼ ἤθελον μεταβάλοι μόνον τὸν διαιρέτην εἰς κλάσμα, εἴτε εἰς τὰ $\frac{10220}{3}$ λέγω, καὶ οὕτω νὰ ἐκτελέσω τὴν διαίρεσιν, ἥτις ἤθελε μοὶ δώσοι διὰ πηλίκον $56\frac{3}{4}$.. ὡς ὄντος $\frac{193328\frac{1}{3}}{\frac{10220}{3}} = 54 + \frac{9368\frac{1}{3}}{10220}$. Διότι ἂν πολλαπλασιάσω τὸ πηλίκον διὸ τοῦ 3 ‹ ἔξω $56\frac{3}{4}$. Καθότι εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἢ τὸν διαιρετέον νὰ πολλαπλασιάσῃ τις διά τινος ἀριθμοῦ, ἢ τὸ πηλίκον (38).

82. Ἂν ὅμως καὶ αἱ μονάδες τῶν κλασματικῶν μερῶν τῶν κλασματίων ἦναι ὡρισμέναι ἐκ συνθήκης, τότε ἡ διαίρεσις αὐτῶν θέλει γένει ᾠδέπως. Καὶ ἂν μόνον ὁ διαιρετέος ἦναι συγκείμενος ἐκ τῶν τοιούτων μονάδων, τότε ἤθελε διαιρέσοι τις πρῶτον τὰς μεγάλας αὐτοῦ μονάδας, εἶτα νὰ φέρη τὸ λείψανον εἰς τὰς δευτέρας, εἰς τὰς ὁποίας νὰ προσθέση τὰς τοῦ αὐτοῦ εἴδους, καὶ νὰ ἐπακολουθήση τὴν διαίρεσιν. Ἤθελε δ' ἐκτελέσοι τὸ αὐτὸ, καὶ ἂν ἦσαν μονάδες καὶ τρίτης τάξεως. Ἂν ὅμως καὶ ἦναι συγκείμενοι καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων, τότε εἶναι χρεία νὰ ἀναχθῶσιν ἑκάτεροι εἰς τὰς σμικροτάτας αὐτῶν μονάδας, εἶτα νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ τούτων διαίρεσις, ὡς ἐπὶ παραδειγμάτων θεωρεῖται.

Ἐδόθησαν, φέρε εἰπεῖν, $62^{\gamma\rho}$ $28^{\pi\alpha\rho}$ διὰ οἰκοδομὴν 7 ὀργυιῶν, καὶ ζητεῖται πόσον ἀνήκει εἰς μίαν ὀργυιάν.

Διαιρῶ λοιπὸν τὰ 62 διὰ τῶν 7, καὶ ἔχω πηλίκον 8, καὶ λείψανον 6, ἅπερ διὰ νὰ φέρω εἰς ἐλάσσονας μονάδας πολλαπλασιάζω αὐτὰ διὰ τῶν 40, εἰς ὅπερ προσθέμενος καὶ τὰ 28, ὡς ὄντα τοῦ αὐτοῦ εἴδους, ἐπακολουθῶ τὴν διαίρεσιν, καὶ οὕτω μοι προκύπτει διὰ πηλίκον $8^{\gamma\rho}$ καὶ $38^{\pi\alpha\rho}\,\frac{2}{7}$

$$\begin{array}{r|l l}
 & 8^{\gamma\rho} & 38^{\pi\alpha\rho}\,\frac{2}{7} \\
\hline
7 & 62 & 28^{\pi\alpha\rho} \\
 & 56 & \\
\hline
 & 6 & \\
\hline
7 & 268^{\pi\alpha\rho} &
\end{array}$$

Εἰ δὲ καὶ ἐδίδοντο $62^{\gamma\rho}$ $28^{\pi\rho}$ διὰ οἰκοδομὴν $7^{\acute{o}\rho}$ $5^{\pi}$ $5^{\delta}$, καὶ ἐζητεῖτο πόσον ἀνήκει εἰς μίαν ὀργυιὰν, τότε ἔπρεπε νὰ ἀνάξη τις ἑκάτερα εἰς μονάδας τῆς σμικροτάτης τάξεως, καὶ τότε [redacted]κτελέση τὴν διαίρεσιν.

Οὕτως ἐγὼ ἐκτελῶν παράδες τὰ $62^{\gamma\rho}$, καὶ εἰς αὐτὰς προςθέμενος τὰς 28, ἔχω 2508 παράδες, ὅςις δηλονότι ἔπρεπε νὰ ἦναι διὰ νέος διαιρετέος.. ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ζητεῖται πόσον κάμνει μία ὀργυιὰ, εἴτε 72 δάκτυλοι, ἐξ ὧν δηλ. συνίςαται ὁ διαιρέτης· τούτου ἕνεκεν, εἶναι χρεία νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν διὰ τοῦ 72· καὶ οὕτως ἔχω διὰ διαιρετέον 180576, ὅςτις δηλ. εἶναι $72^{\kappa\iota\varsigma}$ μείζων τοῦ πραγματικοῦ. Ἐκ τοῦ ἑτέρου πάλιν μέρους ἐκτελῶν καὶ τὰς ὀργυιὰς καὶ τοὺς πόδας δακτύλους, καὶ εἰς αὐτοὺς προςιθέμενος τοὺς 5 δακτύλους, ἔχω διὰ νέον διαιρέτην $569^{\delta\alpha\kappa}$. Ὥςε ἐκτελῶν τὴν διαίρεσιν ἔχω διὰ πηλίκον $317^{\pi\alpha\rho.} + \frac{203}{569} = 7^{\gamma\rho}\ 37^{\pi\rho} + \frac{203}{569}$, ὅπερ δηλ. εἶναι $72^{\kappa\iota\varsigma}$ μεῖζον τοῦ πραγματικοῦ, καὶ ἑπομένως ὀρθόν. Καθότι ἂν ἐδιῄρουν τὰς 2508 παράδ. διὰ τῶν 569 δακτ. ἤθελον ἔχει πηλίκον $4^{\pi\alpha\rho}\ \frac{29}{72}$, ὅπερ δηλ. εἶναι ἔλασσον τοῦ ὀρθοῦ, ὡς μὴ διαιρέσαντός μου δι' ὀργυιῶν· ἀλλὰ διὰ δακτύλων. Δῆλον ὅμως ὅτι τοῦτο τὸ πρόβλημα ἦν δυνατὸν νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ (82). Καθότι $62^{\gamma\rho}\ 28^{\pi\alpha\rho} = 62^{\gamma\rho}\frac{28}{40}$, καὶ $7^{o\rho}\ 5^{\pi}\ 5^{\delta} = 7^{o\rho}\ \frac{65}{72}$. Πλὴν τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀνήκουσιν εἰς τὴν ἀναλογίαν μάλιςα, εἴτε μέθοδον τῶν τριῶν, ὡς θέλομεν ἰδεῖ ἐκεῖ, ἢ εἰς τὴν ἁπλῶς διαίρεσιν.

83. Ὡς ὅμως ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν κλασμάτων ἐγίνετο, χωρὶς πρῶτον νὰ ἀναχθῶσι τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν (78)· οὕτω καὶ ἡ διαίρεσις. Καὶ ὁ λόγος εἶναι εἷς καὶ ὁ αὐτός: ἡ ἀποφυγὴ τοῦ κόπου δηλονότι. Καθότι ἂν διαιρεθῇ τὸ $\frac{1}{2}$ διὰ τοῦ $\frac{1}{3}$, ἔχει νὰ προκύψῃ πηλίκον $\frac{3}{2}$, κατὰ τὸν δοθέντα νόμον (79).· ἀλλὰ

καὶ ἂν κάμῃ τις πρῶτον ὁμοειδῆ τὰ δοθέντα κλάσματα, καὶ τότε ἐκτελέσῃ τὴν διαίρεσιν, ἕξει ἐπίσης $\frac{3}{2}$: τουτέςι $\frac{3}{6}\times\frac{6}{2}=\frac{3}{2}$. Ὥςε εἶναι τὸ αὐτὸ πηλίκον, καὶ ἂν τὰ κλάσματα ἐγίνοντο πρῶτον ὁμοειδῆ, εἶτα ἐδιαιροῦντο, καὶ ἂν μή. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ διαίρεσις τῶν κλασμάτων δὲν εἶναι ἁπλῆ διαίρεσις· ἀλλ' ἐνταυτῷ καὶ πολλαπλασιασμὸς· τούτου ἕνεκεν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκμορφοῦται τὸ πηλίκον, χωρὶς νὰ ἦναι χρεία προπαρασκευῆς τινος.

84. Δῆλον ὅμως ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν κλασμάτων, ἄλλως πως θεωρούμενος, δύναται καὶ ἄλλως πως νὰ ὀνομασθῇ. Καθότι ἡμεῖς λαβόντες μέρη τινὰ μιᾶς ποσότητος τὰ ὠνομάσαμεν κλάσμα (49). Πλὴν δὲν εἶναι δύσκολον νὰ ἰδῇ τις, ὅτι ἡμεῖς δυνάμεθα ἀντὶ νὰ λάβωμεν ἅπαντα τὰ εἰρημένα μέρη, νὰ λάβωμεν τινὰ μόνον ἐξ αὐτῶν: ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ διαίρεσις διαιρέσεως· καὶ τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ὀνομάζεται κλάσμα κλάσματος. Οὕτω μιᾶς ποσότητος: τῆς ἡμέρας, φέρε εἰπεῖν, διαιρεθείσης εἰς 24 ἴσα μέρη, καὶ ἐκ τούτων ληφθέντων τινῶν μόνων: 16 φέρε εἰπεῖν, ὅπερ καὶ οὕτως $\frac{16}{24}$ γράφεται, ὀνομάζεται ὡς ἐμάθομεν κλάσμα. Πλὴν ἂν ἀντὶ νὰ λάβω ἅπαντα ταῦτα: τὰ $\frac{16}{24}$ λέγω, λάβω μόνον τινὰ ἐξ αὐτῶν: τὰ ἡμίσεα φέρε εἰπεῖν, ἅπερ καὶ γράφω οὕτω $\frac{1}{2}$· τοῦτο πλέον ὀνομάζεται κλάσμα κλάσματος.

Ὥςε κλάσμα κλάσματος ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος τὸ νὰ ληφθῇ ὡς νέα ποσότης, καὶ νὰ διαιρεθῇ εἴς τινα μέρη, καὶ ἐκ τούτων νὰ ληφθῶσι τινά. Οὕτως ἐπειδὴ καὶ τὰ $\frac{16}{24}$ τῆς ἡμέρας εἶναι 16 ὧραι, καὶ ἐγὼ ἔλαβον ὄχι ἅπαν τὸ κλάσμα ‹ ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ ‹ δῆλον ὅτι ἐγὼ ἔλαβον 8 ὥρας. Ὥςε τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{16}{24}$ τῆς ἡμέρας θέλει νὰ εἰπῆ 8 ὥρας, ἢ $\frac{8}{24}$ τῆς ἡμέρας. Ἀλλ' ἓν τοιοῦτον ἤθελε γεννηθῆ ‹ καὶ ἂν ἐγὼ ἐπολλαπλασίαζον πρὸς ἄλληλα τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{16}{24}$, ὡς ὄντος $\frac{1}{2} \times \frac{16}{24} = \frac{8}{24}$‹ τούτου ἕνεκεν διὰ νὰ φέρῃ τις τὸ κλάσμα τοῦ κλάσματος εἰς ἁπλῶς κλάσμα, εἶναι ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιάσῃ αὐτὰ πρὸς ἄλληλα. Καθότι νὰ λάβῃ τις τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ κλάσματος $\frac{16}{24}$ σημαίνει οὐδὲν ἄλλο, ἢ νὰ λάβῃ τὰ ἡμίσεα τῶν 16 τῶν 24: ὅπερ δηλονότι εἶναι τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων $\frac{1}{2}$, $\frac{16}{24}$. Ὥςε θάτερος παράγων ἑνὸς κλάσματος (73) ἄλλο δὲν εἶναι ἀναφερόμενος ὡς πρὸς τὸν θάτερον, ἢ κλάσμα κλάσματος. Οὕτως ἐπειδὴ $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ ‹ τούτου ἕνεκεν τὰ $\frac{2}{3}$ εἶναι κλάσμα τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$: ὅπερ δηλονότι μεθερμηνευόμενον θέλει νὰ εἰπῆ ἐκ μιᾶς ποσότητος εἰς 5 διῃρημένης νὰ λάβῃ τις τὰ 4, εἶτα τούτων διαιρεθέντων εἰς 3, νὰ λάβῃ τὰ 2, ὥςε ἂν ἡ εἰς 5 διαιρεθεῖσα ποσότης ἦν γρόσιον ‹ τότε τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ γρ. = 32 παρ. οἵτινες εἰς τρία διαιρεθέντες, καὶ δύο ἐκ τούτων ληφθέντων, σημαίνουσι 21$\frac{1}{3}$ παρ. = $\frac{8}{15}$ γρ. δηλονότι.

Ἐμποδίζει οὐδὲν εἰς τὸ νὰ ποιήσῃ τις καὶ κλάσμα κλάσματος Κλάσματος. Οὕτω τὸ ἂν λάβῃ τις τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{16}{24}$ ‹ τοῦτο θέλει εἶναι κλάσμα κλάσματος κλάσματος, καὶ σημαίνει τὸ ἔκ τινος ποσότητος εἰς 24 διῃρημένης νὰ λάβῃ τις τὰ 16, καὶ ἐκ τούτων τὰ ἡμίσεα, καὶ ἐκ τούτων τὰ δύο τρίτα, εἰς τρόπον ὅτι, ἂν τὸ 24 ἐσήμαινεν ὥρας· τότε τὰ $\frac{16}{24} = 16^{\text{ὥρ}}$, καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{16}{24}$ $= 8^{\text{ὥρ}}$· καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{16}{24} = 5\frac{1}{3}$. Ὥςε τὸ κλάσμα τοῦ κλάσματος τοῦ κλάσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν κλασμάτων. Ὅθεν $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{16^{\text{ἡμ}}}{24} = \frac{16}{3 \times 24}$ $= \frac{16^{\text{ὡ}}}{3} = 5\frac{1}{3}^{\text{ὡ}}$.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν, ὅτι εἷς παράγων ἐκ τριῶν κλασμάτων πολλαπλασιαζόμενος καὶ ἀναφερόμενος ὡς πρὸς τοὺς λοιποὺς δύο παράγοντας, εἶναι κλάσμα κλάσματος κλάσματος, καὶ διὰ τοῦτο ἴσος μὲ τὸ ἐκ τῶν τριῶν τούτων γινόμενον. Ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{4}{5}$ τῆς μονάδος, ἅπερ ἐκτίθενται οὕτως $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$ εἶναι κλάσμα κλάσματος κλάσματος κλάσματος. Ὥςε ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν κλάσματων εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ κλάσματα κλασμάτων.

## ΚΕΦ. Η΄.

## Περὶ τῶν συνεχῶν Κλασμάτων.

85. Ἡμεῖς εἴδομεν, ὅτι ὅταν τὰ κλάσματα ἦναι σύμμετρα· τότε λαμβάνουσι μορφὴν ἁπλουςέραν (58)· ἀλλέως διαμένουσιν εἰς τὴν ἑαυτῶν σκοτεινὴν μορφήν. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ ὁ ἀνθρώπινος νοῦς εὐχαριςεῖται οὐδόλως εἰς τὴν ὅρασιν τῶν σκοτεινῶν· τούτου ἕνεκεν καὶ οἱ μαθηματικοὶ ἐζήτησαν τρόπον διὰ νὰ λαμπρύνουσιν ὁπωσοῦν καὶ

τὰ τοιαῦτα, ἐκτελέσαντες τοῦτο διὰ τῆς συνεχοῦς διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος (καὶ τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ὀνομάζεται κλάσμα συνεχές. Κλάσμα λοιπὸν συνεχὲς εἶναι α΄. νὰ διαιρέσῃ τις ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος διὰ τοῦ ἐλάσσονος τῶν ὅρων αὐτοῦ.. β΄. τὸν ἐλάσσονα αὐτοῦ ὅρον διὰ τοῦ λειψάνου.. γ΄. τὸ πρῶτον λείψανον διὰ τοῦ δευτέρου.. δ΄. τὸ δεύτερον διὰ τοῦ τρίτου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, χάριν τοῦ ὁποίου δηλονότι ἤθελεν ἐκτυλιχθῇ τοῦτο τὸ κλάσμα εἰς μίαν σειρὰν κατιοῦσαν.. καὶ πρὸς λαμπρυσμὸν ἂς λάβωμεν ἓν παράδειγμα.

Ζητείσθω νὰ ἀναχθῇ εἰς ἁπλουστέραν μορφὴν τὸ κλάσμα $\frac{10000000000}{31415926535}$, ὅπερ, ὡς θέλομεν ἰδεῖ εἰς τὴν γεωμετρίαν, παριστᾷ ὡς ἔγγιστα τὴν ἀναφορὰν τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν (πλὴν διὰ συντομίαν παραλείπω τοὺς πέντε αὐτοῦ τελευταίους ὅρους, καὶ ἔχω $\frac{100000}{314159}$, ὅπερ ὀνομάζω Α.

Διαιρῶ λοιπὸν αὐτὸ ἄνω καὶ κάτω διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 100000, καὶ ἔχω $A = \cfrac{1}{3 + \cfrac{14159}{100000}}$. Διαιρῶ αὖθις αὐτὸ διὰ τοῦ 14159, καὶ ἔχω $A = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{887}{14159}}}$. Διαιρῶ τρίτον αὐτὸ διὰ τοῦ 887, καὶ ἔχω $A = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{854}{887}}}}$

Καὶ ἔτι $A = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{33}{854}}}}}$ καὶ ἐδῶ ἵσαμαι.

Τώρα ἂν ἐκτέλουν μόνον μίαν διαίρεσιν (ὥστε νὰ ἔχω $A = \frac{1}{3}$ (τοῦτο ἤθελεν εἶναι μεῖζον τοῦ ὀρθοῦ. Εἰ δὲ καὶ ἐκτέλουν δύο μόνον διαιρέσεις, ὥςε νὰ ἔχω Α = $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{\frac{1}{22}}{7} = \frac{7}{22}$ ‹ τότε βέβαια ἤθελον μὲν πλησιάσοι μᾶλλον εἰς τὸ ὀρθὸν ‹ πλὴν ἤθελεν εἶναι ἔλασσον τοῦ ὀρθοῦ. Καὶ ἂν ἐκτέλουν τρεῖς ‹ ὥςε νὰ ἔχω Α $= \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} = \frac{106}{333}$ ‹ τότε ἤθελον μὲν πλησιάσοι μᾶλλον εἰς τὸ ὀρθὸν ‹ πλὴν τοῦτο, τὰ $\frac{106}{333}$ λέγω, ἤθελεν εἶναι μεῖζον τοῦ ὀρθοῦ. Καὶ ἂν ἐκτέλουν τέσσαρας ‹ ὥςε Α $= \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} = \frac{113}{355}$ ‹ τότε ἤθελον μὲν πλησιάσοι μᾶλλον εἰς τὸ ὀρθὸν ‹ πλὴν τοῦτο, τὰ $\frac{113}{355}$ λέγω, ἤθελον εἶναι ἔλλασσον τοῦ ὀρθοῦ. Καθότι $\frac{1}{3} > \frac{10000000000}{31415926535}$, καὶ $\frac{1}{3} > \frac{7}{22}$ ‹ καὶ ἐξ ἐναντίας τὰ $\frac{7}{22} < \frac{106}{333}$.. Ὥςε ἀλληλοδιαδόχως ἐγὼ ἔχω πλέον μεγαλήτερα, καὶ πλέον μικρότερα τοῦ δοθέντος κλάσματος Α ‹ πλὴν πάντοτε πλησιάζοντα μᾶλλον καὶ μᾶλλον εἰς τὸ ὀρθόν.

86. Ἂν ὅμως καὶ τὸ δοθὲν κλάσμα ληφθῇ ἀνατετραμμένως ‹ τότε ἤθελε παριςᾷ τὴν ἀναφορὰν τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον: ἔνθα δηλονότι $\frac{\text{περιφ.}}{\text{διάμ.}} = \frac{31415926535}{10000000000}$. Καὶ ἂν ἐνταῦθα ἐκτελέσω ὡς ἀνωτέρω, ὀνομάζων Β τοῦτο τὸ κλάσμα, ἔξω

$$B = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \text{καὶ τ. ξ.}$$

ἔνθα δηλονότι ἂν λάβω μόνον τὸν πρῶτον ὅρον, εἰς τρόπον ὅτι $B = 3$ ‹ τότε εἶναι ὁρατὸν ὅτι αὔτη ἡ σημασία εἶναι ἐλάσσων τῆς ὀρθῆς. ἡ δὲ δευτέρα $\frac{22}{7}$ εἶναι μείζων τῆς ὀρθῆς, πλὴν μᾶλλον ὀρθή. ἡ δὲ τρίτη $\frac{333}{106}$ ἐλάσσων τῆς ὀρθῆς, πλὴν μᾶλλον ὀρθή· ἡ δὲ τετάρτη $\frac{355}{113}$ μείζων τῆς ὀρθῆς, πλὴν ἐγγίζουσα μᾶλλον τῆς ὀρθῆς. καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Εἶναι βέβαια ἄξιον παρατηρήσεως, ὅτι εἰς μὲν τὸ κλάσμα **Α** (85) ὁ πρῶτος μόνον ὅρος ληφθεὶς ἦν μείζων τοῦ ὀρθοῦ: ἐν ᾧ εἰς τὸ κλάσμα **Β** εἶναι ἐλάσσων τοῦ ὀρθοῦ. ὁ δὲ δεύτερος ἐκεῖ μὲν ἐλάσσων, ἐνταῦθα δὲ μείζων τοῦ ὀρθοῦ, καὶ οὕτως ἀκολούθως. Εἰς ἑκάτερα ὅμως, ὅσον περισσοτέρους ὅρους λάβῃ τις, τοσοῦτον τὸ γενόμενον πλησιάζει εἰς τὴν ἀλήθειαν, καὶ ὁ ἀπομακρυσμὸς τῆς ἀληθείας εἶναι πάντοτε ἐλάσσων μονάδος, διαιρουμένης διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἰδίου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἀκολούθου κλάσματος. Οὕτω τὸ ἁμάρτημα τοῦ κλάσματος $\frac{3}{1}$ εἶναι ἔλαττον, ἢ $\frac{1}{7}$.. καὶ τὸ τοῦ $\frac{22}{7}$ ἔλαττον, ἢ $\frac{1}{7 \times 106}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς: ἔνθα δηλ. ὁρᾶται ὁ λόγος τοῦ διατὶ πλησιάζει τις εἰς τὴν ἀλήθειαν, ὅσον περισσοτέρους λάβει ὅρους τοῦ συνεχοῦς κλάσματος.

87. Ἔτι, κατὰ τὸν Καΐλλ, τὸ ἡλιακὸν, ἢ τροπικὸν ἔτος εἶναι $= 365^{\eta}\ 5^{\omega}\ 48'\ 49''$, καὶ τούτου ἕνεκεν εἶναι μεῖζον τοῦ κοινοῦ ἔτους $5^{\omega}\ 48'\ 49''$. Τώρα ἂν αὕτη ἡ ὑπεροχὴ ἦν 6 ὧραι ἐξηκριβωμένως, τότε τὸ ἁμάρτημα ἤθελεν ἐπιδιορθωθῆ διὰ τῆς ἐπακτῆς μιᾶς ἡμέρας εἰς ἕκαστον τέταρτον ἔτος. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ δὲν εἶναι, δῆλον ὅτι ἡ τοιαύτη παρενθήκη τῶν 24 ὡρῶν θέλει εἶναι ἡμαρτημένη: ὅ ἐστι δὲν θέλει γένει σύμπτωσις τοῦ κοινοῦ·

ἔτους μετὰ τοῦ τροπικοῦ. Ἂν λοιπὸν θελήσῃ τις νὰ μάθῃ, εἰς πόσα ἔτη κοινὰ, ἐπακταί τινων ἡμερῶν ἤθελεν ἐκτελέσοι ἐξηκριβωμένως τὴν σύμπτωσιν τοῦ κοινοῦ ἔτους μετὰ τοῦ τροπικοῦ· τότε εἶναι ἀνάγκη εἰς αὐτὸν νὰ ζητήσῃ τὴν ἀναφορὰν τῶν 24 ὡρῶν ὡς πρὸς τὰς $5^{\omega}\ 48'\ 49''$, ἥτις εἶναι $= \frac{86400}{20929}$, ὅπερ θέλει νὰ εἰπῇ, ἂν εἰς ἔτη 86400 κοινὰ παρενθέσῃ τις ἡμέρας 20929· τότε θέλει μεταφέρει τὸ κοινὸν ἔτος εἰς τὸ τροπικόν.. καὶ οὕτως ὁ μὲν ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος παρίστησι τὰ κοινὰ ἔτη, ὁ δὲ παρονομαστὴς τὴν ἐπακτὴν τῶν ἡμερῶν.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἡ ἀναφορὰ τῶν 86400 πρὸς 20929 εἶναι σκοτεινὴ διὰ τὸ μέγεθος τῶν ὅρων· τούτου ἕνεκεν ζητεῖται νὰ εὕρῃ τις εἰς μικροτέρους ὅρους ἀναφορὰς πλησιαζούσας, ὅσον εἶναι δυνατὸν, εἰς τὴν ἀλήθειαν. Ὥστε εἶναι ἀναγκαία εἰς τοῦτο ἡ χρῆσις τοῦ συνεχοῦς κλάσματος, ἢ ἂν θέλῃς ἡ μέθοδος τῆς εὑρέσεως τοῦ κοινοῦ διαιρέτου (58).

Διαιρῶν λοιπὸν ἄνω καὶ κάτω ὡς εἰς τὸν (85), ἔχω

$$
\begin{array}{r|l}
20929 & 86400 \quad (4) \\
 & 83716 \\ \hline
 & 2684
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
2684 & 20920 \quad (7) \\
 & 18788 \\ \hline
 & 2141
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
2141 & 2684 \quad (1) \\
 & 2141 \\ \hline
 & 543
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
543 & 2141 \quad (3) \\
 & 1629 \\ \hline
 & 512
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
512 & 543 \quad (1) \\
 & 512 \\ \hline
 & 31
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
31 & 512 \quad (16) \\
 & 496 \\ \hline
 & 16
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
16 & 31 \quad (1) \\
 & 16 \\ \hline
 & 15
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
15 & 16 \quad (1) \\
 & 15 \\ \hline
 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
1 & 15 \quad (15) \\
 & 15 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

ὅ ἴσο ἔχω πηλίκα $4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{15}}}}}}}}$

Ὥϛε ἂν λάβω μόνον ἔναὄρον $\frac{4}{1}$ · ἔξω εἰς 4 ἔτη μίαν ἡμέραν, ἐπακτὴν μείζων τοῦ ὀρθοῦ, ὡς καὶ εἰς τὸν (86) εἴτε ἀντὶ νὰ προσθέσω μίαν ἡμέραν εἰς 4512 ἡμέρας, τὴν προσθέτω εἰς 1460, εἰδὲ καὶ λάβω δύο · τότε ἔξω $\frac{29}{7}$ : ὅπερ θέλει νὰ εἰπῇ, ὅτι εἰς τὰ 29 ἔτη πρέπει ἐπακτὴ 7 ἡμερῶν · πλὴν ἐλάσσων τοῦ ὀρθοῦ καὶ οὕτως ἐφεξῆς: ὅ ἐϛιν ἔξω ταῦτα τὰ κλάσματα $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, $\frac{128}{31}$ $\frac{161}{39}$, $\frac{2865}{694}$, $\frac{2704}{655}$, $\frac{5567}{1349}$, $\frac{86400}{20929}$, ἔνθα δηλονότι ὡς ὁρᾶται τὰ $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, κ. τ. ξ. εἶναι ἀλληλοδιαδόχως μείζονα καὶ ἐλάσσονα τοῦ δοθέντος $\frac{86400}{20929}$ · καὶ οὕτως ἡ μὲν ἐπακτὴ μιᾶς ἡμέρας εἰς τέσσαρα ἔτη εἶναι μείζων τοῦ ὀρθοῦ, ἡ δὲ τῶν ἑπτὰ εἰς 29 ἔτη εἶναι ἐλάσσων τοῦ ὀρθοῦ · καὶ ἡ τῶν ὀκτὼ εἰς 33 ἔτη εἶναι μείζων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς · πλὴν ἑκάϛη τῶν εἰρημένων ἐπακτῶν εἶναι πλέον ἀκριβὴς τῶν ὅσων εἶναι δυνατὸν εἰς αὐτὸ τὸ διάϛημα νὰ παρεντιθῶσι. Καὶ ἐπειδὴ ὡς ὁρᾶται τὸ ἔϛχατον κλάσμα εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ δοθὲν: τουτέϛιν $= \frac{24^{ὡ}}{5^{ω}\ 48'\ 49''} = \frac{86400}{20929}$ · τοῦτο ἐμφανίζει ὅτι τὸ συνεχὲς κλάσμα ἀδυνατεῖ νὰ προχωρήσῃ περαιτέρω. Καὶ κατὰ μὲν τὸ καλενδάριον τοῦ Γρηγορίου ἡ εἰς 400 ἔτη ἐπακτὴ εἶναι ἡμερῶν 97 μόνον · πλὴν τότε εἰς τὴν κατασκευὴν δηλονότι αὐτοῦ ἐδέχθησαν τὸν διορισμὸν τοῦ ἔτους τὸν ὑπὸ τοῦ Κοπερνίκου, ἔνθα ἦν $= 365^{ἡ}\ 5^{ὡ}\ 49'\ 20''$ · κατὰ δὲ τὴν παροῦσαν διαίρεσιν, ὡς θέλομεν ἰδεῖ εἰς τὴν ἄλγεβραν, εἶναι ἀνάγκη νὰ παρεντιθῶσιν ἡμέραι 109 εἰς 450. Καὶ ἐπειδὴ τὴν σήμερον κατὰ τὸν τοῦ Λάιδη τὸ ἡλιακὸν ἔτος $= 365^{ἡ}\ 5^{ὡ}\ 48'\ 48''$ μόνον · αἱ ἐπακταὶ πρέπει νὰ μεταβληθῶσιν.