ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

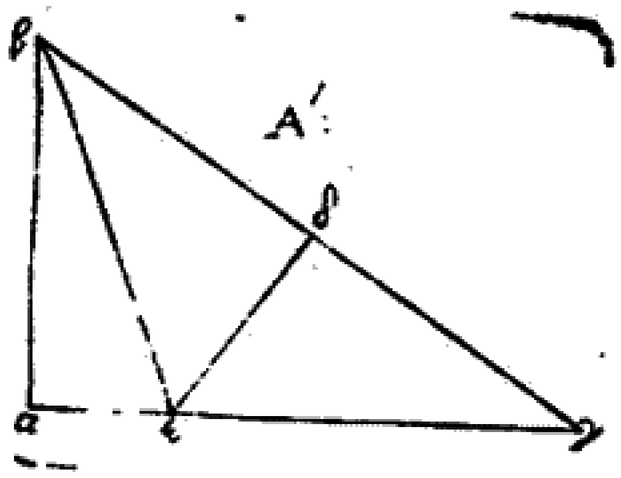
ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Πρότασις Α΄.

Μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν δοθείσης πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου, καὶ τῆς ἐκ τῶν λοιπῶν δύο συνθέτου τὰς λοιπὰς δύο διακρίνειν πλευράς.

Ἔστω οὖν ἡ αβ, μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, ἡ δὲ αγ, ἡ ἐκ τῶν λοιπῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν σύνθετος, καὶ ζητείσθω διαιρεθῆναι ἡ αγ, εἰς δύο, ὥστε ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ συσταθῆναι τὸ τρίγωνον. Κείσθω δὴ ἡ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς αγ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βγ. Ταύτης δὲ δίχα διαιρεθείσης κατὰ τὸ δ, συνιστάσθω κάθετος ἐπ᾽ αὐτῆς ἡ δε, καὶ αἱ αε, εγ ἔσονται αἱ λοιπαὶ δύο ζητούμεναι τοῦ τριγώνου πλευραί. Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ βε, ἴση ἔσται τῇ εγ· ἐπεὶ γὰρ ἡ βδ, ἴση ἐστὶ τῇ δγ, καὶ κοινὴ ἡ δε, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βδε, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γδε, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, πάντως γε καὶ ἡ βε, ἴση ἐστὶ τῇ εγ, κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Δοθείσης ἄρα τῆς αβ, τοῦ βαε, ζητουμένου τριγώνου, καὶ τῆς αγ, συνθέτου ἐκ τῶν λοιπῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν, εὕρηνται αὐτοῦ αἱ δύο πλευραὶ αε, εβ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Geom. Lib. 6. Fig. 1.



Πρότασις Β΄.

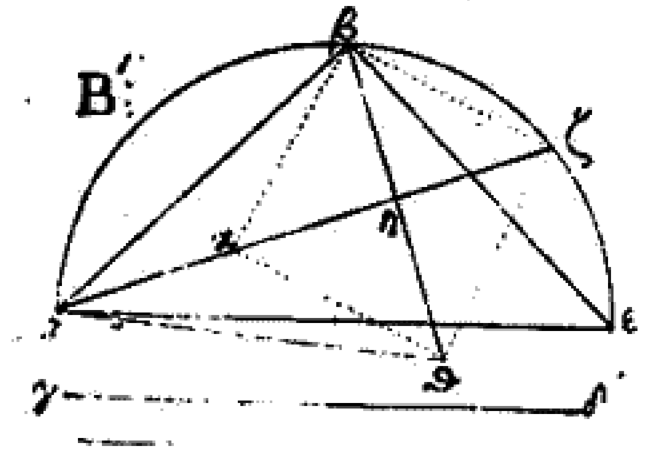
Ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου δοθείσης, καὶ τῆς ἐκ τῶν λοιπῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν συγκειμένης, τὰς αὐτὰς διακρίνειν πλευράς, καὶ τὸ τρίγωνον συστήσασθαι.

Κείσθω ἡ αβ, εὐθεῖα ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου, ἡ δὲ γδ, συγκειμένη ἐκ τῶν λοιπῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν, καὶ ζητείσθωσαν αἱ λοιπαὶ δύο τοῦ τριγώνου πλευραί. Συνιστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, πρὸς τὸ β, σημεῖον ἡ βε, καὶ

ἔστω

ἔστω ἴση τῇ αβ, ἐπιζεύχθω δὲ ἡ αε, καὶ γραφήτω ἡμικύκλιον περὶ αὐτὴν τὸ αβε, ἐν ᾧ ἐφαρμοσθήτω ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἡ αζ, ἴση οὖσα τῇ δοθείσῃ γδ, καὶ πιπτέτω ἐπ᾽ αὐτῆς κάθετος ἡ βη, ἐκτεινομένη κατὰ τὸ θ, ὥστε τὴν ηθ, ἴσην εἶναι τῇ ηβ. Ἐπιζεύχθω δ᾽ ἔτι καὶ ἡ αθ. Λέγω δὴ τὸ αηθ, τρίγωνον εἶναι τὸ ζητούμενον, καὶ τὴν ηθ, ἴσην τῇ ηζ. Ληφθήτω γὰρ ἡ κη, ἴση τῇ ηβ, ἡ ηθ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ βκ, κθ, θζ, ζβ, καὶ ἐπεὶ ἡ βη, ἴση εἴληπται τῇ θη, καὶ κοινὴ ἡ ηκ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βηκ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ θηκ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ βάσις ἡ βκ, βάσει τῇ θκ, ἴση ἐστὶ κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α΄: Εὐκλείδου, καὶ ἡ ὑπὸ βκη, γωνία τῇ ὑπὸ θκη. Διὰ τὰ αὐτὰ τοίνυν καὶ ἡ βζ, εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ θζ, ὥστε δύο αἱ κβ, βζ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς κθ, ζθ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, κοινὴ δὲ ἡ κζ, βάσις, ἄρα κατὰ τὴν η΄: τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ κβζ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κθζ, καὶ ὅλον τὸ κβζ, τρίγωνον ἴσον τῷ κθζ, τριγώνῳ, καὶ ἑπομένως τὸ βκθζ, χωρίον παραλληλόγραμμόν ἐστι, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι κατὰ τὴν λδ΄: τοῦ αὐτοῦ, ὥστε αἱ βζ, κθ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἔστι δὲ καὶ ἡ βη, τῇ θη, ἴση ὡς δέδεικται, δύο δὴ αἱ ζβ, βη, δυσὶ ταῖς κθ, θη, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ζβη, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κθη, κατὰ τὴν κθ΄: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ βάσις ἡ ζη, βάσει τῇ κη, ἴση ἐστίν, εἴληπται δὲ καὶ ἡ κη, ἴση τῇ θη, πάντως γε καὶ ἡ ζη, ἴση ἐστὶ τῇ ηθ. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Geom. Lib. 6. Fig. 2.



Πρότασις Γ΄:

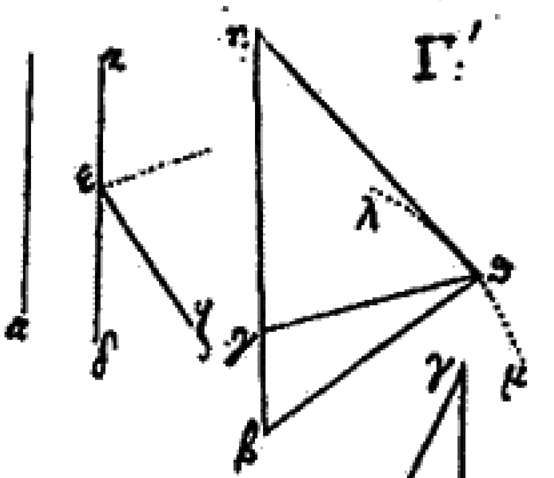
Βάσεως τριγώνου δοθείσης, καὶ τῆς τῶν λοιπῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν διαφορᾶς, ἔτι δὲ καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας, τὰς λοιπὰς τοῦ τριγώνου πλευρὰς εὑρεῖν, καὶ τὸ τρίγωνον συστήσασθαι.

Δεδόσθω βάσις μὲν ἡ α, εὐθεῖα, διαφορὰ δὲ τῶν πλευρῶν τοῦ ζητουμένου τριγώνου ἡ βγ, καὶ κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνία, ἡ ὑπὸ δεζ, γωνία, καὶ ζητείσθωσαν αἱ τούτου πλευραί. Ἐκταθήτω ἡ βγ, ἀορίστως, καὶ πρὸς τῷ γ, σημείῳ συνιστάσθω πρὸς αὐτῇ ἡ ὑπὸ ηγθ, γωνία ἴση τῇ ἡμισείᾳ τοῦ παραπληρώματος τῆς ὑπὸ δεζ, ἤτοι τῆς ὑπὸ ζεκ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ ἴσῳ τῇ α, τόξον γραφήτω τὸ λθμ, τέμνον τὴν γθ, κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ θβ. εἶτα γενέσθω ἡ ὑπὸ γθη, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ θγη, καὶ συσταθήσεται τὸ ηβθ, τρίγωνον, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ γθη, γωνία ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ θγη, αὕτη δὲ ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς ὑπὸ ζεκ, πάντως γε αἱ ὑπὸ θγη, γθη, ὁμοῦ ἴσαι

εἰσὶ

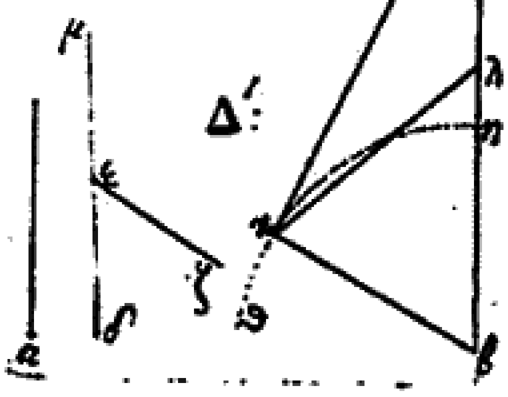
εἰσὶ τῇ ὑπὸ ζεκ, καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ γηθ, κατὰ κορυφὴν τῇ λοιπῇ ὑπὸ δεζ. Ὥστε τὸ βηθ, τρίγωνον ἔχει κατὰ κορυφὴν μὲν γωνίαν τὴν δοθεῖσαν, εἴληπται δὲ καὶ ἡ βθ, αὐτοῦ βάσις ἴση τῇ δοθείσῃ α, ἔχει δ᾽ ἔτι καὶ πλευρὰς τὰς βη, θη, ὧν διαφορὰ ἡ δοθεῖσα βγ, αἱ γὰρ ηγ, ηθ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ε΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Βάσεως ἄρα τριγώνου δοθείσης καὶ τῆς τῶν λοιπῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 3.



Πρότασις Δ':

Βάσεως τριγώνου δοθείσης, καὶ τῆς ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ συγκειμένης, ἔτι δὲ καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας τὸ τρίγωνον συστήσασθαι.



Δοθήτω βάσις μὲν τριγώνου τινὸς ἡ α, εὐθεῖα, ἡ δ᾽ ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ συγκειμένη ἔστω ἡ βγ, καὶ κατὰ κορυφὴν γωνία τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ δεζ, καὶ ζητηθήτω τὸ τρίγωνον. κέντρῳ μὲν δὴ τῷ β, διαστήματι δὲ ἴσῳ τῇ α, γραφήτω τόξον τὸ ηθ, καὶ πρὸς τῷ γ, σημείῳ γενέσθω ἡ ὑπὸ βγκ, γωνία ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βκ. εἶτα γενέσθω ἡ ὑπὸ λκγ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ λγκ, καὶ τὸ λβκ, τρίγωνον ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ὑπὸ λκγ, γωνία ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ λγκ, αὕτη δὲ τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης δεζ, πάντως γε αἱ δύο ὁμοῦ λκγ, λγκ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ τῇ ὑπὸ δεζ, δοθείσῃ, ἡ δὲ λοιπὴ γλκ, τῇ λοιπῇ ζεμ. αἱ γὰρ δεζ, καὶ ζεμ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, ὥσπερ καὶ αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γλκ, κατὰ τὴν ιγ΄: καὶ λβ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ἐπεὶ δὲ ἡ γλκ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζεμ, πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιγ΄: καὶ ἡ βλκ, ἴση ἐστὶ ὑπὸ δεζ, δοθείσῃ, ὥστε τὸ βλκ, τρίγωνον ἔχει κατὰ κορυφὴν μὲν γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ, εἴληπται δὲ καὶ βάσις αὐτοῦ ἡ βκ, ἴση τῇ α, δοθείσῃ, ἔχει δ᾽ ἔτι καὶ πλευρὰς τὰς βλ, λκ, ἴσας τῇ βγ, δοθείσῃ. ἡ γὰρ λκ, ἴση ἐστὶ τῇ λγ, κατὰ τὴν ε΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Βάσεως ἄρα τριγώνου δοθείσης, καὶ τὰ ἑξῆς.

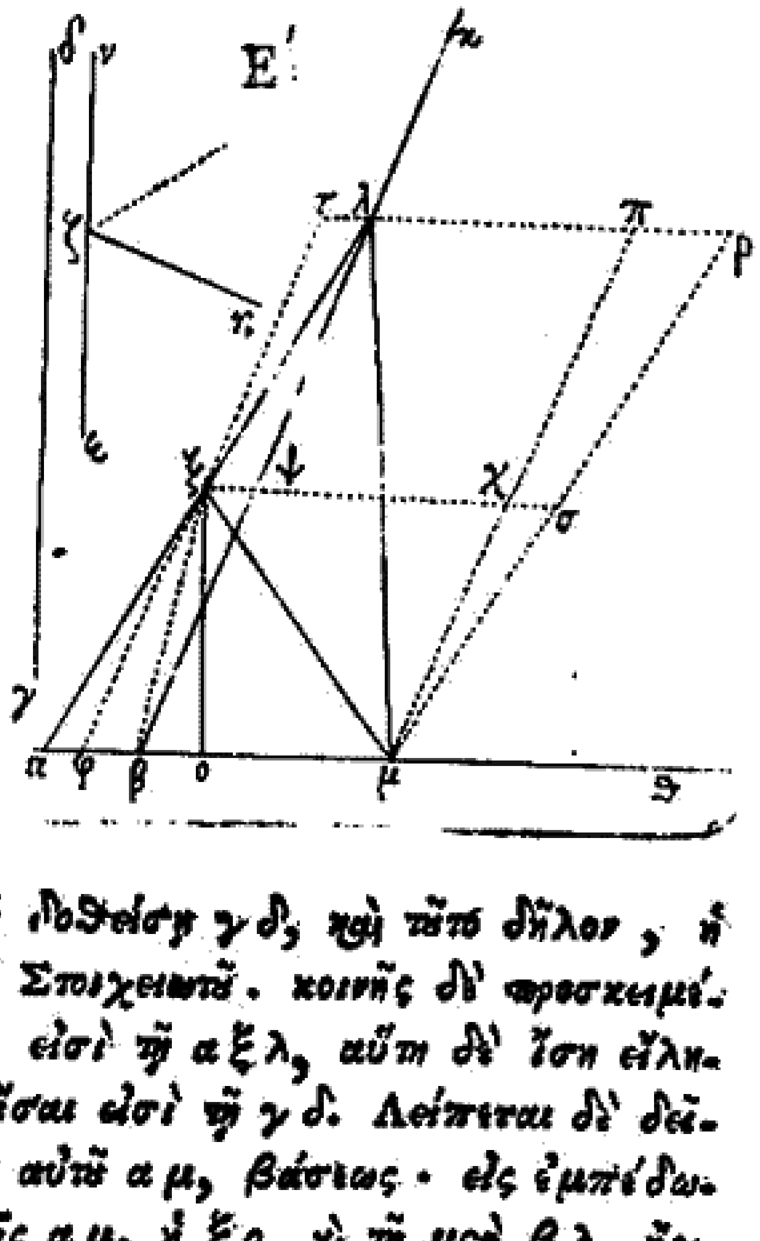
Πρό-

Πρότασις Ε':

Διαφορᾶς δοθείσης τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τινὸς τριγώνου, ἐφ' ἧς κάθετος πίπτει ἀπὸ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, ἔτι δὲ καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας, τὸ τρίγωνον συστήσασθαι.

Δοθείσθω διαφορὰ μὲν τῶν τῆς βάσεως τοῦ ζητουμένου τριγώνου τμημάτων ἡ αβ, συγκειμένη δὲ ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἡ γδ, καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν γωνία ἡ ὑπὸ εζη, καὶ ζητηθήτω τὸ τρίγωνον. Ἤχθω δὴ ἡ αβ, καὶ τὸ συνεχὲς ἀορίστως ὡς ἡ αθ, καὶ πρὸς τῷ β, σημείῳ συνεστάθω ἡ ὑπὸ θβκ, γωνία ἴση τῇ ἡμισείᾳ τοῦ παραπληρώματος τῆς δοθείσης εζη, ἤτοι τῆς ὑπὸ ηζν. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ γδ, τμηθήτω ἡ βκ, κατὰ τὸ λ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αλ, πρὸς δὲ τῷ λ, σημείῳ γενέσθω ἡ ὑπὸ αλμ, ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης εζη, καὶ ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ λμξ, καὶ τὸ αμξ, τρίγωνον ἔσται τὸ ζητούμενον. Ὅτι μὲν γὰρ ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνία ἡ ὑπὸ αξμ, ἴση ἐστὶ τῇ δοθείσῃ εζη, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ξλμ, ξμλ, γωνιῶν ἴση γέγονε τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης εζη, πάντως γε ἡ λοιπὴ λξμ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηζν, παραπλήρωμα γάρ ἐστιν ἑκατέρα πρὸς δύο ὀρθάς. Ὅτι δὲ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ αξ, ξμ, ἴσαι εἰσὶ συναμφότεραι τῇ δοθείσῃ γδ, καὶ τοῦτο δῆλον, ἡ γὰρ ξμ, ἴση ἐστὶ τῇ ξλ, κατὰ τὴν ϛ': τοῦ α': τῶν Στοιχείων. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς αξ, αἱ δύο πάντως γε αξ, ξμ, ἴσαι εἰσὶ τῇ αξλ, αὕτη δὲ ἴση εἴληπται τῇ γδ, δοθείσῃ, ἄρα καὶ αἱ αξ, ξμ, ἴσαι εἰσὶ τῇ γδ. Λείπεται δὲ δεῖξαι, ὅτι καὶ ἡ αβ, διαφορά ἐστι τῶν μερῶν τῆς αὐτοῦ αμ, βάσεως. εἰς ἐμπέδωσιν δὲ τούτου πιπτέτω ἀπὸ τοῦ ξ, κάθετος ἐπὶ τῆς αμ, ἡ ξο, καὶ τῇ μὲν βλ, ἤχθω παράλληλος ἀπὸ τοῦ μ, σημείου ἡ μπ, τῇ δὲ αλ, ἡ μρ, καὶ τῇ αμ, ἡ λπρ, καὶ ξσ. Δείκνυται. κατὰ μὲν οὖν τὴν λδ': τοῦ α': τῶν Στοιχείων, ἡ μὲν βλ, ἴση ἐστὶ τῇ μπ, ἡ δὲ αλ, τῇ μρ, ἔτι δὲ καὶ ἡ λπ, τῇ βμ, καὶ ἡ λρ, τῇ αμ. Ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἴσων λπ, βμ, ἐναπολείπονται ἴσαι αἱ αβ, πρ, καὶ κατὰ τὴν η': τοῦ αὐτοῦ, ἡ ὑπὸ αλβ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ρμπ, ἀχθείσης δὲ διὰ τοῦ ξ, καὶ τῆς τξφ, εὐθείας παραλλήλως τῇ βλ, διαχθήσεται διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ὑπὸ βξφ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ σμχ, ἀλλὰ τῇ βξφ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ξβψ, κατὰ

Geom. Lib. 6. Fig. 4.



τὴν

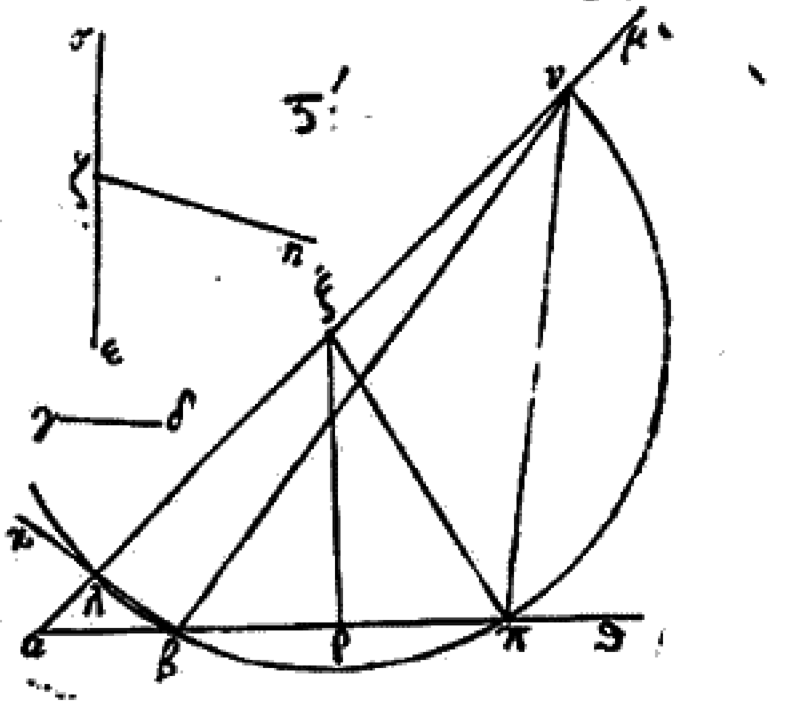
τὴν κθ΄: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ ἡ ξβψ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ σμχ, αὕτη δὲ ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ ξλψ, ἤτοι τῇ ὑπὸ αλβ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ξβψ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ξλψ. ὥστε κατὰ τὴν ϛ΄: τοῦ αὐτοῦ, αἱ ξβ, ξλ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσί, δέδεικται δὲ τῇ ξλ, ἴση καὶ ἡ ξμ, αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι βξ, ξλ, ξμ, ἴσαι εἰσίν. ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ξ, διαστήματι δὲ τῷ ξλ, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν μ, καὶ β, σημείων. Ἐπεὶ δὲ ἐπὶ τῆς βμ, πέπτωκε κάθετος ἡ ξο, πάντως γε κατὰ τὴν γ΄: τοῦ γ΄: τοῦ αὐτοῦ, ἡ βμ, δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ξο, ὥστε ἡ βο, ἴση ἐστὶ τῇ ομ, καὶ ἑπομένως διαφορὰ τῶν αο, ομ, τμημάτων τῆς αμ, βάσεως τοῦ αμξ, τριγώνου ἡ αβ, ἐστὶν εὐθεῖα. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ϛ΄:

Διαφορᾶς δοθείσης τῶν τε τῆς βάσεως τμημάτων καὶ πλευρῶν τινος τριγώνου, ἔτι δὲ καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας τὸ τρίγωνον συστήσασθαι.

Δοθήτω τῶν μὲν τῆς βάσεως τμημάτων τοῦ ζητουμένου τριγώνου διαφορὰ ἡ αβ, εὐθεῖα, τῶν δὲ πλευρῶν αὐτοῦ ἡ γδ, κατὰ κορυφὴν δὲ γωνία ἡ ὑπὸ εζη, καὶ ζητήσθω τὸ τρίγωνον. Ἤχθω δὴ ἡ αβ, κατὰ τὸ θ, ἀορίστως, καὶ πρὸς τῷ β, σημείῳ συνεστάτω γωνία ἡ ὑπὸ αβκ, ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης εζη. εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ γδ, τμηθήτω ἡ βκ, κατὰ τὸ λ, σημεῖον, καὶ διὰ τῶν α, καὶ λ, ἤχθω ἡ αλμ, καὶ ἔσται ἡ αλ, ἴση τῇ γδ. πρὸς δὲ τῷ β, σημείῳ συνεστάτω κάθετος ἐπὶ τῆς βκ, ἡ βν, τέμνουσα τὴν αμ, κατὰ τὸ ν, καὶ τμηθήτω ἡ λν, δίχα κατὰ τὸ ξ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ξ, διαστήματι δὲ τῷ ξλ, ἢ ξν, γραφέτω κύκλος ὁ λβν, τέμνων τὴν αβθ, κατὰ τὸ π, ὅστις διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ β, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ λβν, γωνίαν. εἶτα

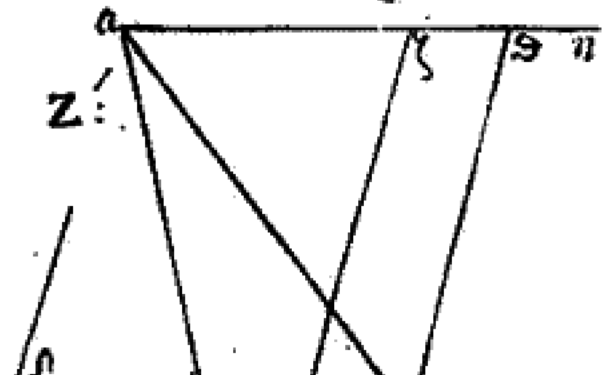
Geom. Lib. 6. Fig. 5.



ἐπεζεύχθωσαν αἱ νπ, ξπ, εὐθεῖαι. ἀπὸ δὲ τοῦ ξ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς βπ, ἡ ξρ, καὶ τὸ αξπ, τρίγωνον ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ξρ, πέπτωκε κάθετος ἐπὶ τῆς απ, βάσεως τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, τεμεῖ δήπουθεν ταύτην μὲν εἰς δύο ἄνισα τὰ αρ, ρπ, τὴν δὲ βπ, εἰς δύο ἴσα τὰ βρ, ρπ, κατὰ τὴν γ΄. τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε διαφορὰ τῶν αρ, ρπ, ἡ δοθεῖσα ἐστὶν αβ. Ἐπεὶ δὲ αὖθις καὶ αἱ ξλ, ξπ, ἴσαι εἰσὶν ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν, πάντως γε διαφορὰ τῶν πλευρῶν αξ, ξπ, ἐστὶν ἡ αλ, ἴση οὖσα τῇ δοθείσῃ γδ. τὸ αξπ, ἄρα τρίγωνον ἔχει τήν τε τῶν τμημάτων τῆς αὐτοῦ βάσεως δοθεῖσαν διαφοράν, φορᾶν, καὶ τὴν τῶν πλευρῶν. Ὅτι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ α ξ π, κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ δοθείσῃ ὑπὸ ε ζ η, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ α β λ, γωνία ἴση γέγονε τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης ε ζ η, ἡ δὲ λ β ν, ὀρθή, πάντως γε ἡ ὑπὸ ν β π, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ὑπὸ η ζ σ, παραπληρώματος τῆς ὑπὸ ε ζ η, πρὸς δύο ὀρθάς. ἐὰν γὰρ ἑκατέρα τῶν ε ζ η, η ζ σ, δίχα διαιρεθῇ τὸ τῆς μιᾶς ἥμισυ, παραπλήρωμα ἔσται τοῦ ἡμίσεως τῆς ἑτέρας πρὸς μίαν ὀρθήν. Ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ α β λ, ν β π, ἴσαι εἰσὶ μιᾷ ὀρθῇ. αἱ τρεῖς γὰρ α β λ, λ β ν, ν β π, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. Ἀφαιρουμένης οὖν τῆς λ β ν, ὀρθῆς, ἐναπολείπονται αἱ λοιπαὶ δύο α β λ, ν β π, μιᾷ ὀρθῇ ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ α β λ, ἴση γέγονε τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης ὑπὸ ε ζ η, ἡ λοιπὴ ἄρα ὑπὸ ν β π, παραπλήρωμά ἐστι τῆς αὐτῆς α β λ, πρὸς μίαν ὀρθήν, καὶ ἑπομένως ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς ὑπὸ η ζ σ, ἔστι δὲ καὶ ἡ α ν, εὐθεῖα ἴση τῇ συγκειμένῃ ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ α ξ π, τριγώνου, ἄρα κατὰ τὴν ἀμφοτέρω ἑκατέρα τῶν ξ ν π, ξ π ν, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης ε ζ η. ὥστε καὶ ἡ ν ξ π, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ η ζ σ. παραπλήρωμα γάρ ἐστιν ἑκατέρα πρὸς δύο ὀρθάς, ἡ μὲν τῶν ὑπὸ ξ ν π, ξ π ν, ἡ δὲ τῆς ὑπὸ ε ζ η. Ἐπεὶ δὲ πάλιν αἱ ὑπὸ ν ξ π, α ξ π, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ιγ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὥσπερ καὶ αἱ ὑπὸ ε ζ η, η ζ σ, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ μὲν τῶν ν ξ π, α ξ π, ἡ ν ξ π, ἀπὸ δὲ τῶν ε ζ η, η ζ σ, ἡ ὑπὸ ζ η σ, πάντως γε καὶ αἱ ἐναπολειπόμεναι α ξ π, ε ζ η, ἴσαι ἔσονται, ἀλλ' ἡ ε ζ η, ἐστὶν ἡ δοθεῖσα. τὸ ἄρα α ξ π, τρίγωνον ἔχει καὶ γωνίαν κατὰ κορυφὴν ἴσην τῇ δοθείσῃ. Διαφορᾶς ἄρα δοθείσης τῶν τε τῆς βάσεως τμημάτων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ζ':

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ, καὶ ἀνάπαλιν. *Geom. Lib. 6. Fig. 6.*

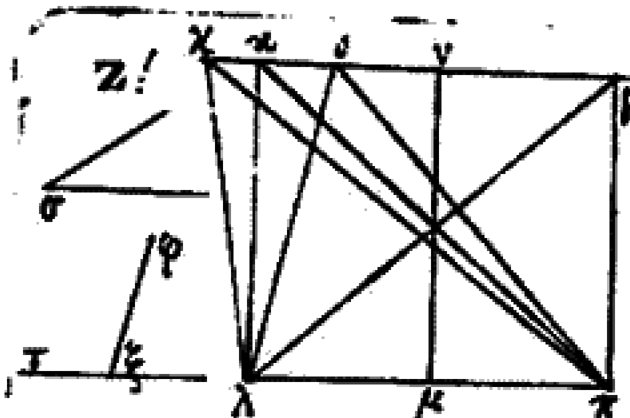


Ἔστω α': τρίγωνον τὸ α β γ, γωνία δὲ ἡ δ, καὶ ζητείσθω παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι α β γ, τριγώνῳ γωνίαν ἴσην ἔχον τῇ δ, δοθείσῃ. Τμηθήτω δὴ ἡ β γ, βάσις τοῦ τριγώνου δίχα κατὰ τὸ ε, πρὸς ᾧ συνεστάθω γωνία ἴση τῇ δ, ἡ ὑπὸ γ ε ζ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ α, σημείου παράλληλος ἤχθω τῇ β γ, ἡ α η, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ἡ γ θ, παράλληλος καὶ αὕτη τῇ ε ζ, καὶ τὸ ε θ, παραλληλόγραμμον, ἔσται τὸ ζητούμενον. Ὅτι μὲν γὰρ τὸ ε θ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ, δοθέντι τριγώνῳ δῆλον διὰ τῆς ια': τοῦ γ': τοῦ παρόντος. ἔχει δ' ἔτι καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ γ ε ζ, ἴσην τῇ δ, δοθείσῃ. ἄρα τῷ δοθέντι α β γ,

S τριγώ-

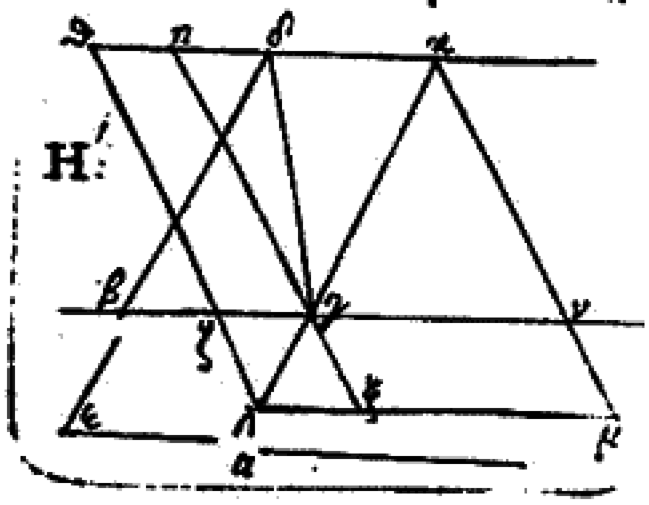
τριγώνῳ συνέστη ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ εγθζ, ὅπερ ἔδει τὸ α΄: Ἔστω δὴ β΄: τὸ κλμν, παραλληλόγραμμον, καὶ γωνία ἡ ξ. καὶ ζητείσθω τρίγωνον ἴσον τῷ κλμν, παραλληλογράμμῳ ἔχον τὴν ξ, δοθεῖσαν γωνίαν. Ἐξαχθήτωσαν δὴ ἐπὶ τὸ συνεχὲς αἱ λμ, κν, εὐθεῖαι, καὶ συνεστάθω πρὸς τῷ λ, σημείῳ γωνία ἴση τῇ ξ, ἡ ὑπὸ μλο. εἶτα εἰλήφθω ἡ μπ, ἴση τῇ λμ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ οπ, καὶ τὸ ολπ, τρίγωνον ἔσται τὸ ζητούμενον. ἔχει γὰρ γωνίαν τὴν ὑπὸ ολπ, ἴσην τῇ δοθείσῃ ξ, καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ κλμν, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ια΄: εἰ δὲ ἡ γωνία ὀξυτέρα εἴη, ὡς ἡ σ, συσταθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ ρλπ, τρίγωνον ἴσον ὂν καὶ αὐτὸ τῷ κλμν, δοθέντι παραλληλογράμμῳ, ἀμβλυτέρας δὲ οὔσης τῆς γωνίας, ὡς ἡ τξφ, συσταθήσεται τὸ λχπ, ἴσης δὲ τῇ κλμ, τὸ κλπ. Τῷ δοθέντι ἄρα τριγώνῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 7.



Πρότασις Η΄:

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.



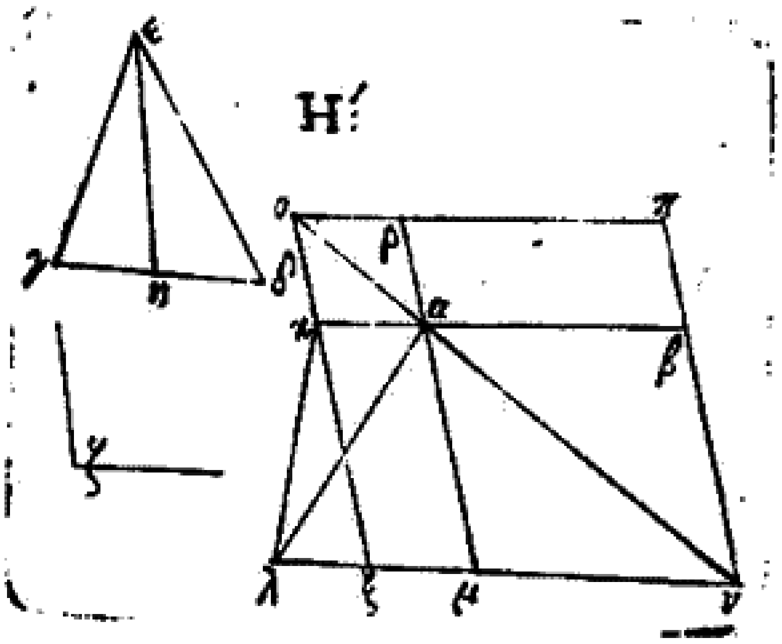
Ἔστω δὴ εὐθεῖα μὲν ἡ α, τρίγωνον δὲ τὸ βγδ, καὶ γωνία ἡ ε. καὶ ζητείσθω παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ βγδ, δοθέντι τριγώνῳ, ἔχον τὴν μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἴσην τῇ δοθείσῃ α, εὐθείᾳ, καὶ γωνίαν ὁμοίως ἴσην τῇ ε, δοθείσῃ. Συνεστάθω οὖν κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὸ ζγηθ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ βγδ, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ζγη, γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ε, καὶ ἐξαχθήτω ἡ θη, ἐπὶ τὸ συνεχὲς ἀορίστως. Εἶτα εἰλήφθω ἡ ηκ, ἴση τῇ δοθείσῃ α, εὐθείᾳ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, διὰ τοῦ γ, ἤχθω ἡ κγλ, τέμνουσα τὴν θζ, ἐκβαλλομένην ἐπὶ τὸ λ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ, ἤχθω παράλληλος τῇ βγ, ἡ λμ, ἀπὸ δὲ τοῦ κ, παράλληλος τῇ θλ, ἡ κμ, καὶ ἐξαχθήτωσαν αἱ ζγ, ηγ, ἐπὶ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὰ ν, καὶ ξ, σημεῖα. καὶ τὸ γξμν, παραλληλόγραμμον, ἔσται τὸ ζητούμενον. Ὅτι μὲν γὰρ τὸ θλμκ, παραλληλόγραμμόν ἐστι, δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς. καὶ δὴ τὴν μγ΄: τοῦ α΄: Εὐκλείδου, τὸ θγ, ἴσον ἐστὶ τῷ γμ, ἀλλὰ τὸ θγ, γέγονεν ἴσον τῷ βγδ, δοθέντι τριγώνῳ, ἄρα καὶ τὸ γμ, ἴσον ἐστὶ τῷ βγδ, τριγώνῳ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζγη, γωνία ἴση τῇ κατὰ κορυφὴν ξγν, ἡ δὲ ὑπὸ ζγη, γέγονεν ἴση τῇ δοθείσῃ ε, ἀλλὰ καὶ ἡ γν,

εὐθεῖα

εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ η κ, αὕτη δὲ εἴληπται ἴση τῇ δοθείσῃ α. τὸ γ ξ μ ν, ἄρα παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ β γ δ, δοθέντι τριγώνῳ, ἔχον πλευρὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ α, καὶ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ε.

Ἄλλως. Ἔστω αὖθις ἡ α β, δοθεῖσα εὐθεῖα, καὶ τρίγωνον μὲν τὸ γ δ ε, γωνία δὲ ἡ ζ, καὶ ζητηθήτω ὡς πρότερον παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι γ δ ε, τριγώνῳ. Διαιρεθήτω δὴ ἡ γ δ, βάσις τοῦ τριγώνου δίχα κατὰ τὸ η, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ε η, ἐξαχθείσης δὲ τῆς α β, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ α, σημείου, εἰλήφθω ἡ α κ, ἴση τῇ η δ, καὶ πρὸς τῷ α, σημείῳ συνεστάθω γωνία μὲν ἡ ὑπὸ κ α λ, ἴση τῇ ὑπὸ η δ ε, ἡ δὲ ὑπὸ κ α μ, ἴση τῇ δοθείσῃ ζ. Ληφθήτω δὲ καὶ ἡ α λ, ἴση τῇ δ ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ κ λ· καὶ παράλληλος τῇ κ α β, ἤχθω ἀπὸ τοῦ λ, ἡ λ ν, τέμνουσα τὴν α μ, κατὰ τὸ μ, καὶ εἰλήφθω ἡ μ ν, ἴση τῇ α β, ἀπὸ δὲ τοῦ κ, παράλληλος τῇ α μ, ἤχθω ἡ κ ξ. καὶ ἀπὸ τοῦ ν, διὰ τοῦ α, ἤχθω ἡ ν α ο, τέμνουσα τὴν ξ κ, ἐκβαλλομένην κατὰ τὸ ο. εἶτα ἀπὸ μὲν τοῦ ο, παράλληλος τῇ κ α β, ἤχθω ἡ ο π, ἀπὸ δὲ τοῦ ν, παράλληλος τῇ μ α, ἐκβαλλομένη ἡ ν π, καὶ ἔσται

Geom. Lib.6. Fig.8.



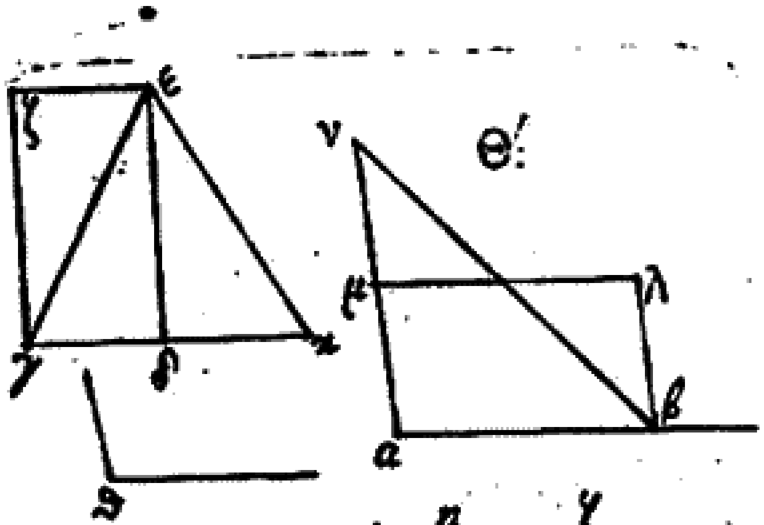
τὸ α β π ρ, παραλληλόγραμμον τὸ ζητούμενον. Τὸ γὰρ κ α μ ξ, παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ κ α λ, τριγώνου κατὰ τὴν μα': τοῦ α': Εὐκλείδου, ἀλλὰ τὸ κ α λ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ η δ ε, τριγώνῳ κατὰ τὴν δ': τοῦ αὐτοῦ, τὸ κ α μ ξ, ἄρα παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι καὶ τοῦ η δ ε, τριγώνου, τοῦτο δὲ ἴσον τῷ γ η ε, κατὰ τὴν ή: τοῦ αὐτοῦ, ἢ α': τοῦ ς': τὸ κ α μ ξ, ἄρα παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ γ δ ε, δοθέντι τριγώνῳ, ἀλλὰ τὸ κ α μ ξ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ρ α β π, κατὰ τὴν μγ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ τὸ ρ α β π, ἴσον ἐστὶ τῷ γ δ ε, τριγώνῳ. Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ρ α β, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ κ α μ, κατὰ κορυφὴν γάρ, αὕτη δὲ γέγονεν ἴση τῇ δοθείσῃ ζ, τὸ ρ α β π, δήπουθεν παραλληλόγραμμον ἔχει γωνίαν μὲν τὴν ὑπὸ ρ α β, ἴσην τῇ ζ, συνέστη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς α β, δοθείσης εὐθείας. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγ: καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Θ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι παραλληλογράμμῳ ἴσον τρίγωνον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ.

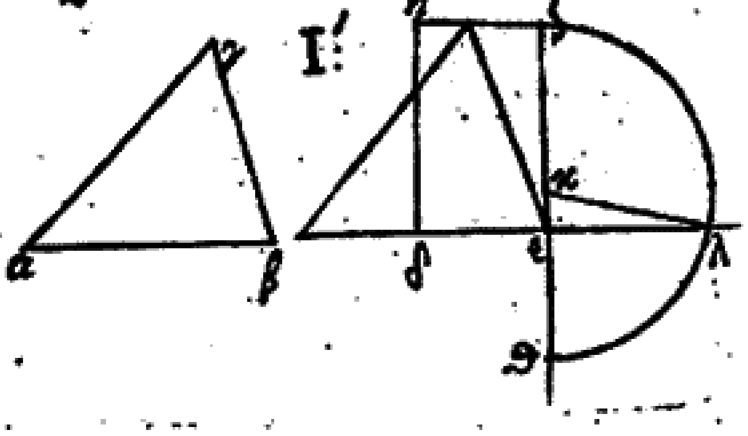
Ἔστω εὐθεῖα μὲν ἡ α β, παραλληλόγραμμον δὲ τὸ γ δ ε ζ, καὶ γωνία ἡ θ, καὶ ζητηθήτω τρίγωνον συστῆσαι ἐπὶ τῆς α β, ἴσον τῷ γ δ ε ζ, παραλληλογράμμῳ, ἔχον γωνίαν τὴν α, ἴσην τῇ δοθείσῃ θ. Ἤχθω δὴ ἡ γ δ, κατὰ τὸ κ, ὥστε τὴν δ κ, ἴσην εἶναι τῇ γ δ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ε κ, ε γ. εἶτα συνεστάθω ἐπὶ τῆς α β, παραλληλόγραμμον τὸ α β λ μ, ἴσον τῷ γ κ ε, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ μ α β, γωνίαν ἴσην τῇ θ, ἐξαχθήτω δὲ καὶ ἡ α μ, κατὰ τὸ ν, ὥστε τὴν μ ν, ἴσην εἶναι τῇ α μ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ν β, καὶ τὸ α ν β, τρίγωνον ἔσται τὸ ζητούμενον. Τὸ γὰρ γ κ ε, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ γ δ ε ζ, δοθέντι παραλληλογράμμῳ, τῷ δὲ γ κ ε, τριγώνῳ γέγονεν ἴσον τὸ α β λ μ, παραλληλόγραμμον, ἄρα καὶ τὸ α β λ μ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ γ δ ε ζ, δοθέντι, ἀλλὰ τὸ α β λ μ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ α β ν, τριγώνῳ κατὰ τὴν ι α: τοῦ γ': τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ τὸ α β ν, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι γ δ ε ζ, παραλληλογράμμῳ, ἔχει δὲ καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ β α ν, ἴσην τῇ θ. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα α β, εὐθεῖαν τῷ δοθέντι παραλληλογράμμῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 9.



Πρότασις Ι':

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι, καὶ ἀνάπαλιν.



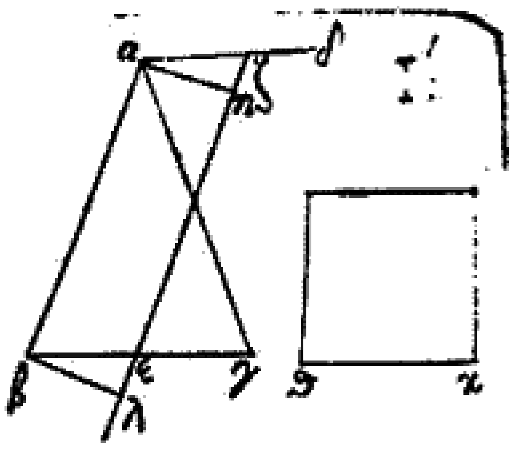
Ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ, καὶ ζητηθήτω τετράγωνον ἴσον τῷ αὐτῷ δοθέντι τριγώνῳ. Συνεστάθω δὴ κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος τὸ δ ε ζ η, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ α β γ, τριγώνῳ, καὶ ἐξαχθήτω ἡ ζ ε, ἐπὶ τὸ θ, ὥστε τὴν ε θ, ἴσην εἶναι τῇ ε δ· τμηθείσης δὲ τῆς ὅλης ζ θ, δίχα κατὰ τὸ κ, γραφήτω τὸ ζ λ θ, ἡμικύκλιον. Ἐξαχθείσης δ' αὖθις καὶ τῆς δ ε, ἐπὶ τὸ λ, ἐπιζεύχθω ἡ κ λ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε λ, τετράγωνον ἴσον ἔσται τῷ α β γ, τριγ: κατὰ γὰρ τὴν ε': τοῦ β': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ὑπὸ τῶν ζ ε, ε θ, ἀνίσων τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ὅπερ ἐστὶ τὸ δ ζ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ε κ, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῆς κ λ, τούτῳ δὲ ἴσα εἰσὶ τὰ ἀπὸ τῶν ε κ, ε λ, τετράγωνα, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ε κ, ε λ, τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ δ ζ, παραλληλογράμμῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ε κ, τετραγώνῳ. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς ε κ, ἐγκαταλείπεται τὸ ἀπὸ τῆς ε λ, τετράγωνον, ἴσον τῷ δ ζ, παραλληλογράμμῳ, τούτῳ δὲ ἴσον γέγονε τῷ α β γ, τριγώνῳ. Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ε λ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ, τριγώνῳ.

Ἄλλως. Ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ, καὶ ζητηθήτω τετράγωνον ἴσον τῷ αὐτῷ. Ἤχθω δὴ παράλληλος ἡ α δ, τῇ β γ, καὶ τμηθήτω ἡ β γ, δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἀπὸ

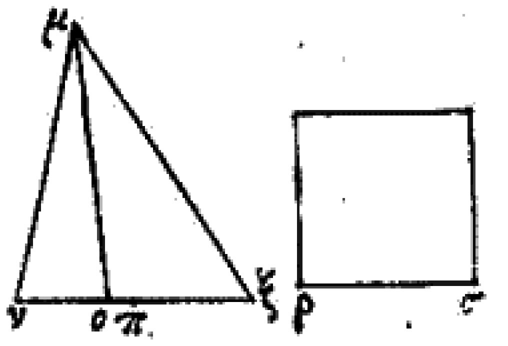
τοῦ ε,

τοῦ ε, παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ εζ, ἐπὶ δὲ τῆς εζ, πιπτέτω κάθετος ἡ αη, καὶ εὑρηθήτω μέση ἀνάλογος τῶν εζ, αη, ἡ θκ. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς θκ, τετράγωνον ἴσον ἔσται τῷ αβγ, δοθέντι τριγώνῳ. Πιπτέτω γὰρ ἐπὶ τῆς εζ, ἐκβαλλομένης κάθετος ἡ βλ. καὶ ἐπεὶ τὰ αβεζ, αβλη, παραλληλόγρ: ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσι βάσεως τῆς αβ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αβ, ζε, πάντως γε ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν λε´: τοῦ α´: Εὐκλείδου, ἀλλὰ τὸ αβεζ, ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ, τριγώνῳ, ἄρα καὶ τὸ αβλη, ὁμοίως ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ αβγ, τριγώνῳ. κατὰ δὲ τὴν λδ´: τοῦ αὐτοῦ, ἑκατέρα τῶν ζε, ηλ, ἴση ἐστὶ τῇ αβ, καὶ ἀλλήλαις. ὥστε ἡ θκ, εὑρεθεῖσα μέση ἀνάλογος τῶν αη, εζ, ἔσται, ἡ αὐτὴ μέση ἀνάλογος καὶ τῶν αη, ηλ. ὡς ἔχει ἄρα ἡ ηλ, πρὸς τὴν θκ, ἔχει καὶ ἡ θκ, πρὸς τὴν αη, καὶ κατὰ τὴν ιζ´: τοῦ ϛ´: τοῦ αὐτοῦ, τὸ ἀπὸ τῆς θκ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αη, ηλ, παραλληλογράμμῳ, τοῦτο δὲ ἴσον δέδεικται τῷ αβγ, τριγώνῳ, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς θκ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ, τριγώνῳ.

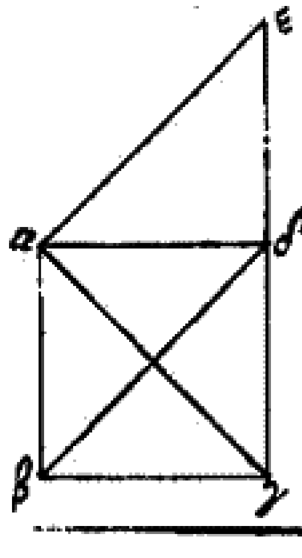
Geom. Lib. 6. Fig. 10.



Ἄλλως. Ἔστω τρίγωνον τὸ μνξ, καὶ ζητηθήτω τούτῳ ἴσον τετράγωνον. Πιπτέτω δὴ κάθετος ἐπὶ τῆς νξ, ἀπὸ τοῦ μ, ἡ μο, καὶ τμηθήτω ἡ νξ, δίχα κατὰ τὸ π. εἶτα εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος τῶν μο, νπ, ἡ ρσ, καὶ τὸ ἀπὸ ταύτης τετράγωνον ἴσον ἔσται τῷ μνξ, δοθέντι τριγώνῳ. κατὰ γὰρ τὴν ια´: τοῦ γ´: τοῦ παρόντος, τὸ ὑπὸ τῶν μο, νπ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ μνξ, τριγώνῳ, ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν μο, νπ, παραλληλογρ: ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ρσ, κατὰ τὴν ιζ´: τοῦ ϛ´: Εὐκλείδου, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ρσ, ἴσον ἐστὶ τῷ μνξ, δοθέντι τριγώνῳ.



Ἔστω ἔτι τετράγωνον τὸ αβγδ, καὶ ζητηθήτω τρίγωνον ἴσον τῷ αὐτῷ αβγδ, τετραγώνῳ. Ἐπιζεύχθω δὲ ἡ βδ, καὶ ἀπὸ τοῦ α, παράλληλος τῇ βδ, ἤχθω ἡ αε, τέμνουσα τὴν γδ, ἐκβαλλομένην κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ αγ, καὶ τὸ αεγ, τρίγωνον ἔσται τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὴν ια´: τοῦ γ´: τοῦ παρόντος τὸ αεγ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αβδε, παραλληλογράμμῳ, τούτῳ δὲ ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδ, τετράγωνον κατὰ τὴν λε´: τοῦ α´: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα τὸ αεγ, ἴσον ἐστὶ τῷ αβγδ, τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει τὸ β´: Τῷ δοθέντι ἄρα τριγώνῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.



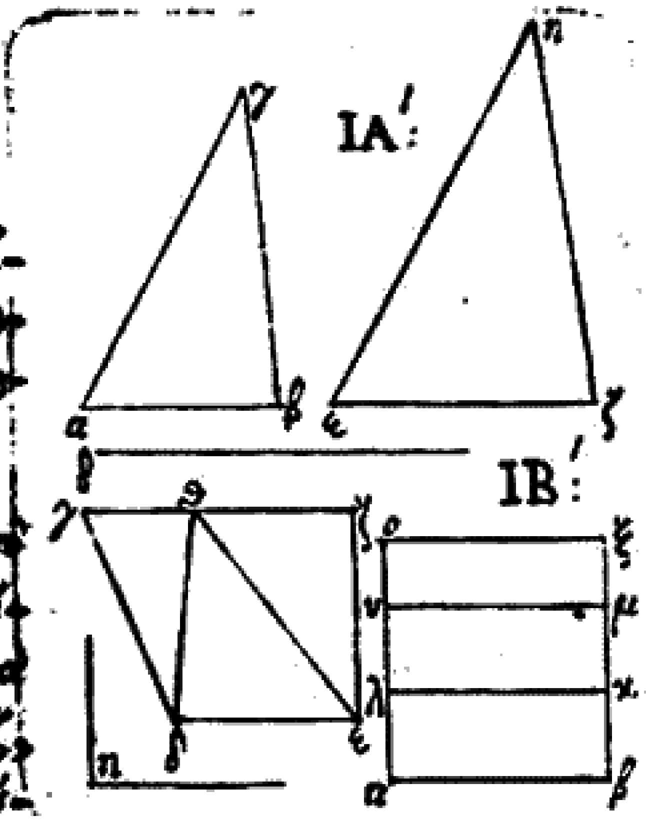
Πρό-

Πρότασις ΙΑ'.

Τοῦ δοθέντος τριγώνου διπλάσιον, τριπλάσιον, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ λόγον πολλαπλάσιον τρίγωνον εὑρεῖν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ζητείσθω τούτου τρίγωνον διπλάσιον. Εἰλήφθω δὴ ἡ δ, εὐθεῖα διπλασία τῆς αβ, καὶ εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος τῶν αβ, καὶ δ, εὐθειῶν, καὶ ἔστω αὕτη ἡ εζ, καὶ τῇ μὲν ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ γενέσθω ἴση ἡ ὑπὸ ζεη, τῇ δὲ ὑπὸ αβγ, ἡ ὑπὸ εζη, καὶ τὸ εζη, τρίγωνον ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αβ, εζ, καὶ δ, ἀνάλογόν εἰσι, πάντως γε τὸ ἐπὶ τῆς α: αβ, πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς β': εζ, ὅμοιον εὐθύγραμμον ἔχει ὡς ἡ αβ, α: πρὸς τὴν δ, γ': κατὰ τὴν α: τοῦ γ': τοῦ παρόντος, ἀλλ' ἡ αβ, ὑποδιπλασιόν ἐστι τῆς δ, καὶ τὸ αβγ, ἄρα τρίγωνον ὑποδιπλάσιόν ἐστι τοῦ εζη, τὸ δὲ εζη, διπλάσιον τοῦ αβη. Τὸν αὐτὸν τρόπον δύναται εὑρεθῆναι καὶ τριπλάσιον, τετραπλάσιον, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ λόγον πολλαπλάσιον, τριπλασιαζομένης, τετραπλασιαζομένης, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ δοθέντα λόγον αὐξανομένης μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν, καὶ τῆς μέσης ἀναλόγου εὑρισκομένης κατὰ τὴν θ': τοῦ α: τοῦ παρόντος, καὶ τῶν λοιπῶν γινομένων, ὡς προηρμήνευται.

Geom. Lib. 6. Fig. 11.



Πρότασις ΙΒ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω εὐθεῖα μὲν ἡ αβ, εὐθύγραμμον δὲ τὸ γδεζ, καὶ γωνία ἡ η. καὶ ζητείσθω παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ γδεζ, δοθέντι, παραβαλλόμενον παρὰ τὴν αβ, δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Διαιρεθήτω δὴ τὸ γδεζ, δοθὲν εὐθύγραμμον εἰς ὁσαδηποτοῦν τρίγωνα. κείσθω δὲ εἰς τρία τὰ γδθ, θδε, εζθ, καὶ συνιστάσθω ἐπὶ τῆς αβ, κατὰ τὴν ή: τοῦ παρόντος τὸ αβκλ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ εζθ, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ λαβ, γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ η. ἐπὶ δὲ τῆς κλ, τὸ λκμν, ἴσον τῷ δεθ, ἔχον καὶ αὐτὸ τὴν ὑπὸ νλκ, γωνίαν ἴσην τῇ η. καὶ ἐπὶ τῆς μν, τὸ νμξο, ἴσον τῷ γδθ, ἔχον τὴν ὑπὸ ονμ, καὶ αὐτὸ γωνίαν ἴσην τῇ η. καὶ τὸ αξ, ὅλον ἔσται τὸ ζητούμενον. Ὡς γὰρ ἔχει τὸ λαβκ, παραλλ: πρὸς

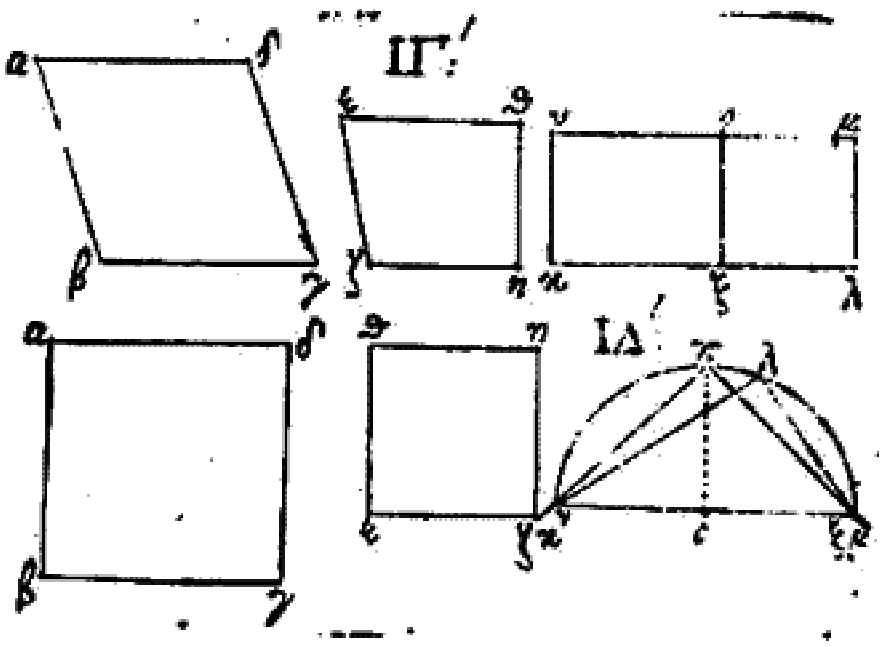
πρὸς τὸ ε ζ θ, τρίγωνον, ἔχει καὶ τὸ λ κ μ ν, πρὸς τὸ δ ε θ, καὶ τὸ ν μ ξ ο, πρὸς τὸ γ δ θ, καὶ ἐν συνθέσει ὡς ἔχει τὸ α β κ λ, πρὸς τὸ ε ζ θ, οὕτως ἔχει καὶ πάντα τὰ α κ, κ ν, ν ξ, παραλληλόγραμμα, πρὸς πάντα τὰ ε ζ θ, δ ε θ, γ δ θ, τρίγωνα. ἀλλὰ τὸ α β κ λ, παραλλ: ἴσον ἐστὶ τῷ ε ζ θ, τριγώνῳ, καὶ τὸ α ξ, ἄρα ὅλον παραλλ: ἴσον ἐστὶ τῷ ὅλῳ γ δ ε ζ, παραλληλογράμμῳ. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΓ′:

Δύο ἀνίσων εὐθυγράμμων δοθέντων τὴν τοῦ μείζονος ὑπεροχὴν πρὸς τὸ ἔλαττον εὑρεῖν.

Δεδόσθωσαν ἄνισα εὐθύγραμμα τὰ α β γ δ, ε ζ η θ, καὶ ζητείσθω ἡ τοῦ μείζονος α β γ δ, διαφορὰ πρὸς τὸ ἔλαττον ε ζ η θ. Συνεστάθω δὴ κατὰ τὴν πρώτην ἐπὶ μιᾶς τῆς κ λ, τυχούσης εὐθείας τὸ κ λ μ ν, παραλλ: ἴσον τῷ α β γ δ, μείζονι ἐν τῇ τυχούσῃ γωνίᾳ, ἐπὶ δὲ τῆς κ ν, τὸ κ ξ ο ν, ἴσον τῷ ε ζ η θ, ἐλάττονι, καὶ τὸ ξ λ μ ο, ὑπεροχὴ ἔσται τοῦ α β γ δ, πρὸς τὸ ε ζ η θ. ὡς γὰρ ἔχει τὸ κ λ μ ν, πρὸς τὸ κ ξ ο ν, οὕτως ἔχει καὶ τὸ α β γ δ, πρὸς τὸ ε ζ η θ. ἀλλὰ τοῦ κ λ μ ν, ὑπεροχή ἐστι πρὸς τὸ κ ξ ο ν, τὸ ξ λ μ ο, τὸ ξ λ μ ο, ἄρα ὑπεροχή ἐστι τοῦ α β γ δ, μείζονος πρὸς τὸ ἔλαττον ε ζ η θ. Δύο ἀνίσων ἄρα εὐθυγράμμ: καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 12.



Πρότασις ΙΔ′:

Δύο ἀνίσων τετραγώνων δοθέντων δύο ἴσα εὑρεῖν, ὥστε ὁμοῦ λαμβανόμενα ἴσα εἶναι τοῖς δοθεῖσιν ὁμοῦ λαμβανομένοις.

Ἔστωσαν τὰ α β γ δ, ε ζ η θ, ἄνισα τετράγωνα, καὶ ζητείσθωσαν δύο ἴσα, ἅτινα ὁμοῦ λαμβανόμενα ἴσα ἔσονται τοῖς δοθεῖσιν α β γ δ, ε ζ η θ, ὁμοῦ λαμβανομένοις. Συνεστάσθω δὴ ἐπὶ τῆς κ λ, ἀορίστου εὐθείας πρὸς τὸ λ, σημεῖον γωνία ἡ ὑπὸ κ λ μ, ὀρθὴ, καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν λ ν, ἴση τῇ α β, ἡ δὲ λ ξ, τῇ ε θ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ν ξ, ἧς δίχα διαιρεθείσης κατὰ τὸ ο, γραφήτω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ ν λ ξ, ἀπὸ δὲ τοῦ ο, ἀνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς ν ξ, τέμνουσα

τὸ

τὸ ν λ ξ, ἡμικύκλιον κατὰ τὸ π, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ν π, π ξ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ν π, π ξ, εὐθειῶν τετράγωνα ἴσα ἔσαι ἀλλήλοις, συναμφότερα δ' ἔσαι ἴσα συναμφοτέροις τοῖς δοθεῖσιν α β γ δ, ε ζ η θ· ἡ γὰρ ν ο, ἴση ἐςὶ τῇ ο ξ, κοινὴ δὲ ἡ ο π, καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ν ο π, ξ ο π, ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἡ ν π, ἄρα βάσις κατὰ τὴν δ': τοῦ α': Εὐκλείδου, ἴση ἐςὶ τῇ π ξ, ὥςε καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἴσα πάντως εἰσίν. ὅπερ ἦν τὸ α':

Ἐπεὶ δ' αὖθις ἡ ὑπὸ ν π ξ, γωνία ὀρθή ἐςιν, ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς ν ξ, ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ν π, π ξ, κατὰ τὴν μζ': τοῦ α': Στοιχ: ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ν ξ, ἴσον ἐςὶ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ν λ, λ ξ, εὐθειῶν, ἤτοι τοῖς α β γ δ, ε ζ η θ, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ν π, π ξ, εὐθειῶν τετράγωνα ἴσα ἐςὶ τοῖς δοθεῖσιν α β γ δ, ε ζ η θ, συναμφότερα συναμφοτέροις, ὅπερ ἦν τὸ β': Δύο ἄρα ἀνίσων τετραγώνων, καὶ τὰ ἑξῆς.

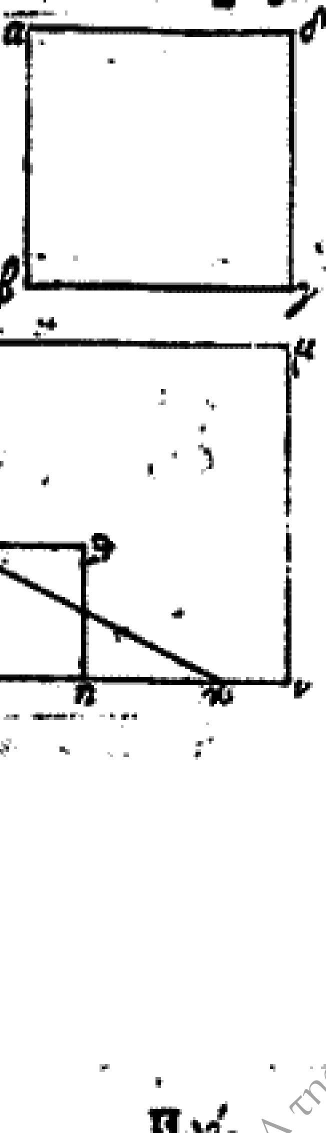
Πρότασις ΙΕ':

Δύο τετραγώνων δοθέντων προσθεῖναι θατέρῳ τόπον ἴσον τῷ ἑτέρῳ, ὥςε τὸ γενόμενον ὅλον τετράγωνον εἶναι.

Ἔςωσαν δύο τετράγωνα τὰ α β γ δ, ε ζ η θ, καὶ ζητείσθω προσθεῖναι τῷ ε ζ η θ, ἐλάττονι σχῆμα ἴσον τῷ α β γ δ, τετραγώνῳ, καὶ τὸ συγκείμενον ἔκ τε τοῦ ε ζ η θ, τετραγώνου, καὶ τοῦ προστιθεμένου σχήματος, εἶναι ὁμοίως τετράγωνον. Εἰλήφθω δὴ ἡ ζ κ, εὐθεῖα ἴση τῇ β γ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ε κ, καὶ ταύτῃ εἰλήφθω ἴση ἡ ζ λ, τῆς ζ κ, ἐξαγομένης. καὶ ἀπὸ τοῦ λ, παράλληλος τῇ ζ η, ἤχθω ἡ λ μ, ἴση τῇ ζ λ. ἐξαχθείσης δὲ καὶ τῆς ζ η, κατὰ τὸ συνεχὲς εἰλήφθω ἡ η ν, ἴση τῇ ε λ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ μ ν, καὶ τὸ ζ μ, πάντως τετράγωνόν ἐςιν, ὡς δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς. Ἐπεὶ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ε κ, τουτέςι τὸ ζ μ, τετράγωνον, ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ε ζ, ζ κ, τετραγώνοις κατὰ τὴν μζ': τοῦ α': Εὐκλείδου, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ε ζ, ἐςὶ τὸ ζ θ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζ κ, τὸ β δ, τὸ ζ μ, ἄρα ἴσον ἐςὶ τοῖς ζ θ, β δ, τετραγώνοις. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ζ θ, ἐναπολείπεται τὸ ε θ η ν μ λ, σχῆμα ἴσον τῷ β δ, καὶ γέγονε τὸ ζ μ. Δέδεικται δὲ τὸ ζ μ, τετράγωνον. Δύο ἄρα τετραγώνων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib.6. Fig.13.

ΙΕ':



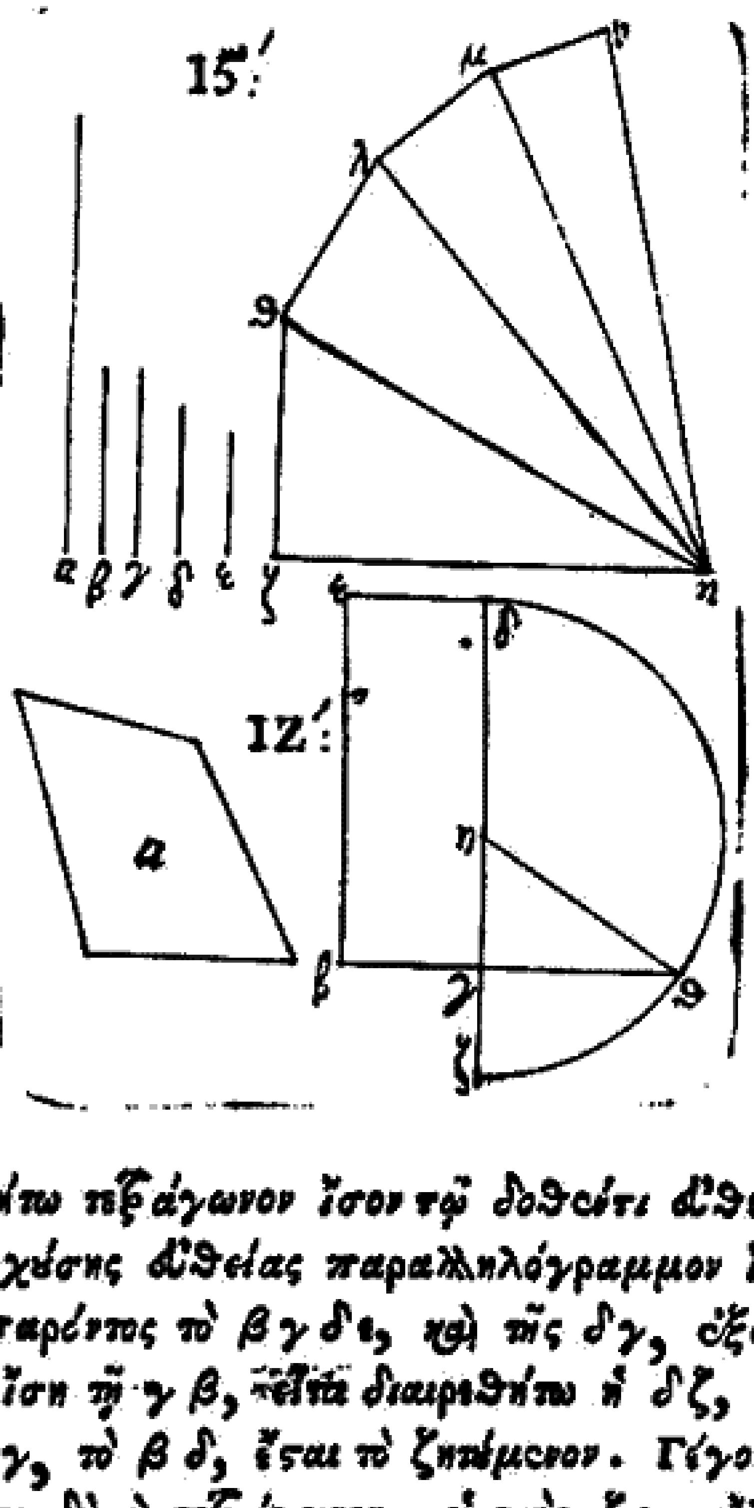
Πρό-

Πρότασις Ιϛ':

Τετραγώνων ὁποσωνοῦν δοθέντων ἴσων, ἢ ἀνίσων, τὴν πάντα ταῦτα δυναμένην εὐθεῖαν εὑρεῖν.

Δεδόσθωσαν τετράγωνα πέντε ἄνισα, ὧν πλευραὶ αἱ α, β, γ, δ, ε, εὐθεῖαι, καὶ ζητείσθω ἡ πάντα ταῦτα δυναμένη, ὥστε τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον εἶναι τοῖς ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, τετραγώνοις. Εἰλήφθω δὴ ἡ ζη, ἴση τῇ α, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἀνεστάσθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ ζθ, ἴση τῇ β, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ θη, ἐφ' ἧς συνεστάσθω κάθετος πρὸς τῷ θ, σημείῳ ἡ θλ, ἴση τῇ γ· ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς λη, συνεστάσθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ λμ, ἴση τῇ δ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ μη. συνεστάσθω δὲ καὶ ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ μν, ἴση τῇ ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ νη, καὶ αὕτη πάντως δύναται πάντα τὰ δοθέντα τετράγωνα. Κατὰ γὰρ τὴν μζ': τοῦ α': τῶν Στοιχείων, τὸ ἀπὸ τῆς θη, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζη, ζθ, ἤτοι τοῖς ἀπὸ τῶν α, καὶ β, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ηλ, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ηθ, θλ, ἤτοι τοῖς ἀπὸ τῶν α, β, γ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ημ, τοῖς ἀπὸ τῶν ηλ, λμ, ἤτοι τοῖς ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ην, τοῖς ἀπὸ τῶν ημ, μν, ἤτοι τοῖς ἀπὸ αβγδε, εὐθειῶν. Τετραγώνων ἄρα ὁποσωνοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 14.



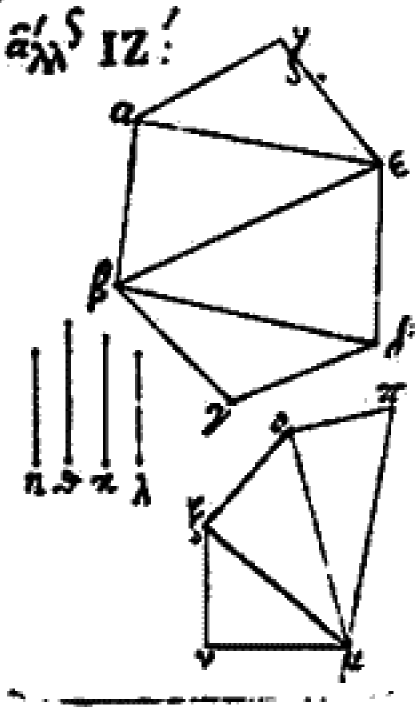
Πρότασις IZ':

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Ἔστω εὐθύγραμμον τὸ α, καὶ ζητείσθω τετράγωνον ἴσον τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ. Συνεστάσθω δὴ ἐπὶ τῆς βγ, τυχούσης εὐθείας παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ α, ἐν γωνίᾳ ὀρθῇ κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος τὸ βγδε, καὶ τῆς δγ, ἐκβληθείσης κατὰ τὸ συνεχές, εἰλήφθω ἡ γζ, ἴση τῇ γβ, εἶτα διαιρεθήτω ἡ δζ, δίχα, κἂν μὲν ἡ διχοτόμησις γένηται κατὰ τὸ γ, τὸ βδ, ἔσται τὸ ζητούμενον. Γέγονε γὰρ ἴσον τῷ δοθέντι α, εὐθυγράμμῳ, ἔστι δὲ καὶ τετράγωνον. ἡ γὰρ ζγ, εἴληπται ἴση τῇ βγ. ἀλλὰ τῇ ζγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ γδ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἡ βγ, ἄρα ἴση ἐςὶ τῇ γ δ, καὶ ἑπομένως τὸ β δ, τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ δοθέντι α, εὐθυγράμμῳ. Εἰδὲ ἡ διχοτόμησις ἐκτὸς γένηται τῆ γ, ὡς ἐπὶ τῆ β΄: σχήματος κατὰ τὸ η, εἰλήφθω κέντρον μὲν τὸ η, διάςημα δὲ τὸ η δ, ἢ η ζ, καὶ γραφήτω ἡμικύκλιον τὸ δ θ ζ. ἐκβαχθείσης δὲ καὶ τῆς β γ, ἐπὶ τὸ θ, ἐπιζεύχθω ἡ η θ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γ θ, ἔςαι ἴσον τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ. Ἡ δεῖξις ἡ αὐτὴ τῇ ἐν τῇ ι: τῆ παρόντος. Geom. Lib. 6. Fig. 15.

Ἄλλως. Ἔςω εὐθύγραμμον τὸ α β γ δ ε ζ, καὶ ζητηθήτω τετράγωνον ἴσον τῷ αὐτῷ. Διαιρεθήτω δὴ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον εἰς τρίγωνα τὰ α ζ ε, ε α β, δ ε β, β γ δ. καὶ εὑρεθήτωσαν κατὰ τὴν ι: τῆ παρόντος τέσσαρες εὐθεῖαι, ὅσα τῷ πλήθει καὶ τὰ τρίγωνα. ὥςε τὰ ἀπὸ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν τετράγωνα ἴσα εἶναι τοῖς τῆ α β γ δ ε ζ, δοθέντος εὐθυγράμμυ τριγώνοις σύμπαντα σύμπασι, καὶ ἔςωσαν αὗται αἱ η, θ, κ, λ, καὶ κείσθω τὸ μὲν ἀπὸ τῆς η, ἴσον εἶναι τῷ α ζ ε, τριγώνῳ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς θ, τῷ α β ε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς κ, τῷ δ ε β, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς λ, τῷ β γ δ. Εἶτα εἰλήφθω ἡ μ ν, ἴση τῇ θ, καὶ συνιςάσθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ ν ξ, ἴση τῇ η. συςαθείσης δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ξ μ, κάθετος ἡ ξ ο, ἴση τῇ κ, ἐπιζεύχθω ἡ ο μ, καὶ τὰ λοιπὰ γινέσθω, ὡς προειρημένεται ἐν τῇ ἀνωτέρω, καὶ εὑρεθήσεται κατ' αὐτὴν, ἡ μ π, εὐθεῖα δυναμένη πάντα τὰ ἀπὸ τῶν η θ κ λ, εὐθειῶν τετράγωνα, ἀλλὰ ταῦτα ἴσα ἐςὶ τοῖς α ζ ε, α ε β, δ ε β, β γ δ, τριγώνοις κατὰ τὴν κατασκευὴν, δηλονότι τῷ α β γ δ ε ζ, δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς μ π, τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ αὐτῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ. Τῷ δοθέντι ἄρα εὐθυγρ: καὶ τὰ ἑξῆς.

ἄλλ. ΙΖ΄.



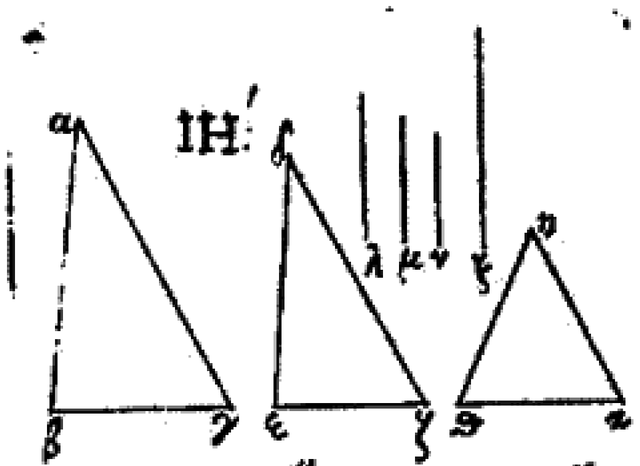
Πρότασις ΙΗ΄:

Δυσὶν, ἢ τρισὶν, ἢ ὁσοισδηποτῦν δοθεῖσι τριγώνοις ἴσον τρίγωνον εὑρεῖν.

Ἔςωσαν τρία τρίγωνα τὰ α β γ, δ ε ζ, η θ κ, καὶ ζητηθήτω τρίγωνον ἴσον τοῖς δοθεῖσι. Συςαθήτωσαν δὴ διὰ τῆς ἀνωτέρω τρία τετράγωνα ἴσα τοῖς τρισὶ δοθεῖσι τριγώνοις, καὶ ἔςωσαν πλευραὶ τούτων αἱ λ μ ν. εἶτα εὑρεθήτω διὰ τῆς ις΄: τῦ παρόντος τετράγωνον ἴσον τοῖς τρισὶν εὑρεθεῖσι τετραγώνοις, ὧν πλευραὶ αἱ λ μ ν. καὶ ἔςω τούτυ πλευρὰ ἡ ξ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ξ, τετραγώνῳ εὑρεθήτω διὰ τῆς ι:

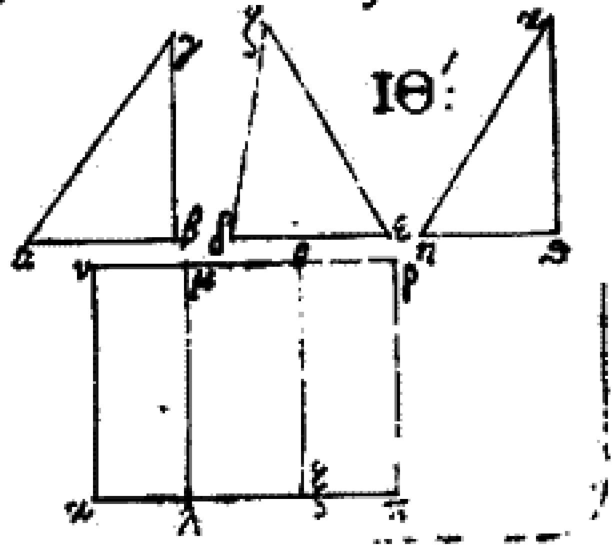
τῆς ι': τοῦ παρόντος, ἴσον τρίγωνον, καὶ τοῦτο ἔσται ἴσον τοῖς δοθεῖσι τρισὶ τριγώνοις. γέγονε γὰρ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ξ, τετραγώνῳ, τοῦτο δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν λ μ ν, τὰ δ' ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τοῖς δοθεῖσιν α β γ, δ ε ζ, η θ κ, τριγώνοις. Δυσὶν ἄρα, ἢ τρισὶν, καὶ τὰ ἑξῆς. Geom. Lib. 6. Fig. 16.

Πρότασις ΙΘ':



Τριῶν δοθέντων ὁποιωνδήποτε τριγώνων, ἀνάλογον αὐτοῖς εὐθείας εὑρεῖν.

Ἔστωσαν τρίγωνα τὰ α β γ, δ ε ζ, η θ κ, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ ἀνάλογοι αὐτῶν πλευραί. Συνεστάθω δὴ τὸ κ λ μ ν, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ α β γ, τριγώνῳ κατ' ὀρθὴν γωνίαν, διὰ τῆς ζ': τοῦ παρόντος. Παρὰ δὲ τὴν λ μ, εὐθεῖαν παραβεβλήσθω τὸ λ ξ ο μ, ὀρθογώνιον ἴσον τῷ δ ε ζ, τριγώνῳ, καὶ παρὰ τὴν ξ ο, τὸ ξ π ρ ο, ἴσον τῷ η θ κ, κατὰ τὴν ή: τοῦ αὐτοῦ. καὶ αἱ κ λ, λ ξ, ξ π, εὐθεῖαι ἔσονται αἱ ζητούμεναι. κατὰ γὰρ τὴν α': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἔχει ἡ κ λ, πρὸς τὴν λ ξ, ἔχει καὶ τὸ κ μ, πρὸς τὸ λ ο, ἀλλὰ τὸ μὲν κ μ, ἴσον γέγονε τῷ α β γ, τριγώνῳ, τὸ δὲ λ ο,



τῷ δ ε ζ, ἄρα καὶ τὸ α β γ, τρίγωνον ἔχει πρὸς τὸ ε δ ζ, ὡς ἡ κ λ, πρὸς τὴν λ ξ. Αὖθις ἐπεὶ ὡς ἔχει ἡ λ ξ, πρὸς τὴν ξ π, ἔχει καὶ τὸ λ ο, πρὸς τὸ ξ ρ, κατὰ τὴν αὐτὴν, τὸ δὲ λ ο, γέγονεν ἴσον, ὡς εἴρηται, τῷ δ ε ζ, καὶ τὸ ζ ρ, τῷ η θ κ, ἄρα καὶ τὸ δ ε ζ, ἔχει πρὸς τὸ η θ κ, ὡς ἡ λ ξ, πρὸς τὴν ξ π. αὕτη ἡ πρότασις ἀληθεύει καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου εἴδους εὐθυγράμμου.

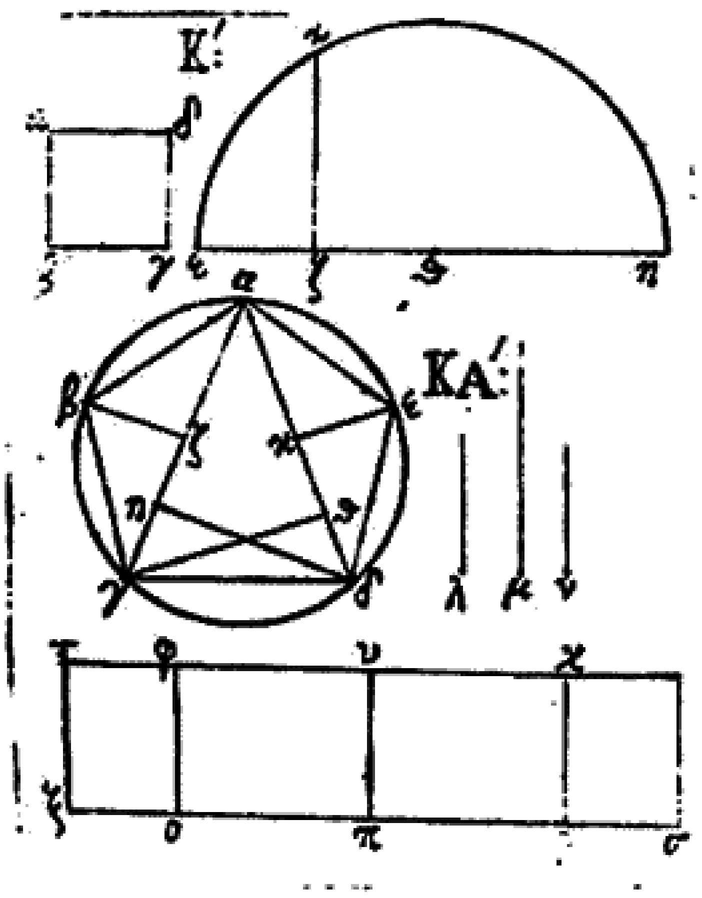
Πρότασις Κ':

Τοῦ δοθέντος τετραγώνου μεῖζον, ἢ ἔλαττον τετράγωνον συστήσασθαι κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.

Ἔστω τετράγωνον τὸ α β γ δ, καὶ ζητείσθω τούτου τριπλάσιον. Εἰλήφθω δὴ ἡ ε ζ, ἴση τῇ β γ, καὶ ἐξαχθήτω καὶ τὸ η, ὥστε τὴν ζ η, τριπλασίαν εἶναι τῆς ε ζ. Τμηθείσης δὲ τῆς ὅλης ε η, δίχα κατὰ τὸ θ, γραφήτω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ ε κ η, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἀνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς ε η, ἡ ζ κ. καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τριπλάσιον ἔσται τοῦ ἀπὸ τῆς β γ. ἡ γὰρ ζ κ, μέση ἀνάλογος τῶν ε ζ, ζ η, κατὰ τὴν θ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, ὥστε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ε ζ, ζ κ, ζ η, ἀνάλογόν εἰσι, καὶ κατὰ τὴν α: τοῦ γ': τοῦ παρόντος ὡς ἔχει ἡ η ζ, α: πρὸς τὴν ζ ε, γ': ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς β':

ζκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ': ζε, ἀλλὰ ἡ ζη, τριπλασία εἴληπται τῆς εζ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζκ, ἄρα τετράγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, τετραγώνου, ἤτοι τοῦ ἀπὸ τῆς βγ. ἐὰν δὲ ἡ ζη, τετραπλάσιος ᾖ, ἢ πενταπλάσιος, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ λόγον πολλαπλάσιος τῆς εζ, τετραπλάσιον ἔσται, ἢ πενταπλάσιον, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζκ, τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, ἢ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον πολλαπλάσιον. Ὥστε δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι ὁσαπλάσιος ἂν ἡ ζη, ληφθῇ τῆς εζ, ἴσης τῇ βγ, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζκ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζε. Ὁμοίως δὲ καὶ κατὰ τὸν τοῦ ὑποπολλαπλασίου λόγον. ἐὰν γὰρ ἡ ζη, ὑποδιπλάσιος ληφθῇ τῆς εζ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζκ, ὑποδιπλάσιον ἔσται τοῦ ἀπὸ τῆς εζ. ἐὰν δὲ ἐκείνη ὑποτριπλάσιος, καὶ τοῦτο ὁμοίως ὑποτριπλάσιον, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων εἰδῶν ἀναλόγως. Τοῦ τε ἐπιμορίου, καὶ ἐπιμεροῦς, καὶ τῶν τούτοις ἀντικειμένων ὑπεπιμορίου τε καὶ ὑπεπιμεροῦς. Τοῦ δοθέντος ἄρα τετραγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 17.



Πρότασις ΚΑ'.

Δοθέντος οἱουδήποτε εὐθυγράμμου, γραμμὰς εὑρεῖν ἰσαρίθμους τε καὶ ἀναλόγους τοῖς, εἰς ἃ τὸ εὐθύγραμμον ἀναλύεται, τριγώνοις.

Ἔστω εὐθύγραμμον τὸ αβγδε, καὶ διαλελύσθω εἰς τρίγωνα τὰ αβγ, αγδ, αδε, ἀπὸ δὲ τῶν β, καὶ δ, γωνιῶν πιπτέτωσαν κάθετοι ἐπὶ τῆς αγ, κοινῆς βάσεως τῶν αβγ, αγδ, τριγώνων αἱ βζ, δη, ἀπὸ δὲ τῶν γ, καὶ ε, πιπτέτωσαν ὁμοίως κάθετοι ἐπὶ τῆς αδ, αἱ γθ, εκ, εἶτα γενέσθω ὡς ἡ βζ, πρὸς τὴν δη, ἡ λ, πρὸς τὴν μ, ὡς δὲ ἡ γθ, πρὸς τὴν εκ, ἡ μ, πρὸς τὴν ν, καὶ αἱ λμν, ἀνάλογον ἔσονται τοῖς αβγ, αγδ, αδε, τριγώνοις. Εἰλήφθω γὰρ ἡ ξσ, εὐθεῖα ἴση ταῖς βζ, δη, γθ, εκ, καὶ ταύτης ἀφῃρήσθω ἡ μὲν ξο, ἴση τῇ βζ, ἡ δὲ οπ, τῇ δη, ἡ δὲ πρ, τῇ γθ, καὶ ἡ ρσ, τῇ εκ. Εἰλήφθω ἔτι καὶ ἡ ξτ, ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς αγ, ἡ δὲ πυ, τῇ ἡμισείᾳ τῆς αδ, καὶ συμπληρούσθωσαν τὰ τπ, υσ, παραλ: καὶ παράλληλος τῇ ξτ, ἤχθω ἡ οφ, τῇ δὲ πυ, ἡ ρχ. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν αβγ, τρίγωνον διπλασίονα βάσιν ἔχει, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ ξφ, παραλληλογράμμῳ. ἡ μὲν γὰρ αγ, βάσις διπλασιός ἐστι τῆς ξτ, τὸ δὲ βζ, ὕψος ἴσον τῇ ξο. πάντως γε κατὰ τὴν ια: τοῦ γ': τοῦ παρόντος τὸ ξφ, ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ, τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν

φπ,

φπ, πχ, ἴσον ἐςὶ τῷ αγδ, τὸ δὲ χσ, τῷ αδε, ἀλλὰ τὸ μὲν ξφ, ἔχει πρὸς τὸ φπ, ὡς ἡ ξο, πρὸς τὴν οπ, κατὰ τὴν α: τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ τὸ αβγ, τρίγωνον πρὸς τὸ αγδ, ἔχει, ὡς ἡ ξο, ἤτοι βζ, πρὸς τὴν οπ, τουτέςι τὴν δη. Αὖθις ἐπεὶ κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ τὸ πχ, πρὸς τὸ χσ, ἔχει, ὡς ἡ πρ, πρὸς τὴν ρσ, τὸ δὲ πχ, ἴσον ἐςὶ τῷ αγδ, καὶ τὸ χσ, τῷ αδε, πάντως γε καὶ τὸ αγδ, πρὸς τὸ αδε, ἔχει ὡς ἡ πρ, ἤτοι ἡ γθ, πρὸς τὴν ρσ, τουτέςιν εκ, ὡς δὲ ἡ βζ, πρὸς τὴν δη, γέγονε καὶ ἡ λ, πρὸς τὴν μ, τὸ αβγ, τρίγωνον ἄρα πρὸς τὸ αγδ, ἔχει ὡς ἡ λ, εὐθεῖα πρὸς τὴν μ, γέγονε δὲ καὶ ἡ μ, πρὸς τὴν ν, ὡς ἡ γθ, πρὸς τὴν εκ, ἄρα τὸ γαδ, ἔχει πρὸς τὸ αδε, ὡς ἡ μ, πρὸς τὴν ν, καὶ ἑπομένως αἱ λμν, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι τοῖς αβγ, αγδ, αδε, τριγώνοις. Αὕτη ἡ πρότασις ἀληθεύει καὶ ἐπὶ τῶν μὴ ἰσοπλεύρων.

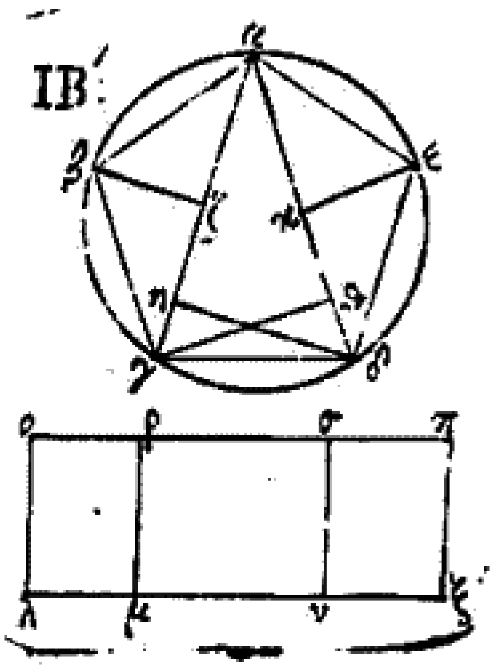
Πρότασις ΚΒ':

Τῷ δοθέντι ἰσοπλεύρῳ εὐθυγράμμῳ ἴσον ὀρθογώνιον συςήσασθαι.

Ἔςω εὐθύγραμμον ἰσόπλευρον τὸ αβγδε, καὶ ζητηθήτω τούτῳ ἴσον ὀρθογώνιον. Διαιρεθήτω δὴ τὸ αβγδε, δοθὲν εὐθύγραμμον εἰς τρίγωνα τὰ αβγ, αγδ, αδε, καὶ πιπτέτωσαν κάθετοι αἱ βζ, δη, εκ, ἐπὶ τῶν αγ, αδ, καὶ τῇ μὲν βζ, ληφθήτω ἴση ἡ λμ, τῇ δὲ δη, ἡ μν, καὶ τῇ εκ, ἡ νξ. Εἰλήφθω δὲ ἡ λο, ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς γα, ἢ δα, ἴσαι γὰρ, διὰ τὸ εἶναι ἴσας καὶ τὰς αβγ, αεδ, περιφερείας, καὶ συμπληρούσθω τὸ ολξπ, ὀρθογώνιον, καὶ τοῦτο ἔςαι τὸ ζητούμενον. Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ μ, καὶ ν, παράλληλοι τῇ λο, αἱ μρ, νσ· καὶ ἐπεὶ τὸ λρ, περιέχεται ὑπὸ τῆς λμ, ἴσης τῇ βζ, καθέτῳ, καὶ τῆς λο, ἴσης τῇ ἡμισείᾳ τῆς γα, πάντως γε ἴσον ἐςὶ τῷ αβγ, τριγώνῳ κατὰ τὴν ια: τοῦ γ': τοῦ παρόντος. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ μσ, ἴσον εἶναι τῷ αγδ, καὶ τὸ νπ, τῷ αδε. ὥςε ὅλον τὸ λπ, ἴσον ἐςὶν ὅλῳ τῷ αβγδε, δοθέντι. Τῷ δοθέντι ἄρα ἰσοπλεύρῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. ς. Fig. 18.

ΙΒ':

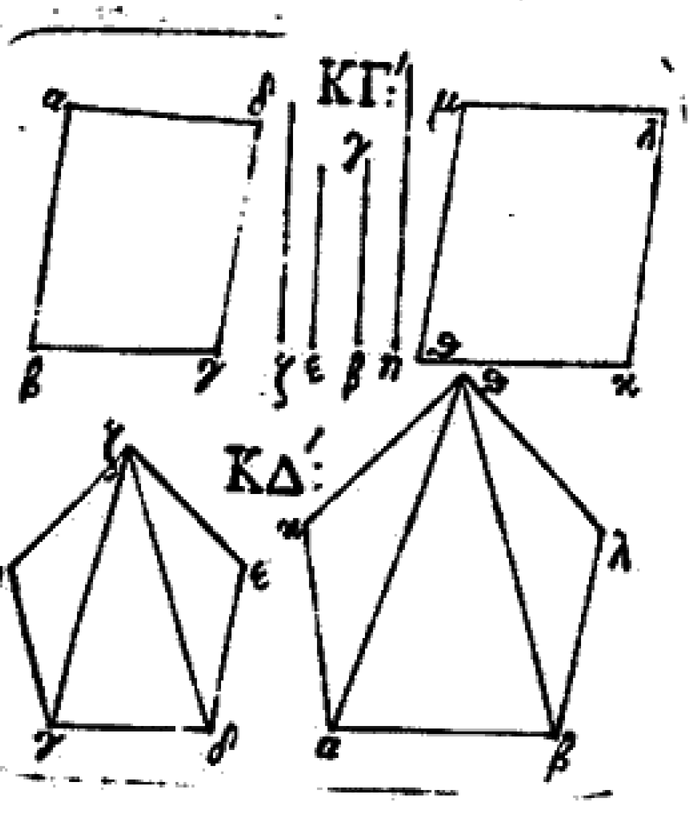


Πρότασις ΚΓ'.

Τῷ δοθέντι ὁτῳδήποτε εὐθυγράμμῳ ὅμοιον εὐθύγραμμον συστήσασθαι κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.

Ἔστω εὐθύγραμμον μὲν τὸ αβγδ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ε, πρὸς τὴν ζ, καὶ ζητείσθω ὅμοιον εὐθύγραμμον τῷ δοθέντι κατὰ τὸν τῆς ε, πρὸς τὴν ζ, λόγον· Γενέσθω δὴ ὡς ἡ ε, πρὸς τὴν ζ, ἡ βγ, πρὸς τὴν η. καὶ εὑρήσθω μέση ἀνάλογος τῶν βγ, καὶ η, ἡ θκ, καὶ παρὰ τὴν θκ, παραβληθήτω εὐθύγραμμον ὅμοιον τῷ δοθέντι αβγδ, οἷον τὸ θκλμ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ βγ, θκ, καὶ εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, πάντως γε τὸ ἐπὶ τῆς α': βγ, τὸ αβγδ, πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς β': θκ, τὸ θκλμ, γέγονεν ὡς ἡ α': βγ, εὐθεῖα πρὸς τὴν γ': η, ἀλλ' ἡ βγ, ἔχει πρὸς τὴν η, ὡς ἡ ε, πρὸς τὴν ζ, ἄρα καὶ τὸ αβγδ, εὐθύγραμμον πρὸς τὸ θκλμ, ἔχει ὡς ἡ ε, πρὸς τὴν ζ. Τῷ δοθέντι ἄρα ὁτῳδήποτε εὐθυγράμμῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 19.



Πρότασις ΚΔ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον παραβαλεῖν.

Ἔστω εὐθεῖα μὲν ἡ αβ, εὐθύγραμμον δὲ τὸ γδεζη, καὶ ζητείσθω παραβληθῆναι παρὰ τὴν αβ, εὐθύγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ γδεζη, δοθέντι. Διαιρεθήτω δὴ τὸ δοθὲν εἰς τὰ ζηγ, γζδ, δζε, τρίγωνα, καὶ τῇ μὲν ὑπὸ ζγδ, γωνίᾳ γενέσθω ἴση ἡ ὑπὸ θαβ, τῇ δὲ ὑπὸ ζδγ, ἡ ὑπὸ θβα, τῇ δὲ ὑπὸ ζγη, ἡ ὑπὸ θακ, τῇ δὲ ὑπὸ γζη, ἡ ὑπὸ αθκ, τῇ δὲ ὑπὸ ζδε, ἡ ὑπὸ θβλ, καὶ τῇ ὑπὸ δζε, ἡ ὑπὸ βθλ, καὶ τὸ αβλθκ, συσταθὲν εὐθύγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον ἔσται τῷ δοθέντι γδεζη. Ἐπεὶ γὰρ τὰ θκα, αθβ, βθλ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι τοῖς ζηγ, γζδ, δζε, ἕκαστον ἑκάστῳ. πάντως γε κατὰ τὴν δ': τοῦ ς': τῆς Στοιχειωτικῆς, αἱ πλευραὶ τῶν θκα, αθβ, βθλ, τριγώνων ἀνάλογόν εἰσι ταῖς πλευραῖς τῶν ζηγ, γζδ, δζε, καὶ ἐπομένως ὅμοιά εἰσι κατὰ τὸν α': ὅρον τοῦ παρόντος. τὰ ἄρα θκα, αθβ, βθλ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι