ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

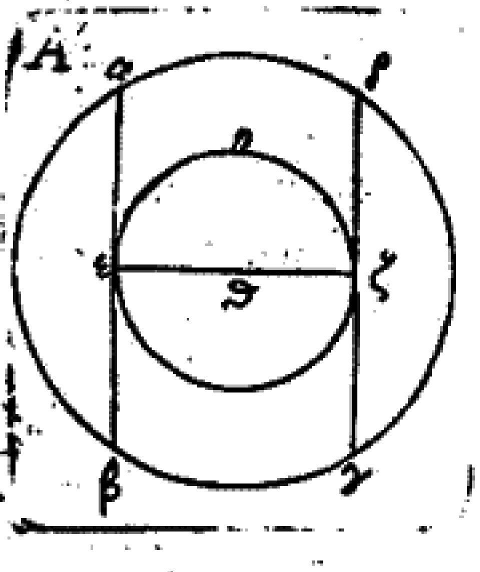
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

Πρότασις Α':

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ γραφομένων κέντρον διαφόρῳ διαστήματι, πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ τοῦ ἐλάττονος μὲν ἁπτόμεναι, ὑπὸ δὲ τοῦ μείζονος περατούμεναι ἴσαι εἰσὶ, καὶ δίχα κατὰ τὸ τῆς ἀφῆς ἑκάστη τέμνεται σημεῖον.

Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱ α β γ δ, ε ζ η, περὶ τὸ θ, γεγραμμένοι κέντρον, καὶ αἱ α β, δ γ, εὐθεῖαι ἁπτέσθωσαν μὲν τοῦ ἐλάττονος ε ζ η, κύκλου, ἡ μὲν κατὰ τὸ ε, ἡ δὲ κατὰ τὸ ζ, περατούσθωσαν δὲ ὑπὸ τοῦ μείζονος α β γ δ. Λέγω δὴ τὰς α β, δ γ, εὐθείας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι, καὶ δίχα τέμνεσθαι ἑκατέραν τὴν μὲν κατὰ τὸ ε, τὴν δὲ κατὰ τὸ ζ, σημεῖον. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ε θ, ζ θ, καὶ ἐπεὶ αὗται ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ γ': τοῦ Εὐκλείδ. δῆλον ὅτι αἱ α β, δ γ, εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν ιδ': τοῦ αὐτοῦ. Ἐπεὶ δὲ πάλιν αἱ μὲν θ ε, θ ζ, πρὸς ὀρθὰς πίπτουσιν ἐπὶ τῶν α β, δ γ, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε αἱ α β, δ γ, τέμνονται καὶ δίχα ὑπὸ τῶν θ ε, θ ζ, κατὰ τὴν γ': τοῦ αὐτοῦ. Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib.4. Fig. 1.

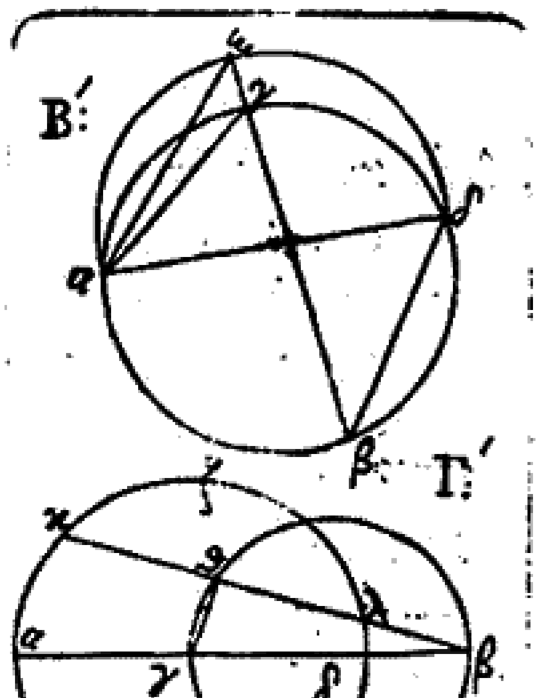


Πρότασις Β':

Ἐὰν δύο σημείων κειμένων ἐπί τινος ἐπιπέδου, δύο ἀφ᾽ ἑκατέρου ἐκβληθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, ὥστε γωνίας ἴσας ποιεῖν πρὸς ἀλλήλας συμπίπτουσαι, ὁ διά τε τῶν κειμένων σημείων, καὶ ἑνὸς τῶν καθ᾽ ἃ αἱ γωνίαι συνίσανται, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ λοιποῦ.

Κειμένων ἤδη τῶν α, καὶ β, σημείων, ἐκβληθήτωσαν ἀφ᾽ ἑκατέρου τούτων δύο εὐθεῖαι αἱ α γ, α δ, καὶ β δ, β γ, ποιοῦσαι γωνίας ἴσας πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ α γ β, β δ α· καὶ γραφήτω διὰ τῶν α, καὶ β, σημείων ὁ α β δ, κύκλος διερχόμενος καὶ διὰ τοῦ δ. Λέγω δὴ ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ γ. εἰ γὰρ μή, ἐκτὸς πάντως, ἢ ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ διελεύσεται. Ἔστω δὴ α: ἐκτὸς, καὶ ἐξαχθήτω ἡ β γ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ γ, καθ' ὃ δὲ σημεῖον τέμνει τὸν κύκλον ἡ ἐξαχθεῖσα, προσπιπτέτω ἡ α ε, εὐθεῖα, καὶ συςαθήσεται ἡ ὑπὸ α ε β, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ β δ α, κατὰ τὴν κα: τοῦ γ': τοῦ Εὐκλείδου, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ α γ β, ὑπετέθη ἴση τῇ ὑπὸ β δ α, ἄρα ἡ ὑπὸ α ε β, ἴση ἐςὶ καὶ τῇ ὑπὸ α γ β, ἡ ἐντὸς τῇ ἐκτὸς, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν ις': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ. τὸ αὐτὸ ἄρα δειχθήσεται ἄτοπον συμβαίνειν, κἂν ὁ κύκλος ἐντὸς τοῦ γ, διέλθῃ σημείου. Ἐὰν ἄρα δύο σημείων κειμένων ἐπί τινος ἐπιπέδου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 4. Fig. 2.



Πρότασις Γ′:

Ἐὰν ἐπὶ τῆς αὐτῆς δοθείσης εὐθείας δύο σημεῖα ληφθῶσι, καὶ ἀπ' αὐτῶν ὡς ἀπὸ κέντρων κύκλοι ἄνισοι γραφῶσιν, ὥστε τὸν ἐλάσσονα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος διέρχεσθαι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου, καθ' ὃ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος τῶν κύκλων τέμνεται, εὐθεῖα ἀχθῇ, τέμνουσα ἑκάτερον τῶν κύκλων, ἡ ἐναπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τοῦ μείζονος κύκλου δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

Ἐπὶ τῆς α β, τοίνυν δοθείσης εὐθείας εἰλήφθωσαν δύο σημεῖα τὰ γ, καὶ δ, καὶ ἀπ' αὐτῶν ὡς ἀπὸ κέντρων γραφήτωσαν κύκλοι ἄνισοι οἱ α ε ζ, γ η θ, ἀπὸ δὲ τοῦ β, ἀχθήτω ἡ β κ, τέμνουσα, ὡς ἔτυχεν, ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους. Λέγω τὴν κ λ, ἐναπολαμβανομένην ὑπὸ τοῦ α ε ζ, μείζονος κύκλου δίχα τέμνεσθαι κατὰ τὸ θ, ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος γ η θ, κύκλου. ἀλλ' εἰ καὶ τετραχῶς συμβῆναι ἐνδέχεται, ἢ γὰρ δὴ ὁ ἐλάττων κύκλος τέμνει τὸν μείζονα, ὡς ἐπὶ τοῦ α: διαγράμματος, ἢ ἅπτεται τοῦ αὐτοῦ, ἢ νῦν ἐντὸς αὐτοῦ ὅλος ἐςίν, ἡ δεῖξις μέντοι ἡ αὐτὴ ἐν ἑκάςῳ. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ γ θ, καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ γ θ β, γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ ἐςίν, ὡς ἐπὶ τοῦ α: καὶ β': διαγράμματος, δῆλον ὅτι ὀρθή ἐςι κατὰ τὴν λ α: τοῦ γ': τοῦ Εὐκλείδου, ὥςε κατὰ τὴν γ': τοῦ αὐτοῦ ἡ κ λ, δίχα τέμνεται, ἡ γὰρ γ θ, διὰ τοῦ κέν-

τρου

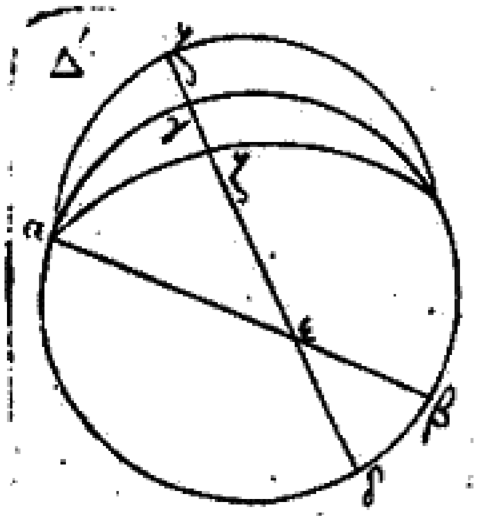
ξυ τοῦ α ε ζ, κύκλου διέρχεται, ἡ δὲ κ λ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ τέμνεται πρὸς ὀρθὰς ὑπὸ τῆς γ θ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ β': διαγράμματος ἡ κ β, ἐπὶ δὲ τοῦ γ': ἡ μ λ, δίχα ἑκατέρα τέμνεσθαι κατὰ τὸ θ, σημεῖον. Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο σημεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Δ':

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ὁ διὰ τῶν περάτων τῆς μιᾶς γραφόμενος κύκλος διερχόμενος καὶ δι' ἑνὸς τῶν τῆς ἑτέρας περάτων, διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ λοιποῦ.

Τεμνέτωσαν δὴ ἀλλήλας αἱ α β, γ δ, εὐθεῖαι κατὰ τὸ ε, σημεῖον, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε β, περιεχόμενον ὀρθογ: ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν γ ε, ε δ. Γραφήτω δὲ καὶ διὰ τῶν α, καὶ β, περάτων τῆς α β, εὐθείας κύκλος ὁ α δ β, ὥστε καὶ διὰ τοῦ δ, πέρατος τῆς γ δ, διέρχεσθαι. Λέγω δὴ ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ γ. εἰ γὰρ μὴ, διελεύσεται πάντως ἢ ἐκτὸς τούτου ἢ γοῦν ἐντός. Κείσθω δὴ ἐντὸς ὡς διὰ τοῦ ζ. καὶ ἐπεὶ αἱ ζ δ, α β, εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας ἐν κύκλῳ εἰσὶ, πάντως γε κατὰ τὴν λε: τοῦ γ': τοῦ Εὐκλείδ: τὸ ὑπὸ τῶν ζ ε, ε δ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν α ε, ε β, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν α ε, ε β, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν γ ε, ε δ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ζ ε, ε δ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ ε, ε δ, καὶ ἑπομένως ἡ ζ ε, ἴση ἐστὶ τῇ γ ε, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον. ὁμοίως δειχθήσεται μηδὲ ἐκτὸς τοῦ γ, διέρχεσθαι. Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib.4. Fig.3.



Πρό-

Πρότασις Ε′.

Παντὸς κύκλου ὑπὸ δύο διαμέτρων τεμνομένου πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κειμένων, μιᾶς δὲ τῶν διαμέτρων ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου κατὰ τὸ συνεχὲς ἐξαγομένης, καὶ ἑνὸς τῶν τοῦ κύκλου τεταρτημορίων εἰς μέρη ἴσα διῃρημένου, ἀφ᾽ ἑκάστου δὲ σημείου εὐθειῶν ἀγομένων παραλλήλων τῇ ἐξαχθείσῃ, ἐὰν ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς μὴ ἐξαχθείσης διαμέτρου διὰ τῆς κοινῆς τομῆς τῆς τε ἐλαχίστου παραλλήλου καὶ τοῦ διαιρεθέντος τεταρτημορίου εὐθεῖα ἀχθῇ, τέμνουσα τὴν ἐξαχθεῖσαν, ἡ ἐναπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τῆς τομῆς καὶ τῆς κοίλης τοῦ κύκλου περιφερείας, ἴση ἔσται ἁπάσαις ταῖς παραλλήλαις ὁμοῦ λαμβανομέναις.

Geom. Lib. 4. Fig. 4.

E′.

Ἔστω δὴ κύκλος ὁ αβγδ, διάμετροι δὲ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κείμεναι, καὶ τὸν κύκλον τέμνουσαι, αἱ αγ, βδ· ἐξαχθήτω δὲ καὶ ἡ βδ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ ἄπειρον ἀπὸ τοῦ β, σημείου, καὶ διαιρεθήτω τὸ αβ, τεταρτημόριον εἰς μέρη ἴσα τὰ βε, εζ, ζη, ηθ, θκ, κα, καὶ ἀφ᾽ ἑκάστου σημείου τῶν εζη, καὶ λοιπῶν ἀχθήτωσαν παραλλήλως τῇ βδ, αἱ ελ, ζμ, ην, θξ, κο, εὐθεῖαι. ἀπὸ δὲ τοῦ α, πέρατος τῆς αγ, διαμέτρου διὰ τοῦ κ, κοινῆς τομῆς τῆς τε κο, ἐλαχίστης παραλλήλου καὶ τοῦ αβ, τεταρτημορίου ἤχθω ἡ ακπ. Λέγω τὴν πδ, ἴσην εἶναι ταῖς βδ, ελ, ζμ, ην, θξ, κο, παραλλήλοις. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ λβ, μερ, νζσ, ξητ, οθφ. Δείκνυται. Ἐπεὶ αἱ βδ, ελ, ζμ, καὶ λοιπαὶ εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, πάντως γε τὰ εβ, λδ, ζε, μλ, καὶ λοιπὰ ἀπεναντίον τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν ι: τοῦ β′: τοῦ παρόντ: ἀλλὰ τὰ βε, εζ, ζη, καὶ λοιπὰ ἴσα εἴληπται, ἄρα καὶ τὰ δλ, λμ, καὶ λοιπὰ ἴσα εἰσίν. ὥστε κατὰ τὴν κζ′: τοῦ γ′: τοῦ Εὐκλείδου, αἱ ὑπὸ βλε, λεμ, γωνίαι ἴσαι εἰσί, βεβήκασι γὰρ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν βε, λμ, ὥστε αἱ βλ, μερ, εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν κζ′: τοῦ α′: τοῦ αὐτοῦ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ λε, δβρ, ὁμοίως παράλληλοι, ἄρα τὸ βλερ, τετράπλευρον παραλληλόγραμμόν ἐστι, καὶ ἑπομένως ἡ βρ, τούτου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπεναντίον λε, κατὰ τὴν λδ′: τοῦ αὐτοῦ.

διὰ

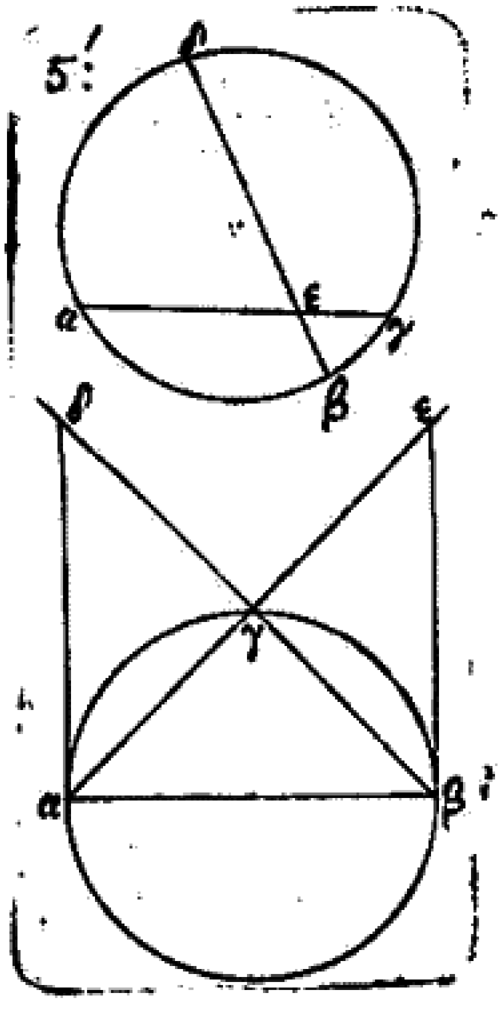
διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται καὶ ἡ μζ, τῇ ρσ, ἴση, καὶ ἡ νυ, τῇ σπ, καὶ ἡ ξθ, τῇ τφ, καὶ ἡ οχ, τῇ φπ, ὥστε ὅλη ἡ δπ, ἴση ἐστὶ ταῖς δβ, λε, μζ, νυ, ξθ, οχ, ὁμοῦ λαμβανομέναις. Παντὸς ἄρα κύκλου ὑπὸ δύο διαμέτρων τεμνομένου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ς':

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας τὰ τῆς μιᾶς τμήματα ἀντιπεπονθότως ἔχει πρὸς τὰ τῆς ἑτέρας.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγδ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ αγ, βδ, εὐθεῖαι κατὰ τὸ ε, σημεῖον. Λέγω, ὅτι ὡς ἔχει τὸ δε, τμῆμα τῆς βδ, πρὸς τὸ αε, τῆς αγ, οὕτως ἔχει καὶ τὸ εγ, τῆς αβ, τμῆμα πρὸς τὸ εβ, τῆς βδ, τμῆμα. Κατὰ γὰρ τὴν λε': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ὑπὸ τῶν δε, εβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αε, εγ. ὥστε λαμβανομένου τοῦ μὲν δε, ἀντὶ τοῦ α: μεγέθους, τοῦ δὲ αε, β': τοῦ δὲ εγ, γ': καὶ τοῦ εβ, δ': ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, πάντως γε ὡς τὸ δε, πρὸς τὸ αε, ἔστι καὶ τὸ εγ, πρὸς τὸ εβ, κατὰ τὴν ις': τοῦ ς': τοῦ Εὐκλείδου. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 4. Fig. 5.



Πρότασις Ζ':

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου κάθετοι πρὸς τὰ αὐτῆς πέρατα ἀχθῶσι, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, πρὸς ἣν αἱ κάθετοι, καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου εὐθεῖαι ἀχθῶσι συμπίπτουσαι ταῖς καθέτοις, ἑκάτερον τῶν ὑπὸ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, καὶ τῶν ἐναπολαμβανομένων μερῶν αὐτῶν ὑπό τε τῆς κοίλης τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ τῶν τῆς διαμέτρου περάτων περιεχομένων ὀρθογωνίων, ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου τετραγώνῳ.

Ἐπὶ τῆς αβ, τοίνυν διαμέτρου τοῦ αβγ, κύκλου ἀχθήτωσαν κάθετοι πρὸς τὰ α, καὶ β, αὐτῆς πέρατα αἱ αδ, βε, καὶ ληφθήτω σημεῖον ἐπὶ τῆς αγβ, περιφερείας τὸ γ, δι' οὗ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν α, καὶ β, εὐθεῖαι αἱ αε, βδ, συμπίπτουσαι ταῖς αδ, βε, καθέτοις κατὰ τὰ δ, καὶ ε. Λέγω ὅτι τό, τε ὑπὸ τῶν αε, αγ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον

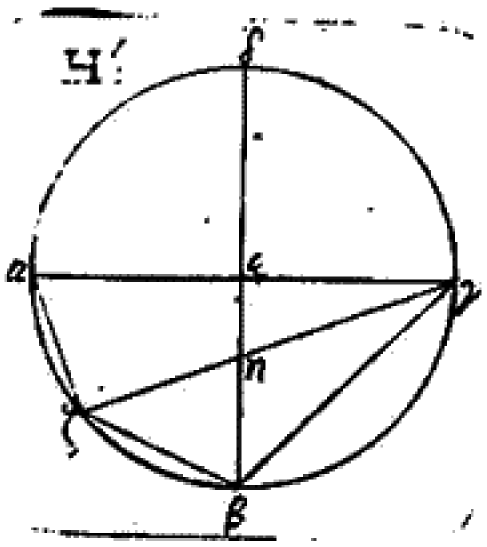
νιον ἴσον ἐστὶν ἑκάτερον τῷ ἀπὸ τῆς α β, τετραγώνῳ. Ἡ γὰρ ὑπὸ α γ β, γωνία ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν λα΄: τοῦ γ΄: Εὐκλείδου, ὥστε ἡ μὲν α γ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς β δ, ἡ δὲ β γ, ἐπὶ τῆς α ε. Ἐπεὶ δὲ ἐπὶ τὴν βάσιν ἑκατέρου τῶν α β ε, β α δ, ὀρθογωνίων τριγώνων κάθετος ἤχθη ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας, πάντως γε κατὰ τὸ β΄: πόρισμα τῆς η΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ αὐτοῦ, ἡ α β, μέση ἀνάλογός ἐστι τῆς τε α ε, καὶ α γ, καὶ τῆς β δ, καὶ β γ· ὡς ἔχει ἄρα ἡ α ε, πρὸς τὴν α β, ἔχει καὶ ἡ α β, πρὸς τὴν α γ· ὡς δὲ ἡ β δ, πρὸς τὴν β α, ἔχει ἡ β α, πρὸς τὴν β γ, καὶ ἑπομένως τὸ ὑπό τε τῶν α ε, α γ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, β γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α β, τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς διαμέτρου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Η΄:

Δύο διαμέτρων ἐν κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλας τεμνουσῶν, ἐὰν ἀφ' ἑνὸς τῶν τῆς μιᾶς περάτων εὐθεῖα ἀχθῇ τέμνουσα κατὰ τὰ τυχόντα σημεῖα τόν τε κύκλον καὶ τὴν λοιπὴν διάμετρον, τὸ ὑπό τε τῆς ἐναπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε πέρατος τῆς α΄: διαμέτρου καὶ τοῦ σημείου, καθ' ὃ ἡ β΄: τέμνεται, καὶ ὅλης τῆς τεμνούσης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἐγγραφομένῳ τετραγώνῳ.

Ἔστωσαν δὴ ἐν κύκλῳ τῷ α β γ δ, δύο διάμετροι τέμνουσαι ἀλλήλας αἱ α γ, β δ, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, πέρατος τῆς α γ, διαμέτρου ἤχθω ἡ γ ζ, τέμνουσα τόν τε κύκλον καὶ τὴν λοιπὴν διάμετρον ὡς ἔτυχεν. Ἐπεὶ δὲ τοῦτο διχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι, ἢ γὰρ ἡ ἐξαχθεῖσα ἅπασα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, ἢ μέρος μὲν ταύτης ἐντὸς, μέρος δὲ ἐκτὸς, καὶ ἡ τοιαύτη τεμεῖ τὴν λοιπὴν διάμετρον ἐξαγομένην. Ἔστω α΄: ἐντὸς τοῦ κύκλου πεπτωκυῖα, καὶ τέμνουσα τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ζ, τυχὸν σημεῖον, τὴν δὲ β δ, διάμετρον κατὰ τὸ η. Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς τε γ η, καὶ γ ζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐν τῷ α β γ δ, ἐγγραφομένῳ τετραγώνῳ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ β γ, β ζ, καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ γ β δ, γ ζ β, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὴν κζ΄: τοῦ γ΄: Εὐκλείδου, ἐπὶ ἴσων γὰρ περιφερειῶν βεβήκασι τῶν δ γ, γ β, τεταρτημορίων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ εἰσι μάλλον κύκλῳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ β γ ζ, κοινὴ, πάντως γε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ β η γ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ γ β ζ, ἴση ἐστὶν, ὥστε τὰ γ β η, γ ζ β, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, καὶ κατὰ τὴν δ΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ αὐτοῦ αἱ περὶ τὰς ἴσας αὐτῶν γωνίας πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ ζ, πρὸς τὴν γ β, ἡ γ β, πρὸς τὴν γ η, καὶ ἑπομένως τὸ ὑπὸ τῶν γ η, γ ζ, δύο ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον

Geom. Lib. 4. Fig. 6.

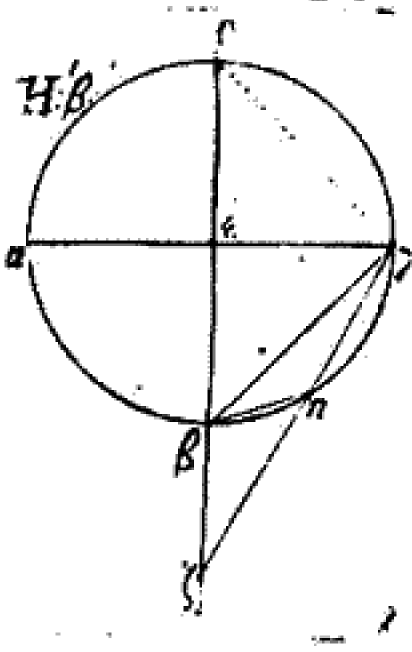


ἴσον

ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γ β, μέσης ἀναλόγου τετραγώνῳ κατὰ τὴν ιζ΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ αὐτοῦ. ἡ δὲ β γ, πλευρά ἐστι τετραγώνου ἐν τῷ α β γ δ, ἐγγραφομένου κύκλῳ, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν γ η, γ ζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἐν τῷ α β γ δ, ἐγγραφομένῳ τετραγώνῳ.

Πιπτέτω β΄: ἡ γ ζ, ἐκτὸς τοῦ κύκλου, τέμνουσα τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ η, τυχὸν σημεῖον, τὴν δὲ δ β, ἐκβαλλομένην κατὰ τὸ ζ. Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν γ ζ, γ η, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐν τῷ α β γ δ, κύκλῳ ἐγγραφομένῳ τετραγώνῳ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ γ β, γ δ, β η, εὐθεῖαι· καὶ ἐπεὶ τοῦ β η γ δ, τετραπλεύρου ἐν τῷ α β γ δ, κύκλῳ ἐγγραφομένου αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κβ΄: τοῦ γ΄: Εὐκλείδου, πάντως γε αἱ ὑπὸ γ δ β, γ η β, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ γ β δ, γ β ζ, ὁμοίως δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὴν ιγ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ, αἱ ἄρα ὑπὸ γ δ β, γ η β, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ γ β δ, γ β ζ. ἀφαιρουμένων δὲ ἴσων τῶν ὑπὸ γ δ β, γ β δ, ἴσαι γὰρ αὗταί εἰσι διὰ τὸ ἐπὶ ἴσων βεβηκέναι περιφερειῶν τῶν γ δ, γ β, τεταρτημορίων, ἐγκαταλείπονται αἱ ὑπὸ γ η β, γ β ζ, ἴσαι. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ β γ η, κοινὴ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ γ β η, λοιπῇ τῇ ὑπὸ γ ζ β, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ γ β η, τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ γ ζ β, τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον. ἔστιν ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ΄: τοῦ ϛ΄: Εὐκλείδου, ὡς ἡ γ ζ, πρὸς τὴν γ β, οὕτως ἡ γ β, πρὸς τὴν γ η, καὶ ἑπομένως τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γ ζ, γ η, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης γ β, τετραγώνῳ. ἀλλ᾽ ἡ γ β, πλευρά ἐστι τοῦ ἐν τῷ α β γ δ, κύκλῳ ἐγγραφομένου τετραγώνου, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν γ ζ, γ η, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐν τῷ α β γ δ, ἐγγραφομένῳ τετραγώνῳ. Δύο ἄρα διαμέτρων ἐν κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλας τεμνουσῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib.4. Fig. 7.

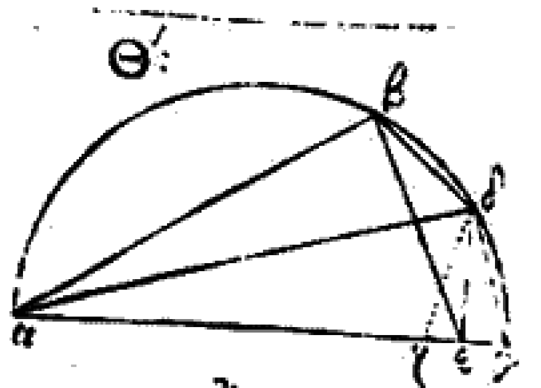


Πρότασις Θ΄:

Ἐὰν ἐν ἡμικυκλίῳ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εὐθεῖα ἀχθῇ, καὶ ἡ ἐναπολαμβανομένη περιφέρεια ὑπό τε τῆς εὐθείας καὶ διαμέτρου δίχα τμηθῇ, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου, καθ᾽ ὃ ἡ ἐναπολαμβανομένη τέμνεται περιφέρεια, κάθετος ἐπὶ τῆς διαμέτρου πέσῃ, ἡ ἐναπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπό τε τοῦ εἰλημμένου πέρατος τῆς διαμέτρου καὶ τοῦ σημείου, ἐφ᾽ οὗ κάθετος πίπτει, μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου ἀχθείσης εὐθείας.

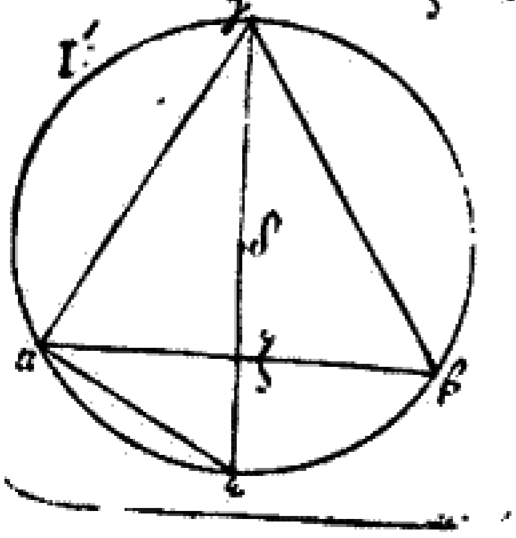
Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ α β γ, ἐπὶ διαμέτρου τῆς α γ, καὶ ἀπὸ τοῦ α, πέρατος τῆς α γ, ἤχθω ἡ α β, τέμνουσα τὸ α β γ, ἡμικύκλιον κατὰ τὸ β. Τμηθήτω δὲ καὶ ἡ βγ, δίχα κατὰ τὸ δ, ἀφ' οὗ πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς αγ, διαμ: ἡ δε. Λέγω δὴ τὴν αε, μείζονα εἶναι τῆς αβ. εἰλήφθω δὴ ἡ αζ, ἴση τῇ αβ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δζ, δβ, δγ, βε. καὶ ἐπεὶ ἡ δγ, μείζων ἐστὶ τῆς δε, τῇ δὲ δγ, ἴση ἐστὶν ἡ δβ, καὶ ἡ βδ, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς δε, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δεβ, γωνίας τῆς ὑπὸ δβε, μείζων ἐστίν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ αβδ, γωνία ἐν ἐλάττονι οὖσα τμήματι μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αεδ, ὀρθῆς κατὰ τὴν λα': τοῦ γ': τοῦ Εὐκλείδου, τῆς δὲ ὑπὸ δβε, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ δεβ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβε, λοιπῆς τῆς ὑπὸ αεβ, πολλῷ μείζων ἐστίν, ὥστε καὶ ἡ αε, εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τῆς αβ, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Lib.4. Fig.8.



Πρότασις Ι':

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων μέν ἐστι τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἐπίτριτος δὲ τῆς ἀπὸ μιᾶς τῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἐπὶ τῆς ἀπεναντίον πλευρᾶς καθέτου.



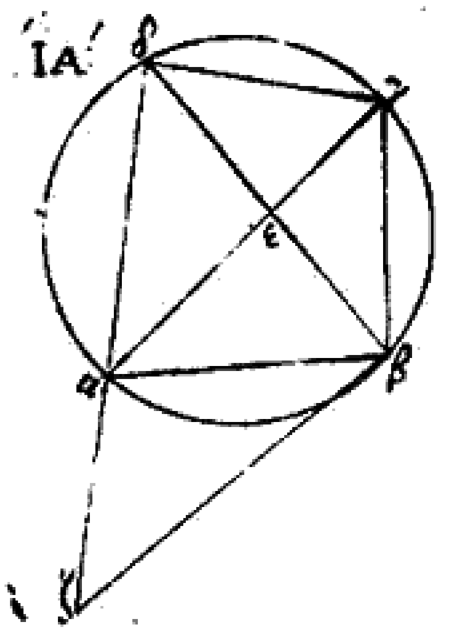
Ἔστω δὴ τὸ αβγ, ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον τὸν αβγ, οὗ κέντρον τὸ δ. Λέγω δὴ τὴν γα, πλευρὰν τοῦ αβγ, τριγώνου δυνάμει τριπλασίονα εἶναι τῆς γδ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς γα, τετράγωνον τριπλάσιον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς γδ. Ἤχθω ἡ γδε, διάμετρος καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε. Ἐπεὶ οὖν ἡ αβ, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ αβγ, κύκλου, καὶ τέμνεται δίχα ὑπὸ τῆς γε, ἡ αε, ἄρα περιφέρεια ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου, καὶ ἑπομένως ἴση τῇ γδ, ἀλλὰ τὸ τῆς γε, τετράγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, κατὰ τὴν β': τοῦ γ': τοῦ παρόντος. ἔστιν ἄρα τὸ αὐτὸ τετραπλάσιον καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς αε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γε, τετράγ: ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γα, αε, τετραγώνοις, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν γα, αε, τετράγωνα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνου, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αε, ἤτοι τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, ἴση γὰρ ἡ γδ, τῇ αε, ὡς δέδεικται. Λέγω ἔτι τὴν γα, τῆς γζ, δυνάμει ἐπίτριτον εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς γα, τετράγ: τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αε, ὡς δέδεικται, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γε, τετραπλάσιον, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς γε, τοῦ ἀπὸ τῆς γα, ἐπίτριτόν ἐστιν, ἤτοι ὡς ὁ 4, πρὸς τὸν 3, ἀλλ' ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν γα, ἔχει καὶ ἡ γα, πρὸς τὴν γζ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν γαε, γζα, τριγ: ὀρθογώνιον γὰρ ἑκάτερον, κοινὴν δὲ ἔχουσι τὴν ὑπὸ αγζ, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς γζ, ὥστε ἡ αγ, τῆς γζ, δυνάμει ἐπίτριτός ἐστιν, ἤγουν ὡς ὁ 4, πρὸς τὸν 3. Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑ΄.

Ἐὰν εἰς κύκλον τετράπλευρον ἐγγραφῇ, τὸ ὑπὸ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν ἀπεναντίων τοῦ αὐτοῦ πλευρῶν περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἔστω εἰς κύκλον τὸν αβγδ, ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον τὸ αβγδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ τούτου διαγώνιοι αἱ αγ, βδ. Λέγω δὴ τὸ ὑπὸ τῶν αγ, βδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν αδ, βγ, καὶ αβ, δγ, περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. Ἐπεὶ δὲ αἱ ὑπὸ τῶν διαγωνίων γινόμεναι γωνίαι ἢ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἢ ἄνισοι, ἔστωσαν α: ἄνισοι, ὡς αἱ ὑπὸ δεγ, βεγ, καὶ λοιπαί, καὶ ἤχθω ἡ δα, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως, πρὸς δὲ τῷ β, σημείῳ συνεστάθω ἡ ὑπὸ δβζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γβα, καὶ γενήσεται τὸ δβζ, τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ γβα. ἡ μὲν γὰρ ὑπὸ ζδβ, αὐτοῦ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγβ, διὰ τὸ ἐν τῷ αὐτῷ ἄμφω εἶναι τμήματι κατὰ τὴν κα: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Γέγονε δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δβζ, ἴση τῇ ὑπὸ γβα, πάντως γε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δζβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ γαβ, ἴση ἐστὶν, ὥστε κατὰ τὴν δ΄: τοῦ ς΄: τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ ζδ, πρὸς τὴν δβ, ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, καὶ ἑπομένως τὸ ὑπὸ τῶν ζδ, γβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βδ, αγ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ κατὰ τὴν ις΄: τοῦ αὐτοῦ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ζδ, γβ, ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν αβ, δγ, καὶ αδ, βγ, ὡς δειξόμεθα, ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδ, αγ, περιεχόμενον ὀρθογών: ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν αδ, βγ, καὶ αβ, δγ, ὅπερ ἦν τὸ ἐξ ἀρχῆς ὑποκειθέν.

Geom. Lib. 4. Fig. 9.

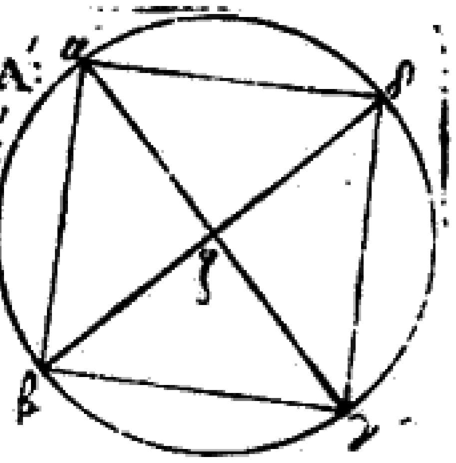


Ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ζδ, βγ, ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν αβ, δγ, καὶ αδ, βγ, δῆλον. Τὸ γὰρ ζαβ, τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δγβ. κατὰ γὰρ τὴν ιη΄: τοῦ γ΄: τοῦ παρόντος, ἡ ὑπὸ ζαβ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δγβ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αζβ, ἴση τῇ ὑπὸ βαγ, ὡς δέδεικται, τῇ δὲ ὑπὸ βαγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ γδβ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κα: ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αζγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γδβ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ αβζ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ γβδ, ἴση ἐστίν. ἄρα ὡς ἡ ζα, πρὸς τὴν αβ, ἔστι καὶ ἡ δγ, πρὸς τὴν γβ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ΄: κατὰ δὲ τὴν ις΄: τοῦ αὐτοῦ, τὸ ὑπὸ τῶν ζα, γβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δγ, αβ, εἰλημμένης δὲ τῆς ζδ, ὡς μιᾶς, πάντως γε τὸ ὑπὸ τῶν ζδ, β γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν α β, δ γ, καὶ β γ, α δ.

Ἔστωσαν δ' ἔτι αἱ ὑπὸ τῶν διαγωνίων γινόμεναι γωνίαι ἴσαι, ὡς ἐπὶ τοῦ β': τούτου σχήματος. Λέγω ὅτι καὶ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν α γ, β δ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν α β, δ γ, καὶ β γ, α δ, περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ α β δ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ β δ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ α δ β, ἴση τῇ ὑπὸ β γ α, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κα': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ β α δ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ β ζ γ, ἴση ἐστί, καὶ τὸ α β δ, τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ β ζ γ, τριγώνῳ, καὶ κατὰ τὴν προειρημένην δ': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α, ἔστι καὶ ἡ β γ, πρὸς τὴν γ ζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, γ ζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β γ, δ α, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Πάλιν ἐπεὶ ἡ ὑπὸ α β δ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ β δ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ β α γ, τῇ ὑπὸ γ δ β, κατὰ τὴν εἰρημένην κα': πάντως γε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ β ζ α, λοιπῇ τῇ ὑπὸ β γ δ, ἴση ἐστί. καὶ τὸ β ζ α, τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ β γ δ, τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ γ, ἡ β α, πρὸς τὴν α ζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, α ζ, περιεχόμενον ὀρθογ: ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν δ γ, α β, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, δέδεικται δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, γ ζ, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν β γ, δ α, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν β δ, α γ, περιεχόμενον ὀρθογ: ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν β γ, δ α, καὶ γ δ, α β, περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον τετράπλευρον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 4. Fig. 10.

ΙΑ': β':

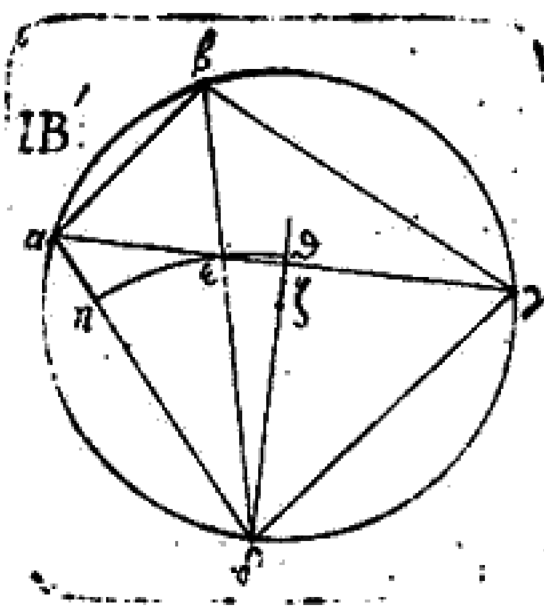


Πρότασις ΙΒ':

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο ἄνισοι διαχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ μείζων πρὸς τὴν ἐλάττονα, ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐπὶ τῆς μείζονος εὐθείας περιφέρεια πρὸς τὴν ἐπὶ τῆς ἐλάττονος.

Διαχθήτωσαν ἐν κύκλῳ τῷ α β γ δ, εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ α β, β γ. Λέγω ὅτι ἡ β γ, εὐθεῖα πρὸς τὴν α β, ἐλάττονα ἔχει λόγον, ἤπερ ἡ β γ, περιφέρεια πρὸς τὴν α β, περιφέρειαν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ α γ, καὶ τμηθείσης δίχα τῆς ὑπὸ α β γ, γωνίας ὑπὸ τῆς β δ, εὐθείας τεμνούσης καὶ τὴν α γ, εὐθεῖαν κατὰ τὸ ε, ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, δ γ, εὐθεῖαι. ἀπὸ δὲ τοῦ δ, σημείου πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς α γ, ἡ δ ζ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ α β δ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ β δ, γωνίᾳ, πάντως γε καὶ ἡ α δ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ δ γ, ὥστε κατὰ τὴν κθ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, καὶ αἱ α δ, δ γ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσίν, ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ α δ γ, τρί-

τρίγωνον, καὶ ἡ αγ, αὐτοῦ βάσις δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς δζ. Αὖθις ἐπεὶ ἡ βγ, περιφέρεια μείζων ἐστὶ τῆς αβ, περιφερείας, μείζων πάντως ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ γδβ, γωνία τῆς ὑπὸ βδα, γωνίας, κατὰ γὰρ τὴν κς′: τοῦ αὐτοῦ, ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἔστι δὲ ἡ αδ, εὐθεῖα ἴση τῇ δγ, ὡς δέδεικται, καὶ κοινὴ ἡ δε, ἄρα κατὰ τὴν κδ′: τοῦ ά: τοῦ αὐτοῦ, ἡ γε, βάσις μείζων ἐστὶ τῆς εα, βάσεως, ὥστε καὶ ἡ δζ, κάθετος ἐπὶ τῆς εγ, πίπτει. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ μὲν αδ, μείζων ἐστὶ τῆς δε, αὕτη δὲ τῆς ζδ, κατὰ τὴν ιθ′: τοῦ αὐτοῦ, δῆλον, ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, γραφόμενος κύκλος τὴν μὲν αδ, εὐθεῖαν τεμεῖ, τῆς δὲ ζδ, ὑπερεκπεσεῖται. Γραφήτω δὴ τόξον τὸ ηεθ, ἀπὸ κέντρου τοῦ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, καὶ ἐκβληθήτω ἡ δζ, ἐπὶ τὸ θ. τούτων γὰρ οὕτω γενομένων, ἐπεὶ τὸ δεζ, τρίγωνον ἐλάττονα λόγον ἔχει πρὸς τὸν δεθ, τομέα, ἤπερ τὸ δεα, τρίγωνον πρὸς τὸν δεη, τομέα, πάντως γε καὶ ἐναλλὰξ τὸ δεζ, τρίγωνον πρὸς τὸ δεα, τρίγωνον ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ δεθ, τομεὺς πρὸς τὸν δεη, τομέα, ὡς δὲ τὸ δζε, τρίγωνον πρὸς τὸ δεα, τρίγωνον, ἔχει καὶ ἡ ζε, βάσις πρὸς τὴν εα, βάσιν κατὰ τὴν ά: τοῦ ς′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ ἡ ζε, βάσις πρὸς τὴν εα, ἐλάττονα ἔχει λόγον, ἤπερ ὁ δθε, τομεὺς πρὸς τὸν δεη, τομέα.



ἀλλ' ὁ δθε, τομεὺς πρὸς τὸν δεη, τομέα ἔχει ὡς ὑπὸ θδε, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εδη, κατὰ τὴν ἐσχάτην τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ζε, εὐθεῖα ἐλάττονα ἔχει λόγον πρὸς τὴν εα, ἤπερ ἡ ὑπὸ θδε, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εδη, καὶ συνθέσει ἡ ζα, ἐλάττονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν εα, ἤπερ ἡ ὑπὸ ζδα, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εδα, ὥστε καὶ τὰ τῶν ἡγουμένων διπλάσια ὁμοίως ἕξουσιν, ἡ γα, ἄρα πρὸς τὴν εα, ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ γδα, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εδα, καὶ διαιρέσει ἡ γε, πρὸς τὴν εα, ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ γδε, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εδα, ὡς δὲ ἡ γε, πρὸς τὴν εα, ἔχει καὶ ἡ γβ, πρὸς τὴν βα, κατὰ τὴν γ′: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ βγ, ἐλάττονα ἔχει λόγον πρὸς τὴν αβ, ἤπερ ἡ ὑπὸ γδβ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ βδα, γωνίαν, ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ γδβ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ βδα, ἔχει καὶ ἡ βγ, περιφέρεια πρὸς τὴν αβ, περιφέρειαν, ἄρα ἡ βγ, εὐθεῖα πρὸς τὴν αβ, ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, περιφέρεια πρὸς τὴν αβ, περιφέρειαν. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

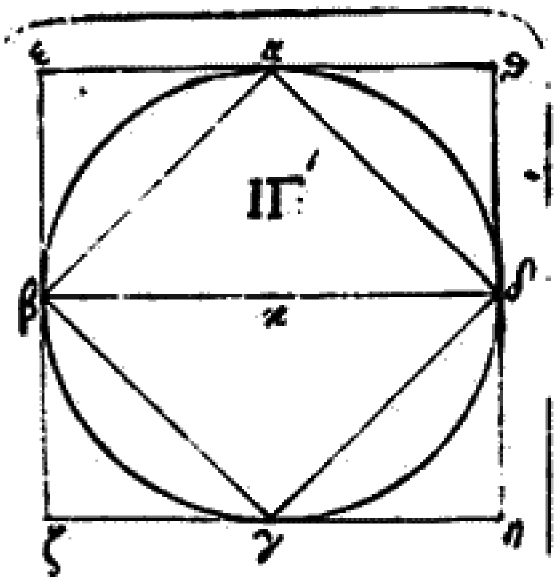
Πρό-

Πρότασις ΙΓ'.

Τὸ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον τετράγωνον τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένου διπλάσιόν ἐστιν.

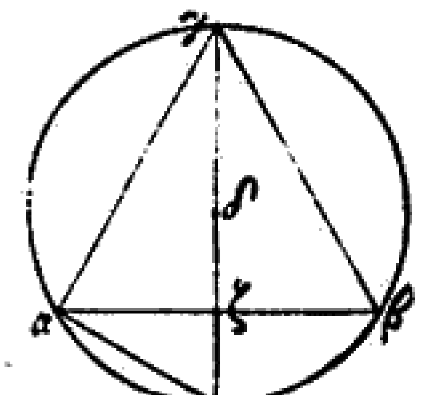
Ἔστω περιγεγραμμένον μὲν τετράγωνον περὶ τὸν αβγδ, κύκλον τὸ εζηθ, ἐγγεγραμμένον δὲ εἰς αὐτὸν τὸ αβγδ. Λέγω τὸ εη, διπλάσιον εἶναι τοῦ αγ, τετραγώνου. Διήχθω γὰρ ἡ διαγώνιος τοῦ αβγδ, διάμετρος ἡ βδ. καὶ ἐπεὶ ἑκάτερον τῶν αβγδ, εζηθ, τετραγώνων δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς βδ, ὅτι διὰ τοῦ κ, κοινοῦ διέρχεται κέντρου, τὸ δὲ ἥμισυ τοῦ εζηθ, περιγεγραμμένου, δηλ: τὸ εβδθ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ αβδ, ἡμίσεως τοῦ αβγδ, ἐγγεγραμμένου κατὰ τὴν μα: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὥσπερ καὶ τὸ ἕτερον ἥμισυ τὸ βζηδ, τοῦ βγδ, ἡμίσεως. δῆλον, ὅτι καὶ ὅλον τὸ εζηθ, περιγεγραμμένον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αβγδ, ἐγγεγραμμένου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Lib. 4. Fig. 12.



Πρότασις ΙΔ'.

Ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.



Ἔστω δὴ κύκλος ὁ αεβγ, ὅς καὶ ἀνωτέρω, οὗ διάμετρος ἡ γε, τρίγωνον δὲ ἰσόπλευρον ἐν αὐτῷ τὸ αβγ. Λέγω ὅτι ἡ γε, δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος τῆς αγ, μιᾶς πλευρᾶς τοῦ αβγ, τριγώνου. Τῆς αὐτῆς γὰρ τοῦ ἐν τῇ δεκάτῃ γενομένης κατασκευῆς. ἐπεὶ ἡ αε, ἴση ἐστὶ τῇ γδ, ὡς δέδεικται ἐν ἐκείνῃ, ἡ δὲ γε, διπλασία τῆς γδ, πάντως γε διπλασία ἐστὶν ἡ αὐτὴ γε, καὶ τῆς αε, καὶ ἑπομένως τὸ ἀπὸ τῆς γε, τετράγωνον, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αε, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ἀνωτέρω β': τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνου τριπλάσιον δέδεικται διὰ τῆς ἀνωτέρω ι: τὸ ἀπὸ τῆς γα. οἵων ἄρα μερῶν τεσσάρων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γε, τετράγωνον, τοιούτων τριῶν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γα, καὶ τοιούτου ἑνὸς τὸ ἀπὸ τῆς αε, ὥστε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι γε, γα, αε, δυνάμει εἰσὶν ἀνάλογοι, ὡς οἱ 4, 3, 1, καὶ ὡς ἔχει ὁ 4, πρὸς τὸν 3, ἔχει δυνάμει καὶ ἡ γε, πρὸς τὴν γα, ἀλλ' ὁ τοῦ 4, πρὸς τὸν 3, λόγος ἐπίτριτός ἐστιν, ὡς εἴρηται ἐν τῷ β': τῆς ἀριθμητικῆς μέρει, ἄρα καὶ ἡ γε, δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς γα. Ἡ τοῦ κύκλου ἄρα διάμετρος, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις ΙΕ':

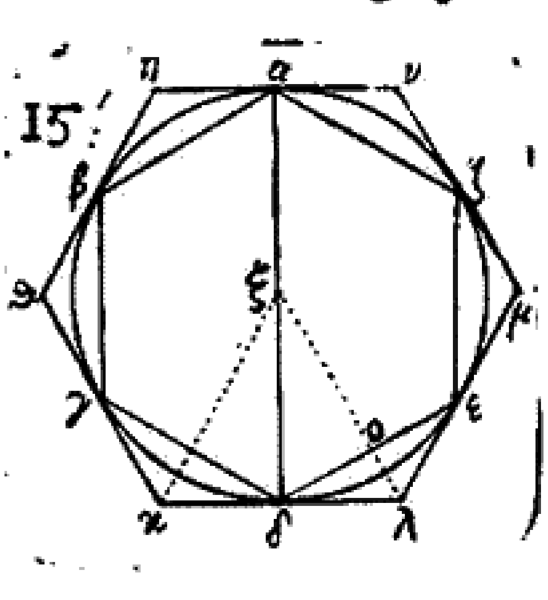
Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει ἐπίτριτος ἔσται τῆς ἠγμένης καθέτου.

Ἐγγραφήτω τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ α β γ, εἰς κύκλον τὸν αὐτὸν α ε β γ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς α β, ἡ γ ζ, περατουμένη κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ α ε. Λέγω οὖν τὴν γ α, δυνάμει ἐπίτριτον εἶναι τῆς γ ζ. Ἐπεὶ γὰρ κάθετός ἐστιν ἡ γ ε, ἐπὶ τῆς α β, δῆλον, ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει κατὰ τὸ α': πόρισμα τῆς γ': τοῦ γ': τῶν καθ' ἡμᾶς Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, καὶ διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται κατὰ τὴν αὐτὴν γ': ὥστε ἡ γ ε, διάμετρός ἐστι τοῦ α ε β γ, κύκλου, τὸ δὲ γ α ε, ἡμικύκλιον. καὶ κατὰ τὴν λα': τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ γ α ε, γωνία ὀρθὴ, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ γ ζ α, ὀρθὴ, τῶν ἄρα γ α ε, γ ζ α, τριγώνων αἱ ὑπὸ γ α ε, γ ζ α, γωνίαι ἴσαι, κοινὴ δὲ ἡ ὑπὸ α γ ζ, καὶ λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ γ ε α, γ α ζ, ἴσαι εἰσὶν, ὥστε καὶ ἰσογώνια τὰ γ α ε, γ ζ α, καὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ ε γ, πρὸς τὴν γ α, ἡ α γ, πρὸς τὴν γ ζ, ἀλλ' ἡ ε γ, δυνάμει ἐπίτριτος δέδεικται τῆς γ α, ἐν τῷ ἀνωτέρω, καὶ ἡ γ α, ἄρα τῆς γ ζ, δυνάμει ἐπίτριτός ἐστιν. Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον τρίγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ιϛ':

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς πολυγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου περιγεγραμμένου μὲν περὶ τὸν κύκλον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου αὐτοῦ, καὶ τῆς τοῦ κύκλου ἡμιδιαμέτρου περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἐγγεγραμμένου δὲ, τῷ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου, καὶ τῆς πιπτούσης καθέτου ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν. *Geom. Lib. 4. Fig. 15.*

15



Ἔστω ἐν κύκλῳ τῷ α β γ ε ζ, οὗ κέντρον τὸ ξ, ἐγγεγραμμένον μὲν πολύγωνον τὸ α β γ δ ε ζ, περιγεγραμμένον δὲ περὶ αὐτὸν τὸ η θ κ λ μ ν, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ξ δ, ἡμιδιάμετρος, καὶ πιπτέτω ἐπὶ τῆς γ δ, κάθετος ἡ ξ ο. Λέγω δὴ α': τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μὲν η θ κ λ μ ν, περιγεγραμμένου πολυγώνου ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ, καὶ τῆς ξ δ, ἡμιδιαμέτρου περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κατὰ γὰρ τὴν ιη': τοῦ γ': Εὐκλείδου, ἡ ξ δ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς κ λ. ἀλλὰ κατὰ τὴν κϛ': τοῦ γ': τοῦ παρόντος, παντὸς πολυγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου

τοῦ

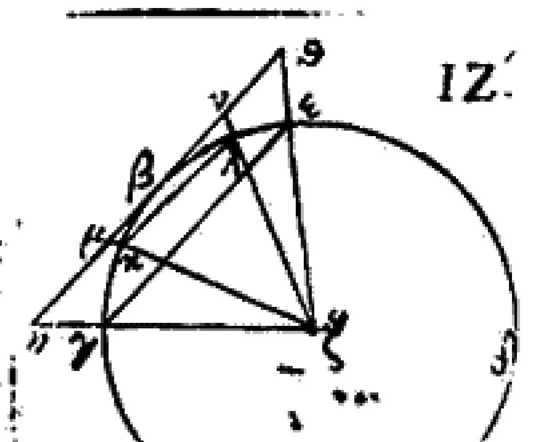
τοῦ αὐτοῦ καὶ τῆς πιπτούσης καθέτου ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν, ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ η θ κ λ μ ν, πολυγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου αὐτοῦ, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ κύκλου περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ α β γ δ ε ζ, ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἴσον εἶναι τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ, καὶ τῆς ξ ο, καθέτου περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Τὸ ἐμβαδὸν ἄρα παντὸς πολυγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΖ΄.

Εὐθείας γραμμῆς δοθείσης μείζονος τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, δυνατὸν περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγραφῆναι, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττων ἂν εἴη τῆς δοθείσης εὐθείας γραμμῆς.

Κείσθω τὴν α, εὐθεῖαν μείζονα εἶναι τῆς τοῦ β γ δ ε, κύκλου περιφερείας, οὗ κέντρον τὸ ζ, ὥστε ἔχειν τὴν αὐτὴν α, εὐθεῖαν πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὡς ἡ ζ η, πρὸς τὴν ζ γ. Λέγω ὅτι δυνατὸν περὶ τὸν β γ δ ε, κύκλον πολύγωνον περιγραφῆναι, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττων ἔσται τῆς δοθείσης α, εὐθείας. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ η, ἀπτομένη τοῦ β γ δ ε, κύκλου κατὰ τὸ β, ἡ η β θ, ὥστε τὴν β θ, ἴσην εἶναι τῇ β η, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζ θ. Εἶτα διῃρήσθω ὁ β γ δ ε, κύκλος εἰς μέρη τέσσαρα, κἂν μὲν ἡ ὑποτείνουσα τὸ δ΄: τοῦ κύκλου μέρος ἐλάττων ᾖ τῆς ὑποτεινούσης τὴν γ β ε, περιφέρειαν, περιγραφήτω τὸ περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον τετράγωνον. εἰδὲ μή, διαιρεθήτω εἰς ὀκτώ, ἢ εἰς ἑκκαίδεκα ἴσα μέρη, ἢ εἰς τὰ τούτων διπλάσια, ἕως οὗ γένηται ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφησομένου εἰς τὸν κύκλον πολυγώνου ἐλάττων τῆς γ ε, ὑποτεινούσης. Ἔστω δὴ ἐπὶ τοῦ παρόντος διῃρημένος ὁ κύκλος εἰς ὀκτώ, καὶ ἡ κ λ, τοῦ ἐγγραφησομένου ὀκταγώνου εἰς αὐτὸν πλευρὰ ἐλάττων τῆς γ ε, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζ κ, ζ λ, ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ συνεχές, ὥστε τέμνειν τὴν η β θ, κατὰ τὰ μ, καὶ ν, καὶ ἡ μ ν, ἔσται πλευρὰ τοῦ περιγραφησομένου πολυγώνου, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττων ἔσται τῆς δοθείσης α, εὐθείας. Δείκνυται. ἡ ζ η, μείζων ἐστὶ τῆς ζ μ, κατὰ τὸ πόρισμ. τῆς ι θ΄: τοῦ α΄: τῶν καθ᾽ ἡμᾶς στοιχείων Εὐκλείδου, ὥστε κατὰ τὴν η΄: τοῦ πέμπτου τοῦ αὐτοῦ ἡ ζ μ, ἐλάττω λόγον ἔχει πρὸς τὴν ζ κ, ἤπερ ἡ ζ ν, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ζ η, πρὸς τὴν ζ γ, ἢ τὴν ἴσην ταύτῃ ζ κ, ἔχει κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ ἡ δοθεῖσα α, εὐθεῖα πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ἡ ζ μ, ἄρα πρὸς τὴν ζ κ, ἐλάττονα ἔχει λόγον, ἤπερ ἡ α, εὐθεῖα πρὸς τὴν τοῦ β γ δ ε, κύκλου περιφέρειαν. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ ζ μ,

Geom. Lib. 4. Fig. 14.



πρὸς

πρὸς τὴν ζκ, ἔχει καὶ ἡ μν, πρὸς τὴν κλ, κατὰ τὴν β': τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ, παράλληλος γὰρ ἡ κλ, τῇ μν, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς ζκ, ζλ, καὶ ζμ, ζν, πάντως γε καὶ ἡ μν, πλευρὰ ὀκταγώνου περὶ τὸν βγδε, περιγραφομένη κύκλον, ἐλάττονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν κλ, πλευρὰν τοῦ ἐγγραφομένου ὀκταγώνου, ἤπερ ἡ α, εὐθεῖα πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὡς δὲ ἔχει ἡ τοῦ περιγραφομένου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου, ἔχει καὶ ὅλη ἡ τοῦ περιγραφομένου περίμετρος πρὸς ὅλην τοῦ ἐγγραφομένου περίμετρον, δῆλον ὅτι καὶ ἡ τοῦ περιγραφομένου ὀκταγώνου περὶ τὸν βγδε, κύκλον περίμετρος, ἐλάττω λόγον ἔχει πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ὀκταγώνου περίμετρον, ἢ ἡ α, πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. ἀλλ' ἡ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν βγδε, κύκλον ὀκταγώνου περίμετρος ἐλάττων ἐστὶ τῆς τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιμέτρου, ἄρα ἡ τοῦ περιγραφομένου ὀκταγώνου περίμετρος πολλῷ ἐλάττονα ἔχει λόγον πρὸς τὴν τοῦ βγδε, κύκλου περιφέρειαν, ἤπερ ἡ α, δοθεῖσα εὐθεῖα, καὶ κατὰ τὴν ι: τοῦ ε': Εὐκλείδου, ἡ τοῦ περιγραφομένου ὀκταγώνου περίμετρος περὶ τὸν βγδε, κύκλον ἐλάττων ἐστὶ τῆς δοθείσης α, εὐθείας, μείζονος οὔσης τῆς τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιφερείας. Εὐθείας ἄρα γραμμῆς δοθείσης μείζονος, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ. Α':

Ε'κ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν περιγραφομένων πολυγώνων περὶ τὸν κύκλον τοῦ πλείονας ἔχοντος τὰς πλευρὰς ἡ περίμετρος ἐλάττον ὑπερέχει τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. καὶ ἀνάπαλιν, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττονα ἔχει λόγον πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ἐκεῖνο ἔχει πλείονας τὰς πλευράς, τῶν δὲ ἐγγραφομένων τοὐναντίον.

Β': Ε'τι δυνατὸν ἐγγραφῆναι πολύγωνον, οὗ ἡ περίμετρος μείζων ἔσται τῆς δοθείσης εὐθείας, ἐλάττονος οὔσης τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Κείσθω γὰρ τὴν α, εὐθεῖαν ἔχειν πρὸς τὴν τοῦ βγδε, κύκλου περιφέρειαν ὡς ἡ ζγ, πρὸς τὴν ζη, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς πρότερον. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ζμ, μείζονα λόγον ἔχειν πρὸς τὴν ζκ, ἤπερ ἡ ζη, δῆλον ὅτι καὶ ἀνάπαλιν ἡ ζκ, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν ζμ, ἢ τὴν ζη, ἀλλ' ὡς ἡ ζκ, πρὸς τὴν ζμ, ἔχει καὶ ἡ ζγ, πρὸς τὴν αὐτὴν ζμ, ἴσαι γὰρ αἱ ζκ, ζγ, ὡς δὲ ἡ ζγ, πρὸς τὴν ζη, ὑπετέθη καὶ ἡ α, πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ἡ ζκ, ἄρα πρὸς τὴν ζμ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α, πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ἀλλ' ὡς ἡ ζκ, πρὸς τὴν ζμ, ἔχει καὶ ἡ κλ, πρὸς τὴν μν, ὡς δὲ ἡ κλ, πρὸς τὴν μν, καὶ ὅλη ἡ τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου περίμ: πρὸς ὅλην τὴν τοῦ περιγραφομένου, ἄρα καὶ ἡ τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου περίμ: πρὸς τὴν τοῦ περιγραφομένου μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δοθεῖσα α, εὐθεῖα πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ἡ δὲ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἡ τοῦ ἐγγραφομένου ἄρα πολυγώνου περίμετρος πολλῷ μείζονα ἔχει λόγον πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ἤπερ ἡ α, εὐθεῖα, καὶ ἑπομένως μείζων ἐστὶ τῆς α, δοθείσης ἐλάττονος τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Γ'. Τῶν ἐγγραφομένων πολυγώνων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον τοῦ τὰς πλείονας ἔχοντος πλευρὰς ἡ περίμετρος, μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ τὰς ἐλάττονας πλευρὰς ἔχοντος. καὶ ἀνάπαλιν, οὗ ἡ περίμετρος μείζων, ἐκεῖνο ἔχει καὶ πλευρὰς πλείονας. ὅθεν καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἔλαττον ἐλλείπει.

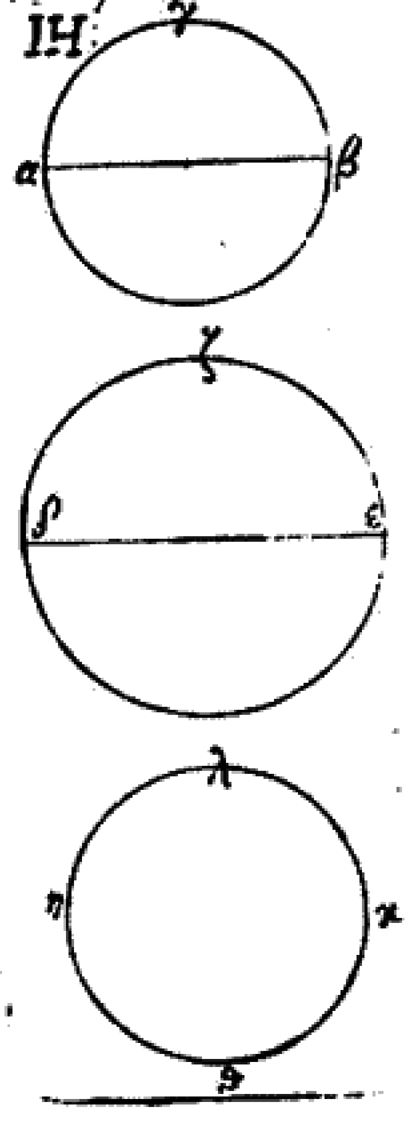
Πρότασις ΙΗ'.

Τῶν ἀνίσων κύκλων αἱ διάμετροι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς τὰς περιφερείας.

Ἔστωσαν κύκλοι ἄνισοι οἱ α β γ, δ ε ζ, ὧν διάμετροι αἱ α β, δ ε. Λέγω, ὅτι ἡ α β, διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ α β γ, κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν καὶ ἡ δ ε, διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ δ ε ζ, κύκλου περιφέρειαν. εἰ γὰρ μὴ, ἡ μία τούτων πάντως ἕξει ἐλάττονα λόγον, ἡ δὲ ἑτέρα μείζονα. Κείσθω δὴ τὴν μὲν α β, διάμετρον μείζονα λόγον ἔχειν πρὸς τὴν τοῦ α β γ, κύκλου περιφέρειαν, ἤπερ ἡ δ ε, πρὸς τὴν τοῦ δ ε ζ, περιφέρειαν. Κείσθω δ' ἔτι καὶ ἡ η θ κ λ, περιφέρεια ἐλάττων τῆς τοῦ δ ε ζ, κύκλου περιφερείας, ὥστε τὴν δ ε, διάμετρον τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὴν αὐτὴν η θ κ λ, περιφέρειαν, ὃν καὶ ἡ α β, διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ α β γ, κύκλου περιφέρειαν. Τούτων γὰρ οὕτω κειμένων, δυνατὸν κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς ἀνωτέρω ἐγγραφῆναι εἰς τὸν δ ε ζ, κύκλον πολύγωνον, οὗ ἡ περίμετρος μείζων ἔσται τῆς η θ κ λ, περιφερείας, ὥστε τὴν δ ε, διάμετρον ἐλάττονα λόγον ἔχειν πρὸς τὴν τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου περίμετρον, ἢ πρὸς τὴν τοῦ η θ κ λ, κύκλου περιφέρειαν. Ἐννοείσθω δὲ εἰς τὸν α β γ, κύκλον ἕτερον ὅμοιον πολύγωνον ἐγγεγραμμένον, ὥστε τὴν α β, διάμετρον αὐτοῦ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὴν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου πολυγώνου περίμετρον, ὃν καὶ ἡ δ ε, διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἰς τὸν δ ε ζ, κύκλον περίμετρον. τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἀνάλογον ἔχουσι τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευράς. Ἐπεὶ δὲ ἡ α β, διάμετρος μείζονα μὲν λόγον ἔχει πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ εἰς τὸν α β γ, κύκλον ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ἤπερ πρὸς τὴν τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὃν δὲ πρὸς τὴν τοῦ α β γ, περιφέρειαν ἔχει, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ἡ δ ε, πρὸς τὴν η θ κ λ, περιφέρειαν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, πάντως γε καὶ ἡ δ ε, διάμετρος μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ εἰς τὸν δ ε ζ, κύκλον ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ἤπερ πρὸς τὴν η θ κ λ, περιφέρειαν, ἀλλ' ὑπετέθη ἔχειν καὶ ἐλάττονα, ἄτοπον ἄρα, καὶ ἑπομένως ἡ δ ε,

Geom. Lib. 4. Fig. 15.

ΙΗ.



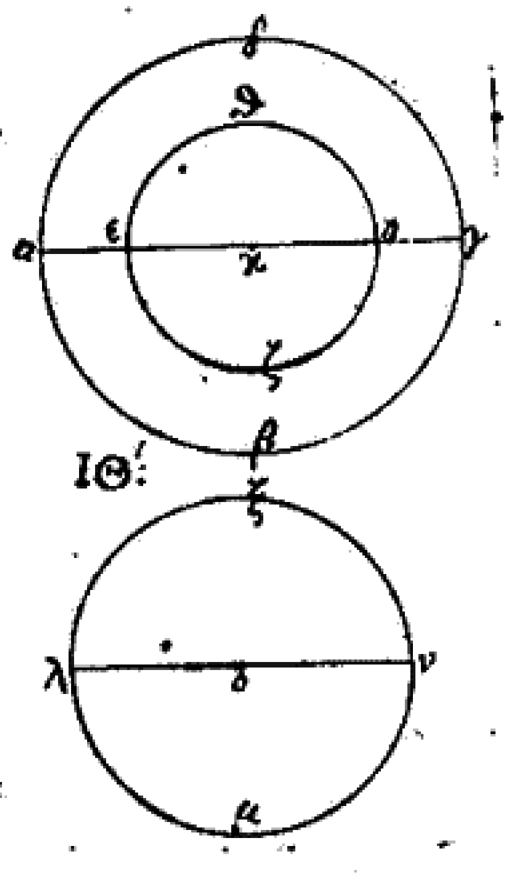
διαδιάμετρος οὐκ ἔχει ἐλάττονα λόγον πρὸς τὴν δ ε ζ, περιφέρειαν τοῦ τῆς α β, διαμέτρου πρὸς τὴν α β γ, περιφέρειαν. Τῶν ἀνίσων ἄρα κύκλων αἱ διάμετροι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΘ':

Ἡ ζώνη πρὸς τὸν κύκλον ἔχει, ὡς τὸ τῆς ζώνης ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου τετράγωνον.

Ἔστω ζώνη ἡ ὑπὸ τῶν α β γ δ, ε ζ η θ, ὁμοκέντρων κύκλων περιεχομένη, ὧν κέντρον τὸ κ, καὶ τυχὼν κύκλος ὁ λ μ ν ξ, οὗ κέντρον τὸ ο. Λέγω τὴν α β γ δ, ε ζ η θ, ζώνην ἔχειν πρὸς τὸν λ μ ν ξ, κύκλον, ὡς τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον. (τοῦτο γὰρ ζώνης καλεῖται ὀρθογώνιον) πρὸς τὸ τῆς λ ο, τετράγωνον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ α γ, τέτμηται εἰς ἴσα τὰ α κ, κ γ, καὶ ἄνισα τὰ α ε, ε γ, πάντως γε κατὰ τὴν ε': τοῦ β': τῶν Στοιχειωτῶν, τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε γ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ε κ, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α κ, τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ἀφαιρεθέντα ἀπ' αὐτοῦ ε ζ η θ, κύκλον ἔχει ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α γ, διαμέτρου τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε η, διαμέτρου, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς α γ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε η, τετράγωνον, ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α κ, ἡμιδιαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ. ἄρα ὁ α β γ δ, κύκλος ἔχει πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α κ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ. οἵ τε γὰρ κύκλοι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων τετράγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν αὐτῶν ἡμιδιαμέτρων. ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α κ, τετράγ: ὁ ε ζ η θ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ, τουτέστιν ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν. ἄρα κατὰ τὴν ε θ': τοῦ ε': τοῦ αὐτοῦ, ἔστι καὶ τὸ λοιπὸν, δηλ: ἡ δοθεῖσα ζώνη, πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ὡς ὅλον δηλ: ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ τῆς α κ, τετράγωνον. ὡς δὲ ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α κ, τετράγ: ἔχει καὶ ὁ ε ζ η θ, κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ, τετράγωνον ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ δοθεῖσα ζώνη ἔχει πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε γ, περιεχόμενον ὀρθογ: ὡς ὁ ε ζ η θ, κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ, τετράγ: καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ δοθεῖσα ζώνη πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ, τετράγ: ὡς δὲ ὁ ε ζ η θ, κύκλος πρὸς τὸν λ μ ν ξ, ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε κ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λ ο, ἄρα καὶ δι' ἴσου ὡς ἡ δοθεῖσα ζώνη πρὸς τὸν λ μ ν ξ, κύκλον, ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε γ, περιεχόμενον ὀρθογ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λ ο, τετράγωνον. Ἡ ζώνη ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 4. Fig. 16.

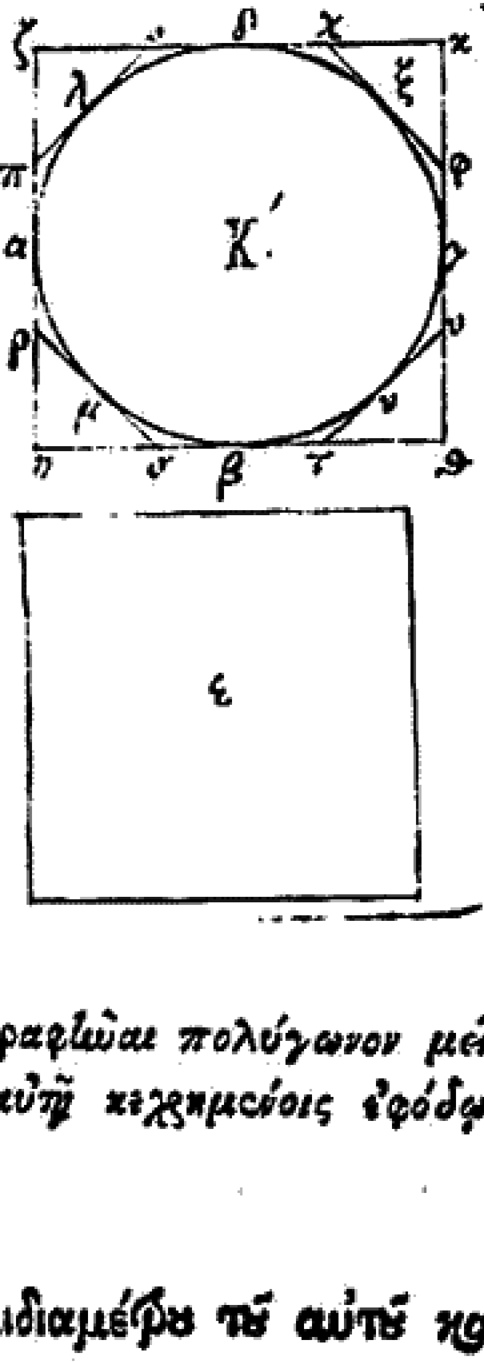


Πρότασις Κ΄:

Σχήματός τινος δοθέντος, οὗ τὸ ἐμβαδὸν μεῖζον ἂν εἴη τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δοθέντος κύκλου, δυνατὸν περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον περιγράψαι, οὗ τὸ ἐμβαδὸν ἔλαττον ἔσται τοῦ δοθέντος σχήματος.

Ἔστω σχῆμα μεῖζον τοῦ α β γ δ, κύκλου τὸ ε. Λέγω δή, ὅτι περὶ τὸν α β γ δ, κύκλον δυνατὸν περιγραφῆναι πολύγωνον, οὗ τὸ ἐμβαδὸν ἔλαττον ἔσται τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ σχήματος. Περιγραφήτω α: τετράγωνον περὶ τὸν α β γ δ, κύκλον τὸ ζ η θ κ,

Geom. Lib. 4. Fig. 17.



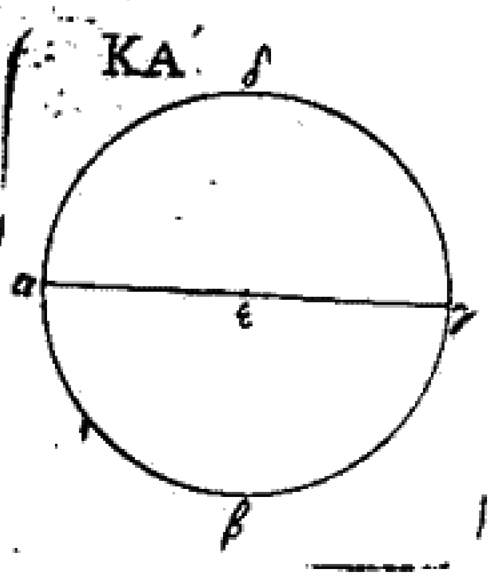
κἂν μὲν τοῦτο ἔλαττον εἴη τοῦ ε, σχήματος, ἔσται τὸ ὑποτεθέν· εἰ δὲ μεῖζον, ἢ γοῦν ἴσον, διαιρεθήτω ἑκάστη τῶν α δ, δ γ, γ β, β α, περιφερειῶν δίχα κατὰ τὰ λ μ ν ξ, καὶ ἀχθήτωσαν ἁπτόμεναι τοῦ κύκλου κατὰ τὰ αὐτὰ τῶν τομῶν αἱ π ο, χ φ, υ τ, σ ρ, καὶ περιγραφήσεται ὀκτάγωνον τὸ ο π ρ σ τ υ φ χ, ἔλαττον τοῦ η ζ θ κ, τετραγώνου κατὰ τὸ α: πόρισμα τῆς κη: τοῦ παρόντος. εἰ δὲ καὶ τὸ ο π ρ σ τ υ φ χ, ὀκτάγωνον μὴ εἴη ἔλαττον τοῦ ε, σχήματος. Γραφήτω περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον ἑκκαιδεκάγωνον, καὶ τοῦτο ἔλαττον ἔσται τοῦ περιγεγραμμένου ὀκταγώνου. εἰ δὲ καὶ τοῦτο οὐκ ἂν εἴη ἔλαττον τοῦ ε, διαιρεθήτω ἑκάστη τῶν τοῦ ἑκκαιδεκαγώνου πλευρῶν δίχα, καὶ περιγραφήσεται πολύγωνον ἔλαττον καὶ τοῦ ἑκκαιδεκαγώνου, καὶ τοῦτο γινέσθω ἐπ᾽ ἄπειρον, καὶ εὑρεθήσεται πάντως πολύγωνον περὶ τὸν δοθέντα κύκλον περιγραφόμενον ἔλαττον τοῦ ε. ὅσον γὰρ αἱ τοῦ περιγραφομένου πολυγ: περὶ τὸν κύκλον γωνίαι πληθύνονται, τοσοῦτον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἐλαττοῦται. εἰ δ᾽ αὖ τὸ ε, χωρίον ἔλαττον ὑποτεθῇ τοῦ α β γ δ, κύκλου, δυνατὸν ἐγγραφῆναι πολύγωνον μεῖζον τοῦ αὐτοῦ ε, χωρίου εἰς τὸν αὐτὸν α β γ δ, κύκλον τῇ αὐτῇ κεχρημένοις ἐφόδῳ.

Πρότασις ΚΑ΄:

Τὸ τοῦ κύκλου ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ αὐτοῦ καὶ ἡμιπεριφερείας περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Τὸ τοῦ α β γ δ, κύκλου ἐμβαδόν, οὗ κέντρον τὸ ε, καὶ διάμετρος ἡ α γ, λέγω ἴσον εἶναι τῷ ὑπό τε τῆς α ε, ἡμιδιαμέτρου, καὶ α δ γ, ἡμιπεριφερείας περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. εἰ γὰρ μή, ἢ μεῖζον ἔσται τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον, ἢ ἔλαττον τοῦ α β γ δ, κύκλου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον, οὔτε μὴν ἔλαττον, ἴσον ἄρα. Κείσθω γὰρ μεῖζον, καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω δοθέντος σχήματος, οὗ τὸ ἐμβαδὸν μεῖζόν ἐστι τοῦ δοθέντος κύκλυ, δύναται περιγραφῆναι πολύγωνον περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, ἔ τὸ ἐμβαδὸν ἔλαττον ἔσαι τῦ ἐμβαδῦ τῦ δοθέντος χήματος, πάντως γε καὶ περὶ τὸν α β γ δ, κύκλον δυνατὸν περιγραφῆναι πολύγωνον, οὗ τὸ ἐμβαδὸν ἔλαττον ἔσαι τῦ περιεχομένυ ὀρθογωνίυ ὑπό τε τῆς α ε, ἡμιδιαμέτρυ καὶ α δ γ, ἡμιπεριφερείας τῦ κύκλου. ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν παντὸς πολυγώνυ τῦ περὶ κύκλον περιγεγραμμένυ ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρυ αὐτῦ, καὶ τῆς τῦ κύκλυ ἡμιδιαμέτρου κατὰ τὴν ις': τῦ παρόντος, ἡ δὲ τῦ περιγραφομένυ πολυγώνυ ἡμιπερίμετρος μείζων ἐςὶ τῆς ἡμιπεριφερείας τῦ κύκλυ, ὡς περιεκτικῦ, ἄρα τὸ ἤδη περιγεγραμμένον πολύγωνον περὶ τὸν α β γ δ, κύκλον μεῖζόν ἐςι τοῦ περιεχομένυ ὀρθογωνίυ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου τῦ αὐτῦ κύκλυ α ε, καὶ τῆς α δ γ, ἡμιπεριφερείας, δέδεικται δὲ καὶ ἔλαττον, ἄτοπον ἄρα. Κείσθω δὲ ἔλαττον τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον τῦ δοθέντος α β γ δ, κύκλυ. ὅτι δὲ καὶ τοῦτο ἀδύνατον, δῆλον. κατὰ γὰρ τὴν ἀνωτέρω δυνατὸν ἐγγραφῆναι εἰς τὸν α β γ δ, κύκλον πολύγωνον μεῖζον τῦ αὐτῦ ὀρθογωνίυ. Ἐπεὶ δὲ ἡ ἡμιπερίμετρος τῦ αὐτῦ πολυγώνου ἐλάττων ἐςὶ τῆς ἡμιπεριφερείας τοῦ α β γ δ, κύκλου ὡς περιεχομένυ, πάντως γε τὸ αὐτὸ πολύγωνον ἔσαι καὶ ἔλαττον τῦ ὑπό τε τῆς α ε, ἡμιδιαμέτρυ, καὶ α δ γ, ἡμιπεριφερείας περιεχομένυ ὀρθογωνίυ, ὅπερ ἄτοπον.

Geom. Lib. 4. Fig. 18.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

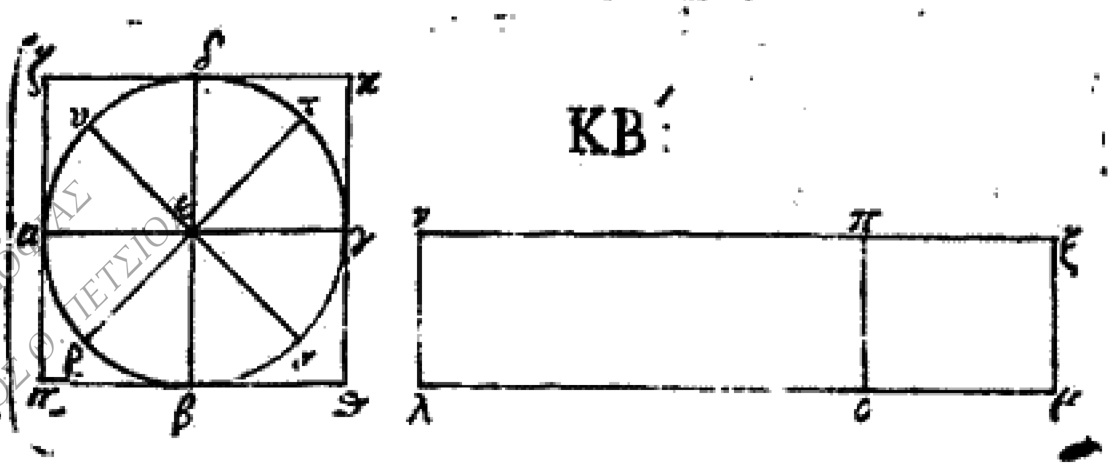
Ἐκ τέτου δῆλον, ὅτι ὁ κύκλος ἐςὶν ἴσος ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἔ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἴση ἐςὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῦ αὐτῦ κύκλου, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ ὅλῃ περιφερείᾳ, τὸ γὰρ τοιῦτον ὀρθογώνιον τρίγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ περιγραφομένῳ ὀρθογωνίῳ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου καὶ ἡμιπεριφερείας τῦ κύκλυ κατὰ τὴν ιβ': τῦ γ': τῦ παρόντος.

Πρότασις ΚΒ':

Τὸ περιγραφόμενον περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρυ τῦ κύκλυ καὶ τῆς διπλασίας τῆς αὐτῦ διαμέτρυ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἔςω κύκλος ὁ α β γ δ, ἔ κέντρον τὸ ε, καὶ γραφήτω περὶ αὐτὸν τετράγωνον τὸ ζ η θ κ. Εἰλήφθω δὲ καὶ ἡ λ μ, εὐθεῖα διπλασία τῆς α γ, διαμέτρυ τῦ δοθέντος κύκλυ, ἡ δὲ λ ν, ἴση τῇ α ε, ἡμιδιαμέτρῳ τῦ αὐτῦ, καὶ συμπληρώσθω τὸ λ μ ξ ν, ὀρθογώνιον. Λέγω ὅτι τὸ λ μ ξ ν, ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τῷ ζ η θ κ, τετραγώνῳ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ λ μ, διπλασία εἴληπται τῆς α γ, διαμέτρου, τῇ δὲ α γ, ἴση ἐςὶ καὶ ἡ ζ κ, πλευρὰ τῦ τετραγώνυ, αὕτη δὲ ἡ ζ κ, διπλασία ἐςὶ τῆς α ε, ἡμιδιαμέμέτρου, καὶ τῇ αε, ἴση εἰλήφθαι ἡ λν, πάντως γε αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι λμ, ζκ, λν, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ὡς ἔχει ἡ λμ, πρὸς τὴν ζκ, ἔχει καὶ ἡ ζκ, πρὸς τὴν λν, καὶ κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ϛ': Εὐκλείδου, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων λμ, λν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης ζκ, τὸ λμξν, ἄρα ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ζηθκ, τετραγώνῳ. Τὸ περὶ κύκλον ἄρα περιγραφόμενον τετράγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Lib. 4. Fig. 19.



Πρότασις ΚΓ':

Τὸ περὶ κύκλον περιγραφόμενον τετράγωνον ἔχει πρὸς τὸν αὐτὸν κύκλον, περὶ ὃν περιγράφεται, ὡς ὁ ιδ': ἀριθμὸς πρὸς τὸν ια':

Ἔστω δὴ περιγεγραμμένον περὶ τὸν αβγδ, κύκλον τὸ ζηθκ, τετράγωνον. Λέγω τοῦτο ἔχειν πρὸς τὸν αὐτὸν κύκλον ὡς ὁ ιδ'. ἀριθμὸς πρὸς τὸν ια': κατὰ γὰρ τὴν κα': τοῦ παρόντος ὁ αβγδ, κύκλος ἴσος ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ὑπό τε τῆς αε, ἡμιδιαμέτρου αὐτοῦ, καὶ τῆς αδγ, ἡμιπεριφερείας. Ἔστω δὲ τοῦτο τὸ λοπν, ἡ γὰρ λν, ἴση εἰλήφθαι τῇ αε, ἡμιδιαμέτρῳ, κείσθω δὲ καὶ ἡ λο, ἴση τῇ αδγ, ἡμιπεριφερείᾳ, ὁ αβγδ, ἄρα κύκλος ἴσος ἐστὶ τῷ λπ, ἔστι δὲ κατὰ τὴν ἀνωτέρω καὶ τὸ λξ, ἴσον τῷ ζηθκ, τετραγώνῳ, καὶ κατὰ τὴν α': τοῦ ϛ': Εὐκλείδου, τὸ λξ, πρὸς τὸ λπ, ἔχει ὡς ἡ λμ, πρὸς τὴν λο, ἄρα καὶ τὸ ζηθκ, τετράγ: πρὸς τὸν κύκλον ἔχει ὡς ἡ λμ, πρὸς τὴν λο, ἀλλ' ἐὰν ἡ λμ, ὑποτεθῇ μοιρῶν 14: ἡ λο, ἔσται σχεδὸν τοιούτων 11: τὸ ζηθκ, ἄρα τετράγωνον ἔχει πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον ὡς ὁ 14: πρὸς τὸν 11: ὅτι δὲ ἡ λμ, ἔχει πρὸς τὴν ἡμιπεριφέρειαν τοῦ κύκλου δηλ: τὴν λο, ὡς ὁ 14: σχεδὸν πρὸς τὸν 11: δείξομεν ἐν τοῖς ἑξῆς, ἔνθα περὶ τοῦ τρόπου τῆς εὑρέσεως τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν αὐτοῦ περιφέρειαν ἐγγύτερον τῆς ἀληθείας ὁ λόγος ἔσται. Τὸ περὶ κύκλον ἄρα περιγραφόμενον τετράγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΔ΄.

Ἅπας κύκλου τομεὺς ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου, καὶ τῆς ἡμισέως τῆς ἀπολαμβανομένης περιφερείας ἀπὸ τῶν τὴν πρὸς τὸ κέντρον γωνίαν τοῦ τομέως περιεχουσῶν εὐθειῶν.

Ἔστω ἐπὶ τοῦ κέντρου αβγδ, κύκλου τομεὺς ὁ ερβσ, καὶ ἡ ρσ, περιφέρεια τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ β. Καὶ κείσθω τῇ βσ, ἴση ἡ ομ, τῇ δὲ βε, ἡ οπ. Λέγω δὴ τὸ οξ, ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ερβσ, τομεῖ. Κατὰ γὰρ τὴν λγ΄: τοῦ ϛ΄: Εὐκλείδου, οἱ ἐν ἴσοις κύκλοις τομεῖς, καὶ μᾶλλον οἱ ἐν τῷ αὐτῷ ὄντες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ περιφέρειαι. Ἔστω γοῦν ὁ κύκλος διῃρημένος εἰς τέσσαρας τομεῖς τοὺς ερβσ, εσγτ, ετδυ, ευαρ. ὡς ἔχει ἄρα ἡ ρβσ, περιφέρεια πρὸς τὴν σγτ, ἔχει καὶ ὁ ερβσ, τομεὺς πρὸς τὸν εσγτ, ὡς δὲ ἡ σγτ, πρὸς τὴν τδυ, ἔχει ὁ εσγτ, τομεὺς πρὸς τὸν ετδυ, ὡς δὲ ἡ τδυ, περιφέρεια πρὸς τὴν υαρ, ὁ ετδυ, τομεὺς πρὸς τὸν ευαρ, καὶ συνθέσει ἄρα ὡς αἱ ρβσ, σγτ, τδυ, υαρ, περιφέρειαι πρὸς τὴν ρβσ, οὕτως οἱ ερβσ, εσγτ, ετδυ, ευαρ, τομεῖς ὁμοῦ, ἤτοι ὁ πᾶς κύκλος πρὸς τὸν ερβσ, τομέα, ἀλλ᾽ ὡς ἅπασα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν ρβσ, περιφέρειαν, ἔχει καὶ ἡ ἡμιπεριφέρεια αβγ, πρὸς τὴν ἡμίσειαν βσ, ἄρα ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν βσ, ἡμίσειαν περιφέρειαν τῆς ρβσ, ἔχει καὶ ὁ πᾶς κύκλος πρὸς τὸν αρβσ, τομέα. ἀλλ᾽ ἡ μὲν λμ, ὑπετέθη ἴση τῇ ἡμιπεριφερείᾳ τοῦ αβγδ, κύκλου, ἡ δὲ ομ, τῇ βσ, ἄρα ὁ αβγδ, κύκλος ἔχει πρὸς τὸν ερβσ, τομέα ὡς ἡ λμ, πρὸς τὴν ομ, ὡς δὲ ἡ λμ, πρὸς τὴν ομ, κατὰ τὴν α΄: τοῦ ϛ΄: Εὐκλείδου, ἔχει καὶ τὸ λξ, πρὸς τὸ οξ, ὁ αβγδ, ἄρα κύκλος ἔχει πρὸς τὸν τομέα ερβσ, ὡς τὸ λξ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ οξ. Ἐπεὶ δὲ τὸ λξ, ἴσον δέδεικται τῷ αβγδ, κύκλῳ, πάντως γε ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ οξ, τῷ ερβσ, τομεῖ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ Τετάρτου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου.

ΣΤΟΙ.