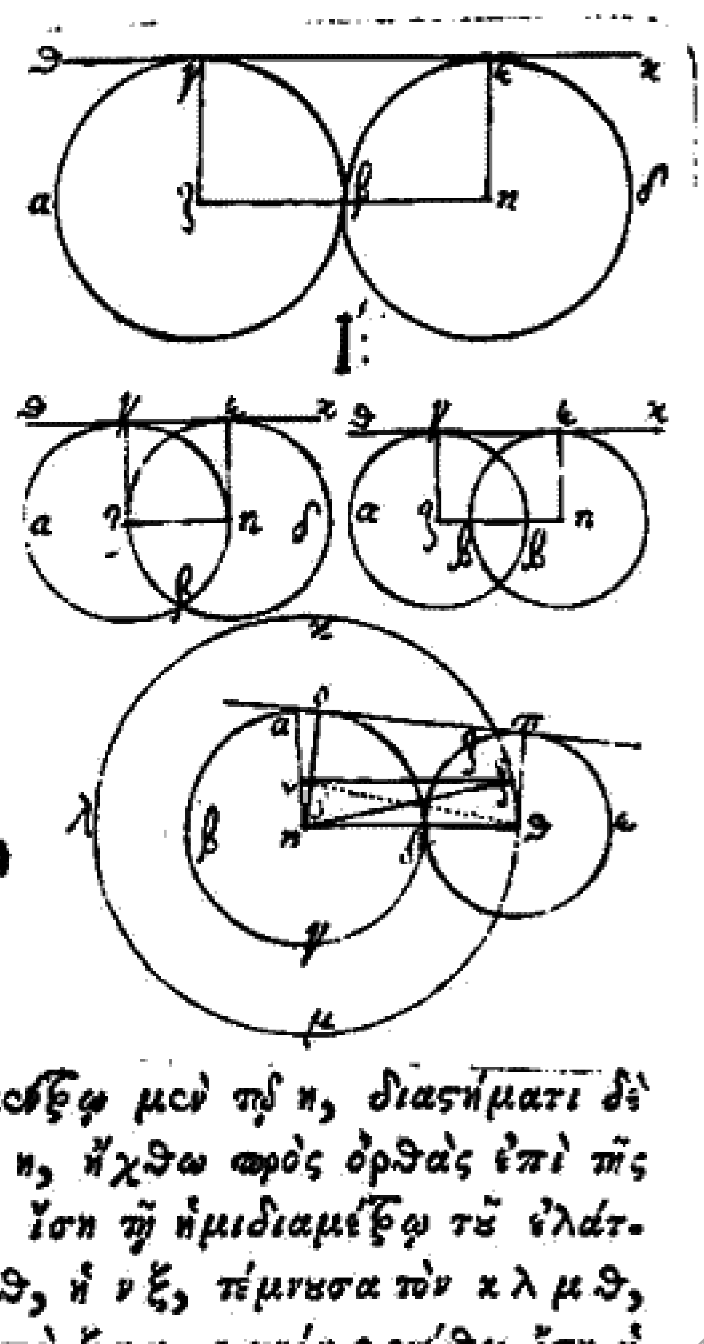
σι, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γε, εθ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνῳ, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται, πάντως γε τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον ἴσον ἔσται καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εζ, τετραγώνῳ, ὥστε κατὰ τὴν λϛ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, γραφόμενος κύκλος περὶ τὸ θζγ, τρίγωνον, ἕξει τὴν μὲν γθε, εὐθεῖαν τέμνουσαν αὐτὸν, τὴν δὲ εζ, ἁπτομένην, καὶ κατὰ τὴν λβ΄: τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ θζε, γωνία ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ θγζ, ἀλλὰ κατὰ τὴν αὐτὴν πρότ: ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ θγζ, καὶ ἡ ὑπὸ βθζ, ἄρα ἡ ὑπὸ θζε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βθζ, καὶ κατὰ τὴν κζ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ, ἡ θβ, παράλληλός ἐστι τῇ εζ, δύο ἄρα σημείων δοθέντων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ι΄.

Δύο κύκλων δοθέντων ἐφαπτομένην ἀμφοτέρων εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστωσαν α΄: οἱ αβγ, βδε, κύκλοι ἴσοι, εἴτε ἁπτόμενοι ἀλλήλων, εἴτε τέμνοντες ἀλλήλους, διερχόμενοι διὰ τῶν κέντρων, ἢ μὴ, καὶ ζητηθήτω ἀχθῆναι εὐθεῖα γραμμὴ ἁπτομένη ἀμφοτέρων. Εὑρεθήτω δὴ τὸ κέντρον ἑκατέρου, καὶ ἔστω τοῦ μὲν αβγ, τὸ ζ, τοῦ δὲ βδε, τὸ η, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζη, ἐφ᾽ ἧς συνεστάθωσαν κάθετοι ἀπὸ τῶν ζ, καὶ η, σημείων, ταυτὸν δ᾽ εἰπεῖν κέντρων, αἱ ζγ, ηε, εὐθεῖαι, τέμνουσαι τοὺς κύκλους κατὰ τὰ γ, καὶ ε, σημεῖα, δι᾽ ὧν ἤχθω ἡ θγεκ, εὐθεῖα, ἥτις ἐφάψεται ἑκατέρου τῶν κύκλων, αἱ γὰρ ζγ, ηε, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα ἐπὶ τῆς ζη, ἐπιζευγνύουσαι δὲ ταύτας αἱ ζη, γε, ἄρα καὶ αὗται ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν, ὥστε τὸ ζηεγ, ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἡ γε, ἄρα ὀρθή ἐστιν ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν ζγ, ηε, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα, τῆς ιϛ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἐφάπτεται τοῦ τε αβγ, καὶ βδε, κύκλου.

Geom. Lib. 2. Fig. 12.



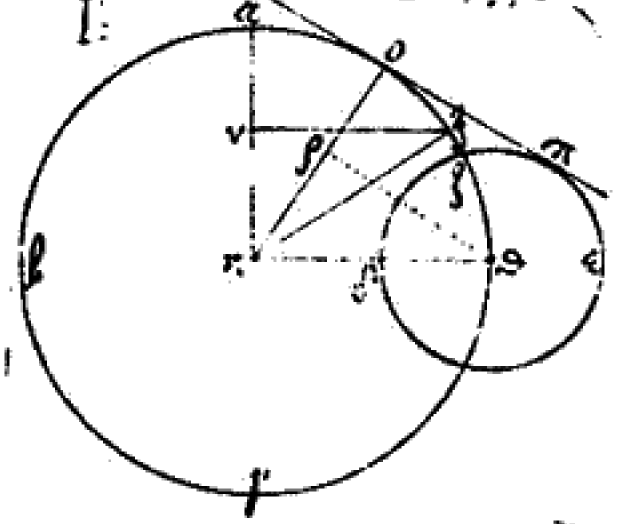
Ἔστωσαν β΄: ἄνισοι οἱ αβγδ, καὶ δεζ, κύκλοι. εἰ μὲν οὖν ὁ μείζων οὐ διέρχεται διὰ καὶ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάττονος, εὑρεθήτωσαν τὰ κέντρα τῶν αὐτῶν κύκλων, καὶ ἔστωσαν τὰ η, καὶ θ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηθ, γραφήτω ὁ κλμθ, κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ η, ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ηθ, ἐπιζευχθείσης ἡ ηα, ἀφ᾽ ἧς ἀφῃρήσθω ἡ αν, ἴση τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ ἐλάττονος κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ ν, ἤχθω παράλληλος τῇ ηθ, ἡ νξ, τέμνουσα τὸν κλμθ, κύκλον κατὰ τὸ ξ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ηξ, τῇ δὲ ὑπὸ ξηα, γωνίᾳ γενέσθω ἴση ἡ

ὑπὸ

ὑπὸ θηο, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἤχθω ἡ θπ, καὶ διήχθω ἡ οπ, ἥτις ἐφάψεται τῶν αβγδ, καὶ δεζ, κύκλων. Εἰλήφθω γὰρ ἡ ηρ, ἴση τῇ ην, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ θρ, καὶ ἐπεὶ παράλληλος τῇ ηθ, ἤχθη ἡ νξ, πάντως γε ἡ ὑπὸ ηνξ, γωνία ὀρθή ἐστιν. ὀρθὴ γάρ ἐστι καὶ ἡ ὑπὸ νηθ. εἶτα ἐπεὶ τῶν θηρ, ξην, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ ξη, ην, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς θη, ηρ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι κατὰ τὴν κατασκευὴν, δῆλον ὅτι κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ ὑπὸ ηνξ, ηρθ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ηνξ, γέγονεν ὀρθὴ, ὀρθὴ ἄρα ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ ηρθ. Ἐπεὶ δὲ αἱ ορ, θπ, ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι, ἄρα καὶ αἱ ρθ, οπ, ὁμοίως ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. αἱ δὲ ὑπὸ ορθ, ρθπ, γωνίαι εἰσὶν ὀρθαὶ, πάντως γε καὶ αἱ ὑπὸ ροπ, οπθ, γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. ἴσαι γὰρ ταῖς ἀπεναντίον κατὰ τὴν λδ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ. κατὰ δὲ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ΄: τοῦ ῥηθέντος γ΄: ἡ οπ, ἅπτεται ἑκατέρου τῶν κύκλων. εἰ δὲ ὁ μείζων κύκλος διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάττονος, ὡς ὁ αβγθ, ἐπιζεύχθω ἡ διὰ τῶν κέντρων ηθ, καὶ συνεστάθω ἐπὶ τῆς ηθ, πρὸς ὀρθὰς ἡ ηα, εἶτα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ηα, ἡ αν, ἴση τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ ἐλάττονος κύκλου, τὰ δὲ λοιπὰ γενέσθω, ὡς προηρμηνεύεται, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθὲν, ὡς δῆλον ἐκ τῶν ἀνωτέρω.

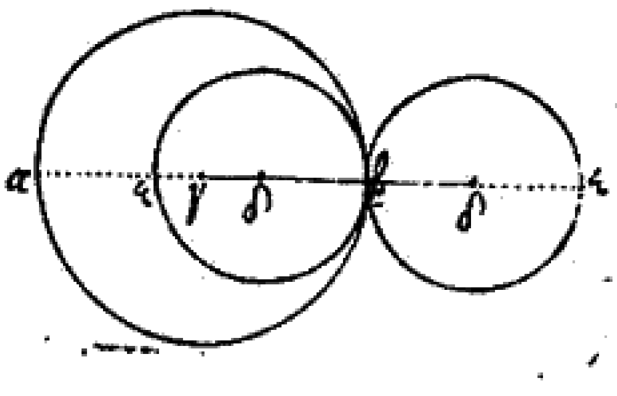
Geom. Lib. 2. Fig. 13.

Ι΄



Πρότασις ΙΑ΄:

ΙΑ΄



Κύκλου δοθέντος ἁπτόμενον αὐτοῦ καταγράψαι πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ.

Δεδόσθω α΄: κύκλος ὁ αβ, καὶ ζητείσθω γραφῆναι ἕτερος κύκλος τῷ τυχόντι διαστήματι ἁπτόμενος τοῦ αβ, κατὰ τὸ β, σημεῖον, ἤτοι ἐντὸς, ἢ ἐκτός. Εὑρεθήτω δὴ τὸ κέντρον τοῦ αβ, κύκλου, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ γ, δι' οὗ ἤχθω ἡ βγ, ἐκτεινομένη ἑκατέρωθεν κατὰ τὸ συνεχές. Εἶτα εἰλήφθω τυχὸν διάστημα τὸ δ, ἢ ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἢ ἐκτὸς, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ εβ, γραφήτω κύκλος ὁ εβ, καὶ ἐφάψεται οὗτος τοῦ αβ, δοθέντος κατὰ τὸ β, σημεῖον, κατὰ γὰρ τὴν ια΄: καὶ ιβ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἐπεὶ ἡ γβ, ἐκβαλλομένη διέρχεται διὰ τῶν κέντρων τῶν αβ, καὶ εβ, κύκλων, καὶ διὰ τοῦ β, σημείου, τὸ β, σημεῖον πάντως ἔσται ἡ ἐπαφὴ τῶν κύκλων.

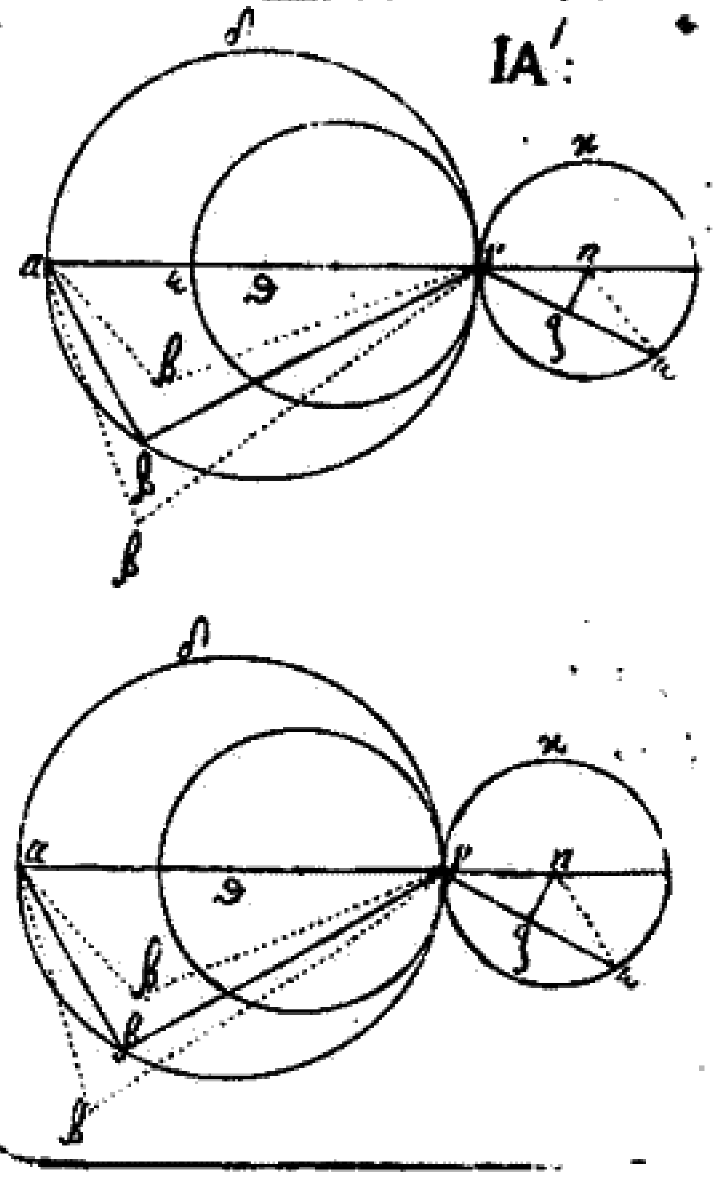
Ἔστω β΄: ὁ αβγδ, δοθεὶς κύκλος, σημεῖον δὲ, καθ' ὃ ζητεῖται ἅπτεσθαι αὐτοῦ ἕτερός τις κύκλος, τὸ γ. δεδόσθω δὲ καὶ τὸ ε, σημεῖον ἢ ἐντὸς, ἢ ἐκτὸς

τοῦ

τοῦ κύκλου, δι' οὗ δεῖ τὸν ζητούμενον διέρχεσθαι κύκλον. Ἐπεζεύχθω οὖν ἡ εγ, καὶ τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ ζ, ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, ἀνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς εγ, ἡ ζη. εἶτα εὑρεθήτω τὸ κέντρον τοῦ αβγδ, κύκλου, δηλ: τὸ θ, καὶ διήχθω ἡ θγ, ἐκβαλλομένη ἑκατέρωθεν κατὰ τὸ συνεχές, ἥτις τεμεῖ τὴν ζη, κατὰ τὸ η, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ ηε, ἢ ηγ, γραφήτω κύκλος ὁ εγκ, καὶ οὗτος ἔσται ὁ ζητούμενος. Κατὰ γὰρ τὴν δ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ ηε, ηγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὅτι δὲ καὶ ἅπτεται ὁ εγκ, τοῦ αβγδ, δείκνυται διὰ τῆς ια': καὶ ιβ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, ἡ γὰρ θγ, διὰ τοῦ δοθέντος γ, σημείου καὶ τῶν κέντρων ἑκατέρου τῶν κύκλων διέρχεται.

Geom. Lib. 2. Fig. 14.

ΙΑ'.



Εἰ δὲ ἡ γε, διέλθῃ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ αβγδ, κύκλου, τμηθήτω μόνον ἡ γε, δίχα κατὰ τὸ η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διαστήματι τῷ ηε, ἢ ηγ, γραφήτω κύκλος, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. ὁ λόγος ἐκ τῶν ἀνωτέρω σαφής.

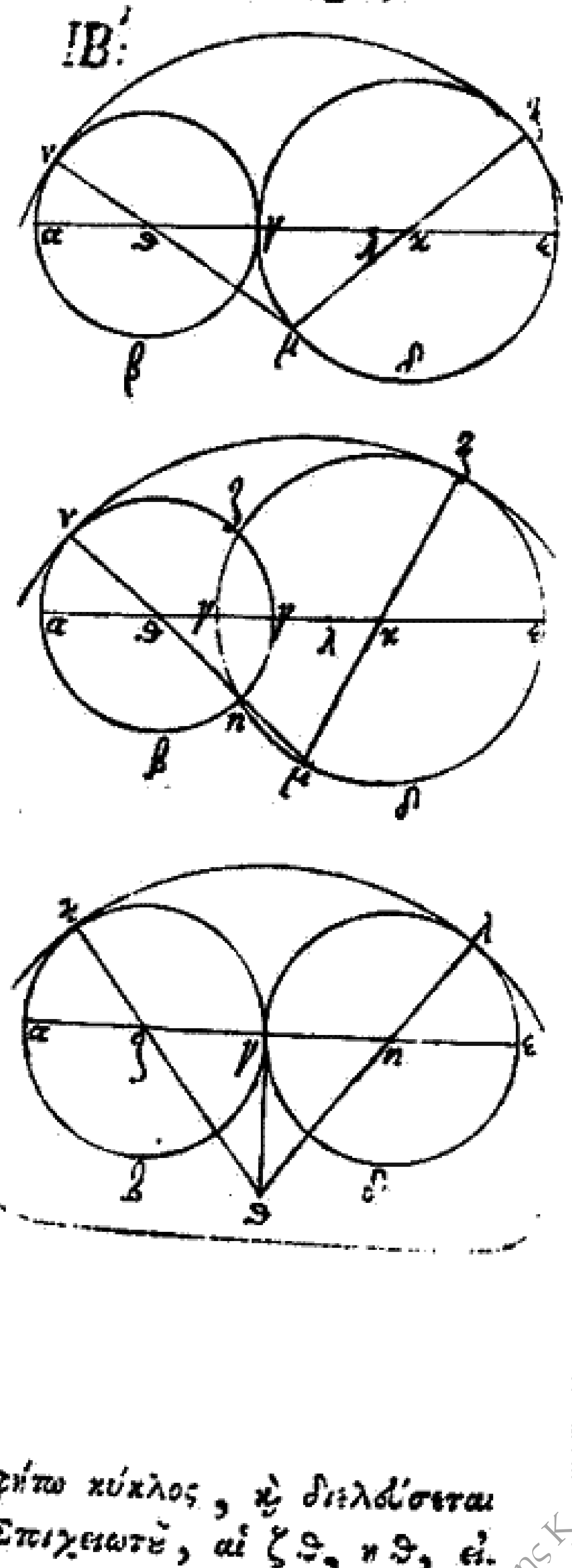
Ἔστω γ': ὁ εγκ, κύκλος, καὶ σημεῖον τὸ β, δι' οὗ ζητηθήτω διελθεῖν ἕτερον κύκλον ἁπτόμενον τοῦ εγκ, κατὰ τὸ γ. Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ γβ, καὶ διὰ τοῦ η, κέντρου τοῦ εγκ, δοθέντος κύκλου διήχθω ἡ γη, ἐξαγομένη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως. Ἀνεστάθω δὲ ἐπὶ τῆς βγ, κάθετος ἀπὸ τοῦ α, ἡ βα, εἶτα τμηθήτω ἡ αγ, δίχα κατὰ τὸ θ, καὶ ἀπὸ τοῦ θ, διαστήματι τῷ θγ, ἢ θα, γραφήτω κύκλος καὶ διελεύσεται πάντως οὗτος διὰ τοῦ β, εἰ γὰρ μή, ἢ ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ κύκλου τὸ β, περιληφθήσεται, ἢ ἐκτὸς ἐναπολειφθήσεται. ὁποτέρως δ' ἂν συμβῇ, ἡ ὑπὸ γβα, γωνία οὐκ ἔσται ὀρθή. οὐ γάρ ἐστιν ἐν ἡμικυκλίῳ, ὅπερ ἄτοπον. Συνέστη γὰρ ἡ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βγ, ὡς προείρηται. Εἰ δὲ τὸ γ, μόνον σημεῖον δοθῇ, καθ' ὃ δεῖ τὸν ζητούμενον κύκλον ἅπτεσθαι τοῦ δοθέντος, διήχθω μόνον ἡ γη, καὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος ἐπ' αὐτῆς σημείου, φέρ' εἰπεῖν τοῦ θ, διαστήματι τῷ θγ, γραφήτω κύκλος, καὶ ἔσω τὸ ἐπιταχθέν. ὁ λόγος σαφής. Κύκλου ἄρα δοθέντος, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΒ'.

Δύο κύκλων ἀνίσων δοθέντων, ὥστε μηδέτερον εἶναι ὅλον ἔνδον τοῦ ἑτέρου, ἀπτόμενον ἑκατέρου κύκλον καταγράψαι.

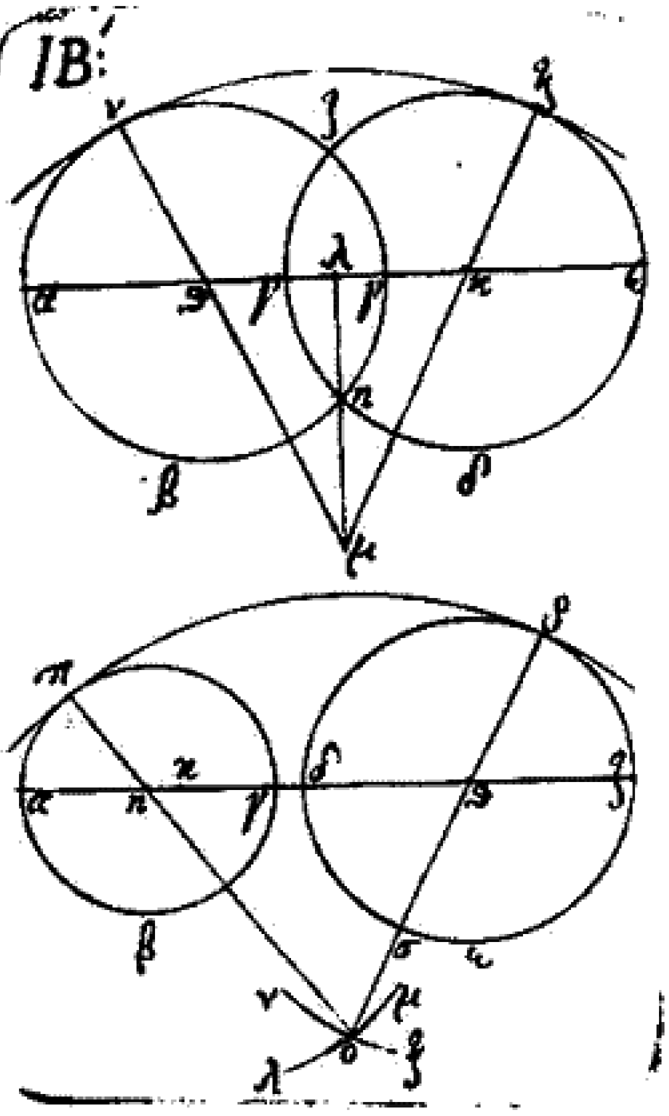
Δοθήτωσαν α': κύκλοι ἄνισοι οἱ αβγ, γδε, ἤτοι ἀπτόμενοι κατὰ τὸ γ, ἢ γοῦν τεμνόμενοι κατὰ τὰ ζ, καὶ η, σημεῖα, καὶ ζητηθήτω κύκλος γραφῆναι ἑκατέρου αὐτῶν ἀπτόμενος. Εὑρεθήτω δὴ τὰ κέντρα ἑκατέρου τῶν δοθέντων, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ἐλάττονος αβγ, τὸ θ, τοῦ δὲ μείζονος γδε, τὸ κ, καὶ διὰ τῶν θ, κ, κέντρων διήχθω ἡ αε, τέμνουσα ἑκάτερον εἰς δύο ἡμικύκλια. εἶτα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς γκ, ἡμιδιαμέτρου τοῦ μείζονος κύκλου ἡ γλ, ἴση τῇ γθ, ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ ἐλάττονος κύκλου, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ λε, τμηθήτω ὁ μείζων κύκλος κατὰ τὸ μ, ἀπὸ δὲ τοῦ μ, ἤχθωσαν διὰ τῶν θ, καὶ κ, κέντρων αἱ μθν, μκξ, εὐθεῖαι, καὶ τμηθήσονται οἱ κύκλοι, ὁ μὲν κατὰ τὸ ν, ὁ δὲ κατὰ τὸ ξ, τούτων δ' οὕτω γενομένων, ληφθήτω κέντρον μὲν τὸ μ, διάστημα δὲ τὸ μν, καὶ γραφήτω ὁ νξ, κύκλος, καὶ ἔσται ἀπτόμενος τοῦ μὲν κατὰ τὸ ν, τοῦ δὲ κατὰ τὸ ξ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν θν, ἴση ἐστὶ τῇ γλ, κατὰ τὴν κατασκευήν, ἡ δὲ θμ, τῇ λε, πάντως γε ἡ ὅλη νμ, ἴση ἐστὶ τῇ ὅλῃ γε, ἀλλὰ τῇ γε, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ μξ, ἄρα ἡ νμ, ἴση ἐστὶ τῇ μξ, ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ μ, διαστήματι δὲ τῷ μν, γραφόμενος κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ ξ, καὶ ἑπομένως ἐφάψεται ἑκατέρου, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Geom. Lib. 2. Fig. 15.



Ἔστωσαν β': κύκλοι ἴσοι οἱ αβγ, γδε, ὧν δεῖ τὸν ζητούμενον ἅπτεσθαι κύκλον. εἰ μὲν οὖν οἱ δοθέντες κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ γ, ἤχθω διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν ζ, καὶ η, ἡ αε, ἥτις διελεύσεται πάντως καὶ διὰ τοῦ γ, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πρὸς δὲ τῷ γ, συνεστάθω κάθετος ἡ γθ, ἐπὶ τῆς αε. καὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς γθ, δὸς εἰπεῖν τοῦ θ, ἤχθωσαν διὰ τῶν κέντρων τῶν κύκλων αἱ θζκ, θηλ, εὐθεῖαι. Εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θκ, γραφήτω κύκλος, καὶ διελεύσεται πάντως καὶ διὰ τοῦ λ, κατὰ γὰρ τὴν δ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ ζθ, ηθ, εἰσὶν σιν ἴσαι, προστιθεμένων δὲ καὶ τῶν ζκ, ηλ, ἴσων, γενήσονται ἴσαι καὶ αἱ θκ, θλ. Ὅτι δὲ ὁ κλ, κύκλος ἅπτεται ἑκατέρου τῶν δοθέντων, δῆλον ἐκ τῆς ἀνωτέρω. Εἰδέ γε οἱ δοθέντες κύκλοι τέμνονται ἀλλήλοις κατὰ τὰ ζ, η, σημεῖα, ἤχθω ἡ αε, διὰ τῶν θκ, κέντρων, καὶ τμηθήτω ἡ θκ, δίχα κατὰ τὸ λ, ἐφ' ἧς συνεστάθω κάθετος ἡ λμ, ἀπὸ δὲ τοῦ τυχόντος σημείου, δὸς εἰπεῖν τοῦ μ, ἀχθήτωσαν διὰ τῶν κέντρων αἱ μθν, μκξ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ μ, διαστήματι δὲ τῷ μν, γραφήτω τόξον, καὶ διελεύσεται τοῦτο πάντως καὶ διὰ τοῦ ξ. Ὅτι μὲν οὖν ὁ κέντρῳ μὲν τῷ μ, διαστήματι δὲ τῷ μν, γραφόμενος κύκλος ἅπτεται τοῦ αβγ, κύκλου, δείκνυται διὰ τῆς α: προτάσεως τοῦ παρόντος. Ὅτι δὲ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ ξ, δῆλον. αἱ γὰρ θμ, κμ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, προστιθεμένων δὲ αὐταῖς τῶν ἴσων θν, κξ, ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ μν, μξ, καὶ ἑκατέρα τούτων ἡμιδιάμετρος ἔσται τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Εἰδὲ δοθῇ θάτερον τῶν κ, καὶ λ, σημείων, ἢ τῶν ν, καὶ ξ, ἡγμένης τῆς αε, διὰ τῶν κέντρων τῶν δοθέντων κύκλων. καὶ ἐπ' αὐτῆς συνισταμένης τῆς γθ, λμ, καθέτου, ἤχθω ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου κ, ἢ ν, ἡ κθ, εὐθεῖα, ἢ νμ, καὶ τμηθήσεται ἡ μὲν γθ, κατὰ τὸ θ, ἡ δὲ λμ, κατὰ τὸ μ, ἀπὸ δὲ τοῦ θ, ἢ μ, ἤχθω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἑτέρου κύκλου ἡ θλ, ἢ μξ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω, ὡς πρότερον, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν.

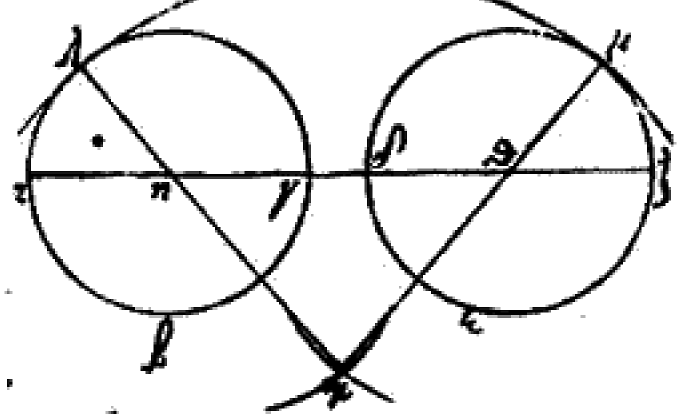
Geom. Lib. 2. Fig. 6.



Ἔστωσαν γ': οἱ αβγ, δεζ, κύκλοι, καὶ ζητήτω γραφῆναι ἕτερός τις κύκλος ἑκατέρου ἁπτόμενος, κείσθωσαν δὲ ἄνισοι, καὶ ἔστω τοῦ μὲν αβγ, ἐλάττονος κέντρον τὸ η, τοῦ δὲ δεζ, μείζονος τὸ θ, καὶ εἰλήφθω ἡ δκ, ἴση τῇ αη, ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ αβγ, ἐλάσσονος. εἶτα ἀπὸ μὲν τοῦ η, κέντρου τοῦ ἐλάσσονος, διαστήματι ἴσῳ τῇ δζ, διαμέτρῳ τοῦ μείζονος γραφήτω τόξον τὸ λμ, ἀπὸ δὲ τοῦ θ, κέντρου τοῦ μείζονος, διαστήματι τῇ θκ, γραφήτω ἕτερον τόξον τὸ νξ, τέμνον τὸ λμ, κατὰ τὸ ο, ἀφ' οὗ ἤχθωσαν διὰ τῶν η, καὶ θ, κέντρων αἱ οηπ, οθρ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ο, διαστήματι δὲ τῇ οπ, γραφήτω κύκλος καὶ διελεύσεται οὗτος καὶ διὰ τοῦ ρ. Δείκνυται. ἐπεὶ αἱ θκ, θο, εἰσὶν ἴσαι, ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἴσαι θδ, θσ, ἐναπολειφθήσονται αἱ δκ, σο, ἴσαι, ἀλλ' ἡ δκ, ἴση ἐστὶ τῇ ηπ, κατὰ τὴν κατασκευήν, ἄρα καὶ ἡ σο, ἴση ἐστὶ τῇ αὐτῇ ηπ, εἴληπται δὲ καὶ ἡ ηο, ἴση τῇ σρ, ἡ ὅλη ἄρα οπ, ἴση ἐστὶ τῇ ὅλῃ ορ, ὥστε ὁ ἀπὸ τοῦ ο, γραφόμενος κύκλος διαστήματι τῇ οπ, διελεύσεται πάντως καὶ διὰ τοῦ ρ.

Εἰδὲ οἱ δοθέντες κύκλοι ἴσοι ἀλλήλοις ὦσιν, ὡς οἱ α β γ, καὶ δ ε ζ, ἤχθω διὰ τῶν η, καὶ θ, κέντρων αὐτῶν ἡ α ζ, καὶ κέντροις μὲν τοῖς η, καὶ θ, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι, γραφήτωσαν δύο τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ κ, ἀπὸ δὲ τοῦ κ, ἤχθωσαν διὰ τῶν κέντρων η, καὶ θ, αἱ κ η λ, καὶ κ θ μ, εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ κ, διαστήματι δὲ τῇ κ λ, γραφήτω κύκλος, ὅστις διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ μ, αἱ γὰρ κ η, κ θ, ἐκ τῆς κατασκευῆς ἴσαι εἰσί, ταύταις δὲ προστιθεμένων καὶ τῶν η λ, θ μ, ἴσων εὐθειῶν, ἔσονται καὶ αἱ κ λ, κ μ, ἴσαι.

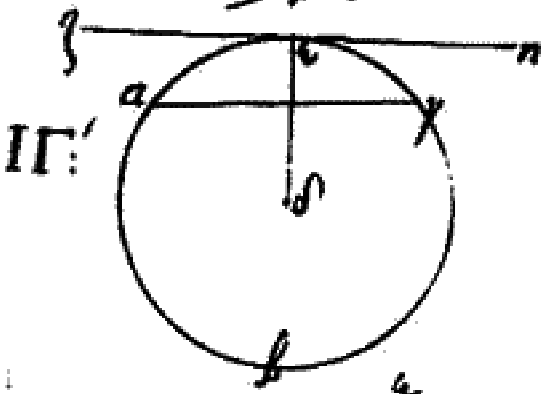
Geom. Lib. 2. Fig. 17.



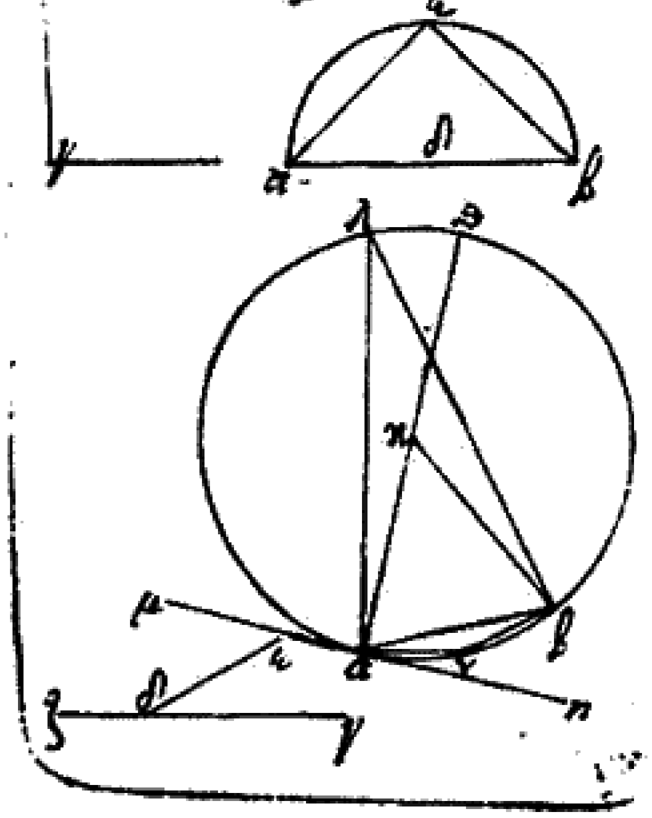
Πρότασις ΙΓ΄.

Κύκλου δοθέντος ὡς ἔτυχε τεμνομένου ὑπό τινος εὐθείας, ἀπτομένην αὐτοῦ εὐθεῖαν ἀγαγεῖν παραλλήλως τῇ τεμνούσῃ.

ΙΓ΄



Δεδόσθω κύκλος ὁ α β γ, οὗ κέντρον τὸ δ, τεμνέτω δὲ αὐτὸν ὡς ἔτυχεν ἡ α γ, καὶ ζητείσθω ἀχθῆναι ἑτέρα τις εὐθεῖα παράλληλος μὲν τῇ α γ, ἀπτομένη δὲ τοῦ α β γ, κύκλου. Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου ἡ δ ε, ὥστε πρὸς ὀρθὰς τέμνειν τὴν α γ, τέμνουσαν τὸν κύκλον, διὰ δὲ τοῦ ε, ἤχθω ἡ ζ η, ὥστε πρὸς ὀρθὰς εἶναι ἐπὶ τῆς δ ε, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. ἡ γὰρ ζ η, κατὰ τὴν ις΄: τοῦ γ΄: τῶν Στοιχείων, ἐκτὸς πίπτει τοῦ α β γ, κύκλου, καὶ κατὰ τὸν β΄: ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἅπτεται ἐκείνου. Ὅτι δὲ καὶ παράλληλός ἐστι τῇ α γ, τεμνούσῃ τὸν κύκλον, δείκνυται διὰ τῆς κη΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ.



Πρότασις ΙΔ΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας τμῆμα κύκλου γράψαι δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ.

Ἔστω ἡ α β, εὐθεῖα, ἐφ' ἧς ζητεῖται τμῆμα κύκλου συσταθῆναι, ὥστε δέχεσθαι γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ γ, δοθείσῃ. Εἰ μὲν οὖν ἡ δοθεῖσα γ, γωνία ὀρθή ἐστι, τμηθήτω ἡ α β, δοθεῖσα εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δ α, ἢ δ β, γραφήτω τὸ α ε β, ἡμικύκλιον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ε, β ε, εὐθεῖαι, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. ἡ γὰρ ὑπὸ α ε β, γωνία ὀρθή ἐστι,

καὶ

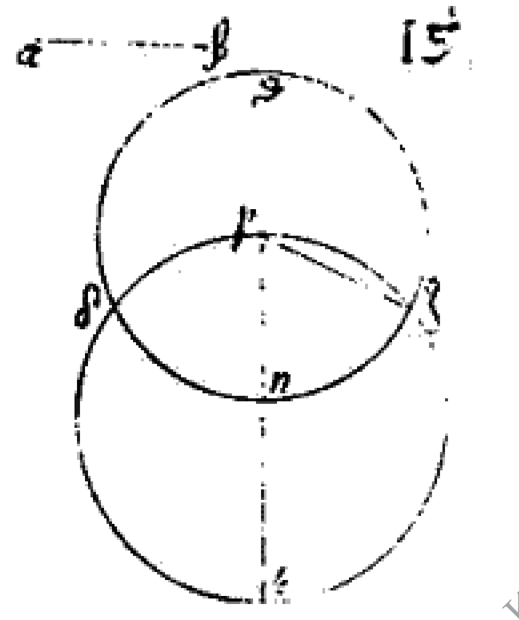
κατὰ τὴν λα: τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ἐπὶ τῆς αβ, ἄρα εὐθείας συνέςη τὸ αεβ, τμῆμα δεχόμενον τὴν δοθεῖσαν γωνίαν. Εἰδὲ ἡ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα εἴη, ὡς ἡ ὑπὸ γδε, ἢ ἀμβλεῖα, ὡς ἡ ὑπὸ ζδε, συνεςάτω ἐπὶ τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας πρὸς τῷ α, δὸς εἰπεῖν, σημείῳ, γωνία μὲν ἡ ὑπὸ βαη, ἴση τῇ δοθείσῃ ὑπὸ εδγ, κάθετος δὲ ἡ αθ, τῇ δὲ ὑπὸ βαθ, γωνίᾳ γενέσθω ἴση ἡ ὑπὸ αβκ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ κ, διαςήματι δὲ τῷ κα, ἢ κβ, γραφήτω κύκλος ὁ αβλ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αλ, βλ, καὶ ἡ ὑπὸ αλβ, ἴση ἔςαι τῇ ὑπὸ γδε, δοθείσῃ, κατὰ γὰρ τὴν λβ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ ἡ ὑπὸ αλβ, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ βαη, αὕτη δὲ ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ γδε, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αλβ, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ γδε. Δοθείσης δὲ τῆς ὑπὸ ζδε, ἀμβλείας γωνίας, συνεςάτω ἐπὶ τῆς αβ, ἡ ὑπὸ βαμ, ἴση τῇ ὑπὸ ζδε, δοθείσῃ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς πρότερον. εἶτα ἐπιζεύχθωσαν αἱ αν, βν, καὶ ἡ ὑπὸ ανβ, γωνία ἴση ἔςαι τῇ ὑπὸ ζδε. κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν ἡ ὑπὸ ανβ, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ βαμ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ βαμ, ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ ζδε, δοθείσῃ, ἡ ἄρα ὑπὸ ανβ, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ ζδε. Κύκλου ἄρα δοθέντος, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΕ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ.

Δοθήτω γωνία ἡ ὑπὸ γδε, κύκλος δὲ ὁ αὐτὸς αβλ, ἀφ' οὗ ζητεῖται τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ γδε. Ἤχθω δὴ ἡ μη, ἀπτομένη τοῦ δοθέντος αβλ, κύκλου κατὰ τὸ α, πρὸς δὲ τῷ α, σημείῳ συνεςάτω ἡ ὑπὸ βαη, γωνία ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ ὑπὸ γδε, καὶ τὸ αλβ, τμῆμα, δέξεται γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ, κατὰ τὴν λβ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ἐὰν δὲ δοθῇ ἡ ὑπὸ ζδε, συνεςάτω ἡ ὑπὸ βαμ, ἴση τῇ ὑπὸ ζδε, καὶ τὸ ανβ, τμῆμα δεχθήσεται γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ κατὰ τὴν αὐτήν. *Geom. Lib. 2. Fig. 18.*

Πρότασις Ις'.



Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι, δεῖ δὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν μὴ μείζονα εἶναι τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου.

Δεδόσθω εὐθεῖα μὲν ἡ αβ, κύκλος δὲ ὁ γδεζ, καὶ ζητείσθω ἐναρμοσθῆναι εἰς αὐτὸν εὐθεῖα ἴση τῇ αβ, ἐλάττονι οὔσῃ τῆς τοῦ γδεζ, κύκλου διαμέτρου. Ἤχθω δὴ ἡ γε, διάμετρος, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαςήματι δὲ ἴσῳ τῇ δοθείσῃ αβ, γραφήτω ἕτερος κύκλος ὁ δηζθ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ γζ, καὶ ἔσται ἴση τῇ αβ, κατὰ τὴν α': τοῦ δ': τοῦ Στοιχειωτοῦ.

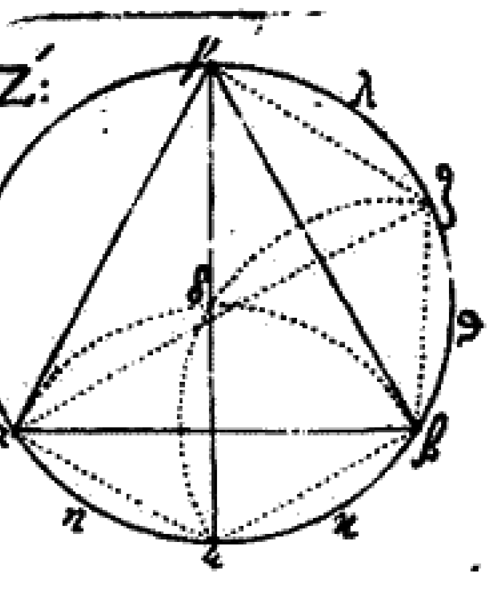
Πρότασις ΙΖ':

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς αβγ, κύκλος, καὶ ζητείσθω ἐγγραφῆναι εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον. Εὑρεθήτω δὴ τὸ κέντρον τοῦ δοθέντος κύκλου, καὶ ἤχθω δι' αὐτοῦ ἡ γδε, κέντρῳ δὲ τῷ ε, καὶ διαστήματι τῷ εδ, γραφήτω τόξον τὸ αδβ, τέμνον τὸν δοθέντα αβγ, κύκλον κατὰ τὰ α, καὶ β, σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αβ, αγ, βγ, καὶ τὸ αβγ, τρίγωνον ἰσόπλευρον ἔσται. Ληφθήτω κέντρον μὲν τὸ β, διάστημα δὲ τὸ βε, καὶ γραφήτω τὸ εδζ, τόξον, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αε, εβ, βζ, ζα, ζγ. Δείκνυται. Ἐπεὶ τοῦ μὲν διὰ τῶν αδβ, σημείων διερχομένου κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ ε, τοῦ δὲ διὰ τῶν εδζ, τὸ β, πάντως γε αἱ εα, εβ, ἴσαι εἰσίν, ὁμοίως δὲ καὶ αἱ βε, βζ, ὡς ἡμιδιάμετροι, ἀλλὰ τῇ αε, ἴση ἐστὶν ἡ γζ, κατὰ τὴν α': τοῦ δ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, κατὰ δὲ τὴν κη': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας καὶ τὰς περιφερείας ἀφαιροῦσιν, ἄρα αἱ αηε, γλζ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσίν, ὥσπερ καὶ αἱ εκβ, βθζ. ὥστε προστιθεμένων τῶν εκβ, βθζ, ἴσων ταῖς αηε, γλζ, ἴσαις περιφερείαις, ἔσται ἡ ὅλη αεβ, περιφέρεια τῇ ὅλῃ βζγ, ἴση, κατὰ δὲ τὴν κθ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ ἴση ἔσται καὶ ἡ αβ, ὑποτείνουσα τῇ βγ, ὑποτεινούσῃ, τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ ἡ αγ, ἴση τῇ αβ, ὥστε αἱ τρεῖς αβ, βγ, γα, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσί. ἰσόπλευρον ἄρα τὸ αβγ, τρίγωνον, ἅπτεται δὲ καὶ τοῦ αβγ, κύκλου, κατὰ τὸν μς': ἄρα ὅρον τοῦ παρόντος, τὸ αβγ, τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸν δοθέντα αβγ, κύκλον, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Geom. Lib.2. Fig.19.

ΙΖ'



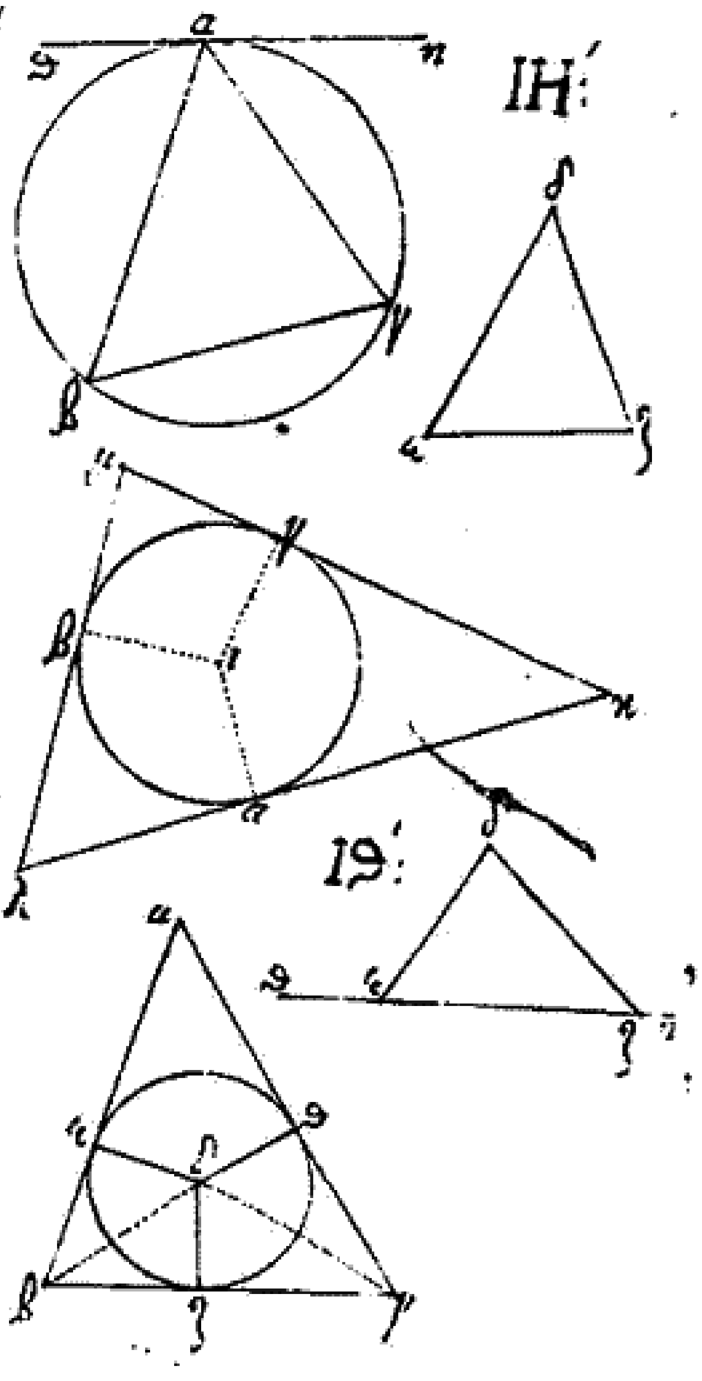
Πρότασις ΙΗ':

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τρίγωνον ἐγγράψαι ἰσογώνιον τῷ δοθέντι.

Ἔστω δὴ ἐγγράψαι εἰς τὸν δοθέντα αβγ, κύκλον τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ δεζ, δοθέντι, ἵνα δὲ τοῦτο εὐμεθόδως γένηται, ἀχθήτω ἡ ηθ, εὐθεῖα ἀπτομένη τοῦ αβγ, δοθέντος κύκλου κατὰ τὸ α, καὶ συνεστάσθω ἡ μὲν ὑπὸ θαβ, γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ ζ, τοῦ δοθέντος τριγώνου γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ηαγ, τῇ πρὸς τῷ ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βγ, εὐθεῖα, καὶ τὸ αβγ, τρίγωνον ἰσογώνιον ἔσται τῷ δεζ, τριγώνῳ. κατὰ γὰρ τὴν λβ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ ὑπὸ θαβ, ἴση

ἐστὶ

ἐςὶ τῇ ὑπὸ α γ β, ἡ δὲ ὑπὸ θ α β, γέγονεν ἴση τῇ ὑπὸ δ ζ ε, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δ ζ ε, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ α γ β. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ α β γ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δ ε ζ. ὥςε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ β α γ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ε δ ζ, ἴση ἐςίν. Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον, καὶ τὰ ἑξῆς. *Geom. Lib. 2. Fig. 20.*



Πρότασις ΙΘʹ:

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τρίγωνον περιγράψαι, ἰσογώνιον τῷ δοθέντι.

Κείσθω περὶ τὸν α β γ, κύκλον τρίγωνον περιγράψαι ἰσογώνιον τῷ δοθέντι δ ε ζ. Εἰς δὲ τὴν τούτου κατασκευὴν ἐκβληθήτω ἡ ε ζ, ἐφ᾽ ἑκάτερα κατὰ τὰ η, καὶ θ, ἀπὸ δὲ τοῦ ι, κέντρου τοῦ κύκλου ἤχθω ἡ ι α, καὶ τῇ μὲν ὑπὸ δ ε θ, γωνίᾳ, ἢ δ ζ η, (ὁποτέραν βούλει) γενέσθω ἴση ἡ ὑπὸ α ι β. Ἔςω οὖν ἐνταῦθα τῇ ὑπὸ δ ε θ, τῇ δὲ ὑπὸ δ ζ η, γενέσθω ὁμοίως ἴση ἡ ὑπὸ β ι γ, καὶ διὰ τῶν α, β, γ, ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι ἁπτόμεναι τοῦ α β γ, δοθέντος κύκλου αἱ κ λ, λ μ, μ κ, καὶ τὸ κ λ μ, τρίγωνον περὶ τὸν α β γ, δοθέντα κύκλον περιγραφόμενον, ἰσογώνιον ἔςαι τῷ δοθέντι δ ε ζ, τριγώνῳ. Κατὰ γὰρ τὴν ιη: τοῦ γʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ι α λ, ι β λ, ὀρθή ἐςιν, ὥςε καὶ αἱ ὑπὸ α ι β, α λ β, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ γὰρ τετραπλεύρου παντὸς αἱ τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, διὰ τὸ εἰς δύο ἀεὶ διαιρεῖσθαι τρίγωνα. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ δ ε θ, δ ε ζ, γων: δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, κατὰ τὴν ιγʹ: τοῦ αʹ: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα αἱ ὑπὸ α ι β, α λ β, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ δ ε θ, δ ε ζ, γέγονε δὲ ἴση τῇ ὑπὸ δ ε θ, ἡ ὑπὸ α ι β, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ α λ β, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ δ ε ζ. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ γ μ β, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δ ζ ε, καὶ ἡ ὑπὸ α κ γ, τῇ ὑπὸ ε δ ζ. περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κʹ:

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Δεδόσθω τρίγωνον τὸ α β γ, εἰς ὃ ζητεῖται κύκλος ἐγγραφῆναι. Τμηθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β γ, α γ β, γωνιῶν δίχα διὰ τῶν β δ, γ δ, συμπιπτουσῶν

εὐθειῶν

εὐθειῶν κατὰ τὸ δ, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου πιπτέτωσαν κάθετοι ἐπὶ τὰς τοῦ αβγ, δοθέντος τριγώνου πλευρῶν αἱ δε, δζ, δθ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, γραφήτω κύκλος, καὶ διελεύσεται πάντως καὶ διὰ τῶν ζ, καὶ θ, σημείων. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ εβδ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζβδ, δίχα γὰρ ἡ ὑπὸ εβζ, τέτμηται. καὶ ἡ ὑπὸ δεβ, τῇ ὑπὸ δζβ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ δὲ ἡ βδ, εὐθεῖα, πάντως γε κατὰ τὴν κϛ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ εδ, ἴση ἐστὶ τῇ δζ· διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ δθ, καὶ δζ, ἴση, ὥστε αἱ τρεῖς δε, δζ, δθ, εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν ζ, θ. ὥστε ὁ εζθ, κύκλος ἐγγεγραμμένος ἐστὶν εἰς τὸ αβγ, τρίγωνον, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

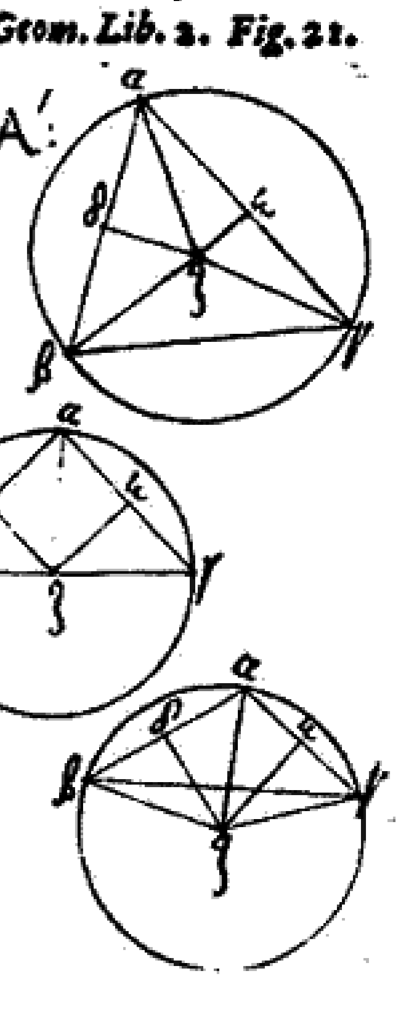
Πρότασις ΚΑ':

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

Δοθήτω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ζητηθήτω περὶ αὐτὸ κύκλος περιγραφῆναι. Τμηθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν αβ, αγ, εὐθειῶν δίχα κατὰ τὰ δ, καὶ ε, σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν συνεστάθωσαν κάθετοι ἐπὶ τῶν αβ, αγ, αἱ δζ, εζ, συμπίπτουσαι κατὰ τὸ ζ, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ ζα, γραφήτω κύκλος, ὅστις διελεύσεται καὶ διὰ τῶν β, καὶ γ, σημείων. Ἐπεὶ γὰρ αἱ αδ, δβ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις, κοινὴ δὲ ἡ δζ, καὶ αἱ ὑπὸ αδζ, βδζ, γωνίαι ὁμοίως ἴσαι, πάντως γε κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ αζ, βζ, ἴσαι εἰσί. διὰ τῆς αὐτῆς δειχθήσεται καὶ ἡ ζγ, τῇ ζα, ἢ ζβ, ἴση, ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζα, ἢ ζβ, ἢ ζγ, γραφόμενος κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν, καὶ ἐφάψεται τῶν τριῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου γωνιῶν. διὸ δὴ καὶ περιγράφεσθαι λέγεται κατὰ τὸν μθ': τοῦ παρόντος ὅρον.

Geom. Lib. 2. Fig. 21.

ΚΑ'



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Δῆλον δ' ἐκ τούτων, ὅτι ἐὰν τὸ τρίγωνον ὀξυγώνιον εἴη, ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται τὸ τοῦ κύκλου κέντρον. ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης, κἂν ἀμβλυγώνιον ἐκτός. καὶ ἀνάπαλιν ἐὰν τὸ κέντρον τοῦ περιγραφομένου κύκλου ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει, ὀξυγώνιόν ἐστι τὸ τρίγωνον. εἰδέ γε ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης, ὀρθογώνιον, καὶ ἀμβλυγώνιον ἐὰν ἐκτός.

Πρό-

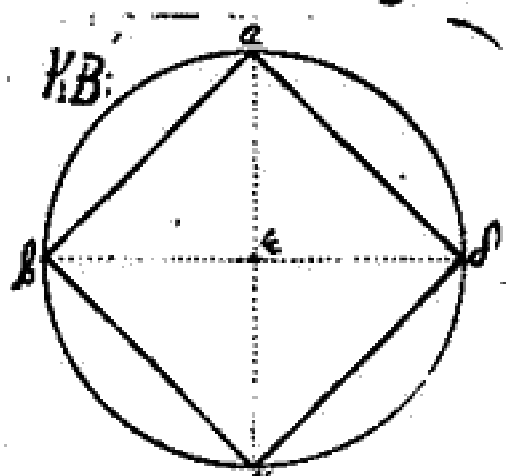
Πρότασις ΚΒ':

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω κύκλος ὁ α β γ δ, καὶ ζητείσθω ἐγγραφῆναι εἰς αὐτὸν τετράγωνον. Ἀχθήτωσαν δὴ διὰ τοῦ ε, κέντρου τοῦ α β γ δ, δοθέντος κύκλου δύο διάμετροι τεμνόμεναι ἀλλήλαις πρὸς ὀρθὰς αἱ α γ, β δ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α β, β γ, γ δ, δ α, καὶ τὸ α β γ δ, τετράγωνον, ἔσται ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν α β γ δ, δοθέντα κύκλον. κατὰ γὰρ τὴν δ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ α β, β γ, γ δ, δ α, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, κατὰ δὲ τὸ α: πόρισμα τῆς λ β': τοῦ αὐτοῦ, ἑκατέρα τῶν α β ε, γ β ε, γωνιῶν ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὥστε ἡ ὅλη α β γ, ὀρθή ἐστιν. Ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ὑπὸ β γ δ, γ δ α, καὶ δ α β, ὀρθαί εἰσιν ἑκάστη. τὸ δὲ ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τετράγωνόν ἐστι κατὰ τὸν κ θ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, τὸ α β γ δ, ἄρα τετράγωνόν ἐστιν, ἅπτεται δὲ τοῦ δοθέντος κύκλου ἑκάστη τῶν αὐτῶν γωνιῶν. εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἐγγέγραπται τὸ α β γ δ, τετράγωνον, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Geom. Lib. 2. Fig. 22.

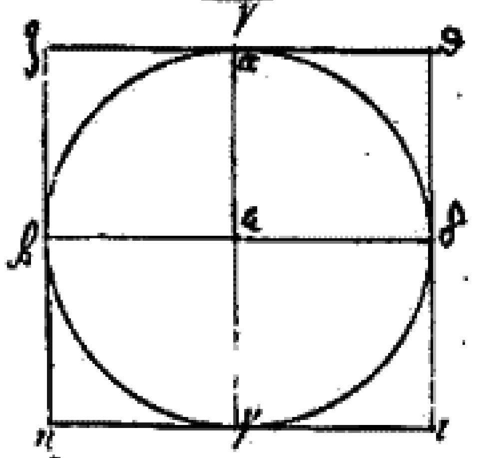
ΚΒ:



Πρότασις ΚΓ':

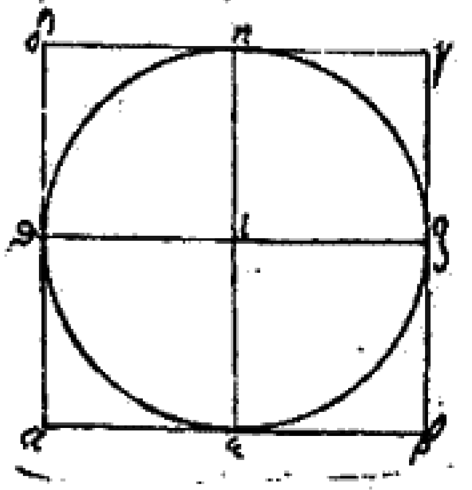
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἔστω περὶ τὸν δοθέντα α β γ δ, κύκλον τετράγωνον περιγράψαι. Ἀχθήτωσαν δὴ διὰ τοῦ ε, κέντρου τοῦ α β γ δ, δοθέντος κύκλου αἱ α γ, β δ, διάμετροι τεμνόμεναι ἀλλήλαις πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὸ ε, καὶ διὰ τῶν α β γ δ, σημείων ἀχθήτωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ αὐτοῦ κύκλου αἱ ζ η, η ι, ι θ, θ ζ, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθὲν κατὰ τὴν ζ': τοῦ δ': τοῦ Στοιχειωτοῦ.



Πρότασις ΚΔ':

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.



Ἔστω τετράγωνον τὸ α β γ δ, εἰς ὃ δεῖ κύκλον ἐγγράψαι. Τμηθήτω οὖν ἑκατέρα τῶν α β, β γ, αὐτοῦ πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, καὶ ἀχθήτωσαν αἱ ε η, ζ θ, εὐθεῖαι ἡ μὲν τῇ β γ, ἡ δὲ τῇ α β, παράλληλος, τεμνόμεναι κατὰ τὸ ι, σημεῖον, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου, διαστήματι τῷ ι ε, ἢ ι ζ, γραφήτω κύκλος, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. Δείκνυται διὰ τῆς η': τοῦ ῥηθέντος.

Πρότασις ΚΕ′:

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

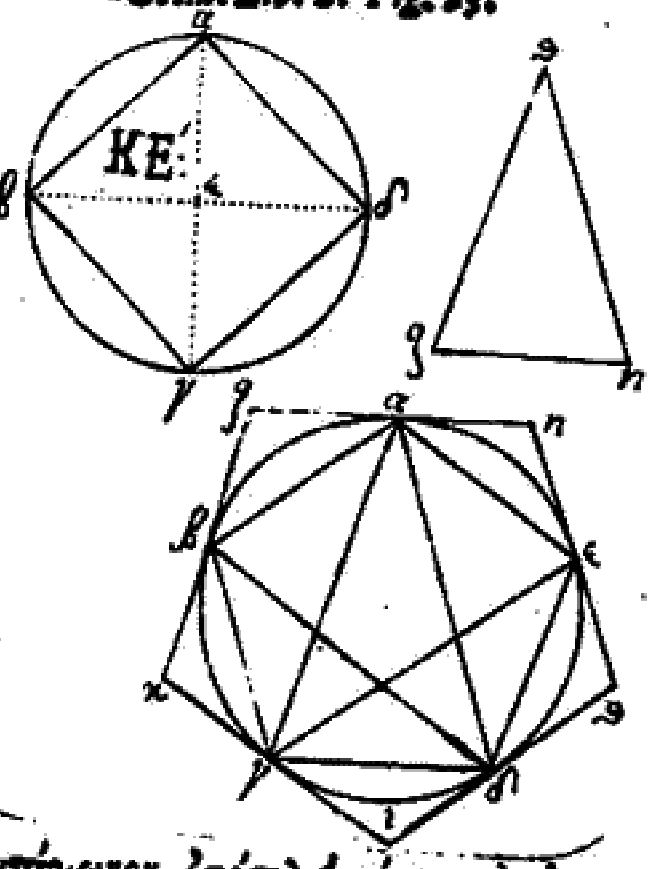
Ἔστω τετράγωνον, περὶ ὃ ζητεῖται κύκλος περιγραφῆναι, τὸ α β γ δ. ἀχθήτωσαν δὴ αἱ α γ, β δ, διαγώνιοι διάμετροι τοῦ δοθέντος α β γ δ, τετραγώνου, τεμνόμεναι κατὰ τὸ ε, ἀφ᾽ οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῇ ε α, ἢ ε β, γραφήτω κύκλος, καὶ διελεύσεται πάντως οὗτος καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τριῶν σημείων. ὁ λόγος σαφὴς διὰ τῆς θ′: τοῦ ῥηθέντος δ′:

Πρότασις Κϛ′:

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω κύκλος ὁ α β γ δ ε, εἰς ὃν ζητεῖται πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγραφῆναι, οὗ εἰς κατασκευὴν συνιστάσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἐπὶ τῆς ζ η, τυχούσης εὐθείας κατὰ τὴν κ η′: τοῦ α′: τοῦ παρόντος ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς κατὰ κορυφήν, καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγραφήτω εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, ὡς τὸ α γ δ. εἶτα διαιρεθήτω ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α γ δ, α δ γ, δίχα διὰ τῶν γ ε, δ β, εὐθειῶν, καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ αἱ α β, β γ, δ ε, ε α, εὐθεῖαι, καὶ τὸ α β γ δ ε, πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἔσται καὶ ἰσογώνιον κατὰ τὴν ι α′: τοῦ προειρημένου βιβλίου τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Geom. Lib. 2. Fig. 23.



Πρότασις ΚΖ′:

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἔστω κύκλος ὁ α β γ δ ε, περὶ ὃν ζητηθήτω πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγραφῆναι. Ἐγγραφήτω δὴ α′: εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον τὸ α β γ δ ε, πεντάγωνον κατὰ τὴν ἀνωτέρω, διὰ δὲ τῶν α β γ δ ε, σημείων ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι ἁπτόμεναι τοῦ κύκλου αἱ ζ η, η θ, θ ι, ι κ, κ ζ, καὶ τὸ ζ η θ ι κ, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον κατὰ τὴν ι β′: τοῦ ῥηθέντος.

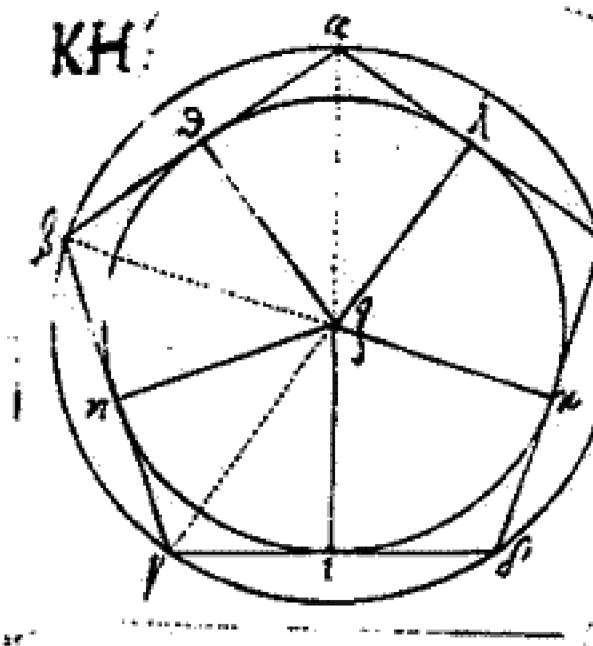
Πρό-

Πρότασις ΚΗʹ:

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω δὴ εἰς τὸ αβγδε, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι. Ἵνα δὲ τοῦτο γεωμετρικῶς γένηται, τμηθήτω ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, δίχα κατὰ τὰ η, καὶ θ, σημεῖα, καὶ συνεστάθωσαν ἐπ' αὐτῶν κάθετοι, αἱ ηζ, θζ, ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, σημείου ἤχθήτωσαν ὁμοίως ἐφ' ἑκάστης τῶν λοιπῶν γδ, δε, εα, αἱ ζι, ζκ, ζλ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζη, γραφήτω κύκλος, καὶ οὗτος πάντως γε διελεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν θ, λ, κ, ι, σημείων. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ζα, ζβ, ζγ· καὶ ἐπεὶ αἱ θα, θβ, ἴσαι εἰσί, κοινὴ δὲ ἡ θζ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αθζ, τῇ ὑπὸ βθζ, ἴση, (ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα) πάντως γε καὶ αἱ αζ, βζ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν δʹ: τοῦ αʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ γζ, ἴση τῇ βζ, ὥστε δύο αἱ αζ, ζβ, δυσὶ ταῖς γζ, ζβ, ἴσαι εἰσίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ βγ, ἴση, κατὰ τὴν ηʹ: ἄρα τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ θαζ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηγζ, ἀλλ' ἡ μὲν θα, ἴση ἐστὶ τῇ ηγ, ἡμίσεια γὰρ ἑκατέρα τῶν ἴσων αβ, βγ, ἡ δὲ αζ, τῇ γζ, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δʹ: ἴση ἐστὶ καὶ ἡ θζ, τῇ ηζ. αὖθις ἐπεὶ αἱ ὑπὸ θαζ, ηγζ, γωνίαι εἰσὶν ἴσαι, καὶ τῇ μὲν ὑπὸ θαζ, ἡ ὑπὸ θβζ, τῇ δὲ ὑπὸ ηγζ, ἡ ὑπὸ ηβζ, πάντως γε ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία δίχα τέτμηται διὰ τῆς ζβ, ταύτῃ δὲ ἴση καὶ ἡ ὑπὸ βαε, καὶ βγδ, ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βαε, βγδ, δίχα τέτμηται διὰ τῶν ζα, ζγ, ὥστε αἱ ὑπὸ θαζ, λαζ, εἰσὶν ἴσαι. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αθζ, τῇ ὑπὸ αλζ, ἴση, καὶ κοινὴ ἡ αζ, εὐθεῖα, ἄρα κατὰ τὴν κςʹ: τοῦ αὐτοῦ, ἡ θζ, ἴση ἐστὶ τῇ λζ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ ζκ, ζι, ἴσαι ἑκατέρα τῇ ζλ, ζθ, ζη. Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζη, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν θλκι, σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν αβ, βγ, γδ, δε, εα, πλευρῶν τοῦ δοθέντος πενταγώνου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιςʹ: τοῦ γʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Geom. Lib.2. Fig.24.



Πρότασις ΚΘ:

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ α β γ δ ε, περὶ ὃ δεῖ κύκλον περιγράψαι. Τμηθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ β α ε, α β γ, γωνιῶν δίχα διὰ τῶν α ζ, β ζ, συμβαλλουσῶν εὐθειῶν κατὰ τὸ ζ, ἀφ᾽ οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ ζ α, γραφήτω κύκλος, ὃς διελεύσεται καὶ διὰ τῶν β γ δ ε, σημείων. ὅτι μὲν γὰρ αἱ ζ α, ζ β, εἰσὶν ἴσαι, δείκνυται διὰ τῆς ϛ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ὅτι δὲ καὶ αἱ ζ ε, ζ δ, ζ γ, ἐπιζευχθεῖσαι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν καὶ ἀλλήλαις καὶ ἑκατέρᾳ τῶν ζ α, ζ β, δῆλον, ἡ μὲν γὰρ ὑπὸ ζ α ε, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζ β α, ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν α ε, τῇ α β, ἴση, ἡ δὲ α ζ, τῇ β ζ, ἄρα κατὰ τὴν δ΄: τοῦ αὐτοῦ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ζ α, τῇ ζ ε. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ ὁμοίως ἴσαι. ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζ α, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων.

Τέλος τοῦ Δευτέρου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου.

ΣΤΟΙ.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

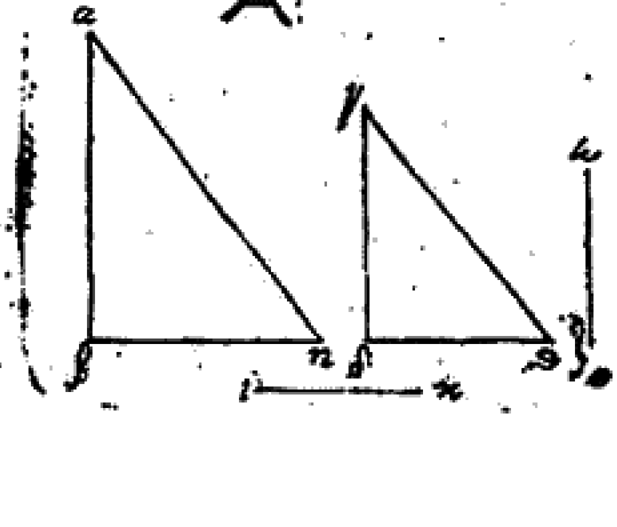
Πρότασις Α':

Ἐὰν ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἡ α': πρὸς τὴν γ': τὸ ἐπὶ τῆς α': πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς β': ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τρίγωνον, ἢ τὸ ἐπὶ τῆς β': πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς γ':

Ἔστωσαν δὴ ἀνάλογον αἱ α β, γ δ, ε ζ, εὐθεῖαι, ἐπὶ δὲ τῶν α β, γ δ, ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τρίγωνα τὰ α β η, γ δ θ. Λέγω ὅτι ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν ε ζ, οὕτως ἔχει καὶ τὸ α β η, τρίγωνον πρὸς τὸ γ δ θ, κατὰ γὰρ τὸν ι': ὅρον τοῦ ε': τοῦ Εὐκλείδου, ἡ α β, πρὸς τὴν ε ζ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν γ δ, ἀλλὰ τὸ α β η, τρίγωνον πρὸς τὸ γ δ θ, ὁμοίως διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν ε ζ, ἔχει καὶ τὸ α β η, τρίγωνον πρὸς τὸ γ δ θ, ὅπερ ἐστὶ τὸ α': Ὅτι δὲ καὶ τὸ ἐπὶ τῆς β': πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς γ': ἔχει ὡς ἡ α': πρὸς τὴν γ': δῆλον. Ἡ γὰρ ε ζ, ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶ πρὸς τὴν α β, ἤπερ ἡ γ δ, ἀλλὰ καὶ τὸ γ δ θ, τρίγωνον ἐν ὑποδιπλασίονι ὁμοίως λόγῳ ἐστὶ πρὸς τὸ α β η, ἄρα ὡς ἡ ε ζ, α': πρὸς τὴν α β, γ': οὕτω καὶ τὸ γ δ θ, πρὸς τὸ α β η. Αὕτη ἡ πρότασις ἀληθεύει καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου σχήματος, καὶ κύκλων. Τὰ γὰρ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τετράπλευρα, ἢ πολύπλευρα, ἢ κύκλοι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ἢ τῶν διαμέτρων. ὥστε ὁ λέγων, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ α': πρὸς τὴν γ': τὸ ἐπὶ τῆς α': τετράπλευρον, ἢ πολύπλευρον, ἢ κύκλος, πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς β': ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον, οἶδεν, ὃ λέγει, καὶ τοῦτό ἐστι τὸ ἐν διπλασίονι λόγῳ εἶναι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ἢ τῶν διαμέτρων.

Geom. Lib. 3. Fig. 1.

Α':



Πρότασις Β':

Ἐὰν εὐθεῖα εὐθείας διπλασία ᾖ, τὸ ἀπὸ τῆς διπλασίας τετράγωνον, ἢ ἄλλο τι σχῆμα, τετραπλάσιον ἔσται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ὁμοίου τε καὶ ὁμοίως κειμένου. Εἰ δὲ τριπλασία ᾖ ἡ εὐθεῖα, ἐννεαπλάσιον τὸ σχῆμα ἔσται, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εἰδῶν τοῦ πολλαπλασίου ἀναλόγως.

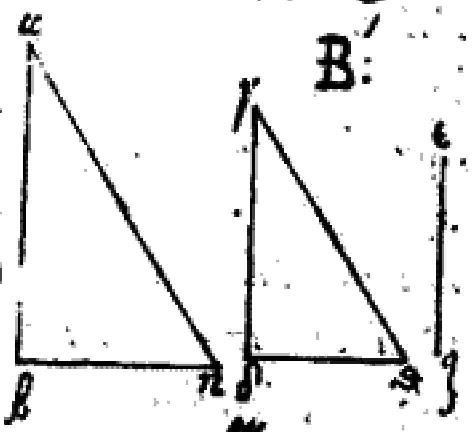
Ὑποκείσθω δὴ α: τὴν αβ, διπλασίαν εἶναι τῆς γδ. Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ γδ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὴν εζ, ὃν καὶ ἡ αβ, πρὸς αὐτήν, δῆλον ὅτι ἡ αβ, τετραπλασία ἐστὶ τῆς εζ, ἀλλ' ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν εζ, ἔσται καὶ τὸ αβη, σχῆμα πρὸς τὸ γδθ, ὡς δέδεικται διὰ τῆς ἀνωτέρω, ἄρα καὶ τὸ αβη, σχῆμα τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ γδθ. Ἔστω β': ἡ αβ, τριπλασία τῆς γδ, ἔσται πάντως καὶ ἡ γδ, ὁμοίως τριπλασία τῆς εζ, ἀνάλογοι γὰρ ὑπετέθησαν. ὥστε ἡ αβ, τῆς εζ, ἐννεαπλάσιος ἔσται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν εζ, ἔστι καὶ τὸ αβη, τρίγωνον πρὸς τὸ γδθ, ἄρα τὸ αβη, ἐννεαπλάσιον ἔσται τοῦ γδθ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων εἰδῶν τοῦ πολλαπλασίου κατὰ τὸ ἀνάλογον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἰσογώνια λόγον ἔχουσι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, ὡς καὶ παρὰ τῷ Στοιχειωτῇ δείκνυται, καὶ ὅτι τὰ τρίγωνα τὰ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, ὡσαύτως λόγον ἔχουσι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τῶν τὰς ἴσας περιεχουσῶν γωνίας. ἐὰν γὰρ παραλληλόγραμμον συσταθῇ ὑπὸ τῶν τὰς ἴσας περιεχουσῶν γωνίας πλευρῶν τῶν τριγώνων, ἑκάτερον αὐτῶν ἥμισυ ἔσται τοῦ ἰδίου παραλληλογράμμου κατὰ τὴν λδ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ἀλλὰ τὰ παραλληλόγραμμα ἔχουσιν ὡς εἴρηται τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν λόγον, ἄρα καὶ τὰ τρίγωνα ὁμοίως ἔχουσι λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῶν ἴσας περιεχουσῶν γωνίας.

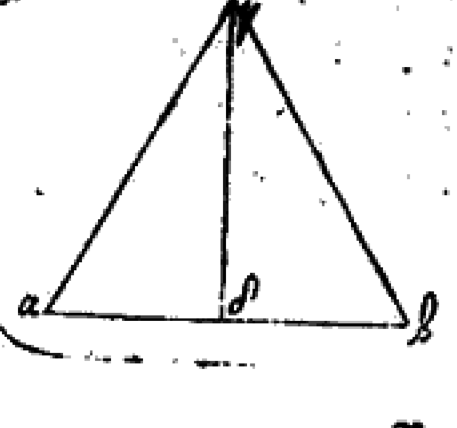
~~Geom. Lib. 3 Fig. 2.~~

B':



Πρότασις Γ':

Ἐὰν ἐν ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ κάθετος ἀπὸ μιᾶς τῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἐπὶ τῆς ἀπεναντίον πλευρᾶς πέσῃ, ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς καθέτου.



Ἔστω τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ αβγ, καὶ ἀπὸ τῆς ὑπὸ αγβ, αὐτοῦ γωνίας πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ γδ. Λέγω δὴ τὴν γα, δυνάμει ἐπίτριτον εἶναι τῆς γδ. τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς γα, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γδ, δα, τετραγώνοις, κατὰ τὴν μζ': τοῦ α: Εὐκλείδου, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ,

κατὰ

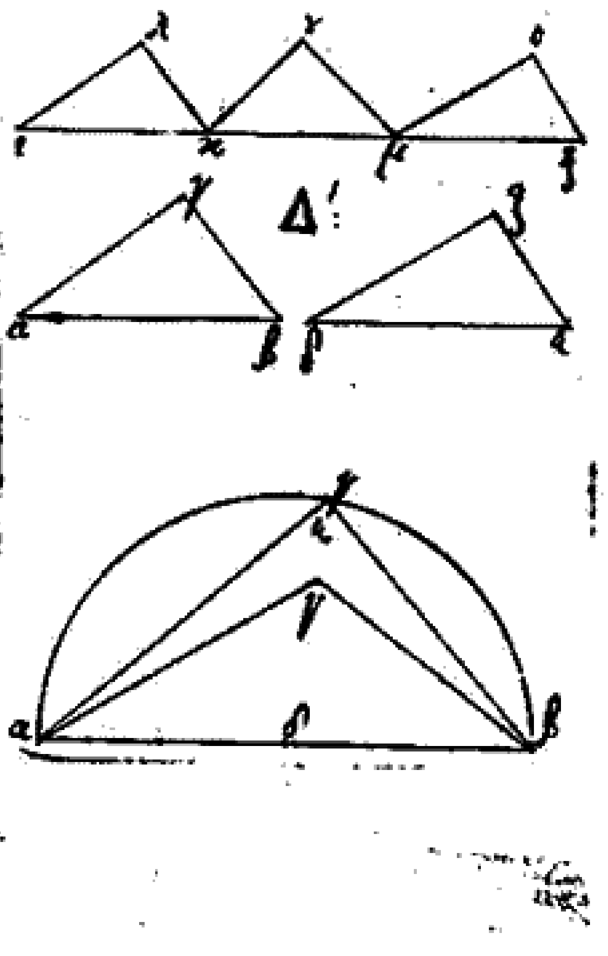
κατὰ τὴν ἑλάττονα. ἄρα καὶ συναμφότερα τὰ ἀπὸ τῶν γδ, δα, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, ὥστε κειμένου τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, ἀντὶ μονάδος τετραγώνου, τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τεσσάρων τοιούτων μονάδων ἔσται περιεκτικόν, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γδ, τριῶν, ἀλλ' ὁ 4, τοῦ 3, ἐπίτριτός ἐστιν, ὡς ὅλον ἔχων τὸν 3, καὶ ἐν αὐτοῦ γ': μέρος, ἡ αγ, ἄρα δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς γδ, ἐὰν ἄρα ἐν ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Δ':

Ἐὰν ὦσι δύο τρίγωνα, ἢ καὶ πλείω ὀρθογώνια ἐπὶ ἴσων βάσεων, τὰ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ἑνὸς τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ἑτέρου τετραγώνοις, συναμφότερα συναμφοτέροις.

Ἔστωσαν ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν αβ, δε, τρίγωνα ὀρθογώνια τὰ αβγ, δεζ, ἔχοντα γωνίας ὀρθὰς τὰς πρὸς τῷ γ, καὶ ζ. Λέγω ὅτι συναμφότερα τὰ ἀπὸ τῶν αγ, γβ, τετράγωνα ἴσα ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ἀπὸ τῶν δζ, ζε. καὶ γὰρ τὴν μζ': τοῦ α': τοῦ Εὐκλείδου, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αγ, γβ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δε, τοῖς ἀπὸ τῶν δζ, ζε, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ, γβ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δζ, ζε. ἐὰν ἄρα ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib.3. Fig.3.



Πρότασις Ε':

Παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς δίχα τμηθείσης, ὁ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς τομῆς περὶ τὴν αὐτὴν πλευρὰν γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Ἔστω ὀρθογώνιον τὸ αβγ, τρίγωνον καὶ τὸ γ, σημεῖον, καὶ τμηθήτω ἡ αβ, ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δα, ἢ δβ, γραφήτω κύκλος. Λέγω δὴ ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ γ, σημείου. ἡμικύκλιον γὰρ ἔσται τὸ ἐναπολαμβανόμενον τόξον ὑπὸ τῆς αβ, ἡ δὲ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν λα': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Ἄλλως. Κείσθω τὸν διὰ τῶν α, καὶ β, σημείων διερχόμενον κύκλον μὴ διέρχεσθαι καὶ διὰ τοῦ γ, πάντως γε ὁ κύκλος οὗτος διελεύσεται διά τινος σημείου ἐντὸς τοῦ γ, ἢ ἐκτὸς ὄντος. Ἔστω δὴ α': ἐκτὸς ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος, καὶ συνιστάσθω ἐπὶ

τῆς

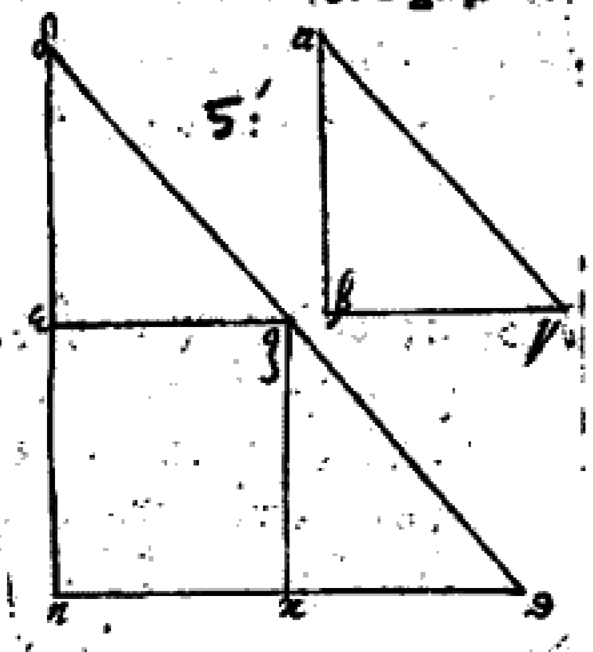
τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἀπὸ τῶν α, καὶ β, περάτων ἡ ὑπὸ αεβ, γωνία, καὶ ἔσται δήπουθεν ὀρθὴ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αγβ, ὀρθή, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αεβ, τῇ ὑπὸ αγβ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν κα': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ. τὸ αὐτὸ πάντως ἄτοπον ἕψεται, κἂν διὰ τοῦ ἐντὸς σημείου ὑποτεθῇ ὁ κύκλος διέρχεσθαι, παντὸς ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ϛ'.

Ἐὰν ὦσι δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ὅμοια, τὸ ἀπὸ τῶν ὑποτεινουσῶν τὰς ὀρθὰς γωνίας ὡς ἀπὸ μιᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ὡς ἀπὸ μιᾶς κατὰ δύο τετραγώνοις.

Ἔστωσαν ὀρθογώνια ὅμοια τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, ἔχοντα ὀρθὰς μὲν τὰς ὑπὸ αβγ, δεζ, γωνίας, ἴσας δὲ τάς τε πρὸς τῷ α, καὶ δ, καὶ τὰς πρὸς τῷ γ, καὶ ζ. Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῶν αγ, δζ, ὡς ἀπὸ μιᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, δε, ὡς ἀπὸ μιᾶς καὶ τῶν βγ, εζ, ὁμοίως ὡς ἀπὸ μιᾶς τετραγώνοις. Ἤχθω γὰρ ἡ δε, κατὰ τὸ συνεχές, ὥστε τὴν εη, ἴσην εἶναι τῇ αβ, ἀπὸ δὲ τοῦ η, παράλληλος τῇ εζ, ἤχθω ἡ ηθ, συμπίπτουσα τῇ δζ, ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ θ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς ηθ, ἡ ζκ. Δείκνυται, αἱ εη, ζκ, παράλληλοι εἰσὶ κατὰ τὴν κη': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε κατὰ τὴν αὐτὴν ἡ ὑπὸ κζθ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εδζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζκθ, ἴση τῇ ὑπὸ δεζ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ θ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ εζδ, ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ζκθ, τρίγωνον τῷ δεζ. ἀλλὰ καὶ τὸ αβγ, ὁμοίως ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δεζ, τριγώνῳ, τὸ ἄρα ζκθ, τρίγωνον, ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ αβγ, ὅτι δὲ καὶ ἰσόπλευρον, δῆλον. ἡ γὰρ ζκ, ἴση ἐστὶ τῇ εη, κατὰ τὴν λδ': τοῦ αὐτοῦ. ἡ δὲ εη, γέγονεν ἴση τῇ αβ, ἡ ζκ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ αβ, καὶ κατὰ τὴν κϛ': τοῦ αὐτοῦ, τὸ ζκθ, ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ, ὥστε ἡ κθ, ἴση τῇ βγ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ηκ, ἴση τῇ εζ, ἡ ὅλη ἄρα ηθ, ἴση ἐστὶ ταῖς βγ, εζ, ἡ δὲ ηδ, ταῖς αβ, δε, καὶ ἡ δθ, ταῖς αγ, δζ, ἀλλὰ τὸ δηθ, ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ η, κατὰ δὲ τὴν μζ': τοῦ αὐτοῦ, τὸ ἀπὸ τῆς δθ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δη, ηθ, ἄρα τὸ ἀπὸ τῶν αγ, δζ, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπό τε τῶν αβ, δε, ὡς ἀπὸ μιᾶς καὶ τῷ ἀπὸ τῶν βγ, εζ, ὁμοίως ὡς ἀπὸ μιᾶς, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

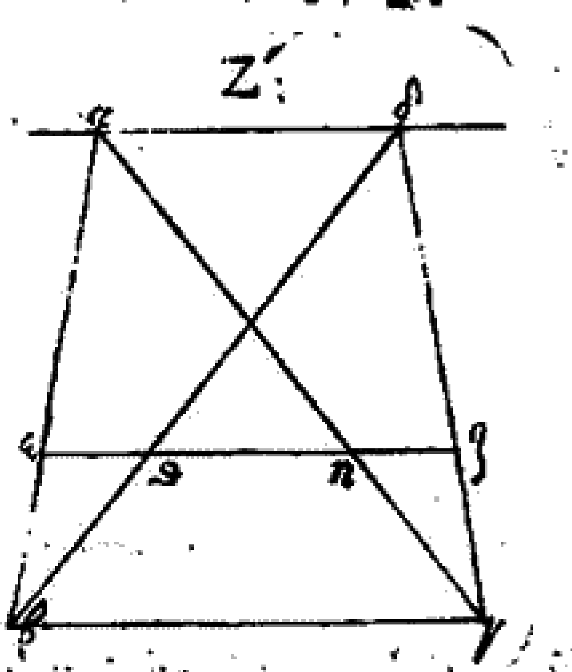
~~Geom. Lib. 5. Fig. 4~~



Πρότασις Ζ΄.

Ἐὰν δύο, ἢ καὶ πλείω τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ᾖ βάσεως, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἀχθῇ δέ τις εὐθεῖα τῇ βάσει παράλληλος, ἀναλόγως τὰ τρίγωνα τμηθήσεται.

Geom. Lib. 3. Fig. 5.



Ἔστωσαν τρίγωνα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βγ, βάσεως καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αδ, βγ, ἤχθω δὲ τῇ βγ, παράλληλος ἡ εζ. Λέγω ὅτι τὰ αβγ, δβγ, τρίγωνα ἀναλόγως τέμνεται. ὥστε ἔχειν τὸ αεη, τρίγωνον πρὸς τὸ εβγη, τραπέζιον, ὡς ἔχει καὶ τὸ δθζ, τρίγωνον πρὸς τὸ θβγζ, τραπέζιον. Ἐπεὶ γὰρ τὰ αβγ, αεη, καὶ δβγ, δθζ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, πάντως γε κατὰ τὴν δ΄: τοῦ ς΄: τῶν Στοιχείων, ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευρὰς τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ αε, πρὸς τὴν εη, ἡ δὲ δβ, πρὸς τὴν βγ, ὡς ἡ δθ, πρὸς τὴν θζ, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αε, ἡ βγ, πρὸς τὴν εη, ὡς δὲ ἡ δβ, πρὸς τὴν δθ, ἡ βγ, πρὸς τὴν θζ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αε, ἔστι καὶ ἡ δβ, πρὸς τὴν δθ, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν εθ, τῇ αδ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν αε, δέδεικται καὶ ἡ βγ, πρὸς τὴν εη, ἄρα καὶ ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν δθ, ἡ βγ, πρὸς τὴν εη. ὡς δὲ ἡ δβ, πρὸς δθ, δέδεικται καὶ ἡ βγ, πρὸς τὴν θζ, ἡ βγ, ἄρα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὴν εη, καὶ θζ. καὶ κατὰ τὴν θ΄: τοῦ ε΄: τοῦ αὐτοῦ, αἱ εη, θζ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ ἡ εζ, ἤχθη παράλληλος τῇ αδ, τὰ αεη, ἄρα δθζ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν λη΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ, εἰσὶ δὲ ἴσα καὶ τὰ αβγ, δβγ, κατὰ τὴν λζ΄: τοῦ αὐτοῦ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν αβγ, δβγ, ἴσων τριγώνων ἀφαιρεθῇ ἴσα τὰ αεη, δθζ, τρίγωνα, ἐγκαταλείπονται ἴσα καὶ τὰ εβγη, θβγζ, τραπέζια, ὥστε ὡς ἔχει τὸ αεη, τρίγωνον πρὸς τὸ εβγη, τραπέζιον, ἔχει καὶ τὸ δθζ, τρίγωνον πρὸς τὸ θβγζ, τραπέζιον, ὅπερ ἦν τὸ προτεθέν. Ὅτι δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν αε, ἔχει ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν δθ, δῆλον, κατὰ γὰρ τὴν β΄: τοῦ ς΄: τῶν Στοιχείων, ὡς ἡ βε, πρὸς τὴν αε, ἡ βθ, πρὸς τὴν δθ, καὶ συνθέσει, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αε, ἡ δβ, πρὸς τὴν δθ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

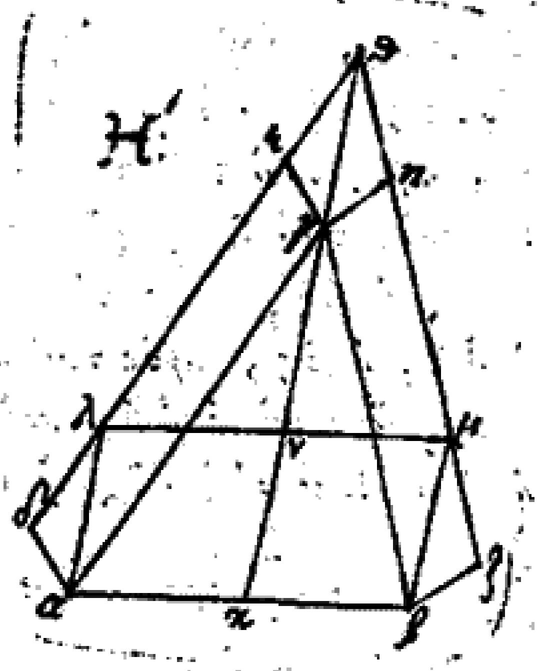
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ὦσιν ὁποσαοῦν τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἀχθῇ δέ τις εὐθεῖα τῇ βάσει παράλληλος τέμνουσα τὰ τρίγωνα, αἱ ὑπὸ τῶν πλευρῶν ἑκάστου τῶν τριγώνων ἐναπολαμβανόμεναι εὐθεῖαι, ἴσαι εἰσίν, ὡς ἐνταῦθα ἤδη αἱ εη, θζ.

Πρότασις Η':

Παντὸς τριγώνου ἐὰν ἐφ' ἑκατέρας τῶν πλευρῶν παραλληλόγραμμα ὁπωσοῦν ἀναγραφῶσι, καὶ αἱ ἐκτὸς τῶν παραλληλογράμμων πλευραὶ ἐξαγόμεναι πρός τι συμπέσωσι σημεῖον, τὰ ἀναγραφέντα παραλληλόγραμμα, ἴσα ἔσονται τῷ ὑπό τε τῆς βάσεως παραλληλογράμμῳ, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης εὐθείας ὑπό τε τῆς κατὰ κορυφὴν γωνίας τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ σημείου, καθ' ὃ αἱ ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν εὐθεῖαι.

Ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ, καὶ συνεστάθω ἐπὶ τῶν α γ, β γ, αὐτοῦ πλευρῶν τὰ α δ ε γ, β ζ η γ, ὡς ἔτυχε παραλληλόγραμμα, ἐκβαλλόμεναι δὲ καὶ αἱ ἐκτὸς τῶν παραλληλογράμμων πλευραὶ δ ε, ζ η, συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ γ θ. Λέγω δὴ τὰ α δ ε γ, β ζ η γ, παραλληλόγραμμα ἴσα εἶναι τῷ ὑπό τε τῆς α β, καὶ γ θ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ παραλλ: Ἐξήχθητω γὰρ ἡ θ γ, καὶ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ γ, σημείου, τέμνουσα τὴν α β, κατὰ τὸ κ, ἀπὸ δὲ τῶν α, καὶ β, ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ θ γ κ, αἱ α λ, β μ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ λ μ. καὶ ἐπεὶ τὰ α δ ε γ, α λ θ γ, παραλληλόγ: ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς α γ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις α γ, δ θ, πάντως γε ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν λε': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλὰ καὶ τὴν αὐτὴν καὶ τὸ α λ ν κ, ἴσον ἐστὶ τῷ α λ θ γ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς γὰρ ἄμφω εἰσὶ βάσεως τῆς α λ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς α λ, κ θ, τὸ ἄρα α δ ε γ, παραλλ: ἴσον ἐστὶ τῷ α λ ν κ, παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ β ζ η γ, παραλληλόγραμμον, ἴσον ἐστὶ τῷ β μ ν κ. τὰ δύο ἄρα παραλληλόγραμ: α δ ε γ, β ζ η γ, ἴσα ἐστὶ τοῖς α λ ν κ, β μ ν κ, συναμφότερα συναμφοτέροις. ἀλλὰ τὰ α λ ν κ, β μ ν κ, ποιεῖ τὸ α λ μ β, παραλληλόγραμμ: περιέχεται ὑπὸ τῆς α β, καὶ γ θ, ἑκατέρα γὰρ τῶν α λ, β μ, ἴση ἐστὶ τῇ γ θ, κατὰ τὴν λδ': τοῦ αὐτοῦ. Παντὸς ἄρα τριγώνου ἐὰν ἐφ' ἑκατέρας τῶν πλευρῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 3. Fig. 6.



Πρό-