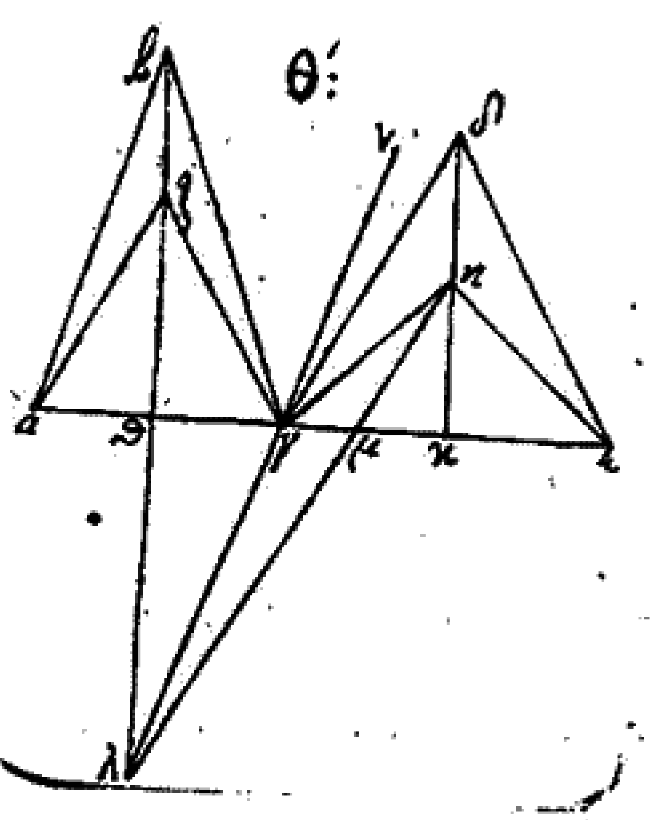
Πρότασις Θ'.

Τὰ ἐπὶ ἀνίσων βάσεων ὅμοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα τῶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων ἰσοσκελῶν τριγώνων, ἀνομοίων μὲν ἀλλήλοις τε καὶ τοῖς ὁμοίοις, ἰσοπεριμέτρων δὲ αὐτοῖς, μείζονά ἐστι συναμφότερα συναμφοτέρων.

Ἔστωσαν τρίγωνα ἰσοσκελῆ ὅμοια τὰ αζγ, γδε, ἐπὶ ἀνίσων βάσεων τῶν αγ, γε, ἔστωσαν δ' ἔτι ἐπὶ τῶν αὐτῶν αγ, γε, βάσεων καὶ ἕτερα δύο τρίγωνα ἰσοσκελῆ τὰ βαγ, γηε, ἀνόμοια μὲν καὶ ἀλλήλοις καὶ τοῖς ζαγ, δγε, ἰσοπερίμετρα δὲ τοῖς αὐτοῖς. Λέγω δὴ συναμφότερα τὰ ζαγ, δγε, ὅμοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα, μείζονα εἶναι συναμφοτέρων τῶν βαγ, ηγε, ἀνομοίων. Κείσθωσαν γὰρ αἱ αγ, γε, βάσεις ἐπ' εὐθείας καὶ ἔστω ἡ γε, μείζων τῆς αγ, ἐπιζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ βζ, δη, ὧν γε καὶ τὸ συνεχὲς ἐξαγομένων, τμηθήσονται αἱ αγ, γε, βάσεις δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὰ θ, καὶ κ, σημεῖα, ὡς δεψόμεθα. καὶ διήχθω ἡ βθ, κατὰ τὸ λ, ὥστε τὴν θλ, ἴσην εἶναι τῇ βθ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λγ, λη, δείκνυται. Ἐπεὶ αἱ βθ, θλ, ἴσαι εἰσὶ, κοινὴ δὲ ἡ θγ, καὶ αἱ πρὸς τῷ θ, γωνίαι ὀρθαὶ, πάντως γε καὶ αἱ βγ, λγ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειώτου, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βγθ, τῇ ὑπὸ λγθ, ἴση. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ βγθ, μείζων τῆς ὑπὸ ζγθ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ λγθ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζγθ, τῇ δὲ ὑπὸ ζγθ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ζαθ, καὶ τῇ ὑπὸ ζαθ, ἡ ὑπὸ δγε, διὰ τὴν τῶν τριγώνων ὁμοιότητα, ἄρα ἡ ὑπὸ λγθ, τῆς ὑπὸ δγε, μείζων ἐστὶ, καὶ πολλῷ μᾶλλον τῆς ὑπὸ ηγε, ὥστε ἡ λγ, εὐθεῖα, ἐκβαλλομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ γδε, τριγώνου, ὡς ἤδη κατὰ τὸ ν, αἱ γὰρ ὑπὸ νγε, λγθ, κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι ὀφείλουσι γενέσθαι, μείζων δὲ ἡ ὑπὸ λγθ, τῆς ὑπὸ δγε, ὡς δέδεικται. μείζων ἄρα ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ νγε, τῆς αὐτῆς δγε, καὶ ἑπομένως ἐκτὸς ἡ λγν, πεσεῖται. Ἐπιζευχθήτω οὖν ἡ λη, καὶ τεμεῖ πάντως τὴν γε, ἐντὸς γὰρ τοῦ τριγώνου δγε, τὸ η, σημεῖον ἐστὶ, τεμνέτω δὴ κατὰ τὸ μ, καὶ ἐπεὶ αἱ αζ, ζγ, γδ, δε, ἴσαι εἰσὶ ταῖς αβ, βγ, γη, ηε, διὰ τὸ ἰσοπερίμετρα εἶναι τὰ αζγ, γδε, τοῖς αβγ, γηε, καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν πάντως ἴσαι ἔσονται, αἱ ζγ, γδ, ἄρα ἴσαι εἰσὶ ταῖς βγ, γη, τουτέστι ταῖς λγ, γη, ἀλλ' αἱ λγ, γη, μείζονές εἰσι τῆς λη, κατὰ τὴν κ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειώτου, ἄρα καὶ αἱ ζγ, γδ, μείζονές εἰσι τῆς λη, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρων τῶν

Geom. Lib.3. Fig.7.



ζγ, γδ, ὡς ἀπὸ μιᾶς, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς λη, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῶν ζγ, γδ, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν ζθ, δκ, ὡς ἀπὸ μιᾶς μετὰ τοῦ ἀπὸ τῶν θγ, γκ, ὡς ἀπὸ μιᾶς, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ηλ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν ηκ, λθ, ὡς ἀπὸ μιᾶς μετὰ τοῦ ἀπὸ τῶν κμ, μθ, ὡς ἀπὸ μιᾶς κατὰ τὴν ε: τοῦ γ: τοῦ παρόντος· ἄρα τὸ ἀπὸ τῶν ζθ, δκ, ὡς ἀπὸ μιᾶς μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς θκ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῶν ηκ, λθ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς θκ, ἴση δὲ ἡ λθ, τῇ βθ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν ζθ, δκ, ὡς ἀπὸ μιᾶς μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς θκ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῶν βθ, ηκ, ὡς ἀπὸ μιᾶς μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς θκ, κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς θκ, ἔσται ἄρα τὸ ἀπὸ τῶν ζθ, δκ, ὡς ἀπὸ μιᾶς, μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῶν βθ, ηκ, ὡς ἀπὸ μιᾶς, κοινῶν δὲ ἀφαιρεθεισῶν τῶν ζθ, ηκ, ἐγκαταλείπεται ἡ δη, μείζων τῶν βζ, μείζων δὲ καὶ ἡ γκ, τῆς γθ, τὸ εἶναι μείζονα καὶ τὴν διπλασίονα αὐτῆς γε, τῆς διπλασίονος αγ, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ηδ, κγ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν βζ, θγ, τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν δη, κγ, ἥμισυ ἐστι τὸ δγη, τρίγωνον, καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν βζ, θγ, τὸ βγζ, κατὰ τὴν μα: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ δγη, ἄρα τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ βγζ, τριγώνου. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ δεη, μεῖζον τοῦ βαζ, ὥστε ὅλον τὸ γδεη, κοιλογώνιον μεῖζόν ἐστι τοῦ αβγζ, κοιλογωνίου. Κοινῶν δὲ προστεθειμένων τῶν αγζ, γεη, τριγώνων, ἔσται πάντως γε καὶ συναμφότερα τὰ αγζ, γδε, τρίγωνα μείζονα συναμφοτέρων τῶν αγβ, γεη, τριγώνων, ἀλλὰ τὰ αγζ, γδε, εἰσὶν ὅμοια, τὰ δὲ αγβ, γεη, ἀνόμοια. Τὰ ἐπὶ ἴσων ἄρα βάσεων ὅμοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα τῶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων ἰσοσκελῶν τριγώνων ἀνομοίων μὲν ἀλλήλοις τε καὶ τοῖς ὁμοίοις, ἰσοπεριμέτρων δὲ αὐτοῖς, μείζονά ἐστι συναμφότερα συναμφοτέρων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

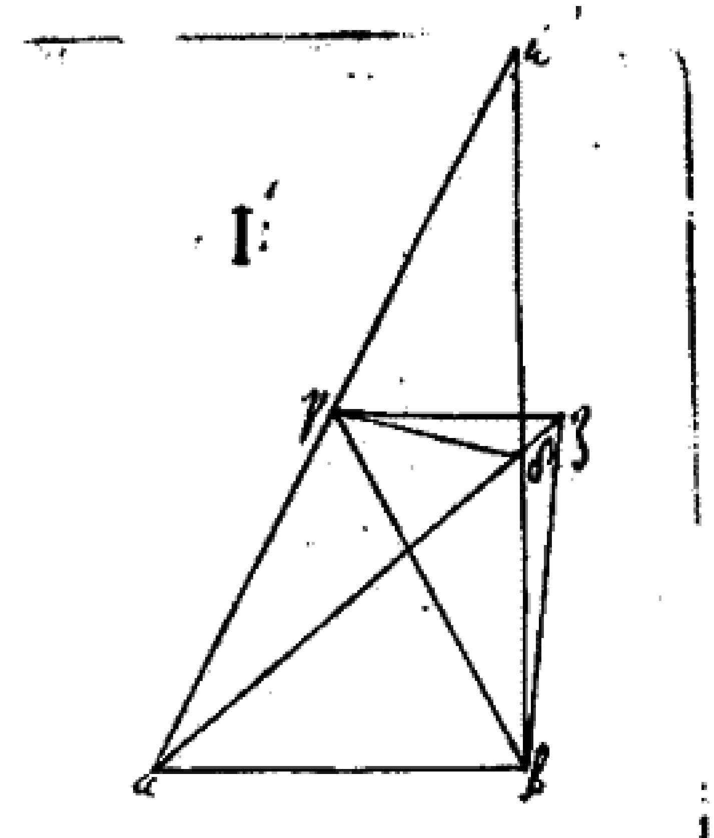
Πρότασις Ι':

Τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἰσοπεριμέτρων τριγώνων τὸ ἰσοσκελές ἐστι μεῖζον.

Ἐπὶ τῆς αβ, τοίνυν βάσεως ἔστω δύο ἰσοπερίμετρα τρίγωνα τὰ αβγ, αβδ, τὸ μὲν αβγ, ἰσοσκελὲς, τὸ δὲ αβδ, σκαληνόν. Λέγω δὴ τὸ αβγ, μεῖζον εἶναι τοῦ αβδ, ἤχθω ἡ αγ, ἐπὶ τὸ συνεχές. ὥστε τὴν γε, ἴσην εἶναι τῇ αγ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εδ, γδ, καὶ ἐπεὶ τὸ αβδ, τρίγωνον ἰσοπερίμετρόν ἐστι τῷ αβγ, πάντως γε αἱ αδ, δβ, ἴσαι εἰσὶν ταῖς αγ, γβ, κοινὴ γὰρ ἑκατέροις τοῖς τριγώνοις ἡ αβ, βάσις, γέγονε δὲ καὶ ἡ αγε, ἴση ταῖς αγ, γβ, ἄρα αἱ αδ, δβ, ἴσαι εἰσὶ τῇ ὅλῃ αγε, ἀλλὰ τῆς αγε, μείζονές εἰσιν αἱ αδ, δε, δῆλον, ὅτι αἱ αὐταὶ αδ, δε, μείζονές εἰσι καὶ τῶν αδ, δβ, κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς αδ, ἐγκαταλείπεται καὶ ἡ δε, μείζων τῆς δβ· τῶν ἄρα εγδ, βγδ, τριγώνων, ἐπεὶ εἰσὶν αἱ δύο πλευραὶ εγ, γδ, ἴσαι δυσὶ ταῖς βγ, γδ, ἡ δὲ βάσις εδ, μείζων τῆς δβ, βάσεως, πάντως γε κατὰ τὴν κε: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ ὑπὸ εγδ, γω-

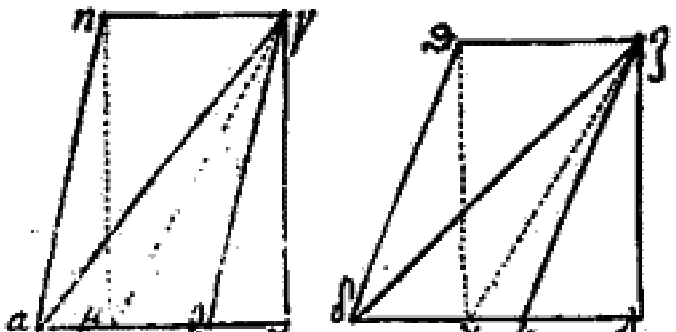
γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ β γ δ, ὥστε καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης ὑπὸ ε γ β, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ε γ δ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ε γ β, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ γ α β, γ β α, κατὰ τὴν λβ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, αὗται δὲ ἴσαι· ἡ ὑπὸ γ β α, ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς ὑπὸ ε γ β, ὥστε ἡ ὑπὸ ε γ δ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γ β α· γενέσθω ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ ε γ ζ, καὶ ἔσται κατὰ τὴν κζ': τοῦ αὐτοῦ, ἡ γ ζ, παράλληλος τῇ α β, καὶ διὰ τὴν λζ': τὸ α ζ β, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ α γ β, ἀλλὰ τὸ α ζ β, μεῖζόν ἐστι τοῦ α δ β, ἄρα καὶ τὸ α γ β, μεῖζόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ α δ β. Τῶν ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἰσοπεριμέτρων τριγώνων τὸ ἰσοσκελές ἐστι μεῖζον, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Lib.3. Fig.8.



Πρότασις ΙΑ':

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ὕψη, καὶ ἀνάπαλιν, τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ πρὸς ἄλληλα ἔχοντα ὡς τὰ ὕψη, ἐπὶ ἴσων βάσεών ἐστιν.



Ἔστωσαν τρίγωνα μὲν τὰ α β γ, δ ε ζ, ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν α β, δ ε, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ α β γ η, δ ε ζ θ, ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων α β, δ ε· καὶ πιπτέτω κάθετος ἀπὸ μὲν τοῦ γ, ἐπὶ τῆς α β, ἐκβαλλομένης ἡ γ κ, ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, ἐπὶ τῆς δ ε, καὶ ταύτης ἐκβαλλομένης ἡ ζ λ. Λέγω, ὅτι τά τε α β γ, δ ε ζ, τρίγωνα, καὶ τὰ α β γ η, δ ε ζ θ, παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα ἔχουσιν, ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη, δηλ: ὡς ἡ γ κ, κάθετος πρὸς τὴν ζ λ. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῶν η, καὶ θ, παράλληλοι ταῖς γ κ, ζ λ, αἱ η μ, θ ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ μ γ, ν ζ, καὶ ἐπεὶ τὰ α β γ, μ κ γ, καὶ δ ε ζ, ν λ ζ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν λη': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε ὡς τὸ α β γ, πρὸς τὸ δ ε ζ, ἔχει καὶ τὸ μ κ γ, πρὸς τὸ ν λ ζ, ἀλλὰ τὰ μ κ γ, ν λ ζ, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ γ κ, λ ζ, κατὰ τὴν α': τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ, ἴση γὰρ ἡ μ κ, τῇ ν λ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς η γ, ζ θ, καὶ διὰ αὐτὸ τοῦτο ἰσοϋψῆ, ἄρα καὶ τὰ α β γ, δ ε ζ, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ γ κ, ζ λ, αἵτινες τὰ τῶν αὐτῶν α β γ, δ ε ζ, τριγώνων, καὶ α γ, δ ζ, παραλληλογράμμων παριστῶσιν ὕψη, κατὰ τὸν μγ': ὅρον τοῦ παρόντος. Ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν α γ, παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ α β γ, τριγώνου, τὸ δὲ δ ζ, τοῦ δ ε ζ, δῆλον, ὅτι καὶ τὰ α γ, δ ζ, παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα ἔχουσιν, ὡς αἱ γ κ, ζ λ, ἤτοι τὰ αὐτῶν ὕψη. Ὅτι δὲ

καὶ

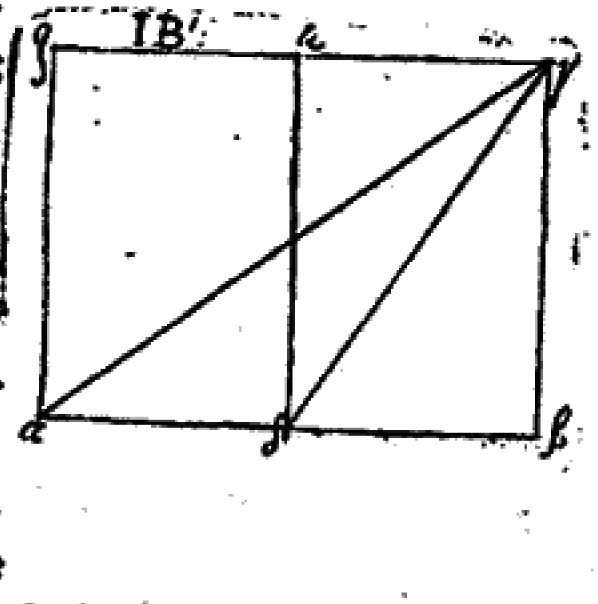
καὶ ἀνάπαλιν ἡ πρότασις ἀληθεύει, οὐ χαλεπὸν δεῖξαι. Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, δειχθήσονται τὸ μὲν αβγ, ἴσον τῷ μκγ, τὸ δὲ δεζ, ἴσον τῷ νλζ, καὶ ἑπομένως ἡ μὲν αβ, βάσις τῇ μκ, βάσει, ἡ δὲ δε, τῇ νλ, ἀλλ᾽ ἡ μκ, ἴση τῇ νλ, ἄρα καὶ ἡ αβ, ἴση τῇ δε. Τὰ τρίγωνα ἄρα καὶ τὰ παραλληλ: τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΒ':

Ἐὰν τρίγωνον διπλασίονα βάσιν ἔχῃ τῆς τοῦ παραλληλογράμμου, ᾧ τινι ἐν ταῖς αὐταῖς ᾖ παραλλήλοις, τὸ τρίγωνον ἴσον ἔσται τῷ παραλληλογράμμῳ.

Ἐχέτω δὴ τὸ αβγ, τρίγωνον τὴν αβ, αὐτοῦ βάσιν διπλασίονα τῆς αδ, βάσεως τοῦ αδεζ, παραλληλογράμμου, καὶ ἔστωσαν τό, τε αβγ, τρίγωνον καὶ αδεζ, παραλληλόγ: ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αβ, ζγ. Λέγω τὸ αβγ, τρίγωνον ἴσον εἶναι τῷ αδεζ, παραλληλογράμμῳ. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ δγ, καὶ ἐπεὶ τὰ αδγ, δβγ, τρίγωνα, ἐπὶ ἴσων βάσεων εἰσὶ τῶν αδ, δβ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, πάντως γε κατὰ τὴν λη: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ὥστε τὸ ὅλον αβγ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ αδγ, ἀλλὰ τοῦ αὐτοῦ αδγ, διπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ αδεζ, παραλληλόγραμμον κατὰ τὴν μα: τοῦ αὐτοῦ, τὸ ἄρα αβγ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αδεζ, παραλληλ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Lib. 3. Fig. 9.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἡ βάσις παντὸς τριγώνου δίχα τμηθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τῆς βάσεως πέσῃ, τὸ ὑπό τε τῆς καθέτου καὶ ἡμισείας τῆς βάσεως ἴσον ἐστὶ τῷ τριγώνῳ.

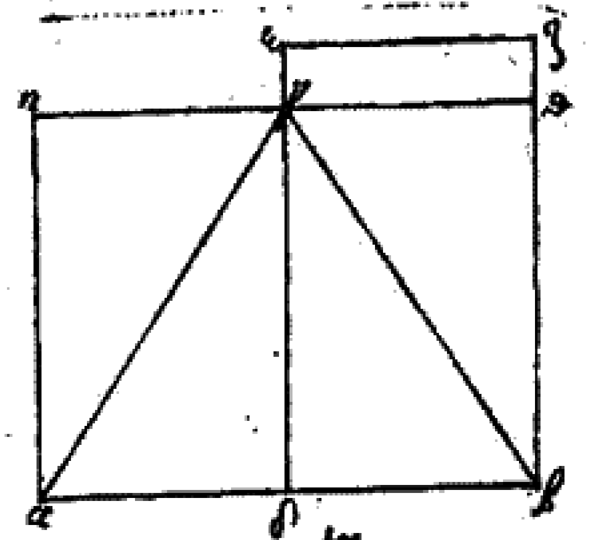
Πρότασις ΙΔ':

Ἐν παντὶ τριγώνῳ ἐὰν ἐπὶ τῆς ἡμισείας τῆς αὐτοῦ βάσεως παραλληλόγραμμον κατασκευασθῇ, ὥστε εἶναι τῷ τριγώνῳ ἰσοπερίμετρον, τὸ παραλληλόγραμμον μεῖζον ἔσται τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, οὗ βάσις ἡ αβ, τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ συνεστάσθω ἐπὶ τῆς δβ, παραλληλόγραμμον ἰσοπερίμετρον τῷ αβγ, τριγώνῳ τὸ δεζβ. Λέγω δὴ τὸ δεζβ, παραλληλόγραμμον μεῖζον εἶναι τοῦ αβγ, τριγώνου. Διχῶς δὲ τοῦτ᾽ ἐνδέχεται συμβῆναι. εἰ γὰρ τὸ τρίγωνον ἰσοσκελὲς εἴη, ὀρθογώνιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον, εἰ δὲ σκαληνὸν, ῥομβοειδές. Ἔστω δὴ πρ: τὸ αβγ, τρίγω-

τρίγωνον ἰσοσκελὲς, καὶ διὰ τοῦ γ, σημείου ἤχθω παράλληλος τῇ αβ, βάσει ἡ ηθ, ἀπὸ δὲ τοῦ α, τῇ γδ, ὁμοίως παράλληλος ἡ αη· καὶ ἐπεὶ ἡ γδα, γωνία ὀρθή ἐστι κατὰ τὸ α: πόρισμα τῆς γ': τοῦ γ': τῶν καθ' ἡμᾶς Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, πάντως γε ἡ αγ, μείζων ἐστὶ τῆς δγ, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἡ γβ, τῆς βθ, μείζων, ἀλλ' αἱ γθ, δβ, ἴσαι, εἰσὶν ἡ ὅλη αβ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ γδβθ, παραλληλογράμμου ἐλάττων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου, τὸ δὲ γδβθ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ αγβ, τριγώνῳ κατὰ τὴν ιά: τοῦ παρόντος, μεῖζον δὲ τὸ δβζε, τοῦ δβθγ, ἄρα τὸ δβζε, παραλληλ: ἰσοπερίμετρον δὴ τῷ αβγ, τριγώνῳ μεῖζον αὐτοῦ ἐστιν.

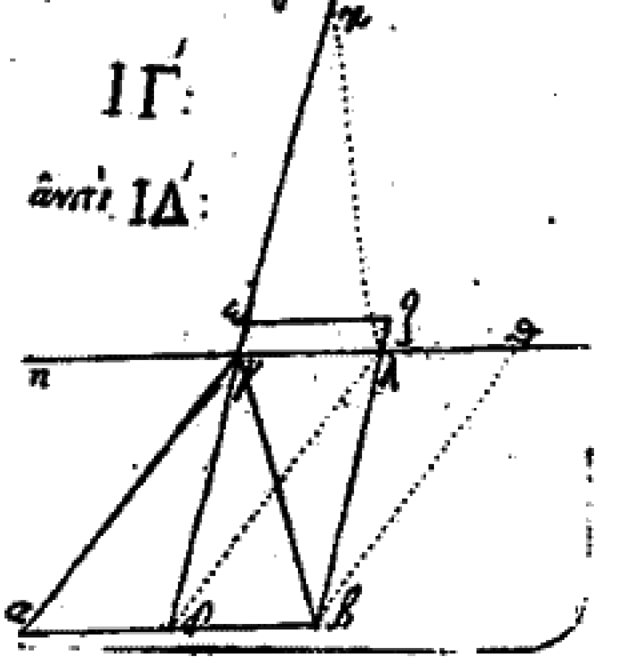
Geom. Lib. 3. Fig. 10.



Ἔστω β': τὸ αβγ, τρίγωνον σκαληνὸν, καὶ κατασκευασθήτω ἐπὶ τῆς δβ, ἡμισείας τῆς αὐτοῦ αβ, βάσεως ἰσοπερίμετρον τὸ δβζε, παραλληλόγραμμον. Λέγω δὴ καὶ τοῦτο μεῖζον εἶναι τοῦ αβγ, τριγώνου. Διήχθω γὰρ διὰ τοῦ γ, ὡς ἀνωτέρω παράλληλος τῇ αβ, ἡ ηθ, τέμνουσα τὴν βζ, κατὰ τὸ λ. ἡ δὲ δγ, ἐξαχθήτω ἀπὸ τοῦ γ, κατὰ τὸ συνεχὲς, ὥστε τὴν γκ, ἴσην εἶναι τῇ γδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δλ, λκ. Τὸ γοῦν δβλγ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ, τριγώνῳ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιά: τοῦ παρόντος, ἀλλὰ τοῦ δβλγ, μεῖζόν ἐστι τὸ δβζε, παραλληλόγραμμον. ἄρα τὸ αὐτὸ δβζε, μεῖζόν ἐστι καὶ τοῦ αβγ, τριγώνου, ᾧ περ ἰσοπερίμετρόν ἐστιν. ὅτι δὲ τὸ δβλγ, οὐ δύναται ποτὲ ἰσοπερίμετρον εἶναι τῷ αβγ, τριγώνῳ, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ γκ, ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι τῇ βλ. ἴση γὰρ εἴληπται τῇ γδ, ταύτῃ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ βλ, κατὰ τὴν λδ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε καὶ ἡ κλ, ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι τῇ γβ, κατὰ τὴν λγ': τοῦ αὐτοῦ, ἔστι δὲ καὶ ἡ δλ, ἴση τῇ αγ, κατὰ τὴν αὐτὴν λδ': αἱ δύο ἄρα δλ, λκ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δυσὶ τοῦ αβγ, τριγώνου πλευραῖς αγ, γβ. Αὖθις ἐπεὶ ἡ γκ, εἴληπται ἴση τῇ δγ, ἡ ὅλη πάντως δγκ, ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶ τοῦ δβλγ, παραλληλογράμμου πλευραῖς δγ, βλ, ἀλλ' αἱ δλ, λκ, μείζονές εἰσι τῆς δκ, κατὰ τὴν κ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἄρα καὶ αἱ αγ, γβ, μείζονές εἰσι τῶν δγ, βλ, ἡ δὲ ὅλη βάσις αβ, ἴση ἐστὶ ταῖς δβ, γλ, ἄρα ἡ τοῦ αβγ, τριγώνου περίμετρος, μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ δβλγ, παραλληλογράμμου: Ἐκ παντὸς ἄρα τριγώνου, ἐὰν ἐπὶ τῆς ἡμισείας τῆς αὐτοῦ βάσεως, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΙΓ'

ἀντὶ ΙΔ'



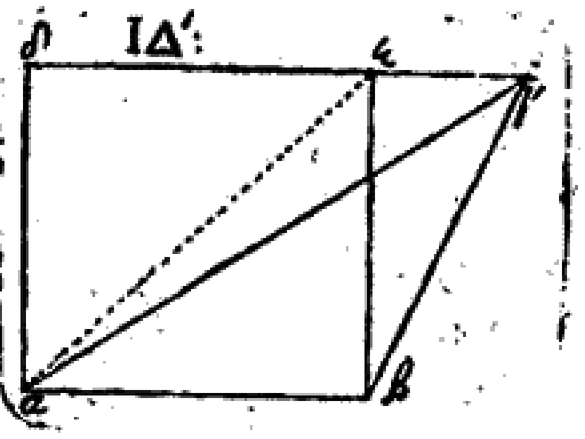
Πρό-

Πρότασις ΙΔ':

Ὅτι τρίγωνον τραπεζίῳ βάσιν ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ᾖ παραλλήλοις, εἰ μὲν τὴν μείζονα τῶν τοῦ τραπεζίου παραλλήλων πλευρῶν ἔχῃ τὸ τρίγωνον βάσιν, ἔλαττον ἔσται τὸ τραπέζιον τοῦ τριγώνου, ἢ διπλάσιον. εἰ δὲ τὴν ἐλάττονα, τὸ τραπέζιον μεῖζον ἔσται τοῦ τριγώνου, ἢ διπλάσιον.

Ἔστω τραπέζιον τὸ α β γ δ, καὶ αἱ τούτου πλευραὶ α β, γ δ, παράλληλοι, μείζων μέντοι ἡ δ γ, ἐλάττων δὲ ἡ α β. καὶ ἐχέτω α: τὸ α γ δ, τρίγωνον τὴν αὐτὴν δ γ, βάσιν τῷ α β γ δ, τραπεζίῳ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ὂν παραλλήλοις ταῖς α β, γ δ. ἐχέτω δ' ἔτι καὶ τὸ α β γ, τρίγωνον τὴν αὐτὴν α β, βάσιν τῷ α β γ δ, τραπεζίῳ ἐν ταῖς αὐταῖς καὶ αὐτὸ ὂν παραλλήλοις. Λέγω δὴ ὅτι τὸ τραπέζιον τοῦ μὲν α γ δ, τριγώνου ἔλαττόν ἐστιν, ἢ διπλάσιον, τοῦ δὲ α β γ, μεῖζον ἢ διπλάσιον. Τὰ γὰρ α δ γ, α β γ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ συναμφότερα τῷ α β γ δ, τραπεζίῳ. Ἐπεὶ δὲ τὸ α δ γ, τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ α β γ, τριγώνου, ὅτι ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἄμφω εἰσί, τοῦ δὲ α δ γ, μείζων ἡ βάσις τῆς τοῦ α β γ, βάσεως, πάντως γε τοῦ μὲν α δ γ, τριγώνου ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον τὸ α β γ δ, τραπέζιον. τοῦ δὲ α β γ, μεῖζον ἢ διπλάσιον. τῆς γὰρ β ε, παραλλήλως ἀχθείσης τῇ α δ, τὸ α β ε δ, παραλληλ: διπλάσιόν ἐστι τοῦ α β γ, τριγώνου κατὰ τὴν μ α: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, προστιθεμένου δὲ τοῦ β ε γ, τριγώνου τῷ α β ε δ, παραλληλογράμμῳ, τὸ ὅλον α β γ δ, μεῖζον ἔσται ἢ διπλάσιον τοῦ αὐτοῦ α β γ, τριγώνου. Ὅτι τρίγωνον ἄρα τραπεζίῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 3. Fig. 11.



Πρότασις ΙΕ':

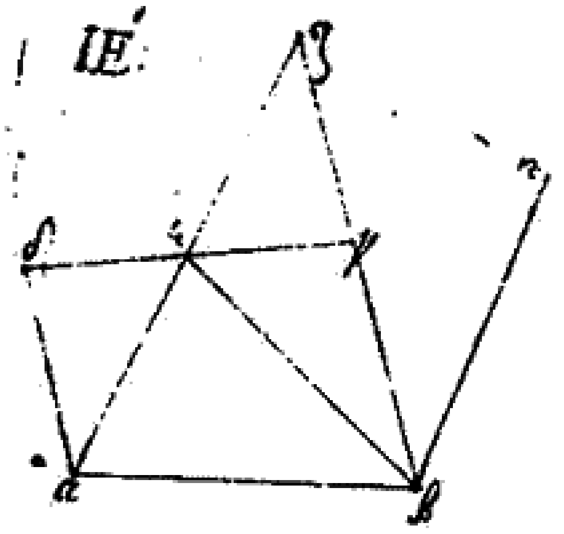
Ἐὰν ἐν τραπεζίῳ τὰς δύο ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευρὰς παραλλήλους ἔχοντι τρίγωνον συσταθῇ ἔχον μὲν βάσιν τὴν μίαν τῶν λοιπῶν δύο τοῦ τραπεζίου πλευρῶν, τὴν δὲ κορυφὴν ἐν μέσῳ τῆς ἀπεναντίον τῆς αὐτοῦ βάσεως, τὸ τραπέζιον διπλάσιον ἔσται τοῦ τριγώνου.

Τραπεζίου δὴ τοῦ α β γ δ, ἔστωσαν αἱ δύο ἀπεναντίον πλευραὶ α δ, β γ, παράλληλοι, καὶ τμηθήτω δίχα ἡ δ γ, κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ε, β ε, ὥστε συσταθῆναι τὸ α ε β, τρίγωνον ἐν τῷ α β γ δ, τραπεζίῳ, ἔχον βάσιν μὲν τὴν α β, τὴν δὲ κορυφὴν αὐτοῦ κατὰ τὸ ε, καθ' ὃ ἡ δ γ, δίχα τέτμηται, ἀπεναντίον οὖσα τῆς α β, τοῦ τριγώνου βάσεως. Λέγω ὅτι τὸ α β γ δ, τραπέζιον διπλάσιόν

ἐστι

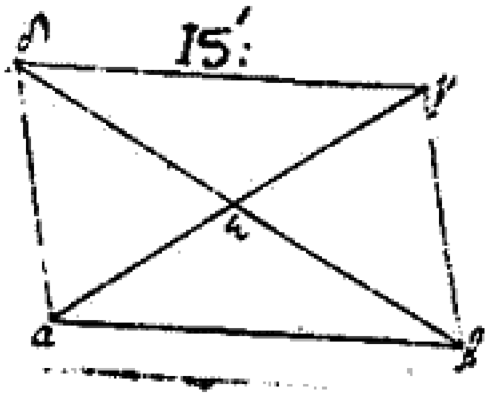
ἐστι τοῦ α ε β, τριγώνου. Διήχθωσαν γὰρ αἱ α ε, β γ, καὶ τὸ συνεχὲς, ὥστε συμπεσεῖν ἀλλήλαις κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ ἡ α δ, παράλληλός ἐστι τῆς β γ, πάντως γε ἡ ὑπὸ α δ ε, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ε γ ζ, ἔστι δὲ καὶ ὑπὸ δ ε α, ἴση τῇ ὑπὸ γ ε ζ, κατὰ κορυφὴν γὰρ, καὶ ἡ δ ε, τῇ ε γ, ἴση, ἄρα τὸ α δ ε, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ γ ε ζ, τριγώνῳ, καὶ ἡ α ε, πλευρὰ τῇ ε ζ, κατὰ τὴν κϛ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε τὰ α ε β, ε ζ β, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν λη΄: τοῦ αὐτοῦ, ἐπὶ ἴσων γάρ εἰσι βάσεων, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς α ζ, β η, τὸ δὲ ὅλον α β ζ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ α ε β, ἀλλὰ τὸ α β ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ δ, τραπεζίῳ. τοῖς γὰρ α δ ε, ε γ ζ, κοινοῦ προσκειμένου τοῦ α β γ ε, τραπεζίου γενήσεται τὸ α β γ δ, ἴσον τῷ α β ζ, τὸ δὲ α β ζ, δέδεικται διπλάσιον τοῦ α β ε, ἄρα καὶ τὸ α β γ δ, τραπέζιον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ α β ε, τριγώνου. Ἐὰν ἄρα ἐν τραπεζίῳ τὰς δύο ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευρὰς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 3. Fig. 10.



Πρότασις Ιϛ΄:

Ἅπαν τετράπλευρον διαιρεῖται εἰς τρίγωνα ἀνάλογα ὑπὸ τῶν αὐτοῦ διαμέτρων.



Ἔστω τετράπλευρον τὸ α β γ δ, διάμετροι δὲ αὐτοῦ αἱ α γ, β δ, τεμνόμεναι κατὰ τὸ ε. Λέγω ὅτι τὰ δ ε α, β ε α, δ ε γ, β ε γ, τρίγωνα ἀνάλογά ἐστι, καὶ ὡς ἔχει τὸ δ ε α, πρὸς τὸ β ε α, ἔχει καὶ τὸ δ ε γ, πρὸς τὸ β ε γ. ἢ ὡς τὸ α ε δ, πρὸς τὸ δ ε γ, ἔχει καὶ τὸ α ε β, πρὸς τὸ β ε γ. Κατὰ γὰρ τὴν α΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ α ε, πρὸς τὴν ε γ, οὕτως ἔχει καὶ τὸ α ε δ, πρὸς τὸ δ ε γ, καὶ τὸ α ε β, πρὸς τὸ β ε γ, ἄρα καὶ ὡς τὸ α ε δ, πρὸς τὸ δ ε γ, ἔχει καὶ τὸ α ε β, πρὸς τὸ β ε γ, κατὰ τὴν ια΄: τοῦ ε΄: τοῦ αὐτοῦ. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ δ ε, πρὸς τὴν ε β, ἔχει τό, τε δ ε α, πρὸς τὸ β ε α, καὶ τὸ δ ε γ, πρὸς τὸ β ε γ, ἄρα καὶ ὡς τὸ δ ε α, πρὸς τὸ β ε α, ἔχει καὶ τὸ δ ε γ, πρὸς τὸ β ε γ. Ἅπαν ἄρα τετράπλευρον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΖ΄:

Ἐὰν κύκλος διὰ τριῶν τοῦ τετραπλεύρου σημείων, οὗ αἱ ἀπεναντίον γωνίαι ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, γραφῇ, διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ δ΄:

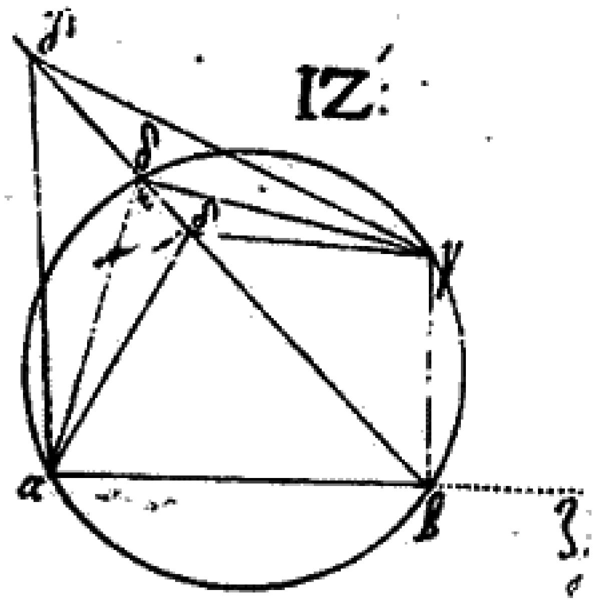
Διὰ τριῶν ἤδη σημείων τῶν α, β, γ, τοῦ α β γ δ, τετραπλεύρου, οὗ αἱ ὑπὸ α β γ, α δ γ, καὶ β α δ, β γ δ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Γραφήτω κύκλος ὁ α β γ δ.

L Λέγω

Λέγω ὅτι διελεύσεται ὁ κύκλος καὶ διὰ τοῦ λοιποῦ σημείου δ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, βδ. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ αδβ, εγβ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κα΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε κατὰ τὴν αὐτὴν ὁ διὰ τῶν αβγ, διερχόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ δ.

Ἄλλως. Δεδόσθω τὸν αβγ, κύκλον διερχόμενον διὰ τῶν α, β, γ, σημείων τοῦ αβγδ, τετραπλεύρου, μὴ διελθεῖν καὶ διὰ τοῦ δ. Τοῦτο δὲ διττῶς συμβήσεται, ἢ γὰρ ἐντὸς, ἢ ἐκτὸς τοῦ δ, διελεύσεται. Κείσθω δὴ α΄: ἐντὸς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, τέμνουσα τὸν αὐτὸν κύκλον κατὰ τὸ ε. Εἶτα ἐπεζεύχθωσαν καὶ αἱ αε, γε. καὶ ἐπεὶ τὸ αβγε, τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸν αβγε, κύκλον, πάντως γε κατὰ τὴν κβ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὥστε αἱ ὑπὸ αεγ, αβγ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, ἀλλ᾽ ὑπετέθησαν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι καὶ αἱ ὑπὸ αδγ, αβγ, ἄρα αἱ ὑπὸ αεγ, αβγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ αδγ, αβγ, κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ αβγ, ἐγκαταλείπεται ἡ ὑπὸ αεγ, ἴση τῇ ὑπὸ αδγ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν κα΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ. Τὸ αὐτὸ ἕψεται ἄτοπον κἂν ὁ κύκλος ὑποτεθῇ ἐκτὸς τοῦ δ, διέρχεσθαι. Ἐὰν ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 3. Fig. 13.



Πρότασις ΙΗ΄:

Παντὸς τετραπλεύρου ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον.

Ἐκβληθήτω δὴ τοῦ αβγδ, τετραπλεύρου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ διαγράμματος κατὰ τὸ συνεχὲς ἡ αβ, πλευρὰ πρὸς τὸ ζ, σημεῖον. Λέγω τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ γβζ, ἴσην εἶναι τῇ ὑπὸ αδγ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. κατὰ γὰρ τὴν ιγ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ αἱ ὑπὸ αβγ, γβζ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, αδγ, δυσὶν ὁμοίως ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, πάντως γε κατὰ τὸ α΄: ἀξίωμα αἱ ὑπὸ αβγ, γβζ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, αδγ, κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ αβγ, ἐγκαταλείπεται ἡ ὑπὸ γβζ, ἴση τῇ ὑπὸ αδγ, κατὰ τὸ γ΄: ἀξίωμα τοῦ Στοιχειωτοῦ. Παντὸς ἄρα τετραπλεύρου ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις ΙΘ'.

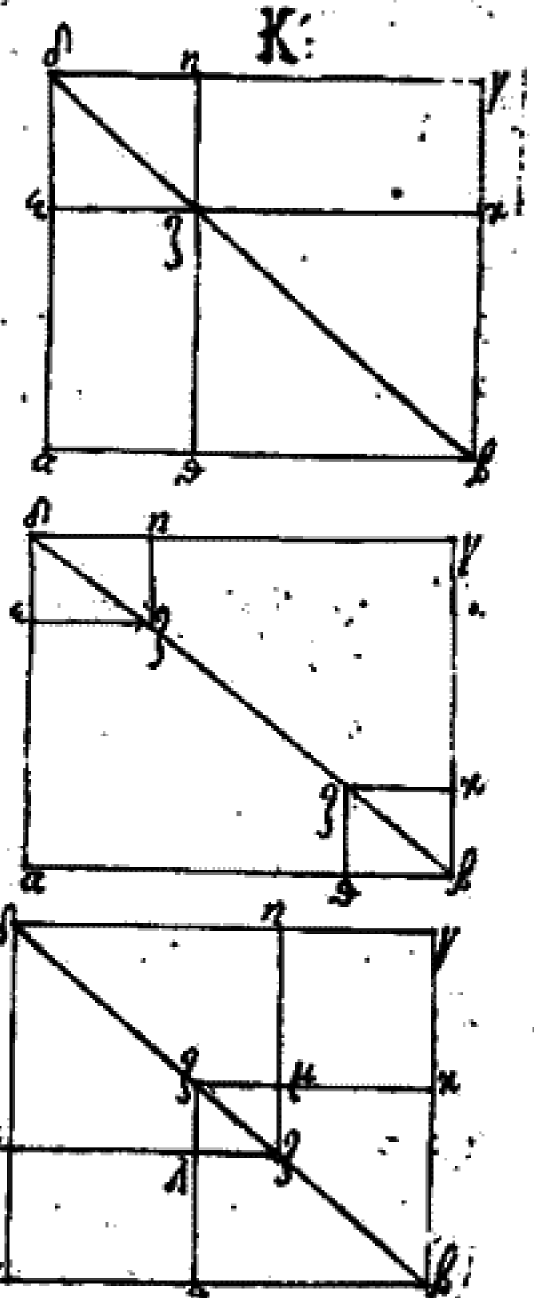
Πᾶν τετράπλευρον ἐν κύκλῳ ἐγγραφόμενον, ἐὰν αἱ δύο ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευραὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι, τετράγωνόν ἐστιν, ἢ ἑτερόμηκες.

Ὁ λόγος τούτου πρόδηλος τοῖς καὶ ἄκροις χείλεσι, τὸ δὴ λεγόμενον, ἀψαμένοις τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων· κατὰ γὰρ τὴν λγ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, καὶ αἱ λοιπαὶ δύο τοῦ αὐτοῦ τετραπλ: πλευραὶ ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι. ὥστε ἐὰν ἰσόπλευρον ᾖ, ἔσται τετράγωνον, ἢ δὲ μὴ, ἑτερόμηκες.

Πρότασις Κ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Geom. Lib. 3. Fig. 14.



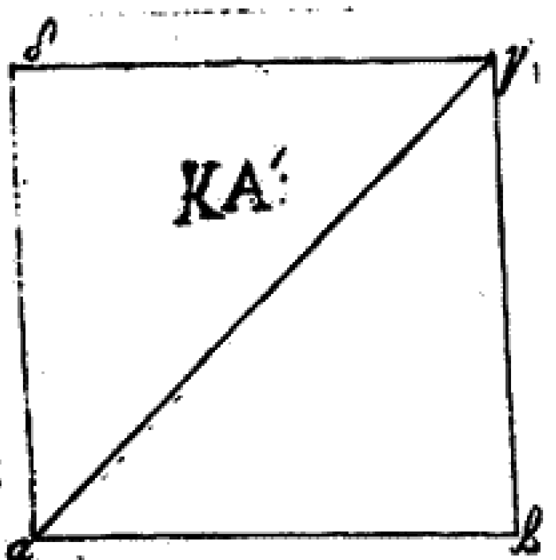
Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ α β γ δ, περὶ δὲ τὴν τούτου διάμετρον παραλληλόγραμμα μὲν τὰ δ ε ζ η, καὶ ζ θ β κ, παραπληρώματα δὲ τὰ λοιπά. Τριχῶς δὲ τοῦτο συμβῆναι ἐνδέχεται, ἢ γὰρ τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου καθ' ἓν σημεῖον μιᾶς τῶν αὐτῶν ἅπτονται γωνιῶν, ὡς ἐπὶ τοῦ α': ἐνταῦθα σχήματος, ἢ ἀπ' ἀλλήλων διΐστανται, ὡς ἐπὶ τοῦ β': ἢ γοῦν ἄλληλα τέμνουσιν, ὡς ἐπὶ τοῦ γ': κατὰ μὲν οὖν τὸν α': τρόπον, ὅτι τὰ ζ α, ζ γ, παραπληρώματα ἴσα εἰσὶ, δέδεικται προτάσει μγ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὅτι δὲ καὶ κατὰ τὸν β': τὰ ε α θ ζ ζ, η γ κ ζ ζ, ἴσα ὁμοίως εἰσὶ δῆλον. κατὰ γὰρ τὴν λδ': τοῦ αὐτοῦ τὰ δ α β, δ γ β, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ δ ε ζ, δ η ζ, καὶ ζ θ β, ζ κ β, ἀφαιρουμένων δὲ ἀπὸ τῶν ἴσων δ α β, δ γ β, τῶν δ ε ζ, ζ θ β, καὶ δ η ζ, ζ κ β, τριγώνων, ἐναπολείπονται τὰ ε α θ ζ ζ, η γ κ ζ ζ, παραπληρώματα ἴσα. Ὅτι δὲ τελευταῖον καὶ κατὰ τὸν γ': τρόπον τὰ ε α θ λ, η γ κ μ, ἴσα εἰσὶ διὰ τῶν εἰρημένων καὶ τοῦτο σαφές· τῶν γὰρ ζ θ β, ζ κ β, ἴσων τριγώνων ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὰ ζ λ ζ, ζ μ ζ, τρίγωνα, ἐγκαταλειφθήσεται τὰ λ θ β ζ, μ κ β ζ, τραπέζια ἴσα, ἐὰν δὲ ἴσοις τοῖς δ ε ζ, δ η ζ, τριγώνοις προστεθῇ τὰ λ θ β ζ, μ κ β ζ, ἴσα, γενήσεται τὸ ὅλον χωρίον δ ε λ θ β ζ, ἴσον τῷ δ η μ κ β ζ. Τούτων δ' ἀφαιρουμένων ἀπὸ τῶν δ α β, δ γ β, ἴσων τριτετραγώνων, ἐναπολειφθήσονται τὰ ε α θ λ, η γ κ μ, παραπληρώματα ἴσα. Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΑ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ τετραγώνου γραφόμενον τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ γραφομένου τετραγώνου.

Τοῦ τινὸς α β γ δ, τετραγώνου ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς α γ, διαμέτρου τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α δ, πλευρᾶς δῆλον. κατὰ γὰρ τὴν μζ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ἀπὸ τῆς α γ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπό τε τῆς α δ, καὶ δ γ, τετραγώνοις. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς α δ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δ γ, ἴση γὰρ καὶ ἡ α δ, τῇ δ γ, καὶ τὰ δύο ὁμοῦ τοῦ ἑνὸς χωρὶς, δὶς εἰπεῖν τοῦ ἀπὸ τῆς α δ, διπλάσιά εἰσιν, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α γ, τοῦ αὐτοῦ διπλάσιόν ἐστι. Τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου ἄρα τοῦ τετραγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

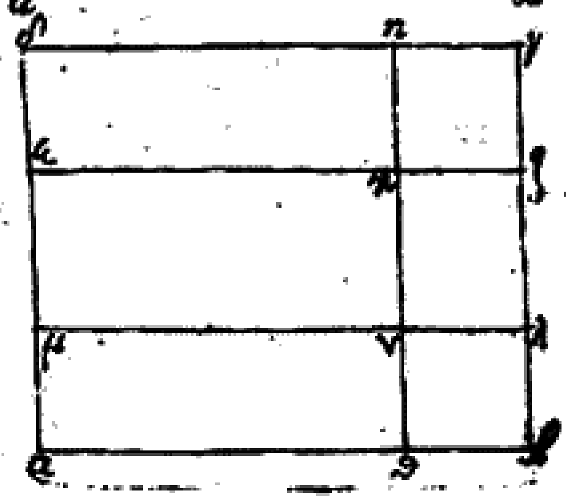
Geom. Lib.3. Fig.15.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ τυχόντος παραλληλογράμμου γραφόμενον τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ὑφ' ὧν περιέχεται, τετραγώνοις. πιστοῦται δ' ἔτι καὶ διὰ τῆς μζ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Πρότασις ΚΒ'.



Ἅπαν παραλληλόγραμμον, ἐὰν ταῖς αὐτοῦ πλευραῖς παράλληλοι ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, διαιρεθήσεται ὁμοίως εἰς παραλληλόγραμμα ἀνάλογα.

Ἐπὶ τοῦ α β γ δ, τινος παραλληλογράμμου, ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι παράλληλοι ταῖς αὐτοῦ πλευραῖς δ γ, γ β, αἱ ε ζ, η θ, τεμνόμεναι κατὰ τὸ κ. Λέγω ὅτι τὰ ε η, κ γ, α κ, θ ζ, παραλληλόγραμμα ἀνάλογά εἰσι. κατὰ γὰρ τὴν α': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ δ η, πρὸς τὴν η γ, ἔχει τὸ, τε ε η, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ κ γ, καὶ τὸ α κ, πρὸς τὸ θ ζ, ἰσοϋψῆ γάρ, ὥστε κατὰ τὴν ια': τοῦ ε': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἔχει τὸ ε η, πρὸς τὸ κ γ, ἔχει καὶ τὸ α κ, πρὸς τὸ θ ζ. ὁμοίως διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται καὶ τὰ β κ, ζ κ, θ ε, κ δ, ἀνάλογα. Ἐὰν δὲ πλείους ἀχθῶσι παράλληλοι, καὶ διαιρεθήσεται τὸ αὐτὸ παραλληλόγραμμον εἰς πλείω παραλληλόγραμμα, καὶ ταῦτα ἀνάλογα ἔσαι. Ἅπαν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς.

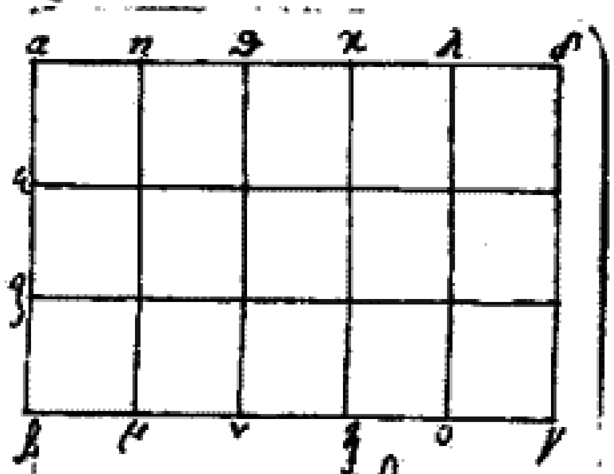
Πρό-

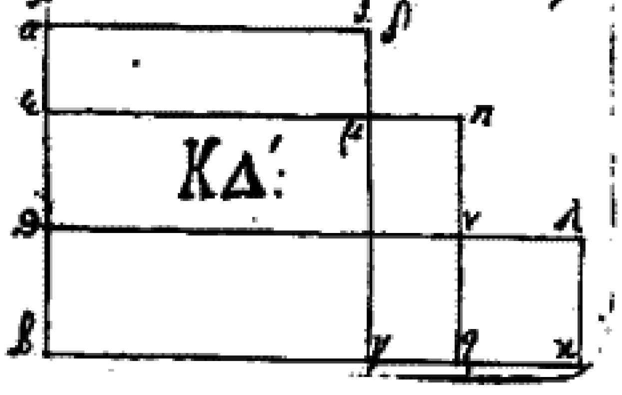
Πρότασις ΚΓ':

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου περιεκτικόν ἐστι τοσούτων τετραγώνων, ὅσαι εἰσὶ μονάδες ἐν τῷ διὰ πολλαπλασιασμοῦ, τῶν τῆς μιᾶς αὐτοῦ πλευρᾶς μερῶν ἐπὶ τὰ τῆς ἑτέρας, γινομένῳ ἀριθμῷ.

Ἔστω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ, οὗ ἡ μὲν αβ, πλευρὰ διῃρήσθω εἰς μέρη τρία τὰ αε, εζ, ζβ, ἡ δὲ αδ, εἰς πέντε τὰ αη, ηθ, θκ, κλ, λδ. Λέγω ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγδ, ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου περιέχει τετράγωνα, ὅσας καὶ ὁ ἐκ τοῦ 5, ἐπὶ τὸν 3, γινόμενος ἀριθμὸς περιέχει μονάδας. ὁ γὰρ 5, ἐπὶ τὸν 3, πολλαπλασιασθεὶς ποιεῖ τὸν 15, ἐὰν δὲ ἐφ' ἑκάστου σημείου τῶν τομῶν τῆς αδ, παράλληλοι ἀχθῶσιν εὐθεῖαι τῇ αβ, διαιρεθήσεται τὸ αβγδ, παραλληλ: εἰς μέρη πέντε τὰ αμ, ην, θξ, κο, λγ. Ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ τῶν τομῶν τῆς αβ, ἀχθῶσιν ὁμοίως εὐθεῖαι παράλληλοι τῇ αδ, διαιρεθήσεται πάντως ἕκαστον τῶν αμ, ην, θξ, κο, λγ, προτέρων μερῶν εἰς μέρη τρία, ὥστε τὸ ὅλον αβγδ, διαιρεθήσεται εἰς μέρη πεντεκαίδεκα, κἂν μὲν τὰ μέρη τῆς μιᾶς ἴσα ᾖ τοῖς μέρεσι τῆς ἑτέρας πλευρᾶς, τετράγωνα ἔσται ταῦτα καὶ ἴσα ἀλλήλοις. εἰδ' ἄνισα παραλληλόγρ: ἀνάλογα μέν τοι, ὡς προδέδεικται ἐν τῇ ἀνωτέρω.

Geom. Lib. 3. Fig. 16.





Πρότασις ΚΔ':

Τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων μέγιστον μὲν τὸ τὰς πλευρὰς ἴσας ἔχον, τὸ δὲ ἧττον ἀνίσους, μεῖζον τοῦ μᾶλλον ἀνίσους ταύτας ἔχοντος.

Ἔστωσαν δὴ ἰσοπερίμετρα ὀρθογώνια τὰ αβγδ, εβζη, θβκλ, καὶ ἐχέτω τὸ μὲν αβγδ, τὰς πλευρὰς πάσας ἴσας, τὸ δὲ εβζη, ἧττον ἀνίσους, καὶ τὸ θβκλ, μᾶλλον. Λέγω τοίνυν τὸ μὲν αβγδ, μέγιστον εἶναι, τὸ δὲ εβζη, μεῖζον τοῦ θβκλ. κατὰ γὰρ τὴν α: τοῦ ϛ': Εὐκλείδου, τὸ βμ, μεῖζόν ἐστι τοῦ γν, μεῖζον γὰρ καὶ ἡ βγ, τῆς γζ, ἀλλὰ τὸ βμ, ἴσον ἐστὶ τῷ εδ, ἴση γὰρ καὶ ἡ εα, τῇ εβ, τὸ ὅλον ἄρα βδ, μεῖζόν ἐστι τοῦ βη. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ βη, μεῖζον τοῦ βλ. ὅτι δὲ ἡ βγ, μείζων ἐστι τῆς γζ, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ τὸ βη, ἰσοπερίμετρόν ἐστι τῷ βδ, ἐὰν ἡ βγ, ἴση ᾖ τῇ γζ, ἡ ὅλη βζ, ᾖ αὖ ἴση ταῖς δυσὶ τοῦ βδ, πλευραῖς βγ, αδ. ἀλλὰ τῇ βζ, ἴση ἐστὶν ἡ εη, ἔσται ἄρα καὶ ἡ εη,

ἴση

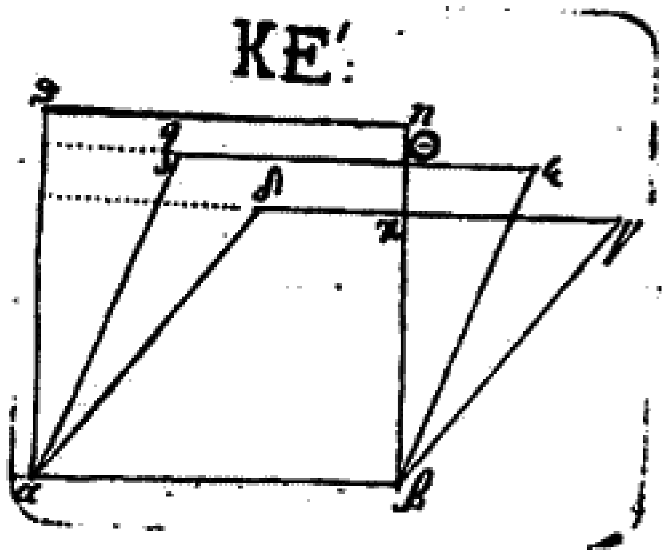
ἴση ταῖς λοιπαῖς δυσὶ τοῦ αὐτοῦ βδ, πλευραῖς αβ, δγ, καὶ τὸ βη, οὐκ ἂν ἦν ἰσοπερίμετρον τῷ βδ, ὑπερέχει γὰρ ταῖς εβ, ηζ, ὅπερ ἄτοπον, ὑπετέθη γὰρ ἰσοπερίμετρον. Διὰ τὰ αὐτὰ δείκνυται καὶ ἡ ζκ, μὴ εἶναι ἴση τῇ βζ. τῶν ἰσοπεριμέτρων ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΕ'.

Τῶν ἰσοπεριμέτρων τετραπλεύρων παραλληλογράμμων σχημάτων τὸ ὀρθογώνιον μέγιστόν ἐστι, μεῖζον δὲ τὸ ἧττον τὰς γωνίας ἀνίσους ἔχον τοῦ μᾶλλον ταύτας ἀνίσους ἔχοντος.

Ἔστωσαν ἰσοπερίμετρα τετράπλευρα τὰ αβγδ, αβεζ, αβηθ, ὧν τὸ μὲν αβηθ, ἐχέτω τὰς γωνίας πάσας ἴσας, τὸ δὲ αβεζ, ἧττον ἀνίσους, καὶ τὸ αβγδ, μᾶλλον. Λέγω δὴ μέγιστον μὲν εἶναι τὸ αβηθ, μεῖζον δὲ τὸ αβεζ, τοῦ αβγδ. Ἤχθωσαν γὰρ αἱ γδ, εζ, καὶ τὸ συνεχές, ὥστε συσταθῆναι, τὰ ακ, αΘ, ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. καὶ ἐπεὶ τῷ μὲν ακ, ἴσον ἐστὶ τὸ αγ, τῷ δὲ αΘ, τὸ αε, κατὰ τὴν λε: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἐστὶ δὲ τὸ ακ, ἔλαττον τοῦ αΘ, πάντως γε καὶ τὸ αγ, ἐλαττόν ἐστι τοῦ αε. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ αε, ἔλαττον τοῦ αη. τὸ γὰρ αε, ἴσον ἐστὶ τῷ αΘ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λε: τὸ δὲ αΘ, ἐλαττόν ἐστι τοῦ αη. τῶν ἰσοπεριμέτρων ἄρα τετραπλεύρων παραλληλογρ: καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 3. Fig. 17.



Πρότασις ΚϚ'.

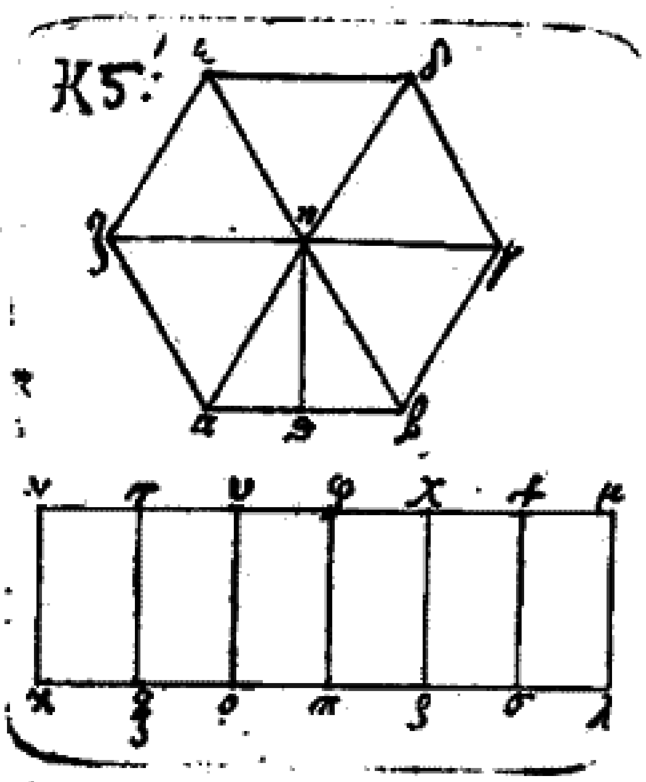
Παντὸς πολυγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπό τε τῆς ἡμισείας τῆς αὐτοῦ περιμέτρου καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ πιπτούσης καθέτου περιεχομένῳ.

Ἔστω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ αβγδεζ, οὗ κέντρον τὸ η. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ η, κέντρου ἐφ᾽ ἑκάστην γωνίαν εὐθεῖαι αἱ ηα, ηβ, ηγ, ηδ, ηε, ηζ. Διαιρεθήτω δὲ ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ θ, καὶ πιπτέτω κάθετος ἐπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ

τοῦ

τοῦ η, κάθετου ἡ η θ. Ἔστω δ' ἔτι καὶ τὸ κ λ μ ν, ὀρθογώνιον ἰσοπερίμετρον τῷ α β γ δ ε ζ, πολυγώνῳ, ὥστε τὴν μὲν κ λ, αὐτοῦ πλευρὰν ἴσην εἶναι τῇ ἡμισείᾳ τῆς περιμέτρου τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου, τὴν δὲ κ ν, τῇ η θ, καθέτῳ. Λέγω τὸ α β γ δ ε ζ, δοθὲν πολύγωνον ἴσον εἶναι τῷ κ λ μ ν, ὀρθογωνίῳ. Διαιρεθήτω δὴ ἡ κ λ, εἰς μέρη ἴσα, ὅσαι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ α β γ δ ε ζ, πολυγώνου, τὰ κ ξ, ξ ο, ο π, π ρ, ρ σ, σ λ, καὶ ἀφ' ἑκάστου σημείου τῶν ξ, ο, π, καὶ λοιπῶν ἀχθήτωσαν παράλληλοι τῇ κ ν, αἱ ξ τ, ο υ, π φ, ρ χ, σ ψ· δείκνυται. Ἐπεὶ ἡ κ λ, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς τοῦ α β γ δ ε ζ, πολυγώνου περιμέτρου, καὶ διῄρηται εἰς μέρη ἰσοπληθῆ ταῖς τοῦ πολυγώνου πλευραῖς, πάντως γε καὶ ἑκάστη τῶν κ ξ, ξ ο, ο π, π ρ, ρ σ, σ λ, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς α β, ἢ β γ, ἢ γ δ, ἢ ἑτέρας τινὸς τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν, καὶ τὰ κ τ, ξ υ, ο φ, π χ, ρ ψ, σ μ, μέρη τοῦ κ μ, ὀρθογωνίου ἰσοπληθῆ εἰσι τοῖς α η β, β η γ, γ η δ, δ η ε, ε η ζ, ζ η α, μέρεσι τοῦ πολυγώνου, ἕκαστον γὰρ πολύγωνον εἰς τοσαῦτα διαιρεῖται τρίγωνα, ὅσαι καὶ αἱ αὐτοῦ πλευραὶ, ἔστι δὲ καὶ ἑκάστη τῶν κ ν, ξ τ, ο υ, καὶ λοιπῶν καθέτων ἴση τῇ η θ, ἄρα ἕκαστον τῶν κ τ, ξ υ, ο φ; καὶ λοιπῶν ὀρθογωνίων ἴσον ἐστὶν ἑκάστῳ τῶν α η β, β η γ, καὶ λοιπῶν τοῦ α β γ δ ε ζ, πολυγώνου μερῶν κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος, ἕκαστον γὰρ τῶν α η β, β η γ, καὶ λοιπῶν τοῦ πολυγώνου μερῶν παραβαλλόμενον ἑκάστῳ τῶν κ τ, ξ υ, καὶ λοιπῶν τοῦ κ μ, ὀρθογωνίου μερῶν, ἔχει βάσιν τε διπλασίονα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστι παραλλήλοις. ἀλλὰ τὸ μὲν α β γ δ ε ζ, πολύγωνον σύγκειται ἐκ τῶν α η β, η β γ, καὶ λοιπῶν αὐτοῦ μερῶν, τὸ δὲ κ μ, ὀρθογώνιον ἐκ τῶν κ τ, ξ υ, καὶ λοιπῶν αὐτοῦ μερῶν, τὰ δὲ τοῦ κ μ, ὀρθογ: μέρη ἰσοπληθῆ εἰσι τοῖς τοῦ α β γ δ ε ζ, πολυγ: μέρεσιν, ὡς δέδεικται, ἄρα τὸ α β γ δ ε ζ, πολύγων: ἴσον ἐστὶ τῷ κ μ, ὀρθογ: Παντὸς ἄρα πολυγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου, καὶ τὰ ἑξῆς.

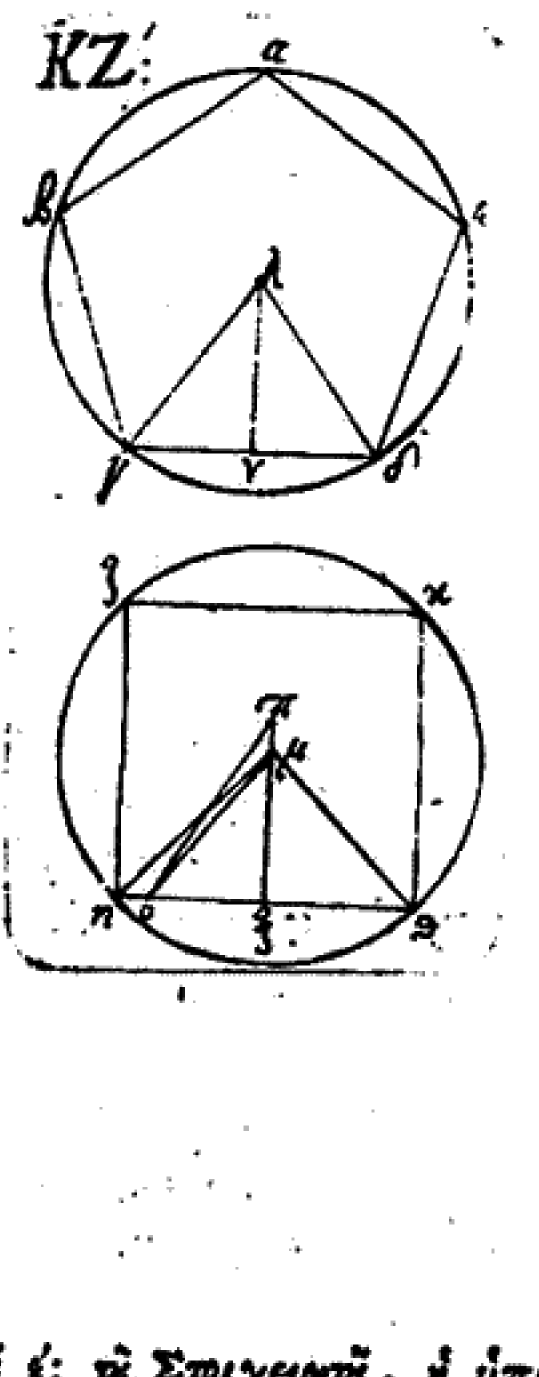
Geom. Lib.3. Fig.18.



Πρότασις ΚΖ'.

Τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων σχημάτων, ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων, τὸ πλείονας ἔχον τὰς πλευρὰς μεῖζόν ἐστιν.

Ἔστωσαν πολύγ: ἰσοπερίμ: ἰσόπλευρά τε καὶ ἰσογώνια τὰ α β γ δ ε, ζ η θ κ. Λέγω ὅτι τὸ α β γ δ ε, μεῖζον εἶναι τοῦ ζ η θ κ, ὡς πλείονας ἔχον καὶ τὰς γωνίας. Εὑρεθήτωσαν δὴ τὰ κέντρα, τῶν περὶ αὐτὰ κύκλων, τὰ λ, μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λ γ, λ δ, μ η, μ θ. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ λ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς γ δ, ἡ λ ν, ἀπὸ δὲ τοῦ μ, ἐπὶ τῆς η θ, ἡ μ ξ. καὶ ἐπεὶ τὸ α β γ δ ε, Geom. Lib.5. Fig.19. πολυγωνιώτερόν ἐστι, πάντως γε ἡ γ δ, πλεονάκις καταμετρεῖ τὴν τοῦ α β γ δ ε, περίμετρον, ἤπερ ἡ η θ, τὴν τοῦ ζ η θ κ. ἀλλ' αἱ περίμετροι εἰσὶν ἴσαι, ἄρα ἡ η θ, μείζων ἐστὶ τῆς γ δ, ὥστε καὶ ἡ η ξ, τῆς γ ν, μείζων. Γενέσθω οὖν ἡ ξ ο, ἴση τῇ γ ν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μ ο. ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ η θ, πρὸς τὴν τοῦ ζ η θ κ, περίμετρον, ἔστι καὶ ἡ ὑπὸ η μ θ, γωνία πρὸς 4: ὀρθάς, ἰσόπλευρον γὰρ τὸ ζ η θ κ, πολύγωνον· καὶ αἱ πρὸς τῷ μ, κέντρῳ τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀπολαμβανομέναις περιφερείαις, ὡς δὲ ἡ τοῦ ζ η θ κ, περίμετ: δηλον: ἡ α β γ δ ε, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως αἱ 4: ὀρθαὶ γωνίαι, πρὸς τὴν ὑπὸ λ γ δ, ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ η θ, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ὑπὸ η μ θ, πρὸς τὴν ὑπὸ γ λ δ, ὡς δὲ ἡ η θ, πρὸς τὴν γ δ, ἔχει καὶ ἡ η ξ, πρὸς τὴν γ ν, ἄρα ὡς ἡ η ξ, πρὸς τὴν γ ν, δηλον: τὴν ο ξ, ἡ ὑπὸ η μ θ, πρὸς τὴν ὑπὸ γ λ δ, ἤτοι ἡ ὑπὸ η μ ξ, πρὸς τὴν ὑπὸ γ λ ν. ἀλλ' ἡ η ξ, πρὸς τὴν ξ ο, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ η μ ξ, γωνία, πρὸς τὴν ο μ ξ, ὡς ὀψόμεθα. ὡς δὲ ἡ η ξ, πρὸς τὴν ξ ο, ἡ ὑπὸ η μ ξ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ γ λ ν, ὡς δέδεικται· ἄρα ἡ ὑπὸ η μ ξ, γωνία μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν ὑπὸ ο μ ξ, ἤπερ πρὸς τὴν ὑπὸ γ λ ν. ὥστε κατὰ τὴν ι: τοῦ ε: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ ὑπὸ ο μ ξ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γ λ ν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ μ ξ ο, ἴση τῇ λ ν γ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ μ ο ξ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ λ γ ν. Γενέσθω δὲ ἴση ἡ ὑπὸ ξ ο π, τῇ ὑπὸ ν γ λ, ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ξ, τῇ πρὸς τῷ ν, ἴση, καὶ ἡ ο ξ, τῇ γ ν, ἄρα κατὰ τὴν κϛ': τοῦ α: Στοιχ: ἡ ξ π, ἴση ἐστὶ τῇ ν λ, μείζων δὲ ἡ ξ π, τῆς ξ μ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ν λ, τῆς ξ μ. ὥστε καὶ τὸ ὑπό τε τῆς λ ν, καὶ ἡμιπεριμέτρου

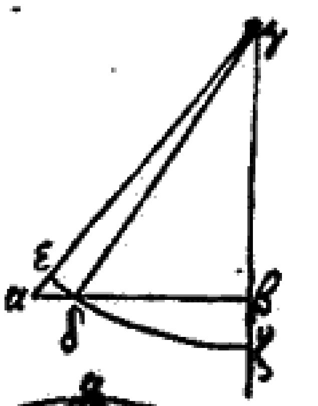


τοῦ

τοῦ α β γ δ ε, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπό τε τῆς ξ μ, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ ζ η θ κ, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπό τε τῆς λ ν, καὶ ἡμιπεριμέτρου ν δ ε α, ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ δ ε, τὸ δὲ ὑπό τε τῆς ξ μ, καὶ ἡμιπεριμέτρου θ κ ζ, τῷ ζ η θ κ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἄρα τὸ α β γ δ ε, μεῖζόν ἐστι τοῦ ζ η θ κ. Τῶν ἰσοπεριμέτρ: ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Ὅτι δὲ ἡ η ξ, πρὸς τὴν ξ ο, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ η μ ξ, γωνία πρὸς τὴν ο μ ξ, δῆλον. Κείσθω γὰρ τὸ α β γ, τρίγ: ὅμοιον τῷ η ξ μ, καὶ ἡ ὑπὸ γ δ β, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ μ ο ξ. ὥστε εἶναι ὡς ἡ η ξ, πρὸς τὴν ξ ο, τὴν α β, πρὸς τὴν β δ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ γ δ, γραφήτω τόξον τὸ ε δ ζ, τέμνον τὴν γ β, ἐκβαλλομένην κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ τὸ γ α δ, τρίγ: μεῖζον ὂν τοῦ γ ε δ, τομέως, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς αὐτὸν, ἤπερ τὸ γ δ β, τρίγ: πρὸς τὸν γ δ ζ, τομέα, ὥστε καὶ συνθέσει τὸ γ α β, τρίγ: μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ γ δ β, τρίγ: ἤπερ ὁ γ ε ζ, τομεὺς πρὸς τὸν γ δ ζ, τομέα, ἀλλ᾽ ὡς τὸ γ α β, τρίγ: πρὸς τὸ γ δ ζ, ἔχει καὶ ἡ α β, πρὸς τὴν β δ, κατὰ τὴν α: τοῦ ς': Στοιχ: ἄρα, ἡ α β, πρὸς τὴν β δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ ε ζ, τομεὺς πρὸς τὸν γ δ ζ, τομέα. ἀλλ᾽ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, ἔχει καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α γ β, πρὸς τὴν δ γ β, κατὰ τὴν λ ς': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ α β, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν β δ, ἤπερ ἡ ὑπὸ α γ β, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ δ γ β, καὶ τὰ ἑξῆς.

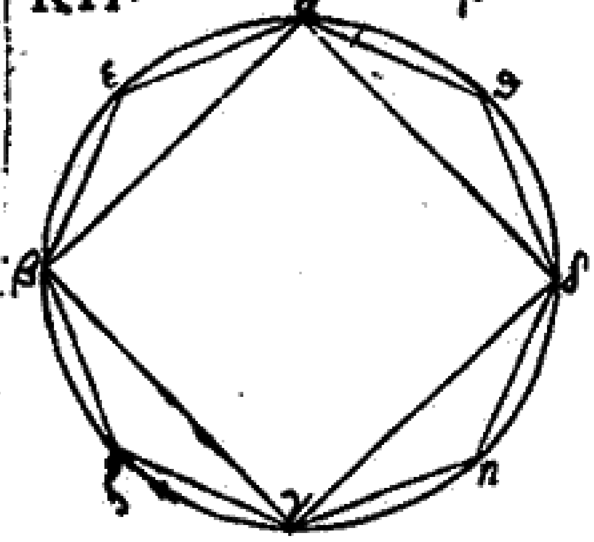
Geom. Lib.3. Fig.20.



Πρότασις ΚΗ:

Τῶν ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἐγγραφομένων πολυγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων, τὸ πλείονας ἔχον τὰς πλευρὰς μᾶλλον προσεγγίζει τῷ κύκλῳ, καὶ ἡ τούτου περίμετρος μείζων ἐστὶν, ἡ ἡ περίμετ: τοῦ ἐλάττονας ἔχοντος τὰς πλευράς.

ΚΗ:



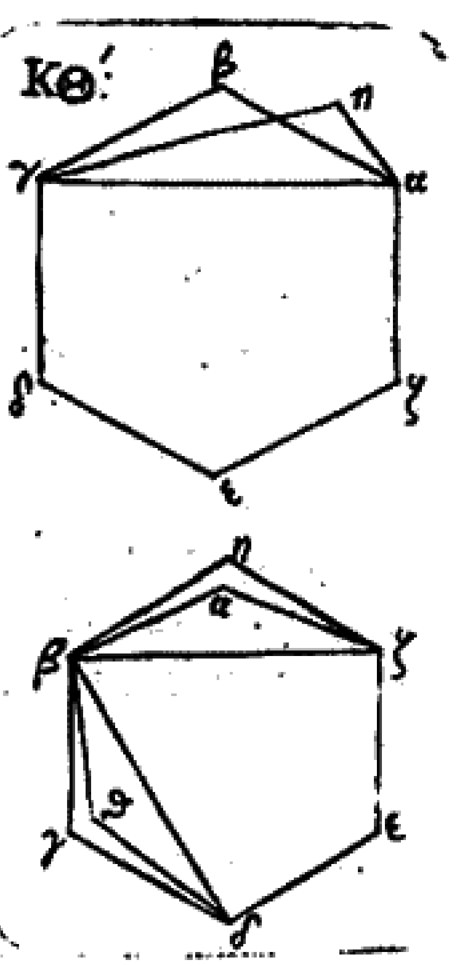
Ἔστωσαν εἰς τὸν α β γ δ, κύκλον ἐγγραφόμενα πολύγωνα τὰ α β γ δ, καὶ α ε β ζ γ η δ θ. Λέγω τὸ α ε β ζ γ η δ θ, τὸ ἔχον πλείονας τὰς πλευρὰς, μᾶλλον προσεγγίζειν τῷ κύκλῳ, καὶ τὴν τούτου περιμ: μείζονα εἶναι τῆς τοῦ α β γ δ, περιμέτ: ἐπεὶ γὰρ αἱ τοῦ κύκλου περιφέρειαι, αἱ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ α ε β ζ γ η δ θ, ὑποτεινόμεναι ἐλάττονές εἰσι τῶν ὑποτεινομένων ὑπὸ τῶν τοῦ α β γ δ, πλευρῶν, πάντως γε τὸ α ε β ζ γ η δ θ, στρογγυλώτερόν ἐστι, καὶ μᾶλλον προσεγγίζει τῷ κύκλῳ. Ὅτι δὲ καὶ ἡ αὐτοῦ περιμ: μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ α β γ δ, περιμ: δῆλον. αἱ μὲν γὰρ α ε, ε β, μείζονές εἰσι τῆς α β, κατὰ τὴν κ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ δὲ β ζ, ζ γ, τῆς β γ, αἱ δὲ γ η, η δ, τῆς γ δ, καὶ δθ, θα, τῆς δα. ὥστε ὅλη ἡ τοῦ αεβζγηδθ, περίμ: μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ αβγδ, περιμέτρου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Τὸ αὐτὸ ἐννοητέον καὶ περὶ τῶν ἐγγραφομένων τοῖς ἴσοις κύκλοις πολυγώνων.

Πρότασις ΚΘ′.

Τῶν ἰσοπεριμέτρων εὐθυγράμμων τῶν τὰς πλευρὰς ἰσοπληθεῖς ἐχόντων τὸ μέγιστον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἔστω εὐθύγραμμον τὸ αβγδεζ, μέγιστον πάντων τῶν ἰσοπεριμέτρων αὐτῷ, καὶ τὰς πλευρὰς ἰσοπληθεῖς ἐχόντων. Λέγω δὴ α′: ὅτι ἰσόπλευρόν ἐστι. εἰ γὰρ μὴ, ἔσται πάντως γε μία τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἐλάττων. Ἔστω οὖν ἡ αβ, ἐλάττων τῆς βγ. ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς αγ, συνεστάθω ἐπ᾽ αὐτῆς τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ αηγ, ὥστε εἶναι ἰσοπερίμετρον τῷ αβγ. τούτου γὰρ γενομένου, ἔσται τὸ αηγ, τρίγωνον μεῖζον τοῦ αβγ, τριγ: κατὰ τὴν ι′: τοῦ παρόντος. κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ αγδεζ, ἔσται τὸ ὅλον αηγδεζ, μεῖζον τοῦ αβγδεζ, μεγίστου, ὅπερ ἄτοπον, ἰσόπλευρον ἄρα. Λέγω β′: τὸ αὐτὸ καὶ ἰσογώνιον εἶναι. μὴ γὰρ, ἔστω τὸ ζαβγδε, ἰσόπλευρον, ἴσον τῷ αβγδεζ, ἔχον καὶ τὰς αὐτοῦ πλευρὰς ἰσοπληθεῖς, ἐχέτω δὲ τὴν ὑπὸ ζαβ, δὸς εἰπεῖν γωνίαν μείζονα τῆς ὑπὸ βγδ, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν βζ, βδ, συνεστάθωσαν τὰ βηζ, βθδ, ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ὥστε τὰς ὑπὸ ζηβ, βθδ, γωνίας ἴσας ἔχειν, καὶ ἔσται πάντως ὅμοια. κατὰ δὲ τὴν θ′: τοῦ αὐτοῦ, τὰ ζηβ, βθδ, τρίγωνα μείζονά εἰσι τῶν ζαβ, βγδ, συναμφότερα συναμφοτέρων. κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ ζβδε, ἔσται τὸ ὅλον ζηβθδε, μεῖζον τοῦ ζαβγδε, μεγίστου ὅπερ ἄτοπον, ἰσογώνιον ἄρα. δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρ: Τῶν ἄρα ἰσοπεριμ: εὐθυγράμμ: τῶν τὰς πλευρὰς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib.3. Fig.21.



Τέλος τοῦ Τρίτου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου.