ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

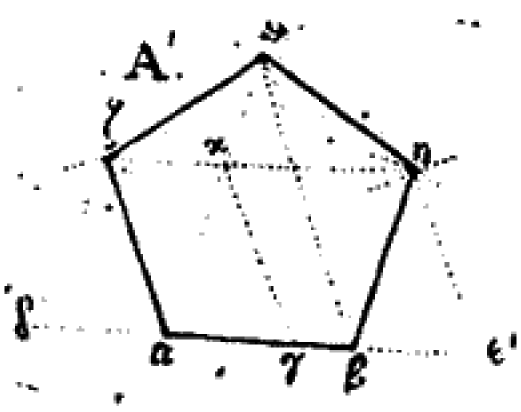
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Πρότασις Α′:

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Δοθήτω δὴ εὐθεῖα ἡ α β, καὶ ζητηθήτω ἐπ᾽ αὐτῆς πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστάθῆναι. Τμηθήτω κατὰ τὸ γ, ἡ α β, δοθεῖσα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὴν ζ′: τοῦ α′: τοῦ παρόντος, καὶ

Geom. Lib. 5. Fig. 1.



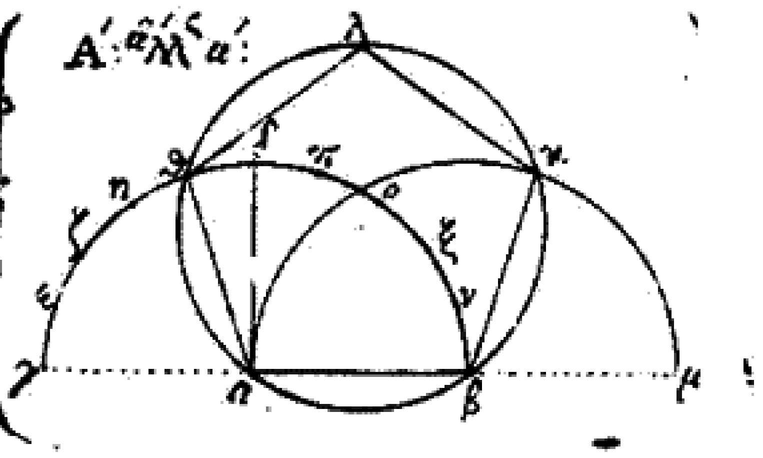
καὶ ἐξαχθήτω ἐφ᾽ ἑκάτερα κατὰ τὸ συνεχὲς, ὥστε ἑκάτερον τῶν α δ, β ε, μερῶν ἴσον εἶναι τῷ α γ, μείζονι τμήματι τῆς α β, καὶ κέντροις μὲν τοῖς α δ, καὶ β ε, διαστήματι δὲ τῷ α β, τόξα γραφήτωσαν τεμνόμενα ἀλλήλοις, τὰ μὲν κατὰ τὸ ζ, τὰ δὲ κατὰ τὸ η, κέντροις δ᾽ αὖθις τοῖς ζ η, καὶ διαστήματι τῷ αὐτῷ α β, γραφήτωσαν καὶ ἕτερα τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α ζ, ζ θ, θ η, η β, ἐξ ὧν συσταθήσεται τὸ α ζ θ η β, πεντάγωνον, ὃ λέγω εἶναι ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ δ ζ, α θ, θ β, η ε, κ γ, ζ η, καὶ ἐπεὶ τῶν δ ζ α, β η ε, τριγώνων, αἱ δύο πλευραὶ δ ζ, ζ α, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς β η, η ε, ἔστι δὲ καὶ βάσις ἡ δ α, βάσει τῇ β ε, ἴση, πάντως γε κατὰ τὴν η′: τοῦ α′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ ὑπὸ δ ζ α, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β η ε, κατὰ δὲ τὴν δ′: τοῦ αὐτοῦ καὶ ἡ ὑπὸ ζ δ α, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ η β ε, ὥστε κατὰ τὴν κη′: τοῦ αὐτοῦ αἱ ζ δ, η β, παράλληλοί εἰσιν, ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ζ η, δ β, παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν λ γ′: Ἐπεὶ δ᾽ αὖθις τὰ δ ζ α, α κ γ, τρίγωνα ἐπὶ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν δ α, α γ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς δ β, ζ η, πάντως γε κατὰ τὴν λη′: τοῦ α′: τοῦ αὐτοῦ ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ ζ α κ, ἔσονται καὶ τὰ δ κ, γ ζ, τετράπλευρα, καὶ ἑπομένως παραλληλόγραμμα κατὰ τὴν λ δ′: τοῦ αὐτοῦ, ὥστε ἡ δ ζ, παράλληλός ἐστι τῇ α θ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ε η, παράλληλος τῇ θ β. ἐστὶν οὖν ἡ μὲν θ α β, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ζ δ α, ἡ δὲ ὑπὸ θ β α, τῇ ὑπὸ η ε β, ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ζ δ α, η ε β, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ θ α β, θ β α, ὁμοίως ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ τὸ

θ β α,

θβα, τρίγωνον ἰσοσκελές. Ὅτι δὲ καὶ ὅμοιόν ἐστι τοῖς δζα, βηε, τριγώνοις, δῆλον. ἰσογώνιον γάρ. Ἐπεὶ δὲ ἑκάτερον τῶν δζα, βηε, ἔχει ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει αὐτοῦ γωνιῶν διπλασίονα τῆς κατὰ κορυφὴν κατὰ τὴν κή: τοῦ δ: τοῦ παρόντος, πάντως γε καὶ τὸ αθβ, τρίγωνον ἔχει ὁμοίως ἑκατέραν τῶν ὑπὸ θαβ, θβα, γωνιῶν διπλασίονα τῆς ὑπὸ αθβ, περὶ αὐτὸ δὲ γέγραπται τὸ αβηθζ, πεντάγωνον, ἄρα κατὰ τὴν ιά: τοῦ δ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ αβηθζ, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

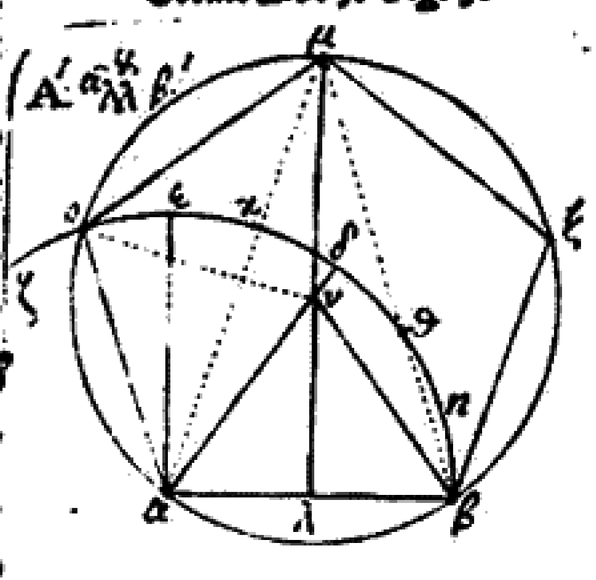
Ἄλλως. Δεδόσθω ἡ αβ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, κατὰ τὸ γ, ὥστε τὴν αγ, ἴσην εἶναι τῇ αβ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αγ, ἡ αβ, γραφήτω ἡμικύκλιον τὸ γδβ, πρὸς δὲ τῷ α, ἀνεστάσθω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βγ, ἡ αδ, καὶ διαιρεθήτω τὸ γδ, τεταρτημόριον εἰς πέντε μέρη ἴσα τὰ γε, εζ, ζη, ηθ, θδ. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ αθ. Διὰ δὲ τῶν θ, α, β, τριῶν σημείων γραφήτω κύκλος ὁ αβκλθ, καὶ διαιρεθήτω ἡ βκλθ, περιφέρεια εἰς μέρη τρία ἴσα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ βκ, κλ, λθ, καὶ τὸ αβκλθ, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τι ἔσται καὶ ἰσογώνιον, ὁ λόγος ἐκ τῆς κατασκευῆς σαφής. Ἐὰν γὰρ καὶ ἀπὸ τοῦ β, κέντρου διαστήματι τῷ βα, ἡμικύκλιον γραφῇ τὸ ακμ, ἠγμένης τῆς αβ, κατὰ τὸ μ, καὶ τὰ λοιπὰ γένωνται ὡς πρότερον, ἔσονται αἱ τρεῖς εὐθεῖαι θα, αβ, βκ, ἴσαι, ἔτι δὲ καὶ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ θαβ, αβκ, διὰ τὸ ἴσα τμήματα κύκλου εἶναι τὰ θβ, ακ. Διὰ τῶν αὐτῶν δὲ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι.

Geom. Lib. 5. Fig. 2.



Ἄλλως. Κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, γραφήτω τόξον τὸ ηθδβ, καὶ ἀνεστάσθω ἀπὸ τοῦ α, κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ αδ, καὶ διῃρήσθω τὸ δβ, τεταρτημόριον εἰς μέρη πέντε τὰ βν, νξ, ξο, οπ, πδ. εἶτα εἰλήφθω τὸ δθ, ἴσον τῷ ἑνὶ τῶν βν, νξ, ξο, οπ, πδ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ αθ, τὰ δὲ λοιπὰ γενέσθω ὡς προηρμήνευται, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον.

Ἄλλως. Κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, τόξον γραφήτω τὸ βδεζ, μεῖζον τεταρτημορίου, καὶ ἀνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ αε. τὸ δὲ βδε, τεταρτημόριον διαιρεθήτω, ὡς καὶ πρότερον εἰς μέρη πέντε ἴσα ἀλλήλοις τὰ βη, ηθ, θδ, δκ, κε. καὶ ἀπὸ τοῦ α, διὰ τοῦ δ, πέρατος τοῦ γ΄: μέρους ἤχθω ἡ αδ. Εἶτα διῃρήσθω ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ λ, καὶ ἀνεστάσθω κάθετος ἐπ᾽ αὐτῆς ἡ λμ, τέμνουσα τὴν αδ, κατὰ τὸ ν. ἀπὸ δὲ τοῦ ν, διαστήματι τῷ να, ἡ νβ, κύκλος γραφήτω ὁ αβμ. Λέγω δὴ τοῦτον διαιρεῖσθαι ὑπὸ τῆς αβ, εἰς μέρη πέντε ἴσα ἀλλήλοις, ὥστε συνίστασθαι ἐν αὐτῷ τὸ αβξμο, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αμ, μβ, ον, νβ, καὶ ἐπεὶ αἱ αβ, αο, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν ὡς ἐξ ἑνὸς κέντρου, κοινὴ δὲ ἡ α ν, δύο δὴ αἱ α β, α ν, δυσὶ ταῖς α ο, α ν, ἴσαι εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ν ο, τῇ ν β, ἴση, ἄρα κατὰ τὴν η΄: τοῦ α΄: Εὐκλείδου, αἱ ὑπὸ ο α ν, ν α β, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ο α ν, τριπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ κ α ν, διὰ τὸ τριπλασίονα εἶναι καὶ τὴν ο δ, περιφέρειαν τῆς κ δ, περιφερείας, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ν α β, τριπλασίονά ἐστι τῆς ὑπὸ κ α δ, ὅλη δὲ ἡ ὑπὸ κ α β, τετραπλασία ἔσται τῆς αὐτῆς κ α δ. Ἐπεὶ δὲ τῇ κ α δ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ α μ ν, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν α ν, τῇ ν μ, πάντως γε αἱ ὑπὸ μ α β, γωνία τετραπλ: ἐστὶ τῆς ὑπὸ α μ ν, ταύτης δὲ διπλασία ἐστὶν ἡ ὑπὸ α ν λ, κατὰ τὴν κ΄: τοῦ γ΄: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ μ α β, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ α ν λ, ταύτης δὲ διπλασία ἐστὶ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ α ν β, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ α ν λ, τῇ ὑπὸ λ ν β, κατὰ τὴν η΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ μ α β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α ν β, ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ μ β α, ἴση τῇ αὐτῇ α ν β, ἀλλ᾽ ἡ α ν β, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ α μ β, ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν μ α β, μ β α, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ α μ β, αἱ πρὸς τὴν βάσιν δηλονότι τῆς κατὰ κορυφήν, ὥστε κατὰ τὴν ι α΄: τοῦ δ΄: τοῦ αὐτοῦ, ὑπὸ τῆς α β, βάσεως ἐπαναλαμβανομένης συνίσταται ἐν τῷ α ν β, κύκλῳ τὸ α β ξ μ ο, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ὅτι δὲ ἡ ο δ, περιφέρεια τριπλασία ἐστὶ τῆς κ δ, συνάγεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω. τὸ γὰρ ο ε, τόξον πέμπτον μέρος ἐστὶ τοῦ τεταρτημορίου, ὥσπερ καὶ τὸ ε κ, κ δ, καὶ λοιπά. Ἐπεὶ δὲ τὸ ε β, τεταρτημόριόν ἐστι, προστιθεμένου τοῦ ο ε, τὸ ο β, τόξον ἓξ περιέξει μέρη, ὧν τὰ μὲν τρία τὸ β δ, περιέχει, τὰ δὲ λοιπὰ τρία τὸ δ ο.



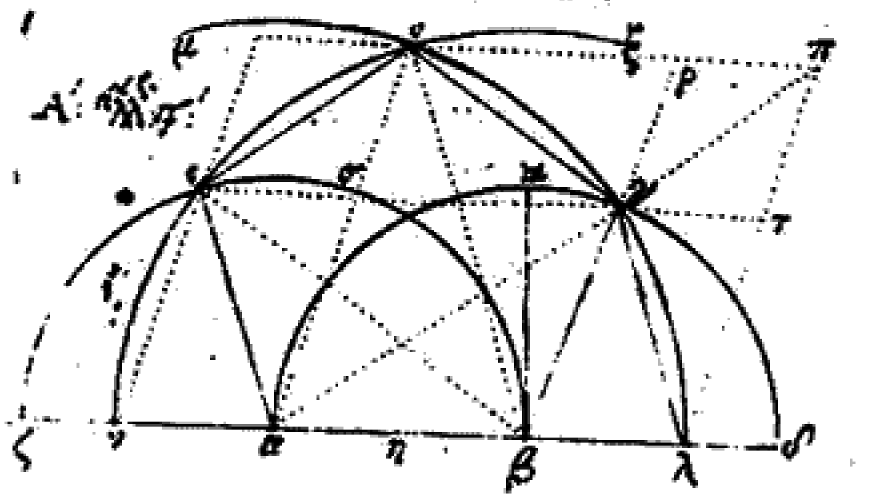
Geom. Lib. 5. Fig. 3.

Ἄλλως. Ἐκβεβλήσθω ἡ α β, ἐφ᾽ ἑκάτερα κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως, καὶ κέντροις μὲν τοῖς α, καὶ β, διαστήματι δὲ τῷ α β, ἡμικύκλια γραφήτωσαν τὰ α γ δ, β ε ζ. τμηθείσης δὲ τῆς α β, δίχα κατὰ τὸ η, ἀνεστάσθω κάθετος ἐπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἡ β κ, τέμνουσα τὸ α γ δ, ἡμικύκλιον κατὰ τὸ κ, καὶ τὸ η κ, διάστημα μετενεχθήτω ἀπὸ τοῦ η, ἐπὶ τὸ λ, καὶ ν, καὶ κέντροις μὲν τοῖς α, καὶ β, διαστήματι δὲ τῷ α λ, ἢ β ν, τόξα γραφήτωσαν τὰ λ γ μ, ν ε ξ, τεμνόμενα μὲν κατὰ τὸ ο, τέμνοντα δὲ τὰ α γ δ, β ε ζ, ἡμικύκλια κατὰ τὰ γ, καὶ ε, σημεῖα, εἶτα ἐπιζεύχθωσαν αἱ β γ, γ ο, ο ε, ε α, εὐθεῖαι, καὶ τὸ α β γ ο ε, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ο, σημείου ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ α λ, ἡ ο π, εὐθεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α ο, λ π, λ γ, γ α, β ο, ν ε, ἤχθω δὲ καὶ ἡ β γ, τέμνουσα τὴν ο π, κατὰ τὸ ρ. καὶ ἐπεὶ αἱ ο π, α λ, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι, πάντως γε κατὰ τὴν λ γ΄: τοῦ α΄: Εὐκλείδου, καὶ αἱ α ο, λ π, ὁμοίως ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν, ἀλλ᾽ αἱ α λ, α ο, ἴσαι εἰσὶν ὡς ἀφ᾽ ἑνὸς κέντρου, τὸ α π, ἄρα παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστίν. ὥστε κατὰ τὴν η΄: τοῦ αὐτοῦ, ἐπεὶ τὰ ο α π,

λ α π,

λαπ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς οα, απ, ἴσας ταῖς δυσὶ λα, απ, καὶ τὴν βάσιν οπ, τῇ λπ, βάσει ἴσην, πάντως γε καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ οαπ, ἴσην ἔχει τῇ ὑπὸ λαπ, καὶ κατὰ τὴν δ΄: τοῦ αὐτοῦ ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ λγ, γο, εὐθεῖαι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ νε, τῇ εο, ἴση, ἀλλ' αἱ εο, ογ, ἴσαι εἰσὶν ὡς ῥηθήσεται, ἄρα καὶ αἱ λγ, νε, ὁμοίως ἴσαι εἰσίν. Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ αε, τῇ βγ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ αν, τῇ βλ, πάντως γε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ νεα, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βγλ, ἡ δὲ ὑπὸ ενα, τῇ ὑπὸ γβλ, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ γβλ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ γτλ, κατὰ τὴν λδ΄: τοῦ α΄: Εὐκλείδου, ἄρα ἡ ὑπὸ γτλ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ενα, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν πρότ: τὸ ενλτ, παραλληλόγραμμόν ἐστιν, ὥστε ἡ ετ, εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ νλ, ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἴσων στ, αλ, ἐναπολείπονται ἴσαι αἱ σε, αν, ἀλλὰ τῇ αν, ἴση ἐστὶν ἡ βλ, ἄρα καὶ ἡ σε, ἴση ἐστὶ τῇ βλ, προστιθεμένων δὲ τῶν ἴσων αβ, σγ, ἔσται καὶ ἡ εγ, ἴση τῇ αλ, ἀλλὰ καὶ παράλληλος, ἄρα καὶ ἡ γλ, ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι τῇ εα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λγ΄: τῇ δὲ γλ, ἴση δέδεικται ἡ γο, ἄρα αἱ γο, αε, ἴσαι εἰσίν. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἡ εο, ἴση τῇ βγ, ἐπεὶ δὲ αἱ αε, βγ, ἴσαι εἰσὶ διὰ τὸ ἑκατέραν εἶναι ἴσην τῇ αβ, τὸ αβγοε, ἄρα πεντάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστιν, ἑπομένως δὲ καὶ ἰσογώνιον. αἱ γὰρ αο, αγ, βο, βε, ἴσαι εἰσὶν ὡς ἡμιδιάμετροι ἴσων κύκλων. Καὶ ἐπεὶ πάλιν δι' αὐτὸ τοῦτο ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ αε, αβ, ταῖς αβ, βγ, πάντως γε καὶ αἱ ὑπὸ εαβ, αβγ, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ αε, εο, ἴσαι εἰσὶ ταῖς αε, αβ, ἴση δήπουθέν ἐστι καὶ ἡ ὑπὸ αεο, γωνία τῇ ὑπὸ εαβ, διὰ τὸ καὶ τὰς βάσεις αο, βε, ἴσας εἶναι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, καὶ ἡ ὑπὸ βγο, ἴση τῇ ὑπὸ αβγ, ὥστε αἱ τέσσαρες τοῦ πενταγώνου γωνίαι αἱ ὑπὸ οεα, εαβ, αβγ, βγο, ἴσαι εἰσίν. Ὅτι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εογ, δειχθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον ἴση τῇ ὑπὸ αεο, ἢ βγο, δῆλον, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγοε, πεντάγωνον, δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον: Ἐπὶ τῆς αβ, ἄρα δοθείσης, καὶ τὰ ἑξῆς.

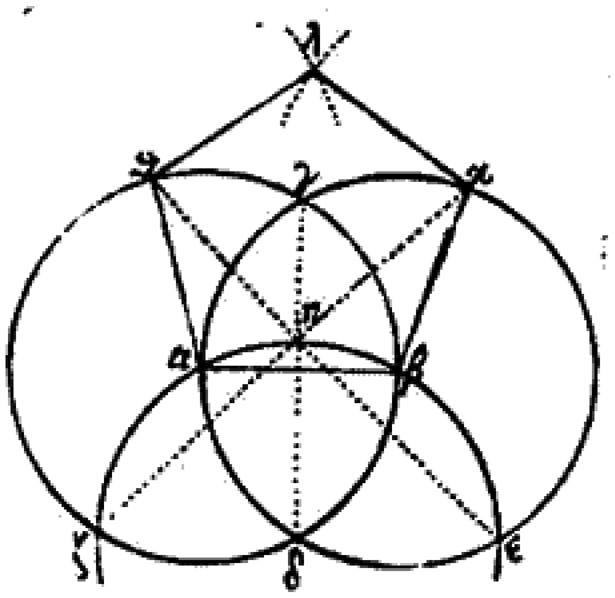
Geom. Lib. 5. Fig. 4.



Ὅτι δὲ αἱ εσ, σγ, ἴσαι εἰσὶν οὐ χαλεπὸν καὶ τοῦτο δεῖξαι. αἱ δύο γὰρ εα, ασ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δυσὶ γβ, βσ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ εασ, τῇ ὑπὸ γβσ, ἴση, ὥστε καὶ ἡ εσ, εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ σγ, κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α΄: Εὐκλείδου.

Ἄλλως. Κέντροις μὲν τοῖς α, καὶ β, ὡς πρότερον, διαστήματι δὲ τῷ αβ, γραφήτωσαν δύο κύκλοι τεμνόμενοι κατὰ τὰ γ, καὶ δ, κέντρῳ δ' αὖθις τῷ δ, καὶ διαστήματι τῷ δα, ἢ δβ, γραφήτω τόξον τέμνον τοὺς προτέρους δύο κύκλους κατὰ τὰ ε, καὶ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ, τέμνουσα τὸ εβαζ, τόξον κατὰ τὸ η. Εἶτα διὰ τοῦ η, σημείω διήχθωσαν αἱ ε η θ, ζ η κ, εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς κύκλους κατὰ τὰ θ, καὶ κ, σημεῖα, ἀφ' ὧν ὡς ἀπὸ κέντρων διαστήματι τῷ α β, ἐκτὸς τῶν κύκλων γραφήτω τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ λ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α θ, θ λ, λ κ, κ β, καὶ τὸ α β κ λ θ, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἔσαι καὶ ἰσογώνιον. Ο῎τι μὲν γὰρ ἰσόπλευρον ἐκ τῆς κατασκευῆς, δῆλον. ἑκατέρα γὰρ τῶν μὲν α θ, β κ, ἴση ἐςὶ τῇ α β, ὡς ἀφ' ἑνὸς κέντρου, τῶν δὲ θ λ, κ λ, ὡς τὸ αὐτὸ ἐχουσῶν διάστημα. ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, οὐ χαλεπὸν δεῖξαι διὰ τῶν εὐθειῶν. αἱ γὰρ α κ, α λ, β θ, β λ, θ κ, εὐθεῖαι, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν, ἴσαι ἔσονται κατὰ τὰ προειρημένα, κατὰ δὲ τὴν η': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ ὑπὸ α β κ, β κ λ, καὶ λοιπαὶ γωνίαι ἴσαι ἔσονται. Ε'πὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συνέςη, ὅπερ ἦν τὸ ἐξ ἀρχῆς προβληθέν.

Geom. Lib. 5. Fig. 5.

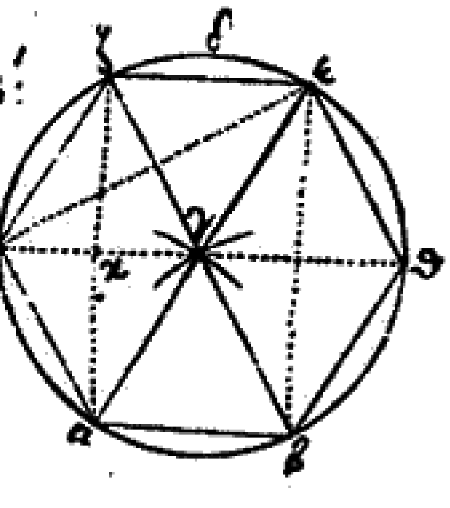


Πρότασις Β':

Ε'πὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συςήσασθαι.

Δοθήτω ἡ α β, καὶ ζητηθήτω συςαθῆναι ἐπ' αὐτῆς ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Συνεςάθω δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης α β, τρίγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ α β γ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ γ α, ἢ γ β, γραφήτω κύκλος ὁ α β δ. εἶτα ἐκβληθήτωσαν αἱ α γ, β γ, ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχὲς τέμνουσαι τὸν α β δ, κύκλον κατὰ τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, καὶ διαιρεθήτω ἑκάτερον τῶν α ζ, β ε, τόξων δίχα κατὰ τὰ η, καὶ θ, εἶτα ἐπιζεύχθωσαν αἱ β θ, θ ε, ε ζ, ζ η, η α, καὶ τὸ α β θ ε ζ η, ἑξαγώνον ἰσόπλευρόν τε ἔσαι καὶ

B:



ἰσογώνιον. Ε'πιζεύχθωσαν γὰρ αἱ γ η, γ θ, α ζ, β ε· καὶ ἐπεὶ αἱ α γ, γ β, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ζ γ, γ ε, καὶ ἡ ὑπὸ α γ β, γωνία τῇ ὑπὸ ζ γ ε, ἴση, πάντως γε καὶ ἡ α β, βάσις ἴση ἐςὶ τῇ ζ ε, καὶ τὸ α γ β, τρίγωνον ἴσον τῷ γ ζ ε, ἀλλὰ τὸ α γ β, ἰσόπλευρόν ἐςι κατὰ τὴν κατασκευήν, ἄρα καὶ τὸ ζ γ ε, ὁμοίως ἰσόπλευρόν ἐςι, τὰ δὲ ἰσόπλευρα καὶ ἰσογώνια, ἔςιν ἄρα ἡ ὑπὸ β α γ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ζ ε γ, ὥστε κατὰ τὴν κζ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ α β, ζ ε, εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν, ἀλλὰ καὶ ἴσαι, ἄρα κατὰ τὴν λγ': τοῦ αὐτοῦ καὶ αἱ ζ α, ε β, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν, ὥστε καὶ αἱ ζ η α, ε θ β, περιφέρειαι ἴσαι εἰσίν. Ε'πεὶ δὲ ἑκα-

τέρα

τέρα τούτων δίχα τέτμηται, αἱ τέσσαρες ἄρα ὑποτείνουσαι α η, η ζ, ε θ, θ β, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ α γ, γ η, ἴσαι εἰσὶ ταῖς η γ, γ ζ, ἔστι δὲ καὶ βάσις ἡ α η, βάσει τῇ η ζ, ἴση, πάντως γε καὶ ἡ ὑπὸ α γ η, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ η γ ζ, ἐστὶ κατὰ τὴν η': τοῦ αὐτοῦ, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ α γ, γ ζ, ἴσαι, ἄρα κατὰ μετὰ τὴν δ': τοῦ αὐτοῦ ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ α κ, κ ζ, κατὰ δὲ τὴν γ': τοῦ γ': ἡ α ζ, πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς γ η, ὥστε ἡ ὑπὸ γ κ α, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἔστι δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ κ α β, κατὰ τὴν λα': τοῦ αὐτοῦ, αἱ α κ γ, ἄρα, κ α β, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ κατὰ τὴν κη': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, αἱ η γ, α β, παράλληλοί εἰσι, καὶ ἑπομένως αἱ η γ α, γ α β, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ γ α β, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ α γ β, ἰσογώνιον γὰρ τὸ α γ β, τρίγωνον, ἄρα αἱ η γ α, α γ β, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δ' ἔτι καὶ αἱ η γ, γ α, εὐθεῖαι ταῖς α γ, γ β, ἴσαι, πάντως γε καὶ αἱ α β, α η, ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ τῇ μετὰ α η, ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν η ζ, ε θ, θ β, ὡς δέδεικται, τῇ δὲ α β, ἡ ε ζ. αἱ πᾶσαι ἄρα α β, β θ, θ ε, ε ζ, ζ η, η α, πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ἑξάγωνον ἰσόπλευρον, ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον δῆλον. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς η ε, εὐχερῶς δειχθήσεται ἡ ὑπὸ α η ζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ η ζ ε, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς α η, η ζ, ταῖς η ζ, ζ ε, καὶ τὴν α ζ, τῇ η ε. Ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ δύο ἴσαι ἀλλήλαις, τῷ μὴ παντάπασιν ἀπείρῳ ὄντι τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Ἄλλως. Τοῦ α β γ, τριγώνου συσταθέντος ὡς πρότερον, καὶ τοῦ α β δ, γεγραμμένου κύκλου, μετενεχθήτω τὸ α β, διάστημα ἐπὶ τὰ θ, ε, ζ, η, σημεῖα, καὶ διαιρεθήσεται ὁ κύκλος εἰς μέρη ἓξ ἴσα ἀλλήλοις. Ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν β θ, θ ε, καὶ λοιπῶν ὑποτεινουσῶν, συσταθήσεται ἐπὶ τῆς α β, τὸ α β θ ε ζ η, ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ὂν καὶ ἰσογώνιον κατὰ τὴν ιε': τοῦ δ': τοῦ Εὐκλείδου.

Πρότασις Γ':

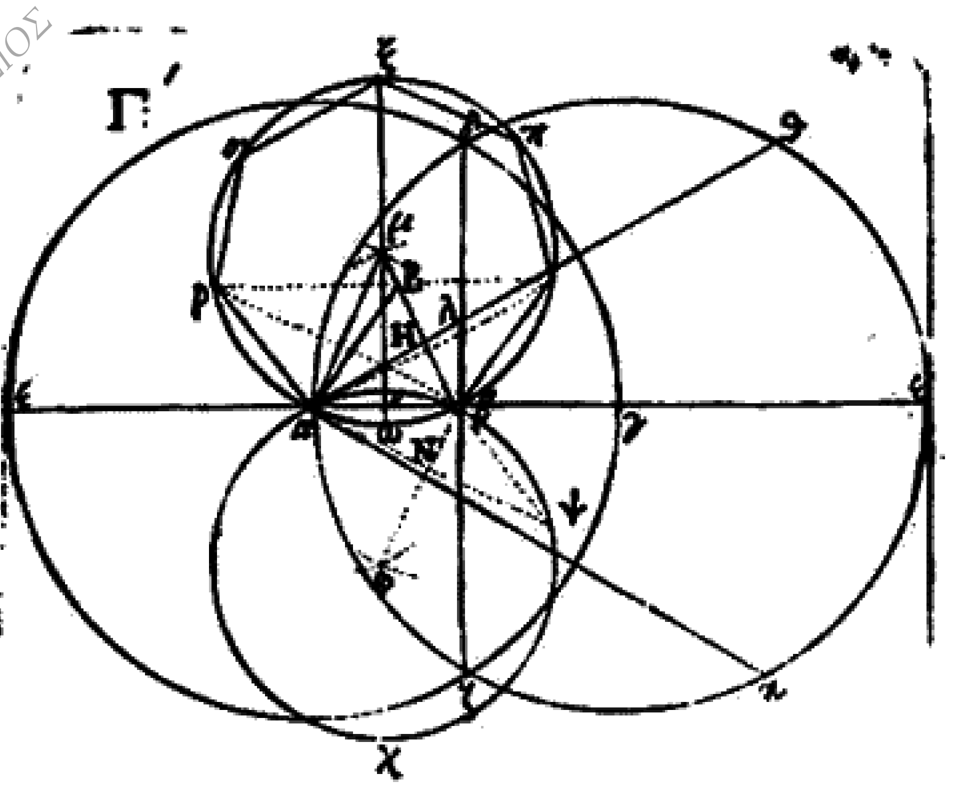
Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἑπτάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Δοθήτω εὐθεῖα ἡ α β, καὶ ζητηθήτω ἐπ' αὐτῆς συσταθῆναι ἑπτάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἤχθω δὴ ἡ α β, κατὰ τὸ γ, ὥστε τὴν β γ, ἴσην εἶναι τῇ α β, καὶ κέντροις μετὰ τοῖς α, καὶ γ, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ α γ, γραφήτωσαν κύκλοι οἱ α δ ε ζ, καὶ γ δ ε ζ, τεμνόμενοι κατὰ τὰ δ, καὶ ζ, σημεῖα, ἀπὸ δὲ τῶν δ, καὶ ζ, κοινῶν τομῶν τμηθήτω ὁ α δ ε ζ, κύκλος τῷ α γ, διαστήματι κατὰ τὰ θ, καὶ κ, σημεῖα, καὶ ἀχθήτωσαν αἱ α θ, α κ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ β δ, τέμνουσα τὴν α θ, κατὰ τὸ λ, εἶτα κέντροις μετὰ τοῖς α β, διαστήματι δὲ τῷ δ λ, γραφήτωσαν τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ μ, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου γραφήτω κύκλος, ὁ α β ξ, ἀπὸ δὲ τοῦ μ, πιπτέτω κάθετος ἡ μ ν, εὐθεῖα ἐπὶ τῆς α β, καὶ τμηθήσεται ἡ α β, δίχα κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ἐξαχθήτω δὲ ἀπὸ τοῦ μ, ἡ ν μ, εὐθεῖα κατὰ τὸ

σιω.

συνεχὲς, ὥςε τέμνειν τὴν τῆ αβξ, κύκλυ περιφέρειαν κατὰ τὸ ξ, ἑκάτερον δὲ τῶν τόξων αξ, βξ, τμηθήτω εἰς τρία ἴσα τὰ βο, οπ, πξ, αρ, ρσ, σξ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ βο, οπ, καὶ λοιπαὶ ὑποτείνεσαι, καὶ τὸ αβοπξσρ, ἑπτάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἔςαι καὶ ἰσογώνιον. Γραφήτωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν α, καὶ β, σημείων τῷ δλ, διαςήματι καὶ ἕτερα τόξα ἐπὶ θάτερα τὰ μέρη τεμνόμενα κατὰ τὸ φ, ἀφ' ἦ ὡς ἀπὸ κέντρυ γραφήτω καὶ ἕτερος κύκλος ὁ αβχ, ἴσος τῷ αβξ, καὶ ἐφαρμοσθήτω ἡ βο, ἐπὶ τὸ βψ. Εἶτα ἐπιζεύχθωσαν αἱ αο, αψ, ἐφ' ὧν πιπτέτωσαν κάθετοι ἀπὸ τῶν μφ, κέντρων αἱ μΗ, φΝ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ Ηβ, Νβ, ἀπὸ δὲ τῆ ο, ἤχθω παράλληλος τῇ αβ, ἡ ορ, τέμνεσα τὴν μΗ, κατὰ τὸ Β, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ αΒ, Δείκνυται.

Geom. Lib. 3. Fig. 6.



Ἐπεὶ ἦν ἐπὶ τῆς αο, πέπτωκε πρὸς ὀρθὰς ἡ διὰ τῆ κέντρυ μΗ, πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν γ': αἱ αΗ, Ηο, ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αΗμ, γωνιῶν ὀρθή. ὥςε κατὰ τὴν δ': τοῦ ά: τῆ αὐτῆ, καὶ ἡ αΒ, ἴση ἐςὶ τῇ Βο, ὡς δειχθήσεται, ἄρα καὶ ἡ Βο, ἴση ἐςὶ τῇ αβ, τῇ δὲ οΒ, ἴση ἐςὶν ἡ αβ, ἡ αβ, ἄρα ἴση ἐςὶ τῇ βο, ἀλλὰ τῇ βο, ἴση ἐςὶν ἑκάςη τῶν οπ, πξ, ξσ, σρ, ρα, ὡς ὁ ψόμεθα, τὸ αβοπξσρ, ἄρα ἑπτάγωνον ἰσόπλευρόν ἐςιν. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, δῆλον. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς βρ, ἀκριβῶς δειχθήσεται ἡ ὑπὸ αβο, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ βαρ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς αβ, βο, ταῖς βα, αρ, καὶ τὴν αο, τῇ βρ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσονται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἴσαι, ὥςε καὶ ἰσογώνιον, δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον, ἐπὶ τῆς αβ, ἄρα δοθείσης εὐθείας συνέςη ἑπτάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον κατὰ τὸ προςαχθέν. Λείπεται δὲ δεῖξαι, ὅτι τῇ βο, εὐθείᾳ ἴση ἐςὶν ἥτε αΒ, καὶ ἑκάςη τῶν οπ, πξ, καὶ λοιπῶν.

Ὅτι μὲν ἦν ἡ αΒ, ἴση ἐςὶ τῇ βο, ἐχαλεπὸν συναγαγεῖν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ Βο, παράλληλος ἤχθη τῇ αβ, πάντως γε κατὰ τὴν κθ': τῆ ά: τῆ Στοιχειωτῆ αἱ τε ὑπὸ Βοα, βαο, γωνίαι, καὶ αἱ ὑπὸ βΒο, Ββα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὥςε καὶ ἡ λοιπὴ ΒΗο, τῇ λοιπῇ βΗα, ἴση ὁμοίως ἐςὶν, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ΒΗο, ἴση ἐςὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗα, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗα, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ βΗα, τῇ δὲ ὑπὸ ΒοΗ, ἴση ἐςὶ καὶ ἡ ὑπὸ βαΗ, ἄρα τῇ ὑπὸ ΒαΗ, ἴση ἐςὶν ἡ ὑπὸ βαΗ, ὥςε τῶν ΒαΗ, Ηαβ, τριγώνων καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ αΒΗ, Ηβα ἴσαι εἰσίν.

καὶ

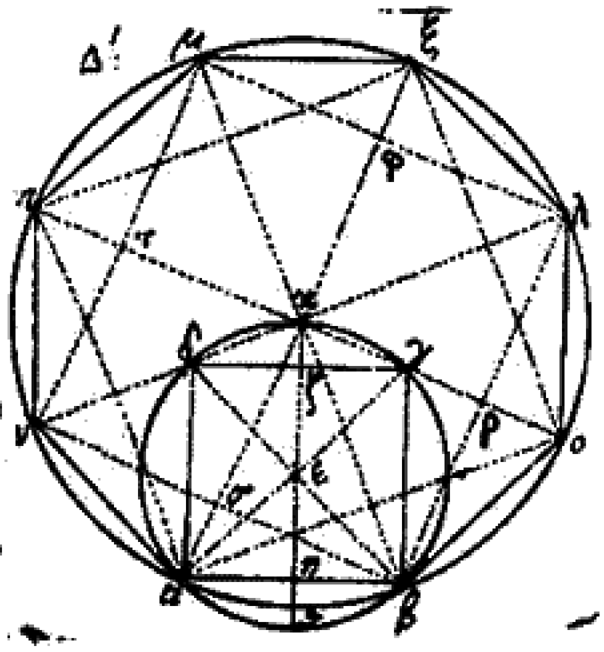
καὶ ἑπομένως αἱ Βα, αβ, πλευραὶ ἴσαι ὡσαύτως εἰσὶ, τῇ δὲ αΒ, ἴση δέδεικται ἡ Βο, ἄρα τῇ Βο, ἴση ἐστὶν ἡ αβ, καὶ κατὰ τὴν λγ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ ἴση ἐστὶν ἔτι καὶ ἡ αΒ, τῇ βο, ὅπερ ἦν τὸ α.

Ὅτι δὲ τῇ αὐτῇ βο, ἴση ἐστὶ καὶ ἑκάστη τῶν οπ, πξ, καὶ λοιπῶν εὐθειῶν, δῆλον, ἡ γὰρ ξω, διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται διὰ τὸ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνειν τὴν αβ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ὥστε τὰ ξρω, καὶ ξοω, τόξα ἴσα ἐστὶν, ἑκάτερον γὰρ ἡμικύκλιον. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ αω, βω, ἴσα διὰ τὸ καὶ τὰς αω, βω, ὑποτεινούσας αὐτῶν ἴσας εἶναι, ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν αω, βω, ἴσων τόξων, ἐγκαταλείπονται τὰ ξρα, ξοβ, τόξα ἴσα, ἀλλ' ἑκάτερον τούτων τέτμηται εἰς τρία ἴσα τὰ βο, οπ, πξ, αρ, ρσ, σξ, ἄρα καὶ τὰ μέρη τοῖς μέρεσιν, ὥσπερ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ἑπομένως δὲ καὶ αἱ τούτων ὑποτείνουσαι αἱ αρ, ρσ, σξ, ξπ, πο, οβ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἐπεὶ δὲ τῇ βο, δέδεικται ἴση ἡ αΒ, ταύτῃ δὲ ἡ αβ, πάντως γε ἡ αβ, ἴση ἐστὶ τῇ βο, τῇ δὲ βο, δέδεικται ἴση ἑκάστη τῶν οπ, πξ, καὶ λοιπῶν, ἄρα καὶ ἡ αβ, ἴση ἐστὶν ἑκάστῃ τῶν οπ, πξ, καὶ λοιπῶν εὐθειῶν. ὅπερ ἦν τὸ β'.

Πρότασις Δ':

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ὀκτάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Geom. Lib. 5. Fig. 7.



Δοθήτω ἡ αβ, καὶ ἔστω συσταθῆναι ἐπ' αὐτῆς ὀκτάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Συσταθήτω δὴ α': ἐπὶ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αβγδ, καὶ ἤχθωσαν αἱ αγ, βδ, διάμετροι τοῦ τετραγώνου, τεμνόμεναι κατὰ τὸ ε, ἀφ' οὗ γραφήτω κύκλος ὁ αβγδ. Εἶτα τμηθήτω ἑκατέρα τῶν αβ, δγ, δίχα κατὰ τὰ ζ, καὶ η, σημεῖα, καὶ διὰ τῶν ζ, η, σημείων διήχθω ἡ θκ, διάμετρος τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ κ, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ κα, ἢ κβ, γραφήτω ὁ αβλμν, κύκλος, καὶ διὰ τῶν ακ, καὶ βκ, διήχθωσαν αἱ ακξ, βκμ, διὰ δὲ τῶν γκ, καὶ δκ, αἱ νδκλ, καὶ ογκπ, εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βο, ολ, λξ, ξμ, μπ, πν, να, καὶ τὸ αβολξμπν, ὀκτάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βν, μν, λμ, βλ. καὶ ἐπεὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ βλμ, λμν, μνβ, νβλ, γωνιῶν, ὀρθή ἐστιν, ὡς ἐν ἡμικυκλίῳ κατὰ τὴν λα': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, δήπουθεν αἱ βλ, λμ, μν, νβ, πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ κατὰ τὴν γ': τοῦ αὐτοῦ δίχα τέμνονται καὶ πρὸς ὀρθὰς ὑπὸ τῶν αξ, οπ. αἱ βρ, ἄρα ρλ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βρο, λρο, γωνιῶν ὀρθή, ὥστε κοινῆς λαμβανομένης τῆς ρο, ἔσονται καὶ αἱ βο, ολ, ἴσαι

κατὰ

κατὰ τὴν δʹ: τοῦ αʹ: τοῦ αὐτοῦ. αὖθις ἐπεὶ αἱ βλ, βν, ἴσαι εἰσὶν ὡς δέδεικται, καὶ ἑκατέρα δίχα τέτμηται, πάντως γε αἱ βρ, βσ, ἴσαι ὁμοίως εἰσὶν, ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ κα, κο, εἰσὶν ἴσαι, τῇ δὲ κρ, ἴση ἐστὶν ἡ κσ, ὡς δειχθήσεται, ἄρα καὶ αἱ ρο, σα, ἴσαι ὡσαύτως εἰσίν. αἱ δύο δὴ βρ, ρο, δυσὶ ταῖς βσ, σα, ἴσαι εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βρο, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ βσα, ἑκατέρα γὰρ ὀρθὴ ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ αἱ βο, βα, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δʹ: Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ αβολξμπν, ὀκτάγωνον. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, εὐχερῶς δειχθήσεται, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς βλ, λμ, μν, νβ, αο, οξ, ξπ, πα. Ὅτι δ' ἔτι καὶ αἱ κρ, κσ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶ, δῆλον. αἱ γὰρ ρτ, σφ, ἴσαι εἰσὶ διὰ τὸ πρὸς ὀρθὰς τέμνεσθαι, καὶ παραλλήλους εἶναι τὴν μὲν τῇ βν, τὴν δὲ τῇ βλ. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας ὀκτάγωνον καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Εʹ:

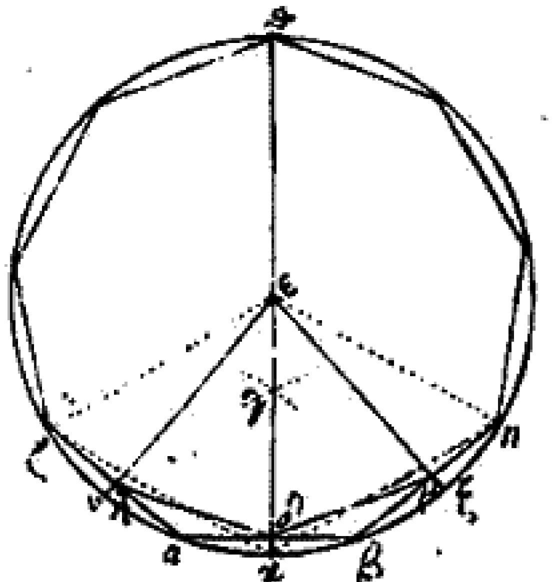
Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἐννεάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

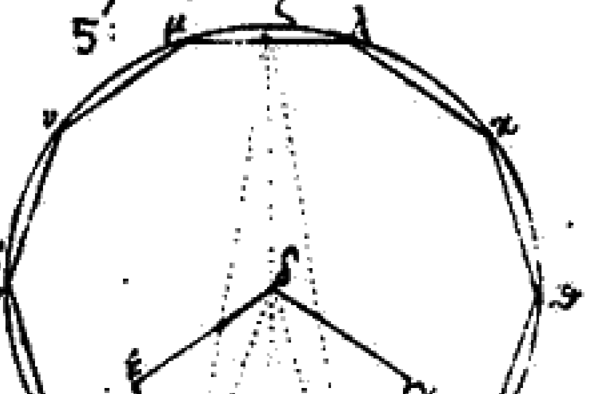
Δοθήτω ἡ αβ, εὐθεῖα, καὶ ζητείσθω συστήσασθαι ἐπ' αὐτῆς ἐννεάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Κέντροις τοίνυν τοῖς α, καὶ β, διαστήματι δὲ τῷ αβ, τόξα γραφήτωσαν τεμνόμενα κατὰ τὸ γ, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ γδ, ἐκβαλλομένη ἑκατέρωθεν κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως, καὶ εἰλήφθω τὸ γε, ἴσον τῇ βδ, τῷ ἡμίσει ἀμέλει τῆς αβ, κέντρῳ δὲ τῷ ε, καὶ διαστήματι τῷ εα, ἢ εβ, γραφήτω κύκλος ὁ αβηθζ, τεμνόμενος ὑπὸ τῆς γδ, ἐκβαλλομένης κατὰ τὸ θ, καὶ κ. εἶτα εἰλήφθω τῷ αβ, τόξῳ ἑκατέρωθεν ἴσα τόξα, τό, τε αζ, καὶ βη, ἑκάτερον δὲ τῶν ζθ, ηθ, διαιρεθήτω εἰς τρία ἴσα, καὶ ἐπιζευχθήτωσαν αἱ αζ, βη, καὶ λοιπαὶ ὑποτείνουσαι, καὶ ἔσται τὸ προσταχθέν. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ζκ, κη, καὶ ζε, εη, καὶ ἐπεὶ ἡ κθ, διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται τέμνουσα τὴν αβ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου πρὸς ὀρθὰς, πάντως γε καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, καὶ ἡ αδ, ἴση ἐστὶ τῇ δβ, ὥστε καὶ τὰ ακ, κβ, τόξα ἴσα ὁμοίως ἐστὶν, εἴληπται δὲ καὶ τὰ αζ, βη, ἴσα. ἐὰν δὲ ἴσοις ἴσα προστεθῇ τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα, ἄρα καὶ τὰ ζκ, κη, τόξα ἴσα εἰσὶν, καὶ αἱ τούτων ἔτι ὑποτείνουσαι ζκ, κη, ἀλλὰ καὶ αἱ ζε, εη, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, αἱ δύο ἄρα κζ, ζε, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς κη, ηε, ἀλλὰ καὶ βάσις ἡ εκ, κοινὴ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ εζκ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εηκ, ὥστε τὸ ζκηε, παραλληλόγραμμόν ἐστι κατὰ τὴν λδʹ: τοῦ αʹ: τῶν στοιχείων, καὶ ἑπομένως ἡ ζκ, πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ εη, ταύτῃ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ εκ, ἄρα καὶ ἡ ζκ, ἴση ἐστὶ τῇ εκ, τῇ δὲ ζκ, ἴση δέδεικται ἡ κη, αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι ζκ, κε, κη, ἴσαι εἰσὶν, ὥστε ἑκατέρα τῶν ζκ, κη, ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ αβηθζ, κύκλου ἡμιδιαμέτρῳ, καὶ με-

ξεῖ

τρεῖ αὐτὸν ἑξάκις κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιε΄: τοῦ δ΄: τοῦ αὐτοῦ, τὸ ζκ, ἄρα τόξον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ αβκηθζ, κύκλου, τὸ δὲ ζκη, γ΄: ἀλλὰ τὸ ζκη, περιέχει τὴν δοθεῖσαν αβ, τρὶς, ἴση γὰρ τῇ αβ, εἴληπται ἑκατέρα τῶν αζ, βη, ὅλος ἄρα ὁ κύκλος περιέξει τὴν αβ, ἐννεάκις, ὥστε περιενεχθεῖσα ἡ αβ, ἀπὸ τοῦ η, ἑξάκις, ἀφίξεται ἐπὶ τὸ ζ, καὶ συσταθήσεται ἐννεάγωνον ἰσόπλευρον. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον δῆλον. Τμηθήτω γὰρ ἑκατέρα τῶν αζ, βη, δίχα κατὰ τὰ λ, καὶ μ, διὰ τῶν ελ, εμ, εὐθειῶν, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ λκ, κμ, καὶ ἐπεὶ αἱ κε, εν, ἴσαι εἰσὶ ταῖς κε, εξ, καὶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασι τῶν νακ, κβξ, πάντως γε καὶ αἱ ὑπὸ νεκ, κεξ, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ ελα, εμβ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ὡς ὀρθαὶ, ἐὰν ἄρα ἀφέλῃς τὰς αλδ, βμδ ἐναπολειφθήσονται αἱ ελδ, εμδ, ἴσαι, ἔστι δὲ κοινὴ ἡ εδ, ἄρα κατὰ τὴν κϛ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ καὶ ἡ λδ, ἴση ἐστὶ τῇ δμ, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ λα, αδ, ἴσαι ταῖς δβ, βμ, ἄρα κατὰ τὴν η΄: τοῦ αὐτοῦ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ λαδ, δβμ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ ἴσαι. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας ἐννεάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συνέστη.

Geom. Lib. 5. Fig. 8.





Πρότασις ϛ΄:

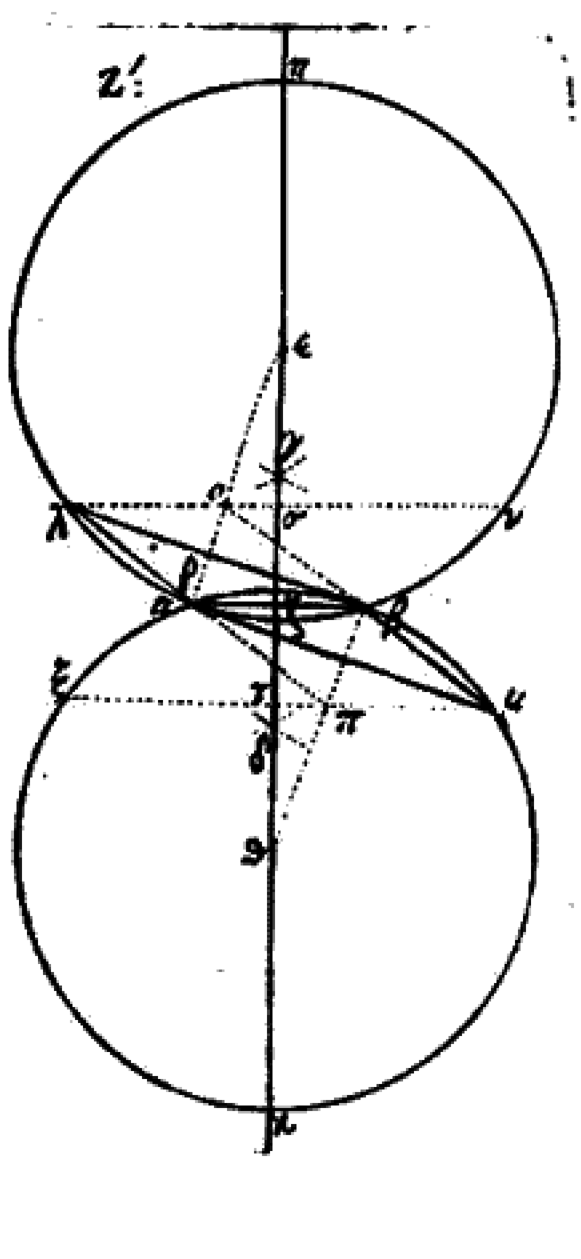
Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας δεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Δεδόσθω ἡ αβ, εὐθεῖα, ἐφ᾽ ἧς ζητηθήτω συστῆσαι δεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Συνεστάσθω δὴ α΄: ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ αβγδε, πεντάγωνον καθ᾽ ὁποιονοῦν βούλει τρόπον τῶν προεκτεθέντων περὶ κατασκευῆς πενταγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου. εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δα, ἢ δβ, γραφήτω ὁ αβζ, κύκλος, ὃν ἡ αβ, δεκάκις μεταφερομένη ἐπὶ τῆς αὐτοῦ περιφερείας, δεκάκις καταμετρήσει. Ἐπιζευγνυμένων δὲ τῶν βη, βθ, θκ, καὶ λοιπῶν εὐθειῶν, συσταθήσεται τὸ αβηθκλμνξο, δεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἰσογώνιον. Τμηθήτω γὰρ ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ π, καὶ διὰ τῶν π, καὶ δ, διήχθω ἡ πδζ, διάμετρος τοῦ αβζ, κύκλου, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ δα, δβ, ζα, ζβ. Ἐπεὶ οὖν τοῦ αβδ, τριγώνου ἑκατέρα τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν διπλασία ἐστὶ τῆς κατὰ κορυφὴν τοῦ αὐτοῦ κατὰ τὴν ι΄: τοῦ δ΄: Εὐκλείδου, δῆλον ὅτι ἡ ὑπὸ δαβ, γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδβ, ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ αδβ, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ αζβ, κατὰ τὴν κ΄: τοῦ γ΄: τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε ἡ ὑπὸ δαβ, τετραπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ αζβ. ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ αζβ, διπλασία ἐςὶ τῆς ὑπὸ δζα, ἄρα ἡ ὑπὸ δαβ, ὀκταπλασία ἐςὶ τῆς ὑπὸ δζα, προςεθείσης δὲ τῆς ὑπὸ δαζ, τῇ ὑπὸ δαβ, ὅλη ἡ ὑπὸ ζαβ, ἐννεαπλασιός ἐςι τῆς ὑπὸ δζα. ἴσαι γὰρ αἱ ὑπὸ δζα, δαζ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν δζ, δα, εὐθειῶν, τῇ δὲ ὑπὸ ζαβ, ἴση ἐςὶν ἡ ὑπὸ ζβα, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ζβα, ἐννεαπλασιός ἐςι τῆς ὑπὸ δζα. ἀλλ᾽ ὑπὸ δζα, βέβηκεν ἐπὶ τῆς ασ, περιφερείας, ἡ δὲ ὑπὸ ζβα, ἐπὶ τῆς αξζ, ἄρα καὶ ἡ αξζ, περιφέρεια ἐννεαπλάσιός ἐςι τῆς ασ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ βθζ, περιφέρεια ἐννεαπλάσιος τῆς σβ, ἴσαι γὰρ αἱ ασ, σβ, ὥςε ὅλη ἡ αξζθβ, περιφέρεια ὀκτωκαιδεκαπλασιός ἐςι τῆς ασ, τῆς δὲ ὅλης αβ, ἐννεαπλάσιος, ἡ αβ, ἄρα ὑποτείνουσα ἅπαξ μὲν τὴν ασβ, μείζουσα περιφέρειαν, ἐννεάκις δὲ τὴν αξζθβ, μείζει ὅλον τὸν κύκλον δεκάκις. Τὸ αβηθκλμνξο, τοίνυν δεκάγωνον ἰσόπλευρόν ἐςιν. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, δῆλον. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ αη, βο, εὐθεῖαι, δειχθήσονται αἱ ὑπὸ αβη, βαο, γωνίαι ἴσαι, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς αβ, βη, ταῖς βα, αο, καὶ τὴν αη, βάσιν τῇ βο. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ ἴσαι, ὥςε καὶ ἰσογώνιον. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας συνέςη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 5. Fig. 9.

Πρότασις Ζ′:

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἑνδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συςήσασθαι.



Δεδόσθω ἡ αβ, καὶ ἔςω ἐπ᾽ αὐτῆς συςήσασθαι ἑνδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Κέντροις μὲν δὴ τοῖς α, καὶ β, διαςήματι δὲ τῷ αβ, τόξα γραφήτωσαν ἑκατέρωθεν τεμνόμενα κατὰ τὰ γ, καὶ δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γδ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ ἄπειρον, καὶ τμηθήσεται ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ ζ. εἶτα εἰλήφθω τὸ γε, αὐτῆς μέρος ἴσον τῷ γζ, κέντρῳ δὲ τῷ ε, καὶ διαςήματι τῷ εα, ἢ εβ, γραφήτω κύκλος ὁ αβη, ὃν ἡ αβ, ἑνδεκάκις δήπουθεν καταμετρήσει. εἰλήφθω γὰρ καὶ ἡ δθ, ἴση τῇ δζ, ἢ γζ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαςήματι δὲ τῷ θβ, ἢ θα, γραφήτω κύκλος ὁ αβκ, καὶ ἔςαι ἴσος τῷ αβη. Ἐπεὶ δὲ ἐν οἱῳδήποτε κύκλῳ δυνατὸν οἱονδήποτε γραφῆναι πολύγωνον, ὑποκείσθω τὴν αλ, εὐθεῖαν, πλευρὰν εἶναι τοῦ ἐν τῷ αβη, ἐγγραφομένου ἑνδεκαγώνου, καὶ ταύτῃ ἴση εἰλήφθω

ἡ βμ,

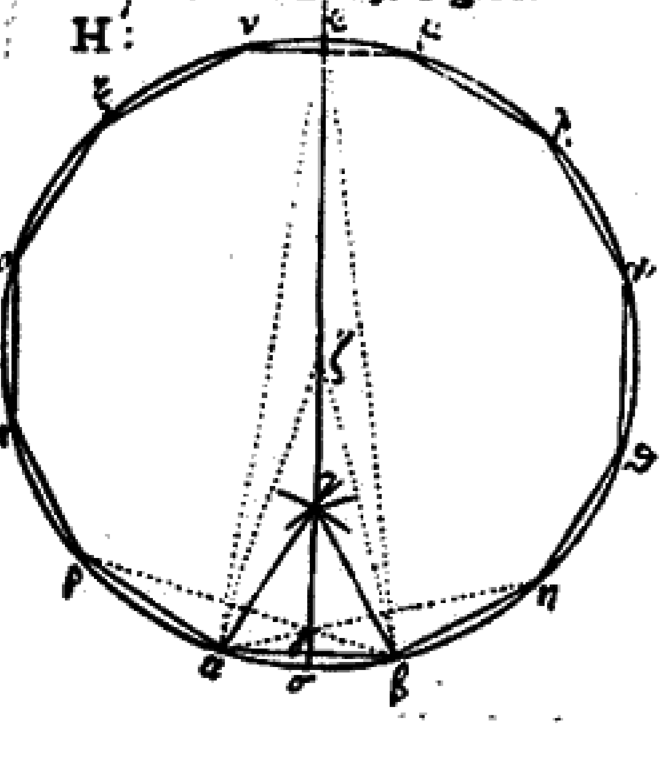
ἡ βμ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αμ, βλ, αι, βθ. τῇ δὲ αβ, ἀπό τε τοῦ μ, καὶ λ, ἤχθω παράλληλος ἑκατέρα τῶν λν, μξ, τέμνουσαι τὰς αι, βθ, κατὰ τὰ ο, καὶ π, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βο, απ. Δείκνυται. ἐπεὶ αἱ λα, βμ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, κοινὴ δὲ ἡ αβ, πάντως γε αἱ λαβ, αβμ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσίν, ὥστε καὶ αἱ ταύτας ὑποτείνουσαι λβ, αμ, ὡσαύτως ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ λαβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβμ, ἴση, καὶ ἑπομένως αἱ λα, βμ, παράλληλοί εἰσιν, ἀλλὰ καὶ ἴσαι, αἱ αλ, ἄρα, βμ, ὁμοίως ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν λγ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Αὖθις ἐπεὶ αἱ αι, βθ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ὡς ἡμιδιάμετροι ἴσων κύκλων, καὶ ἡ ιζ, τῇ ζθ, ἴση, ἔστι δ᾽ ἔτι καὶ βάσις ἡ αζ, βάσει τῇ ζβ, ἴση κατὰ τὴν γ΄: τοῦ γ΄: τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ αιζ, βθζ, ἴσαι εἰσίν, αἱ δὲ αι, βθ, παράλληλοι κατὰ τὴν κζ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ. Ἐπεὶ δὲ πάλιν εἰς τὰς αβ, ξμ, πέπτωκεν ἡ αμ, εἰς δὲ τὰς αβ, λν, ἡ λβ, πάντως γε αἱ ὑπὸ βαμ, αμπ, ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ τῇ μὲν ὑπὸ βαμ, ἴση ἐστὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ὑπὸ αβλ, ταύτῃ δὲ ἡ ὑπὸ βλο, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αμπ, βλο, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αλβ, βμα, ἴσαι, ἡ ὅλη ἄρα αλο, ὅλῃ τῇ βμπ, ἴση ἐστίν. ἀλλ᾽ ἡ μὲν αλ, ἴση ἐστὶ τῇ βμ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἡ δὲ λο, τῇ μπ, ὡς ὀψόμεθα, κατὰ τὴν δ΄: ἄρα τοῦ αὐτοῦ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ αο, βάσις τῇ βπ, καὶ τὸ αλο, τρίγωνον ἴσον τῷ βπμ· ἀλλ᾽ ἡ αο, δέδεικται καὶ παράλληλος τῇ βπ, κατὰ τὴν λγ΄: ἄρα, τοῦ αὐτοῦ, αἱ οβ, απ, εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αοβ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ απβ, κατὰ τὴν λδ΄: τοῦ αὐτοῦ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αολ, ἴση τῇ ὑπὸ βπμ, διὰ τὴν τῶν τριγώνων ἰσότητά τε καὶ ὁμοιότητα, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ βολ, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ απμ, ὥστε τὸ λπμο, σχῆμα, ἐπεὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, παραλληλόγραμμον δήπουθέν ἐστι κατὰ τὴν αὐτὴν λδ΄: καὶ ἑπομένως ἡ αλ, παράλληλός ἐστι τῇ βο, εἴληπται δὲ καὶ ἡ λο, παράλληλος τῇ αβ, ἄρα τὸ αλοβ, παραλληλόγραμμόν ἐστι, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λδ΄: ἡ αλ, ἴση ἐστὶ τῇ βο, ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ αρλ, ἴση τῇ ὑπὸ βρο, κατὰ κορυφὴν γάρ, ἡ δὲ ὑπὸ αλβ, τῇ ὑπὸ οβλ, ἐναλλὰξ γάρ, κατὰ τὴν κϛ΄: ἄρα τοῦ αὐτοῦ ἡ λρ, ἴση ἐστὶ τῇ ρβ, κατὰ δὲ τὴν γ΄: τοῦ γ΄: πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς αι, καὶ ἡ ὑπὸ αρλ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αρβ, δέδεικται δὲ καὶ ἡ λρ, τῇ ρβ, ἴση, κοινῆς ἄρα λαμβανομένης τῆς αρ, ἔσται καὶ ἡ αλ, βάσις τῇ αβ, βάσει ἴση κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ. ἀλλ᾽ ἡ αλ, ὑπετέθη πλευρὰ ἐνδεκαγώνου τοῦ δυναμένου ἐγγραφῆναι ἐν τῷ αβη, κύκλῳ, ἄρα καὶ ἡ αβ, ἐνδεκάκις δύναται τὸν αὐτὸν καταμετρεῖν κύκλον, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὅτι δὲ καὶ ἡ λο, τῇ πμ, ἴση ἐστί, δῆλον. αἱ γὰρ λσ, μτ, ἴσαι εἰσὶ διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς λν, ξμ, καὶ δίχα τέμνεσθαι ὑπὸ τῆς ιθ. Ἐπεὶ δ᾽ ἑκατέρα τῶν λν, ξμ, παράλληλος εἴληπται τῇ αβ, καὶ ἴσον ταύτης ἀφίστανται, αἱ αι, βθ, πάντως ἀναλόγως τέμνονται κατὰ τὴν β΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ αὐτοῦ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ια, πρὸς τὴν βθ, ἡ ιο, πρὸς τὴν θπ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ισ, ἴση τῇ θτ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α ε σ, τῇ ὑπὸ π θ τ, ἴση, κατὰ τὴν δ′: ἄρα τοῦ α′: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἡ ο σ, ἴση ἐστὶ τῇ π τ, ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἴσων ο σ, π τ, ἀπὸ τῶν ἴσων λ σ, μ τ, ἐγκαταλείπονται ἴσαι αἱ λ ο, π μ. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Η′:

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας δωδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Δεδόσθω εὐθεῖα ἡ α β, καὶ ζητηθήτω ἐπ' αὐτῆς συστήσασθαι δωδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Συνεστάθω δὴ ἐπὶ τῆς α β, τὸ α β γ, τρίγωνον ἰσόπλευρον, τῆς δὲ α β, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ δ, ἤχθω διὰ τῶν δ, καὶ γ, σημείων ἡ δ γ ε, κατὰ τὸ συνεχές, τῇ δὲ α γ, εἰλήφθω ἴση ἡ γ ζ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζ α, γραφήτω κύκλος ὁ α β ε, καὶ ἡ α β, εὐθεῖα δωδεκάκις αὐτὸν καταμετρήσει κατὰ τὰ η θ κ λ, καὶ λοιπὰ σημεῖα, ὥστε τὸ α β η θ κ λ μ ν ξ ο π ρ, δωδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἔσται. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ γ α, γ β, ζ α, ζ β, ε α, ε β. καὶ ἐπεὶ ἡ α β, μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς δ ε, τῆς διὰ τοῦ κέντρου, πάντως γε κατὰ τὴν γ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἡ δ ε, κάθετός ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, καὶ κατὰ τὴν δ′: τοῦ α′: τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ α γ δ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β γ δ, ἡ ὅλη ἄρα α γ β, τῆς ὑπὸ α γ δ, διπλασία ἐστὶν, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ α γ β, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ γ α β, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ γ α β, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ α γ δ, ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ α γ δ, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ γ ζ α, ἴση γὰρ ταῖς δυσὶ γ ζ α, γ α ζ, κατὰ τὴν λ β′: τοῦ αὐτοῦ, αὗται δὲ ἴσαι ἀλλήλαις, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς γ α, γ ζ, πάντως γε ἡ ὑπὸ γ α β, τετραπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ γ ζ α, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ γ ζ α, διὰ τὰ αὐτὰ διπλασία τῆς ὑπὸ ζ ε α, ἄρα ἡ ὑπὸ γ α δ, ὀκταπλασιός ἐστι τῆς ὑπὸ ζ ε α, προστιθεμένης δὲ τῆς ὑπὸ γ α ζ, διπλασίας οὔσης τῆς ὑπὸ ζ ε α, ἡ ὅλη ζ α β, δεκαπλασιός ἐστι τῆς ὑπὸ ζ ε α, ἐὰν δὲ προστεθῇ καὶ ἡ ζ α ε, ἴση οὖσα τῇ ζ ε α, πάντως γε ἡ ὑπὸ ε α β, ὅλη γωνία ἑνδεκαπλάσιος γενήσεται τῆς ὑπὸ ζ ε α, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ε α β, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ε β α, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ε β α, ἑνδεκαπλασιός ἐστι τῆς ὑπὸ ζ ε α. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ζ ε α, βέβηκεν ἐπὶ τῆς α σ, περιφερείας, ἡ δὲ ὑπὸ ε β α, ἐπὶ τῆς α π ε, ἄρα ἡ α π ε, περιφέρεια ἑνδεκαπλασιός ἐστι τῆς α σ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ β θ ε, ἑνδεκαπλάσιος τῆς β σ, ὥστε ἡ ὅλη περιφέρεια α π ε θ β, τῆς α σ, ἡ σ β, δυοκαιεικοσαπλάσιος ἔσται, τῆς δὲ

Geom. Lib. 5. Fig. 10.



ὅλης

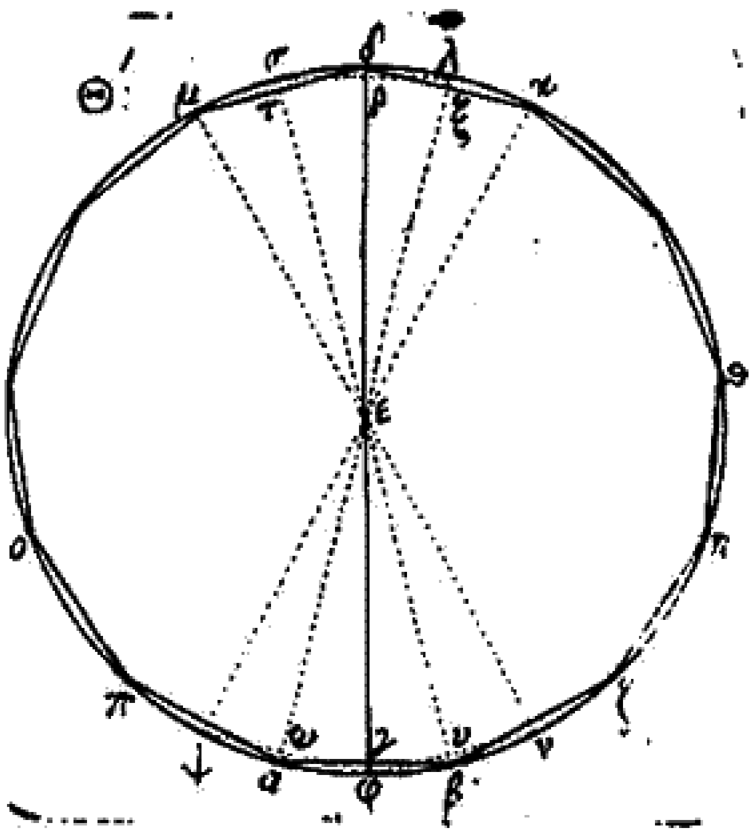
ὅλης α β, ἐνδεκαπλάσιος. ἡ α β, ἄρα ἅπαξ μετροῦσα τὴν α σ β, περιφέρειαν, μετρήσει πάντως τὴν β θ ε π α, ἐνδεκάκις, τὸν δὲ κύκλον α β ε, δωδεκάκις, καὶ τὸ α β η θ κ λ μ ν ξ ο π ρ, δωδεκάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστιν. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, δῆλον, ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ α η, β ρ, ἐπεὶ αἱ α β η, β α ρ, περιφέρειαί εἰσιν ἴσαι, ἴσαι δήπουθεν ἔσονται καὶ αἱ α η, β ρ, ὑποτείνουσαι κατὰ τὴν κ θ′: τοῦ γ′: τοῦ αὐτοῦ, ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ὑπὸ α β η, β α ρ, γωνίαι ἴσαι δειχθήσονται, ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ λοιπαί. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας δωδεκάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον συνέστη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Θ′:

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τρισκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Ἔστω ἐπὶ τῆς α β, δοθείσης εὐθείας τρισκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι. Τμηθήτω ἡ α β, δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ ἀνεστάθω κάθετος ἐπ᾽ αὐτῆς ἡ γ δ, καὶ εἰλήφθω ἡ γ ε, διπλασία τῆς α β, δοθείσης, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ ε α, ἤτοι ε β, γραφήτω κύκλος ὁ α β δ, ὃν ἡ α β, τρισκαιδεκάκις, ὡς ὀψόμεθα καταμετρήσει. Ὑποκείσθω γὰρ τὴν τοῦ ἐγγραφησομένου ἐν τῷ α β δ, κύκλῳ τρισκαιδεκαγώνου πλευρὰν ἴσην εἶναι ἑκατέρᾳ τῶν δ κ, δ μ. ἐν παντὶ γὰρ κύκλῳ οἱονδήποτε πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον ἐγγραφῆναι δύναται, καὶ εἰλήφθω ἡ ε ρ, ἴση τῇ ε γ, καὶ ἀπὸ τοῦ β, διὰ τοῦ ε, ἤχθω ἡ β ε σ, τέμνουσα τὴν δ μ, κατὰ τὸ τ, ἀπὸ δὲ τοῦ α, διὰ τοῦ ε, ἤχθω ἡ α ε λ. Αὖθις ἀπὸ μὲν τοῦ μ, διὰ τοῦ ε, ἤχθω ἡ μ ε ν, ἀπὸ δὲ τοῦ κ, ἡ κ ε ψ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ψ φ, φ ν. καὶ ἐπεὶ

Geom. Lib. 5. Fig. 11.



αἱ α ε, β ε, ἴσαι εἰσὶν ταῖς σ ε, λ ε, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α ε β, τῇ ὑπὸ σ ε λ, κατὰ κορυφὴν γὰρ, πάντως γε καὶ αἱ α β, σ λ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἡ μὲν ρ λ, τῇ γ υ, ἡ δὲ ρ σ, τῇ γ α, ἔτι δὲ καὶ ἀλλήλαις, καὶ ἑκάτερον δὲ τῶν α ε β, σ ε λ, τριγώνων ἰσοσκελές ἐστιν, ἄρα αἱ ὑπὸ ε λ σ, ε α β, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ α β, σ λ, παράλληλοι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται καὶ αἱ δ κ, ψ φ, ἴσαι τε καὶ παράλληλοι. Ἐπεὶ δὲ εἰς αὐτὰς πέπτωκεν ἡ γ δ, πάντως γε αἱ ὑπὸ κ δ ε, ε φ ψ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ε φ ψ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ε ψ φ, τὸ γὰρ ε φ ψ, τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ε ψ ω, γωνία ἴση ἐστὶ. τῇ ὑπὸ ε δ ξ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ

ψ ε ω,

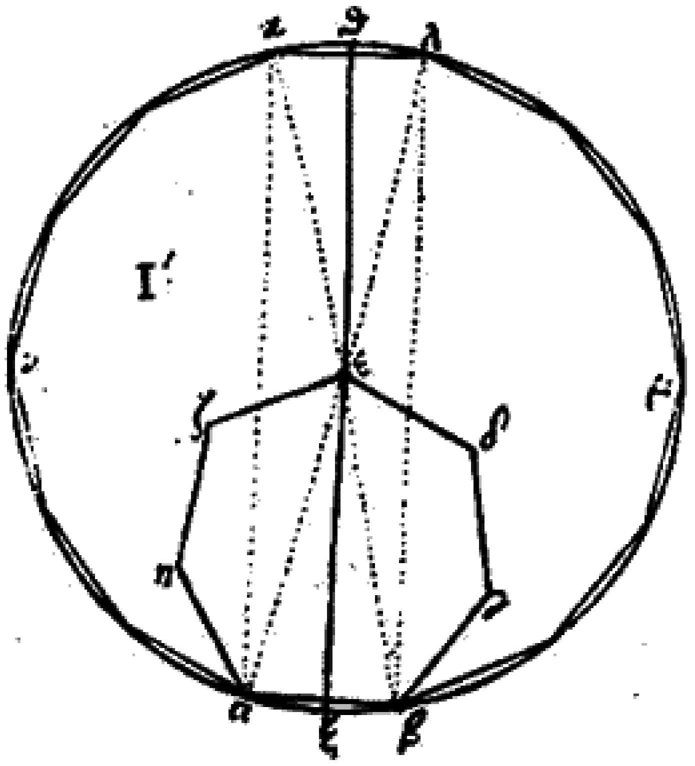
ψεω, ἴση τῇ ὑπὸ δεξ, ὡς κατὰ κορυφὴν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ψωε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δξε, τῇ δὲ ὑπὸ ψωε, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ κξε, κατὰ τὴν κθ΄: τοῦ α΄: Εὐκλείδου, ἄρα αἱ δξε, κξε, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἑπομένως ὀρθαὶ, ὥστε κατὰ τὴν γ΄: τοῦ γ΄: τοῦ αὐτοῦ ἡ δκ, δίχα τέμνεται, καὶ ἡ δξ, ἴση ἐστὶ τῇ κξ, καὶ ἡ δλ, περιφέρεια τῇ δκ, ἔστι δὲ καὶ ἡ δλ, τῇ αφ, ἡ ὅλη ἄρα δκ, ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὥστε καὶ αἱ αὐτῶν ὑποτείνουσαι αβ, δκ, ἀλλ᾽ ἡ δκ, ὑπετέθη ἴση τῇ τοῦ ἐγγραφομένου πεντεκαιδεκαγώνου ἐν τῷ αβδ, κύκλῳ πλευρᾷ, πάντως γε καὶ ἡ αβ, πλευρὰ ἔσται τοῦ αὐτοῦ πεντεκαιδεκαγώνου, καὶ τὸν αβδ, κύκλον πεντεκαιδεκάκις καταμετρήσει. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ι΄:

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τεσσαρεσκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Κείσθω δὴ ἐπὶ τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας τεσσαρισκαιδεκάγωνον κατασκευάσαι ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. καὶ συνεστάθω ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ αβγδεζη, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἑπτάγωνον. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εα, ἢ εβ, γραφήτω κύκλος ὁ αβθ, καὶ ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα μετρήσει αὐτὸν τεσσαρισκαιδεκάκις. Τῶν γὰρ αε, βε, εὐθειῶν κατὰ τὸ συνεχὲς ἠγμένων, ὥστε τέμνειν τὸν αβθ, κατὰ τὰ κ, καὶ λ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ κα, λβ, εὐθεῖαι, καὶ ἔσται ἡ ὑπὸ αεβ, διπλασία ἑκατέρας τῶν ὑπὸ ακε, βλε, κατὰ τὴν κ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ἐπεὶ δὲ τῆς ὑπὸ αεβ, γωνίας διπλασιός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ εαβ, εβα, ἡ μὲν γὰρ αεβ, βέβηκεν ἐπὶ τῆς αβ, περιφερείας, ἡ δὲ ὑπὸ εαβ, ἐπὶ τῆς εδγβ, καὶ ἡ ὑπὸ εβα, ἐπὶ τῆς εζα, ἑκατέρα δὲ τούτων τριπλασιός ἐστι τῆς αβ, πάντως γε ἡ μὲν εαβ, ἑξαπλασιός ἐστι τῆς ελβ, ἡ δὲ εβα, τῆς εκα, ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ λαβ, βέβηκεν ἐπὶ τῆς λμβ, περιφερείας, ἡ δὲ κβα, ἐπὶ τῆς κνα, καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ακβ, βλα, ἐπὶ τῆς αξβ, ἄρα ἥτε λμβ, καὶ κνα, περιφέρεια ἑξαπλασιός ἐστι τῆς αβ, χωρὶς, συντιθέμεναι δὲ δωδεκαπλάσιον ποιοῦσι τὴν ὅλην. Προστιθεμένης δὲ τῆς κλ, ἴσης τῇ αβ, τρισκαιδεκαπλάσιος γενήσεται ἡ ανκλμβ, περιφέρεια, προστιθεμένης δ᾽ ἔτι καὶ τῆς αβ, τεσσαρισκαιδεκαπλάσιος πάντως, ἔσται ὁ αβθ, κύκλος τῆς αξβ, περιφερείας, ἀλλ᾽ ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα ἅπαξ μετρεῖ τὴν αξβ, περι-

Geom. Lib. 5. Fig. 12.

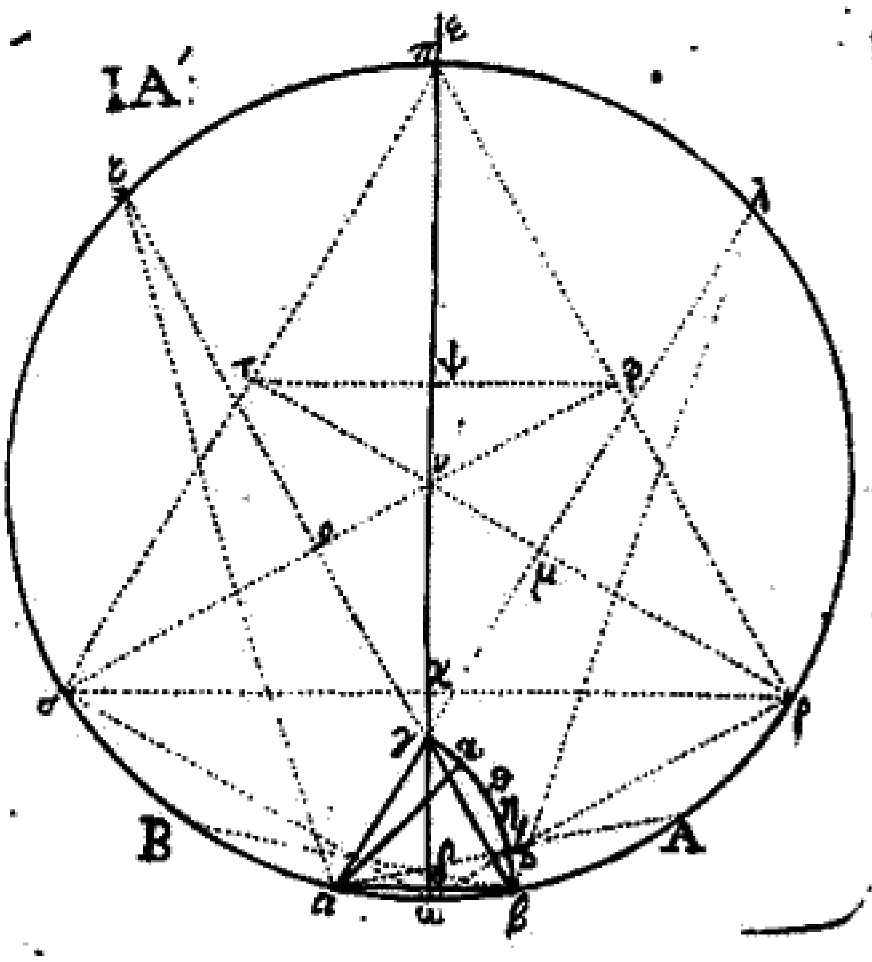


περιφέρειαν, μετρήσει δήπουθεν τὸν αβθ, κύκλον τεσσαρεσκαιδεκάκις. ὅπερ ἔδει τὸ προτεθέν.

Πρότασις ΙΑ'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Δοθήτω ἡ αβ, εὐθεῖα, καὶ ζητηθήτω ἐπ' αὐτῆς συστῆσαι πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Συνεστάθω δὴ α': ἐπὶ τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ αβγ· τῶν δὲ αγ, βγ, αὐτοῦ πλευρῶν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐξαγομένων ἐπ' ἄπειρον, τμηθήτω ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ, ἀνεστάθω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς αβ, ἡ δγε. Εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, γραφήτω τόξον τὸ βγ, καὶ τμηθήτω εἰς μέρη πέντε ἴσα ἀλλήλοις τὰ βζ, ζη, ηθ, θκ, κγ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ακ, ἴση δὲ τῇ βακ, γωνίᾳ γενέσθω ἡ γβλ, καὶ τμηθήσεται ἡ αγ, ἐξαχθεῖσα ὑπὸ τῆς βλ, κατὰ τὸ λ, σημεῖον, τῆς δὲ αλ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ μ, συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ μν, γενομένης δὲ καὶ τῆς γαξ, γωνίας ἴσης τῇ βακ, καὶ τῆς βξ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ ο, συνεστάθω καὶ ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ ον, ἀπὸ δὲ τοῦ ν, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ να, ἢ νβ, γραφήτω κύκλος ὁ αβπ, ὅστις διελεύσεται πάντως καὶ διὰ τῶν λξ, σημείων, ὡς δῆλον τῷ καὶ μικρὸν ἐπιστήσαντι τέμνων τὴν μὲν μν, ἐξαγομένην



Geom. Lib. 5. Fig. 13.

κατὰ τὸ ρ, τὴν δὲ νο, κατὰ τὸ σ. Λέγω δὴ τὴν αβ, δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεντεκαιδεκάκις καταμετρεῖν τὸν αβπ, κύκλον. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ σρ, σπ, πρ, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς πρ, πιπτέτω κάθετος ἀπὸ τοῦ ν, ἡ νφ, ἐπὶ δὲ τῆς πσ, ἡ ντ, ἐπιζεύχθω δὲ καὶ ἡ τφ. Δείκνυται. ἐπεὶ τοῦ αβγ, τριγώνου προσεκβλήθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἡ αγ, πάντως γε κατὰ τὴν λβ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ ὑπὸ βγλ, ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶν ἐντὸς γωνίαις καὶ ἀπεναντίον, ταῖς ὑπὸ γαβ, γβα, ὥστε καὶ αἱ λοιπαὶ δύο γβλ, γλβ, ἴσαι εἰσὶ τῇ λοιπῇ αγβ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν.

ἀλλὰ

ἀλλὰ τῇ α γ β, ἴση ἐστὶν ἡ γ α β, ἰσογώνιον γὰρ τὸ α γ β, τρίγωνον, αἱ ἄρα γ β λ, γ λ β, γωνίαι ὁμοῦ ἴσαι εἰσὶ τῇ γ α β, γέγονε δὲ τῇ β α κ, ἴση ἡ γ β λ, γωνία, ἄρα ἡ γ λ β, ἴση ἐστὶ τῇ γ α κ. Ἐπεὶ δὲ τῆς γ α κ, πενταπλάσιός ἐστιν ἡ γ α β, τῇ δὲ γ α κ, ἴση δέδεικται ἡ γ λ β, πάντως γε ἡ γ α β, πενταπλάσιός ἐστι καὶ τῆς α λ β. ἀλλ' ἡ μὲν γ α β, βέβηκεν ἐπὶ τῆς β ρ λ, περιφερείας, ἡ δὲ α λ β, ἐπὶ τῆς α ω β, ἄρα καὶ ἡ λ ρ β, περιφέρεια πενταπλάσιός ἐστι τῆς α ω β, περιφερείας. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ α σ ξ, περιφέρεια πενταπλάσιος τῆς α ω β, ὥστε αἱ λ ρ β, ξ σ α, ἴσαι εἰσί, κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς α β, ἔσται ἡ α β ρ λ, περιφέρεια ἴση τῇ β α σ ξ. Ἐπεὶ δ' ἑκατέρα τῶν α λ, β ξ, δίχα τέμνεται, κατὰ τὴν γ': δἰ ὑπόθεσιν τοῦ γ': Στοιχ: ἴση ἐστὶν ἡ α ρ, τῇ β σ, κοινῆς δ' ἀφαιρουμένης τῆς α β, ἐναπολείπεται ἴση ἡ β ρ, τῇ α σ, ἔστι δὲ ἴση καὶ ἡ α ω, τῇ β ω, ἄρα καὶ ἡ ω ρ, τῇ ω σ, ἴση ἐστί, καὶ ἑπομένως ἡ ω ρ, ὑποτείνουσα τῇ ω σ, ὑποτεινούσῃ, κοινῆς δὲ λαμβανομένης τῆς ω π, ἐπεὶ δὴ καὶ ἡ σ π, ἴση ἐστὶ τῇ ρ π, ὡς δειχθήσεται, πάντως γε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ σ ω π, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ρ ω π, δέδεικται δὲ καὶ ἡ σ ω, τῇ ω ρ, ἴση, κοινῆς ἄρα λαμβανομένης τῆς ω χ, δειχθήσεται ἴση καὶ ἡ σ χ, τῇ χ ρ, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ σ χ ω, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ρ χ ω, καὶ ἑπομένως ἡ ω χ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς ρ σ. Αὖθις ἐπεὶ ἡ α ρ, ἴση δέδεικται τῇ ρ λ, ταύτῃ δὲ ἡ ξ σ, ἡ α ρ, πάντως ἴση ἐστὶ καὶ τῇ ξ σ, κοινῆς δὲ λαμβανομένης καὶ τῆς σ α, ἔσται ἡ σ α ρ, ἴση τῇ ξ σ α. ἀλλ' ἡ ξ σ α, πενταπλάσιος δέδεικται τῆς α β, ἄρα καὶ ἡ σ ω ρ, πενταπλάσιός ἐστι τῆς αὐτῆς α β, τῇ δὲ σ ω ρ, ἴση ἐστὶν ἡ π σ ξ π, ὡς ὀψόμεθα, καὶ ρ λ π, ἑκατέρα ἄρα τῶν σ ξ π, ρ λ π, πενταπλάσιός ἐστι τῆς δοθείσης α β, ὅλος δὲ ὁ σ ρ λ ξ, κύκλος πεντεκαιδεκαπλάσιος. Ἡ α β, ἄρα πεντεκαιδεκάκις καταμετρεῖ τὸν α β π, κύκλον. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον. Ὅτι δὲ ἡ σ π, ἴση ἐστὶ τῇ π ρ, δῆλον. Ἐὰν γὰρ ἐκ τῶν ἴσων ω σ π, ω ρ π, ἴσαι ἀφαιρεθῶσιν αἱ ω σ ξ, ω ρ λ, ἐναπολείπονται ἴσαι αἱ ξ π, π λ, εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ ξ σ, λ ρ, ἡ ὅλη ἄρα σ ξ π, ἴση ἐστὶ τῇ ὅλῃ ρ λ π, ὥστε καὶ αἱ ὑποτείνουσαι αὐτῶν σ π, ρ π, ἴσαι εἰσίν.

Ὅτι δ' ἔτι καὶ ἑκατέρα τῶν σ ξ π, ρ λ π, ἴση ἐστὶ τῇ σ ω ρ, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ν φ, ἡ διὰ τοῦ κέντρου πέπτωκε πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ρ π, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, πάντως γε ἡ ὑπὸ ν φ π, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ φ ψ π, ὁμοίως ὀρθή, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν π ν, τῇ π φ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ν π ψ, τῇ ὑπὸ φ π ψ, τὰ ἄρα π ψ φ, π φ ν, τρίγωνα ὀρθογώνιά ἐστιν, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν ὑπὸ π ν φ, γωνίαν κοινήν, ἄρα καὶ ἡ ψ φ ν, ἴση ἐστὶ ψ π φ, ταύτῃ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ ν ρ φ, ἄρα καὶ ἡ ψ φ ν, ἴση ἐστὶ τῇ ν ρ φ. Ἐπεὶ δὲ τῇ ψ φ ν, ἴση ἐστὶν ἡ φ σ χ, διὰ τὸ ἐναλλάξ, πάντως γε καὶ ἡ φ σ χ, ἴση ἐστὶ τῇ ν ρ φ, τῇ δὲ φ σ χ, ἴση ἐστὶν ἡ ν ρ χ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ν σ, ν ρ, ἡμιδιαμέτρων, ἡ ἄρα ν ρ φ, ἴση ἐστὶ τῇ ν ρ χ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ν φ ρ, τῇ ν χ ρ, ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ κοινὴ ἡ ρ ν, εὐθεῖα, κατὰ τὴν κ ϛ': ἄρα τοῦ α': Εὐκλείδου, ἡ φ ρ, εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ χ ρ, ἀλλ' ἡ μὲν φ ρ,

ἡμιἡμίσεια ἐστὶ τῆς ρπ, ἡ δὲ χρ, τῆς ρσ, ἄρα καὶ ἡ ρσ, ἴση ἐστὶ τῇ ρπ, ταύτῃ δὲ ἴση δέδεικται καὶ ἡ σπ, τὸ πσρ, τρίγωνον ἄρα ἰσόπλευρόν ἐστιν, ὅπερ ἦν τὸ ὑποκειθέν. Ὅτι μὲν οὖν τὸ ἐν τῷ αβπ, κύκλῳ γραφόμενον πεντάγωνον κατὰ τὸν ἤδη προεκτεθέντα τρόπον, ἔχει τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας ἑκάστην τῇ δοθείσῃ αβ, δέδεικται, ἰσόπλευρον ἄρα. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, εὐχερῶς δειχθήσεται, ἀγομένων τῶν αΑ, βΒ, ὑποτεινουσῶν, καὶ λοιπῶν ἀνὰ δύο. Εἰ δέ σοι βουλητὸν τριακοντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐπὶ τῆς αβ, συστήσασθαι, κέντρῳ μὲν τῷ π, διαστήματι δὲ τῷ πα, ἢ πβ, γραφήτω κύκλος, καὶ ἡ αβ, μετρήσει αὐτὸν τριακοντάκις.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τῶν ἤδη εἰρημένων ἐπί τε τοῦ παρόντος, καὶ τῶν πρὸ αὐτοῦ δῆλον, ὅτι ἕκαστον πολύγωνον εἴτε περιττόπλευρον, εἴτ' οὖν ἀρτιόπλευρον διπλασιασθῆναι δύναται, ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν κάθετος ἀχθῇ, διάμετρος οὖσα τοῦ περιγραφομένου περὶ αὐτὸ κύκλου, καὶ τὸ μὲν κατὰ κορυφὴν αὐτῆς σημεῖον κέντρον ληφθῇ, διάστημα δὲ τὸ μεταξὺ τούτου τε καὶ ἑνὸς τῶν περάτων τῆς πλευρᾶς, ἐφ' ἧς ἡ κάθετος πίπτει, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος τὸ πα, ἢ πβ, διάστημα, καὶ τῷ αὐτῷ διαστήματι κύκλος γραφῇ.

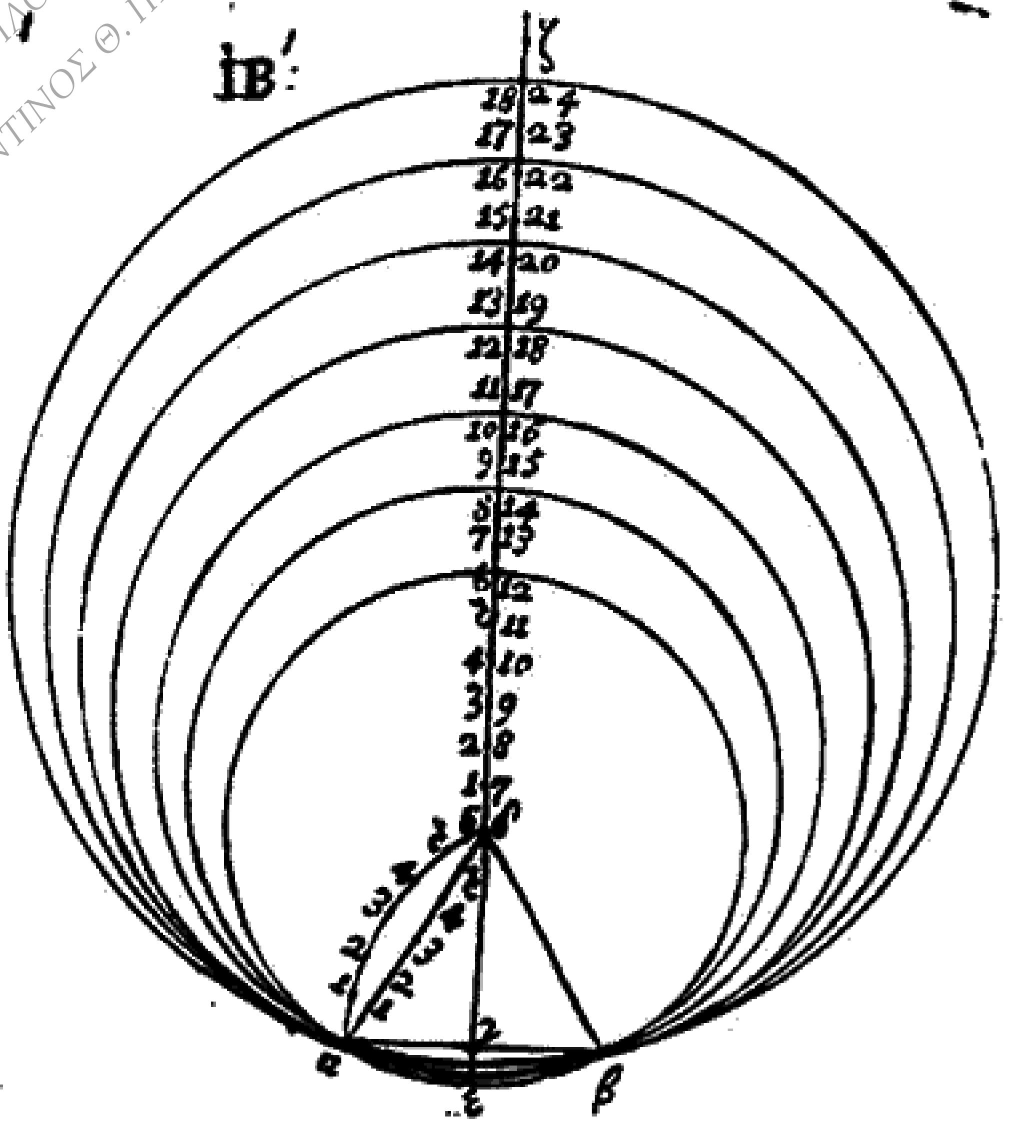
Πρότασις ΙΒ'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πολύγωνα ἰσόπλευρά τε καὶ ἰσογώνια συστήσασθαι, ἀρχόμενα μὲν ἀπὸ τοῦ ἑξαγώνου, προϊόντα δὲ ἐπ' ἄπειρον κατὰ τὴν τῶν ἀριθμῶν φυσικὴν αὐξανόμενα πρόοδον.

Περὶ μὲν οὖν κατασκευῆς τριγώνου, τετραγώνου, πενταγώνου, καὶ τῶν λοιπῶν πολυγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων, τῶν καὶ Κανονικῶν προσαγορευομένων μέχρι τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου, καὶ τῆς ἑκάστου ἔτι τούτων δείξεως, καὶ τὰ πρότερον σεσημειωμένα ἱκανά. περὶ δὲ τῶν ἑξῆς ἰδίως διαλαβεῖν ἀμήχανον, ἐπ' ἄπειρον γὰρ ἡ αὐτῶν χωρεῖ πρόοδος, τὸ δὲ ἐπ' ἄπειρον κατὰ τὸν Ἀριστοτέλην, ἀδιεξίτητον. Διὸ δὴ ἀναγκαῖον ἔφοδόν τινα ἐκθέσθαι, καθ' ἣν δυνατὸν ἐφ' οἱασδήποτε δοθείσης εὐθείας τὸ οἱονδήποτε πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον κατασκευάζεσθαι. Ἐρευνήθησαν δὲ ταύτην οἱ περὶ τὰ τοιαῦτα τὴν πᾶσαν αὐτῶν καταναλώσαντες σπουδὴν ἐκ τῆς τῶν κύκλων θέσεως, ἣν πρὸς ἀλλήλους ἔτυχον ἔχοντες. ἔστι δὲ τοιαύτη.

Δεδόσθω τοίνυν ἡ αβ, εὐθεῖα, καὶ κείσθω ἐπ' αὐτῆς διὰ τὸ εὐχερέστερον οἱονδήποτε πολύγωνον συστήσασθαι ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀπὸ τοῦ ἑξαγώνου ἀρχομένης, καὶ ἐπὶ τὸ μεῖζον χωροῦντας ἐπ' ἄπειρον. Τμηθήτω δὴ ἡ δοθεῖσα αβ, δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ κέντροις μὲν τοῖς α, καὶ β, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ αβ, γραφήτωσαν τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γδ, ἤχθω κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ δ, ἐπ' ἄπειρον κατὰ τὸ ζ. Εἶτα διαιρεθήτω τὸ αδ, τόξον εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις ἕξ, καὶ τῷ ἕκτῳ τούτῳ μέρει εἰλήφθωσαν ἐπὶ τῆς δζ, ἴσα διαστήματα τὰ 1, 2, 3, 4, καὶ λοιπὰ ἐφ' ὅσον βούλει. Τούτων δὲ εἰλημμένων, κέντροις μὲν τοῖς 1, 2, 3, 4, καὶ λοιποῖς σημείοις, διαστήμασι δὲ τοῖς 1 α, 2 α, 3 α, 4 α, 5 α, καὶ λοιποῖς, γραφήτωσαν κύκλοι οἱ αβ6, αβ8, αβ10, αβ12, καὶ λοιποί. Λέγω τὸν μὲν αβ6, κύκλον καταμετρεῖσθαι ἑξάκις ὑπὸ τῆς αβ, τὸν δὲ αβ8, ἑπτάκις, τὸν

Geom. Lib. 5. Fig. 14.



δὲ αβ10, ὀκτάκις, τὸν δὲ αβ12, ἐννάκις, τὸν δὲ αβ14, δεκάκις, καὶ τῶν λοιπῶν ἕκαστον ἀναλόγως. Δείκνυται, ἡ αδ, τοίνυν εὐθεῖα ἡμιδιάμετρός ἐστι τοῦ αβ6, κύκλου, ὥστε κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιε΄: τοῦ δ΄: τοῦ Στοιχ: ἑξάκις αὐτὸν καταμετρεῖ, καὶ τὸ συνιστάμενον ἐν αὐτῷ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστι, καὶ ἰσογώνιον. ἀλλὰ τῇ αδ, ἴση ἐστὶν ἡ αβ, ἄρα ἡ αὐτὴ αβ, ἑξάκις καταμετρεῖ τὸν αβ6, κύκλον, καὶ ἑπομένως ἑξάγωνον ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συσταθήσεται. Ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν α7, ἐφεκτός ἐστι τῆς α6, ἡ δὲ α8, ἐπόγδοος, ἡ δὲ α9, ἐπένατος, ἡ δὲ α10, ἐπιδέκατος τῆς αὐτῆς, καὶ τῶν λοιπῶν ἑκάστη λόγον τινὰ ἔχει πρὸς αὐτὴν τῶν τοῦ ἐπιμεροῦς εἰδῶν, πάντως γε καὶ ὁ μὲν αβ8, κύκλος ἐφεκτός ἐστι τοῦ αβ6, ὁ δὲ αβ10, ἐπόγδοος, ὁ δὲ αβ12, ἐπένατος, ὁ δὲ αβ14, ἐπιδέκατος, καὶ τῶν λοιπῶν ἕκαστος πρὸς τὸν αὐτὸν αβ6, λόγον ἔχει, ὃν καὶ ἡ ἡμιδιάμετρος αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐκείνου ἡμιδιάμετρον. οἱ γὰρ κύκλοι, ὡς εἰδόμεθα, λόγον ἔχουσιν, ὃν καὶ αἱ διάμετροι αὐτῶν καὶ ἡμιδιάμετροι. Τούτων οὖν οὕτως ἐχόντων, δῆλον, ὅτι ἡ α6, ἡμιδιάμ: τοῦ αβ6, κύκλου ἴση οὖσα τῇ αβ, ἑξάκις μὲν καταμετρεῖ τὸν αβ6, κύκλον, ἑπτάκις δὲ τὸν αβ8, καθ' ὃν ἔχει λόγον ὁ αὐτὸς αβ, κύκλος πρὸς τὸν αβ6, τὸν δὲ αβ10, ὀκτά-

ὀκτάκις, τὴν δὲ αβ 12, ἐννεάκις, τὴν δὲ αβ 14, δεκάκις, καὶ τὰς λοιπὰς κατὰ ἀναλογίαν ἀριθμητικὴν ἐφεξῆς. ὥστε ἐπειδάν σοι βουλητὸν τὸ τυχὸν συστήσασθαι πολύγωνον ἐπὶ τῆς αβ, δὸς εἰπεῖν δωδεκάγωνον, σύστησον ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον, οἷον τὸ αβδ, εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δα, ἢ δβ, γραφέτω τόξον τὸ αεβ, καὶ διαιρεθήτω εἰς μέρη ἕξ, ὥσπερ καὶ τὸ αδ, λαβὼν δὲ τούτου τὸ ἕκτον μέρος, ἄφελε ἀπὸ τῆς δζ, μέρη ἓξ ἴσα τῷ ληφθέντι, ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ δ, ἀπὸ δὲ τοῦ ς': μέρους τῆς αζ, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ 6α, ἢ 6β, γράψον κύκλον λευκὸν, καὶ τῷ αβ, διαστήματι δίελε τὸν αὐτὸν κύκλον. Εἰ δέ σοι βουλητὸν τρισκαιδεκάγωνον, ἄφελε πρὸς τοῖς ἓξ καὶ μέρος ἕβδομον ἀπὸ τῆς δζ, καὶ τὰ λοιπὰ ποιῶν, ὡς πρότερον, συστήσεις πάντως ἐπὶ τῆς αζ, τρισκαιδεκάγωνον. Δεῖ δὲ τὴν κατασκευὴν γίνεσθαι μετὰ πάσης ἀκριβείας τε καὶ προσοχῆς. μικρὰ γὰρ παραδρομὴ τῆς χειρὸς, ἢ τοῦ ὀργάνου, μεγίστης ἀπάτης πρόξενος γίνεται.

Ὅτι μὲν οὖν τὸ οἱονδήποτε πολύγωνον κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν συνιστάμενον ἔφοδον ἰσόπλευρόν ἐστι, φανερὸν, ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, οὐ χαλεπὸν κατὰ τὰ πρότερον εἰρημένα ἀποδεῖξαι. Ἀγομένων τῶν ὑποτεινουσῶν ἀνὰ δύο, ὡς ἐπὶ τοῦ δωδεκαγώνου καὶ λοιπῶν, γέγονε. Δυνατὸν δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἄρχεσθαι τῆς τῶν πολυγώνων κατασκευῆς καὶ ἀπ' ἄλλου τοῦ τυχόντος. Δεῖ δὲ τὸ τόξον εἰς τρία διαιρεῖν, ἢ εἰς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν, ὃν παρίστησι τὸ ἐξ οὗ ἀρχόμεθα, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος. διῄρηται γὰρ εἰς ἕξ, ὅτι τὸ ἑξάγωνον εἰς κατασκευὴν πρῶτον ὑπετέθη.

Τέλος τοῦ Πέμπτου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου.