ὁμοίως δύο αἱ ὑπὸ δβα, αβζ, ἴσαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ δβα, αβε, εβζ, ἀλλὰ ταῖς δυσὶ ταύταις ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ δβε, εβζ, ὡς δέδεικται, ἄρα αἱ δύο ὑπὸ δβα, αβζ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβζ, αἱ δὲ ὑπὸ δβε, εβζ, ὀρθαὶ εἰσὶ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιβʹ: τοῦ αʹ: τῶν Σφαιρ: , ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ δβα, εβζ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. Ἐὰν ἄρα κύκλος τέμνῃ, καὶ τὰ ἑξῆς.

## Πρότασις Ιϛʹ:

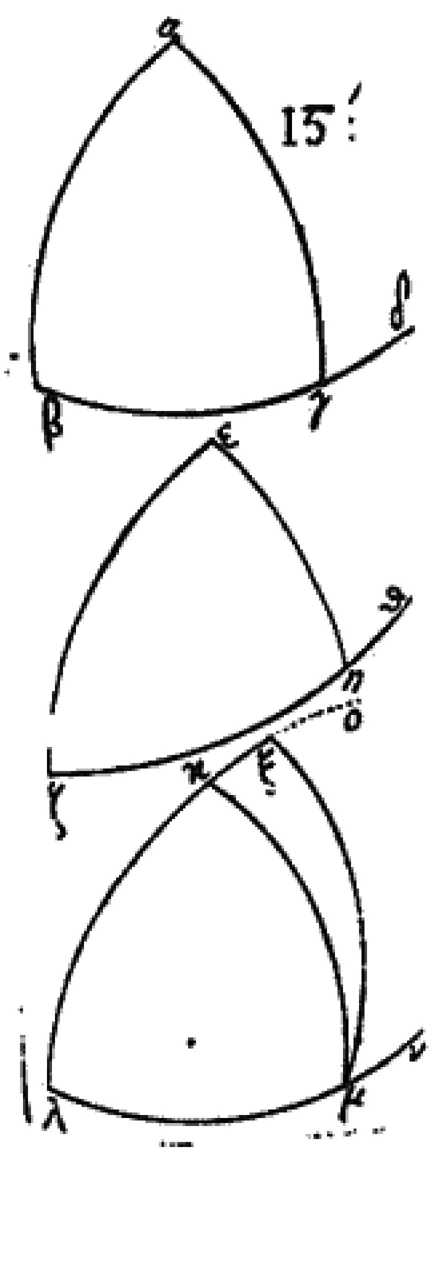
**Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι τῶν δύο μὲν ὀρθῶν μείζονές εἰσι, τῶν ἓξ δὲ ἐλάττονες.**

*Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 16.*

Ἔστω τρίγωνον σφαιρικὸν τὸ αβγ. Λέγω ὅτι αἱ τρεῖς τούτου γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, μείζονές εἰσι δύο ὀρθῶν. Ἐπεὶ δὲ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ πλευραὶ ἢ ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, ἢ μείζονες, ἢ ἐλάττονες. Κείσθω αʹ: τὰς αβ, αγ, ἴσας εἶναι ἡμικυκλίῳ, καὶ ἐκβληθήτω ἡ βγ, ἐπὶ τὸ δ. κατὰ γοῦν τὴν ιβʹ: τοῦ παρόντος ἡ μὲν ὑπὸ αγδ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ β, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, αἱ δὲ ὑπὸ αβγ, αγβ, πρὸς τῇ βάσει ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, ὥστε προστιθεμένης τῆς πρὸς τῷ α, ἔσονται αἱ τρεῖς μείζονες δύο ὀρθῶν.

Ἔστωσαν βʹ: τοῦ εζη, τριγώνου αἱ εζ, εη, πλευραὶ μείζονες ἡμικυκλίου, καὶ τῆς ζη, ἐκβαλλομένης ἐπὶ τὸ θ, ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ εηθ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ εζη, αἱ δὲ ὑπὸ εζη, εηζ, πρὸς τῇ βάσει μείζονες δύο ὀρθῶν, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιβʹ: πάντως γε προστιθεμένης τῆς πρὸς τῷ ε, αἱ τρεῖς ὁμοῦ αἱ ὑπὸ εζη, ζηε, ηεζ, πολλῷ μείζονές εἰσι τῶν δύο ὀρθῶν.

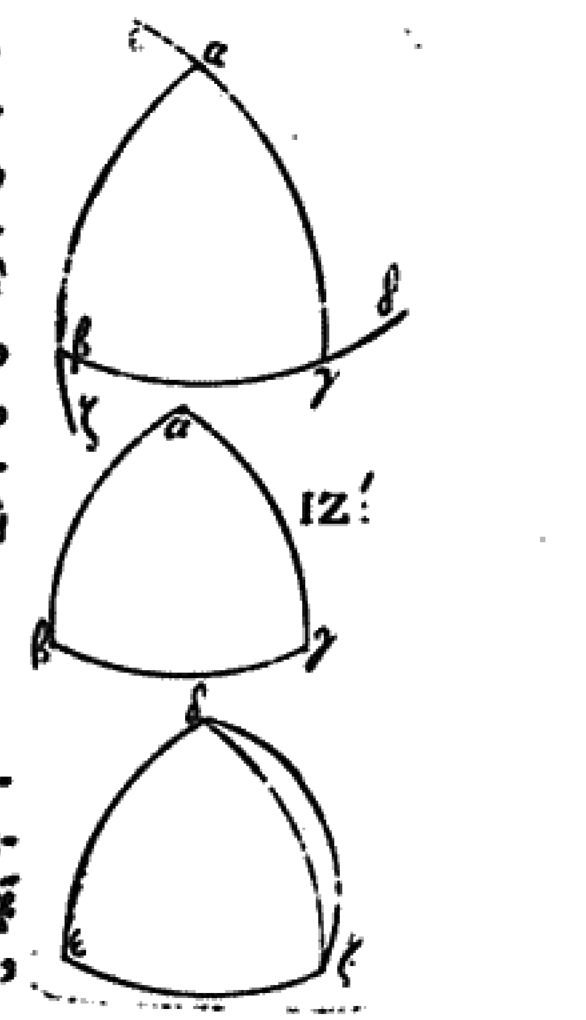
Ἔστωσαν τρίτον αἱ κλ, κμ, πλευραὶ τοῦ κλμ, τριγώνου ἐλάττονες ἡμικυκλίου. Καὶ ἐπεὶ τῆς λμ, βάσεως ἐκβαλλομένης κατὰ τὸ ν, ἡ ὑπὸ κμν, ἐκτὸς γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ κλμ, ἐντός. Γενέσθω ἡ ὑπὸ ξμν, ἴση τῇ ὑπὸ κλμ, καὶ ἐκβαλλομένη ἡ λκ, συμπιπτέτω τῇ μξ, κατὰ τὸ ξ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ξμν, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κλμ, πάντως γε κατὰ τὴν ιβʹ: τοῦ παρόντος αἱ λξ, ξμ, πλευραὶ ἴσαι ἡμικυκλίῳ εἰσίν. αἱ ἄρα μξ, ξκ, ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου, καὶ ἡ ὑπὸ λκμ, ἐκτὸς γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ κξμ, ἐντὸς καὶ



ἀπεναντίον, καὶ τὴν αὐτὴν ιβ': ἀλλ' ἡ κξμ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ κμξ, ὡς δεδόμεθα, ἄρα ἡ ὑπὸ λκμ, πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ κμξ. προστιθεμένης δὲ τῆς μὲν ὑπὸ λκμ, τῇ ὑπὸ κλμ, τῆς δὲ ὑπὸ κμξ, τῇ ὑπὸ ξμν, καὶ τῆς κμλ, κοινῆς λαμβανομένης, πάντως γε κατὰ τὸ δ': ἀξίωμα αἱ τρεῖς ὑπὸ κλμ, λμκ, μκλ, τῶν τριῶν ὑπὸ κμλ, κμξ, ξμν, μείζονές εἰσιν, ἀλλ' αἱ ὑπὸ κμλ, κμξ, ξμν, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἄρα αἱ τρεῖς τοῦ κλμ, τριγώνου γωνίαι αἱ ὑπὸ κλμ, λμκ, μκλ, μείζονές εἰσι δύο ὀρθῶν. Ὅτι δὲ ἡ ὑπὸ κξμ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ κμξ, δῆλον· ἐπεὶ γὰρ αἱ λξ, ξμ, ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρ: αἱ ὑπὸ λξμ, ξλμ: ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς· ἀλλ' ἡ ὑπὸ ξλμ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ξμν, κατὰ τὴν κατασκευήν, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ ξμν, λξμ. δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ξμν, ξμλ, ὡς ἐφεξῆς ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, ἄρα ἡ ὑπὸ λξμ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ξμλ: ἡ ἄρα ὑπὸ ξμκ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ λξμ, ἐλάττων γάρ ἐστι καὶ τῆς ὑπὸ ξμλ, τῆς ἴσης τῇ ὑπὸ λξμ.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 17.

Λέγω δ' ὅτι καὶ αἱ τρεῖς οἱωδήποτε σφαιρικοῦ τριγώνου γωνίαι ἐλάττονές εἰσιν ἓξ ὀρθῶν. Ἔστω γὰρ τρίγωνον σφαιρικὸν τὸ αβγ, καὶ ἐκβληθήτωσαν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὰ δεζ, σημεῖα· καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος αἱ τε ὑπὸ αβγ, γβζ. καὶ βγα, αγδ. καὶ γαβ, βαε, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, πάντως γε αἱ ἓξ ῥηθεῖσαι γωνίαι ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἀφαιρεμένων δὲ τῶν τριῶν τῶν ὑπὸ γβζ, αγδ, βαε, ἐκτὸς, ἐναπολείπονται αἱ τρεῖς ἐντὸς αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, ἓξ ὀρθῶν ἐλάττονες, ὅπερ ἦν τὸ β':. παντὸς ἄρα σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, καὶ τὰ ἑξῆς:




## Πρότασις ΙΖ':

**Ἐὰν δύο τρίγωνα σφαιρικὰ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέρα ἑκατέραν, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἴσα ἔσονται τὰ τρίγωνα.**

Ἐχέτωσαν δὴ τὰ αβγ, δεζ, σφαιρικὰ τρίγωνα τὰς πρὸς τοῖς β καὶ γ, γωνίας ἴσας ταῖς πρὸς τοῖς ε καὶ ζ, τὴν μὲν πρὸς τῷ β, τῇ πρὸς τῷ ε, τὴν δὲ

πρὸς

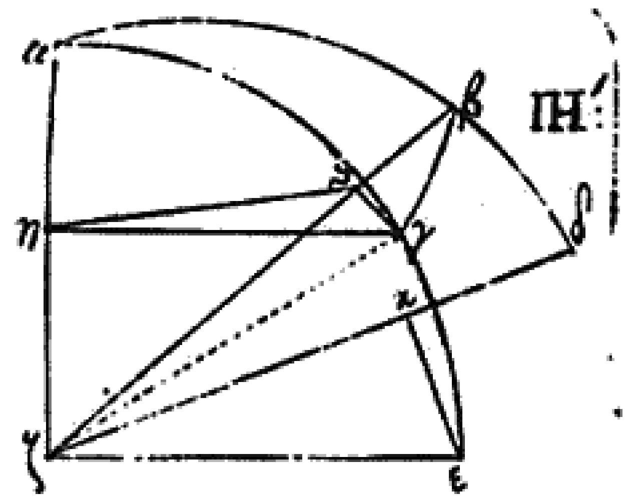
πρὸς τῇ γ, τῇ πρὸς τῇ ζ, καὶ τὴν βγ, βάσιν τῇ εζ, βάσει ὁμοίως ἴσην. Λέγω ὅτι τὸ αβγ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δεζ, τριγώνῳ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ βγ, εζ, ἴσαι εἰσὶ, πάντως γε ἐφαρμοττομένης τῆς βγ, ἐπὶ τῆς εζ, τὸ μὲν β, σημεῖον συμπεσεῖται τῷ ε, τὸ δὲ γ, τῷ ζ. Ἐπεὶ δὲ πάλιν καὶ ἡ πρὸς τῷ β, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ ε, ἐφαρμοσθήσεται δήπουθεν καὶ ἡ βα, τῇ εδ· εἰ γὰρ μὴ, ἡ πρὸς τῷ β, γωνία οὐκ ἔστιν ἴση τῇ πρὸς τῷ ε. ὥστε καὶ τὸ α, σημεῖον συμπεσεῖται τῷ δ, συμπίπτει δὲ καὶ τὸ γ, τῷ ζ, ἄρα καὶ ἡ αγ, ἐφαρμοσθήσεται ἐπὶ τῆς δζ, ἄλλως γὰρ ἂν ἢ ἐκτὸς ἢ ἐντὸς πεσεῖται, καὶ ἔσονται ἑκάτερα ἴση ἡμικυκλίῳ, διὰ τὸ τοὺς μεγίστους κύκλους δίχα ἀλλήλους τέμνεσθαι. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

## Πρότασις ΙΗ'.

**Ἐπὶ παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ὑποτεινουσῶν.**

Ἔστω Σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ αβγ, ὀρθογώνιον κατὰ τὸ β. κείσθω δὲ τοῦτο πρῶτον ὀξυγώνιον εἶναι κατὰ τὸ γ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβγ, ὀρθῆς γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αγ, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς βγ, ὑποτεινούσης. Ἐξαχθήτωσαν γὰρ τὰ αβ, αγ, τόξα ἐπὶ τὰ δ, καὶ ε, ὥστε εἶναι τὰ αδ, αε, τεταρτημόρια, καὶ εὑρεθήτω τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἐν ᾗ οἱ αδ, αε, κύκλοι γεγραμμένοι εἰσὶ, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ ζ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζε. καὶ ἐπεὶ οἱ αβδ, αγε, δε, κύκλοι μέγιστοί εἰσιν, ἔτι δὲ καὶ ὁ βγ, κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς ιβ': τοῦ α': τῶν Σφαιρικῶν, οἱ δὲ μέγιστοι κύκλοι διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχονται, κατὰ τὴν ζ': τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τῶν αβδ, αγε, βγ, δε, κύκλων κατὰ τὸ α': πόρισμα τῆς β': τοῦ αὐτοῦ. ὥστε ἡ μὲν αζ, κοινή ἐστι τομὴ τῶν αβδ, αγε, ἡ δὲ βζ, τῶν αβδ, βγ, καὶ ἡ δζ, τῶν αβδ, δε. Πιπτέτω δὴ ἀπὸ τοῦ γ, ἐπὶ μὲν τῆς αζ, κάθετος ἡ γη, ἐπὶ δὲ τῆς βζ, ἡ γϑ, ἀπὸ δὲ τοῦ ε, ἐπὶ τῆς δζ, πιπτέτω ὁμοίως κάθετος ἡ εκ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηϑ. Δείκνυται. ἐπεὶ ὁ βγ, κύκλος πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὸν αβδ, πάντως γε τὸ τοῦ βγ, ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αδ, ἐπίπεδον. ἦκται δὲ ἡ γϑ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ζβ, κοινῆς τομῆς, ἄρα κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ α': τῶν Στερεῶν, καὶ ἡ γϑ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αβδ, κύκλου ἐπίπεδον, ἅπτεται τῆς γϑ, ἡ ηϑ, ἄρα κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἡ γϑ, ὀρθή ἐστι

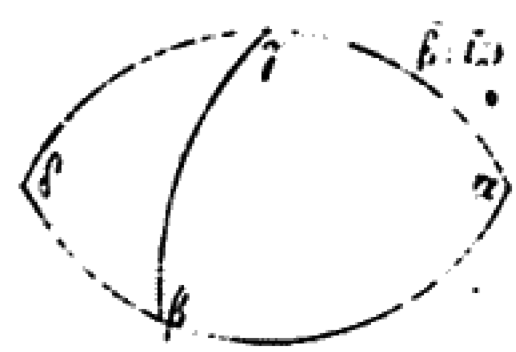
Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 18.



καὶ πρὸς τὴν ηθ. ἀλλὰ καὶ ἡ εκ, ὀρθὴ οὖσα πρὸς τὴν ζδ, ὀρθή ἐστι· καὶ πρὸς τὸ τοῦ αβδ, ἐπίπεδον, ὅτι καὶ τὸ τοῦ δε, ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς αὐτό ἐστιν· ἄρα αἱ γθ, εκ, παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν ϛ': τοῦ αὐτοῦ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ηγ, ζε, παράλληλοι, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι ἑκατέραν ἐπὶ τῆς αζ, ἄρα, κατὰ τὴν ι: τοῦ αὐτοῦ αἱ ὑπὸ ηγθ, ζεκ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ ηθγ, ζκε, ἴσαι εἰσὶ, διὰ τὸ ἑκατέραν ὀρθὴν εἶναι, ἄρα καὶ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ θηγ, κζε, ἴσαι εἰσὶν, ἰσογώνια ἄρα τὰ ηθγ, ζκε, τρίγωνα. ὥστε κατὰ τὴν δ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ ζε, πρὸς τὴν εκ, οὕτως ἡ ηγ, πρὸς τὴν γθ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζε, πρὸς τὴν ηγ, ἡ εκ, πρὸς τὴν γθ. ἀλλ' ἡ μὲν ζε, ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον, ἤτοι ἡμίτονον γωνίας ὀρθῆς, ἡ δὲ ηγ, ἡμίτονον τῆς αγ, ὑποτεινούσης, ἡ δὲ εκ, ἡμίτονον τοῦ δε, τόξου, δηλ: τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας, διὰ τὸ μέτρον εἶναι τὸ δε, τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας, καὶ ἡ γθ, ἐστὶν ἡμίτονον τοῦ βγ, τόξου, ἄρα ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβγ, ὀρθῆς γωνίας, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αγ, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βαγ, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς βγ, ὑποτεινούσης.

Ἔστω δὲ τὸ αβγ, ὀρθογώνιον μὲν κατὰ τὸ β, ἀμβλυγώνιον δὲ κατὰ τὸ γ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβγ, ὀρθῆς γωνίας, ἤτοι τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτ: τῆς γα, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτ: τῆς ὑπὸ αγβ, ἀμβλείας γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς βα, ὑποτεινούσης. Ἐξαχθήτωσαν γὰρ αἱ αβ, αγ, καὶ τὸ συνεχὲς ὥστε συμπεσεῖν ἀλλήλαις, κατὰ τὸ δ,

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 19

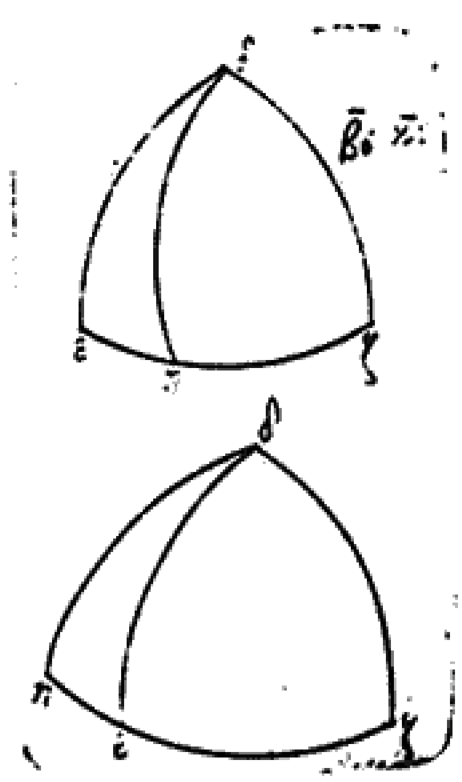


καὶ ἐπεὶ τὸ δβγ, τρίγωνον ὀρθογώνιον μέν ἐστι κατὰ τὸ β, ὀξυγώνιον δὲ κατὰ τὸ γ, ἄρα κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὡς τὸ ἡμίτ: τῆς ὑπὸ δβγ, ὀρθῆς γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτ: τῆς δγ, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτ: τῆς ὑπὸ δγβ, ὀξείας γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτ: τῆς δβ, ὑποτεινούσης. ἀλλὰ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δβγ, ἐστὶ καὶ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβγ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, τὸ δὲ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δγβ, ἡμίτονον ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ αγβ, ἡ γὰρ ὑπὸ δγβ, παραπλήρωμά ἐστι τῆς ὑπὸ αγβ, μέχρι ἡμικυκλίου, ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς βδ, ἡμιτονόν ἐστι καὶ τῆς βα, ἥ ἐστι παραπλήρωμα. τὸ δὲ ἡμίτονον τῆς δγ, ἡμίτονόν ἐστι καὶ τῆς γα, διὰ τὰ αὐτά. ἄρα καὶ ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβγ, ὀρθῆς πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γα, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβγ, ἀμβλείας γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς βα, ὑποτεινούσης.

Ἔστω ἔτι τρίγωνον μὴ ὀρθογώνιον τὸ δεζ. Λέ-

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 20.

γω ὅτι ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δε, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ε, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δζ, ὑποτεινούσης. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ δ, ἐπὶ τὸ εζ, τόξον πρὸς ὀρθὰς τὸ δη. καὶ πάντως γε κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δη, ὑποτεινούσης, οὕτως ἐστὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δηζ, ἤτοι τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δζ, ἀλλ' ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς δη, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ε, γωνίας, οὕτως ἐστὶ καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς δε, ὑποτεινούσης πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δηε, ἤτοι τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, ὀρθὴ γὰρ κατὰ τὴν κατασκευήν. ἔστιν ἄρα ἡ ἀναλογία τεταραγμένη, ὥστε καὶ δι' ἴσου, κατὰ τὴν κγ΄: τοῦ ε΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ε, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς δε, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δζ, ὑποτεινούσης, ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δε, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ε, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δζ.



Τὸν αὐτὸν ἤδη τρόπον συναχθήσεται τὸ αὐτὸ, κἂν τὸ δη, τόξον ἐκτὸς τοῦ δεζ, πίπτῃ τριγώνου, ὡς ἐπὶ τοῦ β΄: διαγράμματος.

## Πρότασις ΙΘ΄:

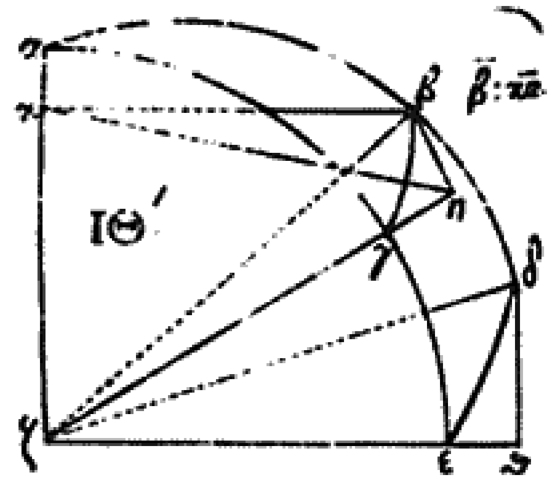
**Ἐπὶ παντὸς σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς προσκειμένης πλευρᾶς τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῇ ῥηθείσῃ πλευρᾷ γωνίας, πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ὑποτεινούσης τὴν αὐτὴν γωνίαν.**

Ἔστω τρίγωνον σφαιρικὸν τὸ αβγ, ὀρθογώνιον κατὰ τὸ β, σημεῖον. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς προσκειμένης τῇ ὑπὸ αβγ, ὀρθῇ γωνίᾳ, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας τῆς πρὸς τῇ αβ, πλευρᾷ προσκειμένης πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς βγ, ὑποτεινούσης. Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ αβ, αγ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὰ δ, καὶ ε, σημεῖα, ὥστε τὰ αδ, αε, τεταρτημόρια εἶναι. καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τοῦ ζ, κέντρου τῆς σφαίρας αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζε. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ζβ, κοινή ἐστι τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν αβ, βγ, ἡ δὲ ζδ, τῶν αβδ, δε, κύκλων, καὶ ἑκάτερος τῶν βγ, δε, ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αβδ, ἐπίπεδον, ἀνεστάθω ἀπὸ μὲν τοῦ β, κάθετος ἐπὶ τῆς ζβ,

ἡ βη,

ἡ βη, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ὁμοίως ἐπὶ τῆς ζδ, ἡ δθ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ζγ, ζε, ὥστε συμπεσεῖν ταῖς βη, δθ, κατὰ τὰ η, καὶ θ. ἀπὸ δὲ τοῦ β, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς αζ, κοινῆς τομῆς τῶν αβ, αγ, ἡ βκ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κη. Δείκνυται. ἐπεὶ ὁ βγ, κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν αβδ, κύκλον, συνέστη δὲ καὶ ἡ βη, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ζβ, ἄρα καὶ ἡ βη, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αβδ, κύκλου ἐπίπεδον, ὥστε κατὰ τὸν γ': ὅρον ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὴν κβ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ δθ, ὀρθὴ πρὸς τὸ τοῦ αβδ, κύκλου ἐπίπεδον, ἄρα κατὰ τὴν ϛ': τοῦ ια': τῶν Στερεῶν αἱ βη, δθ, παράλληλοί εἰσιν, ἀλλὰ καὶ αἱ κβ, ζθ, παράλληλοί εἰσι διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι ἑκατέραν πρὸς τὴν αζ, ἄρα κατὰ τὴν ι: τοῦ αὐτοῦ αἱ ὑπὸ βκη, δζθ, γωνίαι ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ ὑπὸ κβη, ζδθ, ὡς δέδεικται,

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 21.




ἄρα τὰ κβη, ζδθ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, καὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ ϛ': τῶν Στοιχ: ὡς ἡ ζδ, πρὸς τὴν δθ, ἡ κβ, πρὸς τὴν βη, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζδ, πρὸς τὴν κβ, ἡ δθ, πρὸς τὴν βη. ἀλλ' ἡ μὲν ζδ, ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον, ἡμιδιάμετρος γάρ, ἡ δὲ κβ, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον τοῦ αβ, τόξου, καὶ ἡ μὲν δθ, ἀπτομένη ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας, διὰ τὸ ἅπτεσθαι τοῦ δε, τόξου, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, μέτρου ὄντος τῆς αὐτῆς, ἡ δὲ βη, ἀπτομένη, κατὰ τὸ ῥηθὲν πόρισμα τοῦ βγ, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς τοῦ αβγ, τριγώνου, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ βγ, τόξου, ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν. ἐπὶ παντὸς ἄρα σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον, καὶ τὰ ἑξῆς.

### ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Α': Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς προσκειμένης πλευρᾶς τῇ γωνίᾳ πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ὑποτεινούσης τὴν γωνίαν πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς αὐτῆς γωνίας.

### ΠΟΡΙΣΜΑ.

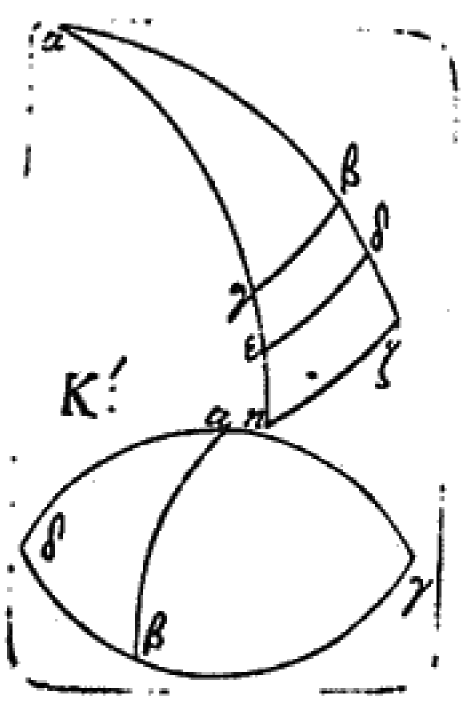
Β': Ἔτι ἐὰν ὦσι πλείω τρίγωνα σφαιρικὰ ὀρθογώνια ἔχοντα παρὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἑτέραν τινὰ ἴσην, ἢ γοῦν τὴν αὐτὴν ὡς τὰ αβγ, αδε, τὰ ἡμίτονα τῶν πρὸς τὰς ἴσας γωνίας πλευρῶν τῶν αὐτῶν τριγώνων, τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον πρὸς τὰς ἀπτομένας τῶν ὑποτεινουσῶν τὴν κοινὴν γωνίαν, ἢ γοῦν τὴν παρὰ τὴν ὀρθὴν ἴσην. Ἐπὶ γὰρ τῶν αβγ, αδε, ὧν παρὰ τὰς ὑπὸ αβγ, αδε, ὀρθὰς γωνίας κοινή ἐστι καὶ ἡ πρὸς τῷ α, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὴν ἀπτομέ-

τὴν

νην τοῦ βγ, καὶ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αδ, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ δε, ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς βγ, ἢ γοῦν τὸ ἡμίτονον τῆς αδ, πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ δε, ἄρα, κατὰ τὴν ια: τοῦ ε: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς βγ, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς αδ, πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς δε, ὑποτεινούσης.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 22.

## Πρότασις Κ΄:




**Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἐκβαλλομένων τῶν πλευρῶν κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως, συσταθήσεται ἕτερον τρίγωνον τὴν αὐτὴν τῷ προτέρῳ βάσιν ἔχον καὶ τὴν κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίαν ἴσην τῇ κατὰ κορυφὴν γωνίᾳ τοῦ δοθέντος τριγώνου. αἱ δὲ λοιπαὶ τούτου πλευραὶ καὶ γωνίαι παραπληρώματα ἔσονται τῶν πλευρῶν τε καὶ γωνιῶν τοῦ προτέρου τριγώνου μέχρις ἡμικυκλίου, καὶ δύο ὀρθῶν γωνιῶν.**

Ἐξαχθήτωσαν αἱ γα, γβ, πλευραὶ τοῦ αβγ, σφαιρικοῦ τριγώνου κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως. Λέγω ὅτι συσταθήσεται παρὰ τὸ αβγ, τρίγωνον, καὶ ἕτερον τρίγωνον τὴν αὐτὴν αβ, βάσιν ἔχον, ἣν καὶ τὸ αβγ, τρίγωνον, καὶ τὴν κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ αγβ, κατὰ κορυφὴν τοῦ αβγ, καὶ αἱ μὲν τούτου πλευραὶ παραπληρώματά εἰσι τῶν τοῦ αβγ, πλευρῶν μέχρις ἡμικυκλίου, αἱ δὲ λοιπαὶ γωνίαι ὁμοίως παραπληρώματα τῶν λοιπῶν τοῦ αβγ, τριγώνου γωνιῶν μέχρι δύο ὀρθῶν. Ἐπεὶ γὰρ αἱ γα, αβ, πλευραὶ μεγίστων κύκλων εἰσὶ τόξα, οἱ δὲ μέγιστοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, κατὰ τὴν ι: τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν, πάντως γε ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται, καὶ συσταθήσεται τὸ αβδ, τρίγωνον τὴν αὐτὴν ἔχον τῷ αβγ, βάσιν τὴν αβ, ἡ δὲ ὑπὸ αδβ, κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγβ, τοῦ αβγ, τριγώνου, κατὰ τὴν γ΄: τοῦ παρόντος. Αὖθις ἐπεὶ τὰ γαδ, γβδ, ἡμικύκλιά εἰσι, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ι: δῆλον ὅτι ἡ μὲν αδ, παραπλήρωμά ἐστι τῆς αγ. ἡ δὲ δβ, τῆς βγ. ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ δαβ, βαγ, καὶ ὑπὸ δβα, αβγ, δυσὶν ὀρθαῖς

ἴσαι

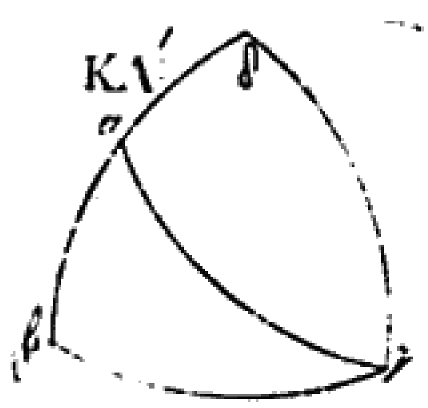
*ἴσαι εἰσὶ, καὶ τῶν β': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ δ α β, παραπλήρωμά ἐςι τῆς ὑπὸ β α γ, μέχρι δύο ὀρθῶν, ἡ δὲ ὑπὸ δ β α, τῆς ὑπὸ α β γ. παντὸς ἄρα σφαιρικοῦ τριγώνου ἐκβαλλομένων, καὶ τὰ ἑξῆς.*

## Πρότασις ΚΑ':

**Παντὸς σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ γωνίαν πλευρῶν ἐκβληθείσης ἄχρι τοῦ πόλου τῆς ἑτέρας, συςαθήσεται ἕτερον τρίγωνον τὴν αὐτὴν ἔχον βάσιν τῷ προτέρῳ, καὶ μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν συνεχῆ μιᾷ τῶν τοῦ προτέρου πλευρῶν, τὴν δὲ ἐφεξῆς γωνίαν ἢ ἴσην τῇ τοῦ προτέρου, ἢ παραπλήρωμα μέχρι δύο ὀρθῶν, ἢ γοῦν παραπλήρωμα πρὸς μίαν ὀρθήν.**

*Ἔςω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ α β γ, ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν, καὶ ἐκβληθήτω ἡ β α, αὐτοῦ πλευρὰ ἄχρι τοῦ δ, πόλου τῆς β γ. Λέγω ὅτι συςαθήσεται ἕτερον τρίγωνον τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχον τῷ*

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 23.




*α β γ, καὶ μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν συνεχῆ τῇ μιᾷ τῶν τοῦ προτέρου, τὴν δὲ ἐφεξῆς γωνίαν ἢ ἴσην, ἢ παραπλήρωμα μέχρι δύο ὀρθῶν, ἢ γοῦν παραπλήρωμα πρὸς ὀρθήν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ δ γ. καὶ ἐπεὶ ἡ α γ, κοινή ἐςι, πάντως γε τὰ α β γ, α δ γ, τρίγωνα τὴν αὐτὴν ἔχουσι βάσιν. ἐπεὶ δὲ ἡ β α, τῇ α δ, συνεχής ἐςι, δῆλον ὅτι τὸ α δ γ, τρίγωνον ἔχει τὴν α δ, πλευρὰν συνεχῆ τῇ α β· πάλιν εἰ μὲν τὸ γ, πόλος ἐςὶ τῆς β α δ, πάντως γε τὸ α γ, πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὸ β α δ, καὶ ἡ ὑπὸ δ α γ, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ β α γ. εἰ δὲ τὸ γ, πόλος οὐκ ἔςι τῆς β α δ, ἡ ὑπὸ δ α γ, παραπλήρωμά ἐςι τῆς ὑπὸ β α γ. ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ δ γ β, ὀρθή ἐςι, φανερὸν ὅτι ἡ ὑπὸ δ γ α, συμπλήρωμά ἐςι μετὰ τῆς ὑπὸ α γ β, πρὸς μίαν ὀρθήν.*

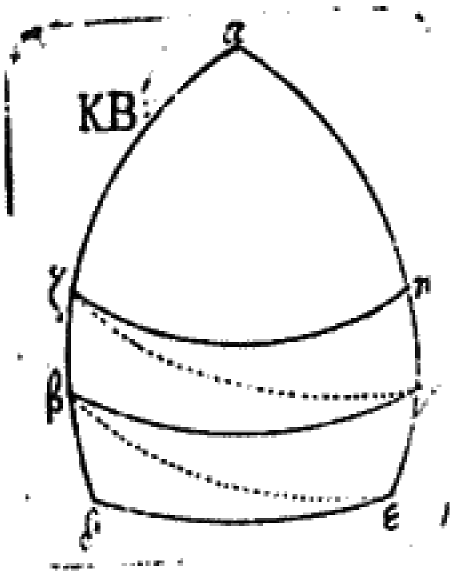
Πρό-

## Πρότασις ΚΒ′.

Ἐπὶ παντὸς σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, αἱ μὲν αἱ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσαι πλευραὶ τεταρτημόρια κύκλου ὦσιν, ἑκατέρα τῶν δύο λοιπῶν γωνιῶν ὀρθή ἐστιν, εἰ δὲ μείζους τεταρτημορίου, ἀμβλεῖαι. εἰ δὲ ἐλάττους ὀξεῖαι. εἰ δὲ τελευταῖον ἡ μὲν μείζων τεταρτημορίου, ἡ δὲ ἐλάττων, καὶ τῶν γωνιῶν ἡ μὲν ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ὀξεῖα ἔσται. καὶ ἀνάπαλιν, εἰ μὲν ἑκατέρα τῶν δύο λοιπῶν γωνιῶν ὀρθὴ ᾖ, αἱ πλευραὶ τεταρτημόριά εἰσιν, εἰ δὲ ἀμβλεῖαι, μείζονες τεταρτημορίου. εἰ δὲ ὀξεῖαι, ἐλάττονες. εἰ δὲ τελευταῖον ἡ μὲν ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ὀξεῖα, καὶ τῶν πλευρῶν πάντως γε ἡ μὲν μείζων τεταρτημορίου, ἡ δὲ ἐλάττων.

*Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ α β γ, ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ α, γωνίαν, καὶ ἔστω πρῶτον μὲν ἑκατέρα τῶν α β, α γ, αὐτοῦ πλευρῶν τεταρτημόριον. δεύτερον δὲ ἑκατέρα τῶν α δ, α ε, μείζων τεταρτημορίου, ἐκβαλλομένων κατὰ τὸ συνεχὲς τῶν α β, α γ, καὶ τρίτον ἑκατέρα τῶν α ζ, α η, ἐλάττων τεταρτημορίου. Λέγω ὅτι ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β γ, α γ β, γωνιῶν ὀρθή ἐστιν. ἑκατέρα δὲ τῶν ὑπὸ α δ ε, α ε δ, ἀμβλεῖα, καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α ζ η, α η ζ, ὀξεῖα. τὰ γὰρ α β γ, α δ ε, α ζ η, σφαιρικὰ τρίγωνα ἰσοσκελῆ εἰσιν, ὥστε κατὰ τὴν ιγ′: τοῦ παρόντος, τοῦ μὲν α β γ, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ὀρθαί εἰσι. τοῦ δὲ α δ ε, ἀμβλεῖαι, καὶ τοῦ α ζ η, ὀξεῖαι.*

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 24.




*Ἔστω ἔτι τὸ α ζ ε, ὀρθογώνιον κατὰ τὸ α, καὶ ἐχέτω τὴν μὲν α ε, μείζονα τεταρτημορίου, τὴν δὲ α ζ, ἐλάττονα. Λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ α ζ ε, ἀμβλεῖά ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ α ε ζ, ὀξεῖα. ἐπεὶ γὰρ ἡ πρὸς τῷ α, ὀρθή ἐστι, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, δέδεικται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ α β γ, ὀρθή, πάντως γε, καθ᾽ ὃ σημεῖον οἱ α γ, β γ, κύκλοι τέμνονται ἀλλήλοις, πόλος ἐστὶ τοῦ α β δ, τόξου, ὥσπερ καὶ τὸ β, τοῦ α γ ε. Γραφέτω γοῦν διὰ μὲν τῶν ζ γ, σημείων τὸ ζ γ, τόξον, διὰ δὲ τῶν β ε, τὸ β ε, καὶ δῆλον ὅτι ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α ζ γ, α ε β, ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν ιβ′: τοῦ α′: τῶν Σφαιρικῶν, ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ α ζ ε, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ α ζ γ, ὡς περιεκτικὴ τῆς αὐτῆς, ἡ δὲ ὑπὸ α ε ζ, ἐλάττων τῆς ὑπὸ α ε β, ὡς* ὑπ᾽ αὐτῆς περιεχομένη. ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ α ζ ε, ἀμβλεῖά ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ α ε ζ ὀξεῖα, ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β γ, α γ β, ὀρθή. Λέγω ὅτι τὰ α β, α γ τεταρτημόριά εἰσιν. εἰ γὰρ μή, ἢ μεῖζον τεταρτημορίου ἑκάτερόν ἐστιν, ἢ ἔλαττον. κἂν μὲν μεῖζον, φανερὸν ὅτι ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β γ, α γ β, ἀμβλεῖά ἐστι κατὰ τὴν ιγ᾽: τοῦ παρόντος, εἰ δὲ ἔλαττον, ὀξεῖα, ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον συναχθήσεται καὶ τὰ λοιπά.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α᾽:

Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων σφαιρικῶν τριγώνων, εἰ μὲν ἄμφω αἱ περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευραὶ τεταρτημόριά εἰσιν, ἢ γοῦν ἡ μία ἴση ᾖ τεταρτημορίῳ, τεταρτημόριόν ἐστι καὶ ἡ βάσις. εἰ δὲ αἱ πλευραὶ μείζονες ἢ ἐλάττονες ὦσι τεταρτημορίου, ἡ βάσις ὁμοίως ἐλάττων ἔσται τεταρτημορίου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β᾽:

Ἔτι ἐπὶ παντὸς σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἰ μὲν παρὰ τὴν δοθεῖσαν ὀρθὴν γωνίαν, καὶ ἑτέρα τις τῶν λοιπῶν ὀρθὴ ᾖ, ἡ βάσις τεταρτημόριον ἔσται. Ἐὰν γὰρ παρὰ τὴν πρὸς τῷ α, ὀρθὴ ᾖ καὶ ἡ ὑπὸ α β γ, πάντως γε ἡ β γ βάσις τεταρτημόριόν ἐστιν, ὥσπερ καὶ ἡ α γ, τὸ γ, γὰρ πόλος ἐστὶ τῆς α β, πλευρᾶς, ὡς δέδεικται. Εἰ δὲ αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι τοῦ αὐτοῦ εἶεν συμπτώματος ὀξεῖαι δηλονότι ἢ ἀμβλεῖαι, ἡμιν δὲ ὀρθαὶ, ἡ βάσις ἐλάττων ἔσται τεταρτημορίου, ὡς ἐπὶ τῶν α ζ η, α δ ε, τριγώνων. ἐὰν γὰρ ὀξεῖαι ὦσιν αἱ γωνίαι, περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευραὶ ἐλάττονες ἔσονται τεταρτημορίου, εἰ δὲ ἀμβλεῖαι μείζονες, καὶ καθ᾽ ἑκάτερον ἡ βάσις ἐλάττων τεταρτημορίου ἐστὶ, κατὰ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα. εἰ δὲ πλευραῖον διαφόρου ὦσιν αἱ γωνίαι συμπτώματος, ἡ μὲν δηλ. ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ὀξεῖα, ἡ βάσις μείζων ἔσται τεταρτημορίου, ὡς ἐπὶ τοῦ α ζ ε. ἐπεὶ γὰρ ἡ α ζ ε, ἀμβλεῖά ἐστι, ἡ δὲ ὑπὸ α ε ζ, ὀξεῖα, πάντως γε ἡ ζ ε, βάσις, μείζων ἐστὶ τεταρτημορίου· καὶ ἀνάπαλιν, εἴ γε ἡ βάσις ἐλάττων ᾖ τεταρτημορίου ἢ μείζων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἢ ὀξεῖαι, ἢ ἀμβλεῖαι εἰσί, τοῦ αὐτοῦ μέντοι εἴδους ἄμφω.

## Πρότασις ΚΓ᾽:

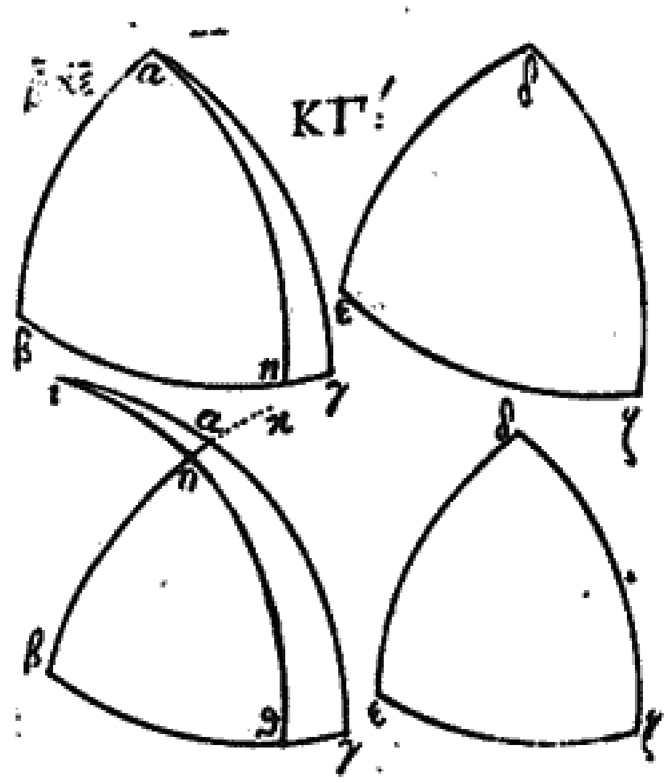
**Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τὰς γωνίας κατὰ μίαν ἴσας ἔχωσι, καὶ τὰς πλευρὰς κατὰ μίαν ἴσας ἕξουσι, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν τὰς πλευρὰς κατὰ μίαν ἴσας ἔχωσι, καὶ τὰς γωνίας κατὰ μίαν ἴσας ἕξουσι.**

Ἐχέτωσαν δὴ τὰ α β γ, δ ε ζ, τρίγωνα τὰς γωνίας κατὰ μίαν ἴσας, τὴν μὲν ὑπὸ β α γ, τῇ ὑπὸ ε δ ζ, τὴν δὲ ὑπὸ α γ β, τῇ ὑπὸ δ ζ ε, καὶ τὴν ὑπὸ γ β α, τῇ ὑπὸ ζ ε δ. Λέγω ὅτι καὶ τὰς πλευρὰς κατὰ μίαν ἴσας ἔχουσι, τὴν μὲν

β α,

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 25.

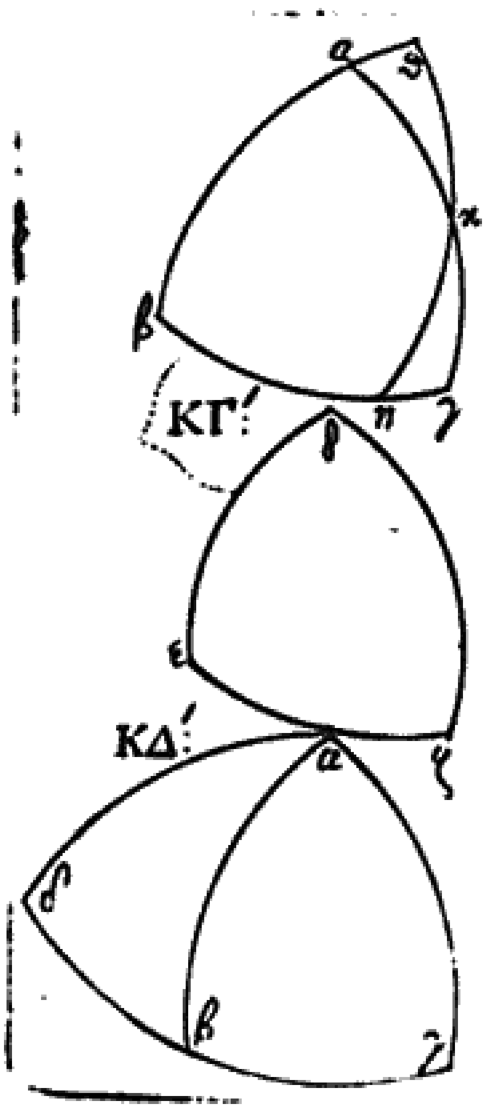
βα, τῇ εδ, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, καὶ τὴν γβ, τῇ ζε. εἰ γὰρ μή, πάντως γε ἢ μία μιᾶς, ἢ πλείους πλειόνων μείζονες ἔσονται. Ἔστω α: ἡ βγ, μείζων τῆς εζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς βγ, ἡ βη, ἴση τῇ εζ, καὶ γραφήτω τὸ αη, τόξον, κατὰ τὴν ις: τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν. καὶ ἐπεὶ αἱ βα, βη, ἴσαι εἰσὶ ταῖς εδ, εζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβη, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δεζ, δῆλον ὅτι κατὰ τὴν ς': τοῦ παρ: ἡ ὑπὸ βαη, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εδζ. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ εδζ, ἴση ὑπετέθη καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, ἄρα ἡ ὑπὸ βαη, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ· ὅπερ ἄτοπον.




Ἔστω β': ἥτε βγ, μείζων τῆς εζ, καὶ ἡ βα, τῆς εδ· καὶ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ μὲν τῆς βγ, τὸ βθ, τόξον ἴσον τῷ εζ, ἀπὸ δὲ τῆς βα, τὸ βη, ἴσον τῷ εδ, καὶ γραφήτω τὸ θηι, τόξον συμπίπτον τῷ γα, ἐκβαλλομένῳ κατὰ τὸ ι: καὶ ἐξαχθήτω τὸ βα, ἐπὶ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν βη, ἴση εἴληπται τῇ εδ, ἡ δὲ βθ, τῇ εζ. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ β, γωνία τῇ πρὸς τῷ ε, ἴση. πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ς': ἡ ὑπὸ βθη, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εζδ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ εζδ, ἴση ὑπετέθη τῇ ὑπὸ βγα, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βθη, ἡ ἐκτὸς, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βγα, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. ὥστε κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος αἱ ιηθ, ιαγ, πλευραὶ τοῦ ιθγ, τριγώνου ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, ὑπετέθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εδζ, ἴση τῇ ὑπὸ βαγ, καὶ ταύτῃ ἴση δέδεικται ἡ ὑπὸ βηθ, ἄρα ἡ ὑπὸ βηθ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ. ἀλλὰ τῇ μὲν ὑπὸ βηθ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ιηα, κατὰ κορυφὴν, κατὰ τὴν α: τοῦ αὐτοῦ, ἡ δὲ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ ιακ, κατὰ τὴν αὐτὴν, ἄρα ἡ ὑπὸ ιακ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ιηα, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. ὥστε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιβ': τὰ ιη, ια, τόξα ἴσα εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, καὶ ἑπομένως ἴσα τοῖς ιηθ, ιαγ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μείζονές εἰσιν αἱ αβ, βγ, τῶν δε, εζ.

Ἔστω τρίτον ἡ μὲν βγ, μείζων τῆς εζ, ἡ δὲ βα, ἐλάττων τῆς εδ, καὶ ἀπὸ μὲν τῆς βγ, ἀφαιρεθήτω ἡ βη, ἴση τῇ εζ. ἡ δὲ βα, ἐξαχθήτω ἐπὶ τὸ θ, ὥστε γενέσθαι τὸ βαθ, ἴσον τῷ εδ. καὶ ἐπεὶ τὰ βθη, εδγ, ἔχουσι τὰς βθ, βη, ἴσας ταῖς εζ, εδ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ ε, ἴσην, πάντως γε ἡ ὑπὸ βηθ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εζδ, κατὰ τὴν ς': τοῦ παρόντος, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ εζδ, ἴση ὑπετέθη ἡ ὑπὸ βγα, ἄρα ἡ ὑπὸ βηθ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βγθ, ἐντὸς, ὥστε αἱ κη, κγ, πλευραὶ τοῦ κηγ, τριγώνου ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος. Αὖθις ἐπεὶ ἡ ὑπὸ βαγ, ὑπετέθη ἴση τῇ πρὸς τῷ δ, τῇ δὲ πρὸς τῷ δ, ἴση δέδεικται ἡ ὑπὸ βθη, ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βθη, ἐντὸς, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιβ': αἱ κα, κθ, πλευραὶ τοῦ καθ, τριγώνου ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, ὥστε αἱ αηγ, θκη, ἴσαι εἰσὶ κύκλῳ μεγίστῳ, καὶ τέμνονται καθ' ἓν μόνον σημεῖον τὸ κ, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τὰς γωνίας κατὰ μίαν ἴσας ἔχωσι, καὶ τὰς πλευρὰς κατὰ μίαν ἴσας ἕξουσιν. ὅτι δὲ καὶ ἀνάπαλιν δῆλον, ἐκ τοῦ πορίσματος τῆς ς'. τοῦ παρόντος.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 26.




## Πρότασις ΚΔ'.

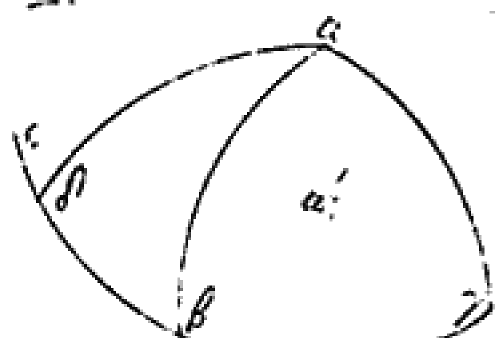
**Δυνατὸν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἴσας ἔχειν, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ, τὴν τὰς ἴσας ὑποτείνουσαν γωνίας, καὶ μὴ ἴσα εἶναι.**

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, ἔχον τὰς αβ, αγ, πλευρὰς ἴσας ἡμικυκλίῳ. καὶ τῆς γβ, βάσεως ἐκβληθείσης ἐπὶ τὸ δ, γραφήτω τὸ δα, τόξον, ὥστε τὰς βδ, δα, ἐλάττονας εἶναι ἡμικυκλίου. Λέγω ὅτι τὰ αδβ, αδγ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς ὑπὸ αδβ, αβδ, ἴσας ταῖς ὑπὸ αδγ, αγδ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, καί εἰσιν ἄνισα. καὶ ὅτι μὲν τὰς γωνίας ἴσας ἔχουσι, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ αἱ βα, αγ, ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, πάντως γε ἡ ὑπὸ αβδ, ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ, ἐντὸς κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αδβ, κοινὴ, τὰ ἄρα αδβ, αδγ, τρίγωνα ἔχουσι δύο γωνίας τὰς ὑπὸ αδβ, αβδ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ αδγ, αγδ, ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, κοινὴν δὲ τὴν αδ, πλευρὰν τὴν ὑποτείνουσαν τήν τε ὑπὸ αβδ, καὶ ὑπὸ αγδ, γωνίαν. ὅτι δὲ καὶ ἄνισά εἰσι, καὶ τοῦτο δῆλον, τὸ γὰρ αδγ, τρίγωνον περιέχει ἐν ἑαυτῷ τὸ αβδ. καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι κατὰ τὸ κοινὸν ἀξίωμα.

Ἴσων

Ἰστέον δὲ ὅτι ἐπὶ τῆς προτάσεως ταύτης, ἕπεταί τις ἀμφιβολία. ἐπεὶ γὰρ ἡ αδ, ὑποτείνουσά ἐστι τῆς τε ὑπὸ αβδ, γωνίας τοῦ αδβ, τριγώνου, καὶ τῆς ὑπὸ αγδ, τοῦ αδγ, τριγώνου, ἐὰν γένηται ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβδ, ἢ γοῦν τῆς ὑπὸ αγδ, ἴσης, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ δ, γωνίας, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς αδ, πρὸς ἄλλο τι, ὁ τέταρτος ὅρος ἄγνωστός πως ἔσται. δύναται γὰρ ἀντὶ τοῦ τετάρτου ληφθῆναι ἥτε αβ, καὶ αγ. διὸ δὴ ἐπιστάσεως ἄξιον, ὅτι ἡνίκα ἡ αδ, τεταρτημόριόν ἐστι, τηνικαῦτα καὶ τῶν αβ, αγ, ἑκατέρα τεταρτημόριόν ἐστιν, ὡς ἐπὶ τοῦ α: σχήματος καθορᾶται, ὅτε δὲ μείζων τεταρτημορίου, ὡς ἐπὶ τοῦ β: σχήματος, ἡ μὲν αβ, μείζων ἔσται τεταρτημορίου, ἡ δὲ αγ, ἐλάττων. ὅτε δὲ ἡ αδ, ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου, ἡ μὲν αβ, ἐλάττων ἔσται τεταρτημορίου, ἡ δὲ αγ, μείζων. Ἔστω δὴ α: ἡ αδ, τεταρτημόριον. λέγω ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν αβ, αγ, τεταρτημόριόν ἐστιν. εἰ γὰρ μή, πάντως γε ἡ αβ, ἢ μείζων, ἢ ἐλάττων ἔσται τεταρτημορίου. κἂν μὲν μείζων ᾖ, ἔσονται αἱ αβ, αδ, μείζονες ἡμικυκλίου, καὶ κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος ἡ ὑπὸ αβγ, ἐκτὸς, ἐλάττων ἔσται τῆς ὑπὸ αδβ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. ἀλλ' ἡ ὑπὸ αδβ, ὀρθή ἐστι, διὰ τὸ τὴν αδ, τεταρτημόριον οὖσαν διέρχεσθαι διὰ τοῦ πόλου τῆς δβγ, ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ αβδ, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ αγβ, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὑπετέθη γὰρ ἴση τῇ ὑπὸ αβδ, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος. ἄρα κατὰ τὴν ι: τοῦ αὐτοῦ ἡ αδ, μείζων ἐστὶ τῆς αγ, ἔστι δὲ ἡ αδ, τεταρτημόριον κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα αἱ δα, αγ, ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου. ἐὰν ἄρα ἡ γβδ, βάσις ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ ε, ἡ ὑπὸ αδε, ἐκτὸς γωνία μείζων ἔσται τῆς πρὸς τῷ γ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. ἀλλ' ἡ πρὸς τῷ γ, ἀμβλεῖά ἐστιν, ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ ὑπὸ αδε, πολλῷ μᾶλλον ἀμβλεῖα ἔσται, καὶ ἑπομένως ἡ ἐφεξῆς ταύτῃ ὑπὸ αδβ, ὀξεῖά ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὀρθὴ ὅπερ ἄτοπον. Εἰ δὲ ἡ αβ, ἐλάττων εἴη τεταρτημορίου, δῆλον ὅτι αἱ αδ, αβ, ἐλάττονες ἔσονται ἡμικυκλίου, καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, μείζων ἔσται τῆς ὑπὸ αδβ, καὶ ἑπομένως ἀμβλεῖα. ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ αδβ. ὥστε ἡ ὑπὸ αβδ, ὀξεῖά ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αγβ, μείζων ἄρα ἡ αγ, τῆς αδ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ι: αἱ δα, αγ, ἄρα μείζονές εἰσιν ἡμικυκλίου, καὶ ἡ ὑπὸ αδε, ὀξεῖα. εἰ δὲ τοῦτο δῆλον, ὅτι ἡ ὑπὸ αδβ, ἐφεξῆς ἀμβλεῖά ἐστιν, ἀλλὰ δὴ καὶ ὀρθὴ, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα ἡ αβ, μείζων, ἢ ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου, τῆς αδ, ἴσης τεταρτημορίῳ οὔσης, καὶ ἑπομένως ἡ αβ, τεταρτημόριόν ἐστιν. ἀλλ' αἱ βα, αγ, ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, κατὰ τὴν ὑπόθ: ἄρα καὶ ἡ αγ, τεταρτημόριόν ἐστιν. Τηνίκα ἄρα ἡ αδ, τεταρτημόριόν ἐστι, τηνικαῦτα καὶ ἑκατέρα τῶν αβ, αγ, τεταρτημόριόν ἐστιν.

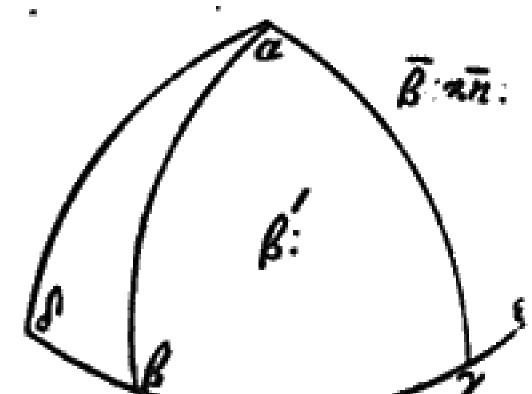
Trig. Sfer. lib.2. Fig.27.

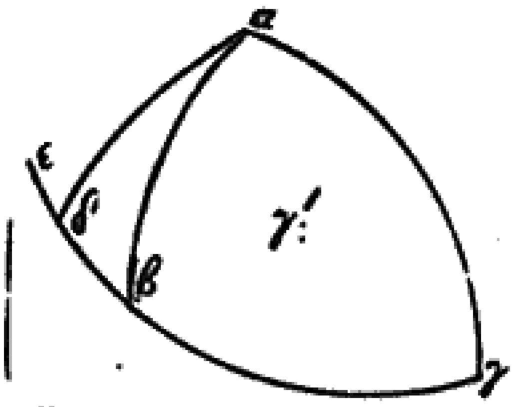



Ἔστω

Ἔστω β΄: ἡ αδ, μείζων τεταρτημορίου. Λέγω ὅτι ἡ μὲν αβ, μείζων ἐστὶ τεταρτημορίου, ἡ δὲ αγ, ἐλάττων. εἰ γὰρ μὴ, πάντως γε ἡ αβ, ἢ ἴση ἔσται τεταρτημορίῳ ἢ ἐλάττων. κἂν μὲν ἴση, δῆλον, ὅτι ἡ αγ, ἴση ἔσται τεταρτημορίῳ. αἱ γὰρ βα, αγ, ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, τὸ αβγ, ἄρα τρίγωνον ἰσοσκελὲς, καὶ τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας ὀρθὰς ἔχει, κατὰ τὴν ιγ΄: τοῦ παρόντος, ἡ ἄρα ὑπὸ αγβ, ὀρθή ἐστιν, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ αγε, ἐφεξῆς ὁμοίως ὀρθή ἐστιν. ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν αδ, ὑπετέθη μείζων τεταρτημορίου, ἡ δὲ αγ, ἴση, κατὰ τὴν τοῦ ἐναντίου ὑπόθεσιν, ἄρα αἱ δα, αγ, μείζονές εἰσιν ἡμικυκλίου, καὶ κατὰ τὴν ιβ΄: τῆς δβγ, βάσεως ἐκβληθείσης ἡ ὑπὸ αγε, ἐκτὸς ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδγ, ἐντός. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ αγε, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αγβ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδγ. καὶ κατὰ τὴν ι΄: τοῦ παρόντος, ἡ αγ, μείζων ἐστὶ τῆς αβ, ἀλλὰ δὴ καὶ ἐλάττων, ἄτοπον ἄρα. Εἰ δὲ ἡ αβ, ἐλάττων εἴη τεταρτημορίου, πάντως γε ἡ αγ, μείζων ἔσται. ἄλλως γὰρ, οὐκ ἂν αἱ αβ, αγ, ἴσαι εἶεν ἡμικυκλίῳ, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ι΄: ἡ ὑπὸ αβγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αγβ. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ αβγ, αβδ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ αγβ, αγε, κατὰ τὴν β΄: τοῦ παρόντος, ἄρα ἡ ὑπὸ αγε, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αβδ. ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἑκατέρα τῶν αδ, αγ, μείζων ἐστὶ τεταρτημορίου, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ αγε, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδε, ἀλλὰ τῆς ὑπὸ αγε, ἐλάττων ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβδ, ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ ὑπὸ αβδ, πολλῷ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδβ, καὶ κατὰ τὴν ι΄: ἡ αβ, μείζων ἐστὶ τῆς αδ, ἀλλὰ δὴ καὶ ἐλάττων, ἄτοπον ἄρα. ἡ αβ, ἄρα οὐκ ἔστιν ἐλάττων τεταρτημορίου, ἀλλ᾽ οὐδὲ ἴση, ὡς δέδεικται, μείζων ἄρα. ἐπεὶ δὲ αἱ αβ, αγ, ἴσαι ὑπετέθησαν ἡμικυκλίῳ, πάντως γε ἡ αγ, ἐλάττων ἐστίν.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 28.




Ἔστω τρίτον ἡ αδ, ἐλάττων τεταρτημορίου, ὡς ἐπὶ τοῦ γ΄: σχήματος. Λέγω ὅτι ἡ μὲν αβ, ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου, ἡ δὲ αγ, μείζων. εἰ γὰρ μὴ, πάντως γε ἡ αβ, ἢ ἴση τεταρτημορίῳ ἐστὶν, ἢ μείζων. Ἔστω δὴ πρῶτον ἴση τεταρτημορίῳ, καὶ ἐπεὶ αἱ αβ, αγ, ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, δῆλον ὅτι καὶ ἡ αγ, ἴση ἐστὶ τεταρτημορίῳ, καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ,

ὀρθὴ

ὀρθή ἐστι, κατὰ τὴν ιγ′: τοῦ παρόντος, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ α β δ, ὀρθή ἐστιν. ἀλλ᾽ ἐπεὶ ἡ μὲν α δ, ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου, ἡ δὲ α β, ἴση, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, πάντως γε αἱ δ α, α β, ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου, καὶ τῆς β δ, ἐκβληθείσης, ἡ ὑπὸ α δ ε, μείζων ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ γ, ἢ τῆς ἴσης ταύτῃ τῆς ὑπὸ α β δ, ἡ δὲ ὑπὸ α β δ, ὀρθή ἐστιν, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ α δ ε, ἀμβλεῖα ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ α δ β, ὀξεῖα. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ α β δ, τῆς ὑπὸ α δ β, καὶ ἑπομένως ἡ α δ, μείζων τῆς α β, κατὰ τὴν ι′: τοῦ παρόντος, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, οὐκ ἄρα ἡ α β, ἴση ἐστὶ τεταρτημορίῳ.

Ἔστω δὲ ἡ α β, μείζων τεταρτημορίου, ἡ α γ, ἄρα ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου. καὶ κατὰ τὴν ϛ′: τοῦ παρόντος ἡ ὑπὸ α γ β, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ α β γ. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ α γ β, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ α β δ, ἄρα ἡ ὑπὸ α β δ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ α β γ. ἐπεὶ δὲ ἑκατέρα τῶν α δ, α γ, ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου, ἄρα κατὰ τὴν ιβ′: τοῦ παρόντος ἡ ὑπὸ α δ ε, ἐκτὸς γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ α γ δ, ἐντὸς, ἢ τῆς ὑπὸ α β δ, τῆς ἴσης τῇ ὑπὸ α γ δ, ὥστε καὶ αἱ α δ, α β, ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου. ἄρα ἡ ὑπὸ α β γ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ α δ β, ἀλλὰ τῆς ὑπὸ α β γ, μείζων δέδεικται ἡ ὑπὸ α β δ, ἡ ὑπὸ α β δ, ἄρα πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ α δ β, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ϛ′: ἡ α δ, μείζων ἐστὶ τῆς α β, ὅπερ ἄτοπον.

Ἐκ τῶν εἰρημένων τοίνυν εὐχερῶς λύεται καὶ τὸ τῆς ἀπορίας. ὅταν γὰρ γένηται ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ α β δ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ α δ β. οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς α δ, πρὸς ἄλλο τι, ἐπὶ μὲν τοῦ α′: σχήματος ἐφ᾽ ἑκατέρας ἀληθεύει τῆς τε α β, καὶ α γ, ἴσαι γάρ ὡς δέδεικται. ἐπὶ δὲ τοῦ β′: καὶ γ′: ἐπὶ μόνης τῆς α β, ὅτι καὶ ἡ α β, μείζων ἐστὶ τεταρτημορίου, ἢ γοῦν ἐλάττων, ὥσπερ καὶ ἡ α δ· εἰ δὲ βούλει ἀληθεύειν καὶ ἐπὶ τῆς α γ, ἐπὶ τοῦ β′: καὶ γ′: σχήματος, λάμβανε ἀντὶ τῆς α δ, τὸ παραπλήρωμα τῆς αὐτῆς μέχρι ἡμικυκλίου.

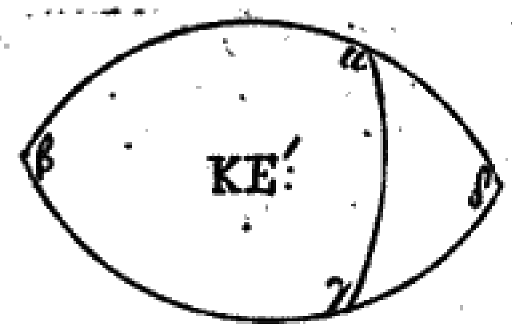
## Πρότασις ΚΕ′:

**Ἐὰν σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἑκατέρα τῶν πλευρῶν μείζων ᾖ τεταρτημορίου, καὶ αἱ πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ γωνίαι ἀμβλεῖαι, εὑρεθήσονται αἵ τε πλευραὶ καὶ γωνίαι τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, δι᾽ ἑτέρου ὀρθογωνίου τριγώνου.**

Ἔστω δὴ τοῦ α β γ, σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὸ β, ἑκατέρα τῶν α β, β γ, πλευρῶν μείζων τεταρτημορίου. Λέγω ὅτι εὑρεθήσονται αἱ τούτου πλευραὶ καὶ γωνίαι δι᾽ ἑτέρου τριγώνου, καὶ τούτου ὀρθογωνίου, οὗ αἱ πλευραὶ ἐλάττονές εἰσι τεταρτημορίου. Ἐξαχθήτωσαν γὰρ αἱ β α, β γ, αὐτοῦ πλευραὶ μέχρι ἡμικυκλίου συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ δ, καὶ συσταθήσεται πάντως τὸ α δ γ, ὀρθογώνιον κατὰ τὸ δ. οὗ αἱ δ α, δ γ, πλευραὶ ἐλάττονές εἰσι τεταρτημορίου, διὰ τὸ μείζω εἶναι

τεταρ-

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 29.




τεταρτημορίου ἑκατέραν τῶν β α, β γ· ἀλλὰ τὸ ἡμίτονον τῆς μὲν δ α, ἡμίτονόν ἐστι καὶ τῆς α β. τὸ δὲ τῆς δ γ, καὶ τῆς γ β. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς μὲν ὑπὸ δ α γ, ἡμίτονόν ἐστι καὶ τῆς ὑπὸ β α γ, ὡς παραπληρώματος, τὸ δὲ τῆς ὑπὸ δ γ α, καὶ τῆς ὑπὸ α γ β. ἄρα ἐὰν ἀριθμῶσι τὰ ἡμίτονα τῶν τοῦ ζητουμένων πλευρῶν καὶ γωνιῶν τοῦ α δ γ, τριγώνου, κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα, ἀριθμήσονται πάντως καὶ αἱ ζητούμεναι πλευραὶ καὶ γωνίαι τοῦ α β γ, τριγώνου, ὡς παραπληρώματα τῶν τοῦ α δ[illegible] τριγώνου πλ[illegible]. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας.

ΤΡΙ-