καὶ δοθήτωσαν αἱ ζ δ, δ ε, αὐτοῦ πλευραὶ, καὶ ἡ πρὸς τῷ ε, γωνία, καὶ ζητείσθω ἡ πρὸς τῷ ζ. Συναφθήτω ὡς ἀνωτέρω, ὁ τῆς δ ε, πλευρᾶς λογάριθμος, ἤτοι ὁ τοῦ 347. ἀριθμοῦ τῷ λογαρίθμῳ τῆς πρὸς τῷ ε, γωνίας μοιρ: δηλ: 58. 7'. καὶ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθήτω ὁ λογάριθμος τῆς ζ δ, ἤτοι ποδῶν 304. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐναπολειπόμενος, λογάριθμός ἐστι γωνίας μοιρῶν 75. καὶ 45. ὡς ἐν τοῖς κανονίοις εὑρίσκεται, ἀφαιρεθήτωσαν αἱ 75. καὶ 45. ἀπὸ μοιρῶν 180. καὶ ἐπεὶ ἐναπολείπονται μοῖραι 104. καὶ 15. δῆλον ὅτι ἡ πρὸς

254032.95. λογ: πλευρᾶς δ ε, ποδ: 347. ὅρος β':
992897.18. λογ: γωνίας ε, μοιρῶν 58. 7'. ὅρος γ':

1246930.13. ὁ ἐκ τοῦ β': καὶ γ': γενόμενος ὅρος.
248287.36. λογ: πλευρ: δ ζ, ποδ: 304. ὅρος α':

998642.77. λογ: ἡμιτ: γων: ζ, μοιρῶν 104. καὶ 15.

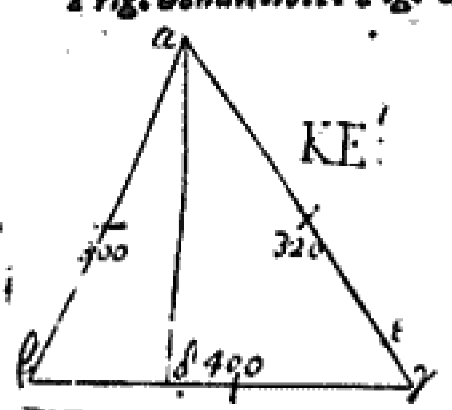
τῷ ζ, γωνία μοιρῶν ἐστι 104. καὶ 15. καὶ γὰρ τὸν δ': ὅρον τοῦ β': τοῦ α': τοῦ παρόντος τὸ τῆς ὀξείας γωνίας ἡμίτονον, ἐστὶν ἔτι ἡμίτονον καὶ τῆς ἀμβλείας, ὡς παραπλήρωμα οὔσης τῆς ὀξείας μέχρι τοῦ ἡμικυκλίου, ἤτοι μοιρῶν 180. ἐκκείσθωσαν δὲ κἀνταῦθα οἱ λογάριθμοι χάριν ὑποδείγματος.

Πρότασις ΚΕ':

Παντὸς τριγώνου τῶν πλευρῶν δοθεισῶν τὰς γωνίας εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν αἱ πλευραὶ τοῦ α β γ, τριγώνου, καὶ ἔστω ἡ μὲν α β, ποδῶν φέρ εἰπεῖν 300. ἡ δὲ β γ, 400. καὶ ἡ γ α, 320. καὶ ζητείσθωσαν αἱ γωνίαι τοῦ αὐτοῦ. Πιπτέτω δὴ κάθετος ἐπὶ τῆς β γ, μείζονος πλευρᾶς ἀπὸ τῆς ἀπεναντίον γωνίας τῆς πρὸς τῷ α, ἡ α δ, τῆς δὲ α β, ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς α γ, σημειωθήτω ἡ διαφορὰ, καθ' ἣν ἡ α γ, μείζων ὑπερέχει τῆς α β, ἐλάττονος, καὶ ἔστω αὕτη ἡ γ ε. εἶτα γενέσθω ὡς ἡ β γ, μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β α, α γ, οὕτως ἡ ὑπεροχὴ ε γ, πρὸς ἄλλον τι, καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ': ἀνάλογος ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῆς β γ, τὸ δὲ ἐναπολειφθὲν διαιρεθήτω δίχα, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἥτε β δ, καὶ δ γ, κατὰ τὴν ε: τοῦ παρόντος. ὁ γὰρ ἐπὶ τῆς πράξεως εὑρεθεὶς δ': ἀνάλογος διαφορά ἐστι καὶ τῶν αὐτῶν τῶν β δ, δ γ, τμημάτων. γνωσθείσης δὲ τῆς β δ, γενέσθω ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β δ, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλον τι. καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ': ἀνάλογος ἡμίτονον ἔσται τῆς ὑπὸ δ α β, γωνίας, οὗτινος εὑρεθέντος ἐν τοῖς κανονίοις τῶν ἡμιτόνων, γνωσθήσεται ἡ ὑπὸ δ α β, γωνία κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος, ἧστινος ἀφαιρουμένης ἀπὸ μιᾶς ὀρθῆς, γνωσθήσεται καὶ ἡ πρὸς τῷ β, παραπλήρωμα γάρ ἐστι τῆς αὐτῆς ἡ ὑπὸ δ α β.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 28.

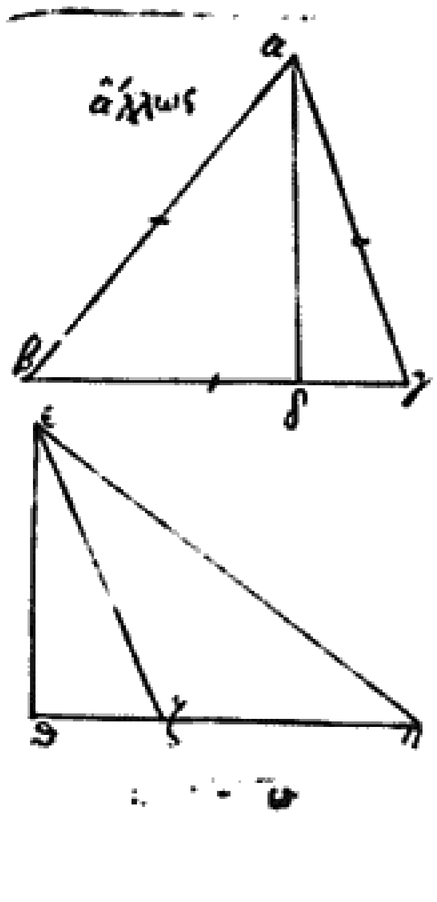


δαβ. Ἐὰν δὲ γένηται καὶ ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν γδ, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλοτι, γνωσθήσεται ἡ ὑπὸ δαγ, ἧς τινος ἀφαιρουμένης ἀπὸ μιᾶς ὀρθῆς, γνωσθήσεται καὶ ἡ πρὸς τῷ γ. ἐγνωσμένων δὲ τῶν πρὸς τοῖς β, γ, γνωσθήσεται πάντως καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, καίτοι γνωσθεισῶν τῶν ὑπὸ δαβ, δαγ, ἔγνωσται καὶ ἡ ὅλη βαγ.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω τρίγωνον ὀξυγώνιον τὸ αβγ, καὶ διδομένων τῶν αὐτοῦ πλευρῶν, ζητείσθω ἡ πρὸς τῷ β, ὀξεῖα γωνία. Πολλαπλασιασθήτωσαν δὴ αἱ περὶ τὴν ζητουμένην γωνίαν αβ, βγ, πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον σημειωθήτω, πολλαπλασιασθεισῶν δὲ τῶν αὐτῶν αβ, βγ, καὶ καθ' αὐτὰς χωρίς, συναφθήτωσαν ἀλλήλοις τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα. ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθήτω τὸ τετράγωνον τῆς αγ, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετράγωνα τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνου, καὶ ἔσται αὕτη ἡ ὑπεροχὴ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον κατὰ τὴν ιγ': τοῦ β': τοῦ Στοιχείων. τούτου δὲ γνωσθέντος, γενέσθω ὡς τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὴν ὑπεροχήν, καθ' ἣν ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετράγωνα τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνου, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλοτι, καὶ γνωσθήσεται κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, δηλονότι τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δαβ, γωνίας, οὗ τινος εὑρεθέντος ἐν τοῖς κανονίοις, γνωσθήσεται ἡ ὑπὸ δαβ, γωνία. ταύτης δὲ ἀφαιρουμένης ἀπὸ μιᾶς ὀρθῆς γνωσθήσεται πάντως ἡ πρὸς τῷ β, ζητουμένη γωνία.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 29.

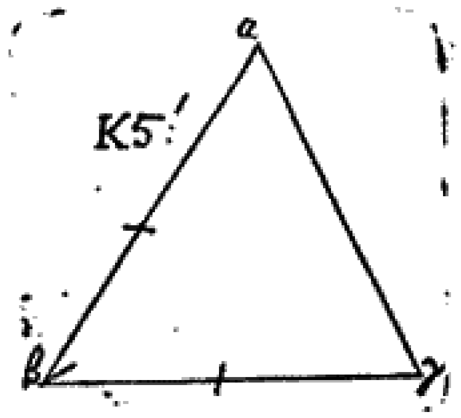


Εἰ δὲ τὸ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον ᾖ, ὡς τὸ εζη, καὶ ζητηθῇ ἡ πρὸς τῷ ζ, ἀμβλεῖα αὐτοῦ γωνία, πολλαπλασιασθήτωσαν πρὸς ἀλλήλας τε αἱ εζ, ζη, αὐτοῦ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν ζητουμένην γωνίαν, καὶ καθ' αὐτὰς χωρίς. καὶ σημειωθήτω τό, τε ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἔτι τετράγωνα, τῶν δὲ ἀπὸ τῶν εζ, ζη, τετραγώνων ἀλλήλοις συναπτομένων, ἀφαιρεθήτω τὸ γινόμενον ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς εη. εἶτα γενέσθω ὡς τὸ δὶς ὑπὸ τῶν εζ, ζη, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὴν ὑπεροχήν, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς εη, τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν εζ, ζη, τετραγώνων, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλοτι, καὶ γνωσθήσεται τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς ὑπὸ εζη, γωνίας κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ἑβδόμην. Εὑρεθέντος δὲ ἐν τοῖς κανονίοις τοῦ αὐτοῦ ἡμιτόνου, γνωσθήθήσεται ἡ ὑπὸ ζεθ, γωνία, ἥτις μὴ μόνον παραπλήρωμά ἐστι τῆς ὑπὸ εζθ, γωνίας κατὰ τὸν ζ': ὅρον τοῦ α: τῶν ἐν τῷ α: τοῦ παρόντι τμήματι, ἀλλά γε καὶ τῆς ὑπὸ εζη. αὕτη δὲ ἡ ὑπὸ ζεθ, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ μιᾶς ὀρθῆς, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ ὑπὸ εζθ. ἡ δὲ ὑπὸ εζθ, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ δύο ὀρθῶν, καὶ γνωσθήσεται ἡ ὑπὸ εζη, ζητουμένη ἀμβλεῖα γωνία. ὁ λόγος ἐκ τῆς πράξεως σαφής.

Πρότασις Κϛ':

Παντὸς τριγώνου δύο τῶν αὐτοῦ πλευρῶν δοθεισῶν, καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 30.



Δοθήτωσαν τοῦ αβγ, τριγώνου αἱ αβ, βγ, πλευραί, καὶ ἡ πρὸς τῷ β, γωνία, καὶ ζητηθήτω τὸ αὐτοῦ ἐμβαδόν. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς ἄλλο τι, καὶ τὸ εὑρεθὲν ἔσται διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ αβγ, τριγώνου κατὰ τὴν θ': τοῦ παρόντος, οὗτινος δίχα διῃρημένου, γνωσθήσεται τὸ τοῦ αβγ, τριγώνου ἐμβαδόν.

Πρότασις ΚΖ':

Παντὸς τριγώνου δύο τῶν αὐτοῦ γωνιῶν δοθεισῶν, καὶ μιᾶς πλευρᾶς, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν τοῦ αβγ, τριγώνου αἱ πρός τε τῷ α, καὶ β, γωνίαι, καὶ ἡ αβ, πλευρά, καὶ ζητηθήτω τὸ αὐτοῦ ἐμβαδόν. Εὑρεθήτωσαν δὴ διὰ τῆς κγ': τοῦ παρόντος αἱ λοιπαὶ πλευραὶ αγ, γβ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ πρὸς τῷ γ. Εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, δὸς εἰπεῖν γωνίας, οὕτω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν βα, αγ, ὀρθογώνιον πρὸς ἄλλο τι, καὶ τὸ εὑρεθὲν διπλάσιον ἔσται τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ αβγ, τριγώνου, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν θ': οὗτινος δίχα διῃρημένου, γνωσθήσεται τὸ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου ἐμβαδόν.

Πρότασις ΚΗ':

Παντὸς τριγώνου τῶν πλευρῶν δοθεισῶν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

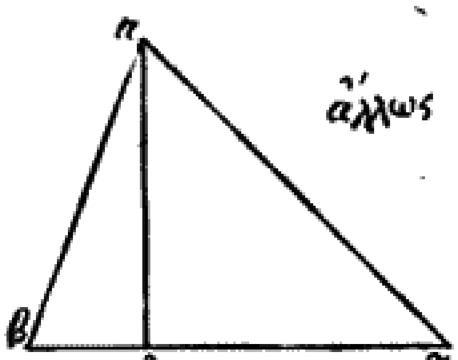
Δοθήτωσαν τοῦ αβγ, τριγώνου αἱ πλευραί, καὶ ζητηθήτω τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Εὑρεθήτω δὴ ἡ πρὸς τῷ α, δὸς εἰπεῖν, γωνία διὰ τῆς κέ: τοῦ παρόντος. εἶτα εὑρεθήτω ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἀποτομένων ἡ ἀποτομένη τοῦ ἡμίσεως τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας. Συναρθεισῶν δὲ τῶν αβ, βγ, γα, πλευρῶν τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, καὶ τοῦ ὅλυ δίχα διαιρυμένυ, ἀφαιρεθήτω ἡ β γ, ὑποτείνυσα τὴν πρὸς τῷ α, γωνίαν ἀπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρυ τῦ α β γ, τριγώνου, καὶ ἐπὶ τὴν ὑπεροχὴν τῆς ἡμιπεριμέτρυ πρὸς τὴν β γ, πολλαπλασιαθήτω ἡ αὐτὴ ἡμιπερίμετρος, καὶ τὸ γινόμενον σημειωθήτω. Τελευταῖον δὲ γενέσθω διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῦ ἡμίσεως τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, οὕτω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρυ τῦ τριγώνυ καὶ τῆς ὑπεροχῆς, καθ᾽ ἣν ὑπερέχει ἡ ἡμιπερίμετρος τῦ α β γ, τριγώνυ τῆς β γ, ἀπεναντίον πλευρᾶς, πρὸς ἄλλο τι, καὶ τὸ γενόμενον ἔσαι τὸ ἐμβαδὸν τῦ α β γ, τριγώνυ κατὰ τὴν ι α: τοῦ παρόντος.

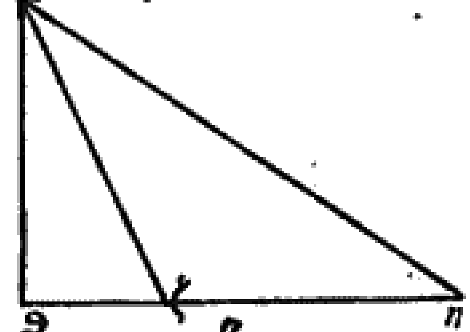
ΑΛΛΩΣ.

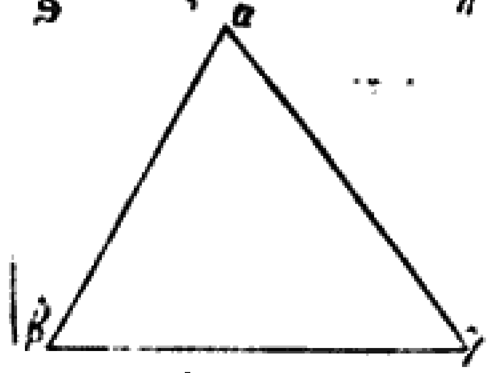
Εὑρεθήτω ἡ πρὸς τῷ β, γωνία τῦ α β γ, ὀξυγωνίυ, ἢ ἡ ὑπὸ ε ζ η, τῦ ε ζ η, ἀμβλυγωνίυ τριγώνου, καθ᾽ ὃν προηρμηνεύθαι τρόπον. καὶ ἐπὶ τῆς β γ, ἢ ζ η, πιπτέτω κάθετος ἡ α δ, ἢ ε θ, καὶ ἐπὶ μὲν τῦ α β γ, τριγώνυ ἐντὸς πεσεῖται, ἐπὶ δὲ τῦ ε ζ η, ἐκτός. Εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας ὀξείας οὔσης, ἀμβλείας δὲ, ὡς ἡ ὑπὸ ε ζ η, πρὸς τὸ αὐτῆς παραπλήρωμα, τὴν ὑπὸ ε ζ θ, οὕτως ἡ α β, ἢ γῦν ἡ ε ζ, πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται κατὰ τὴν α: τῦ παρόντος ἡ α δ, κάθετος, ἢ ἡ ε θ. ταύτης δὲ γνωσθείσης, διαιρεθήτω δίχα ἡ β γ, ἢ ζ η, βάσις τῦ τριγώνυ, καὶ ἐπὶ μὲν τὸ τῆς β γ, ἥμισυ πολλαπλασιασθήτω ἡ α δ, κάθετος, ἐπὶ δὲ τὸ ἥμισυ τῆς ζ η, πολλαπλασιασθήτω ἡ ε θ, καὶ τὸ γενόμενον ἔσαι ἴσον τῷ τῦ τριγώνου ἐμβαδῷ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ι β΄: τῦ γ΄: βιβλ: τῦ α΄: τμήματος τῆς Γεωμετρίας.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 81.

ἄλλως







ΑΛΛΩΣ.

Ἀφαιρεθήτω ἑκάση τῶν τῦ α β γ, τριγώνυ πλευρῶν ἀπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρυ τῦ αὐτῦ τριγώνυ. Διδομένων γὰρ τῶν πλευρῶν, δέδοται πάντως καὶ ἡ ἡμιπερίμετρος αὐτῦ, καὶ γνωσθήσονται αἱ διαφοραὶ, καθ᾽ ἃς ἡ ἡμιπερίμετρος τῦ α β γ, τριγώνου ὑπερέχει τῶν α β, β γ, γ α, αὐτῦ πλευρῶν χωρίς. Εἶτα πολλαπλασιαθήτω ἡ ἡμιπερίμετρος τῦ αὐτῦ τριγώνυ ἐπὶ τὴν ὑπεροχὴν, καθ᾽ ἣν ὑπερέχει ἡ ἡμιπερίμετρος μιᾶς πλευρᾶς, φέρ᾽ εἰπεῖν, τῆς β γ. Πολλαπλασιαθήτωσαν δ᾽ ἔτι πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ ὑπεροχαὶ τῆς αὐτῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὰς λοιπὰς δύο τῦ τριγώνυ πλευρὰς τὰς α β, α γ. τούτων δὲ γενομένων, πολλαπλασιαθήτω τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου

καὶ

καὶ διαφορᾶς τῆς αὐτῆς πρὸς τὴν, βγ, πλευρὰν, ἐπὶ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἄλλων διαφορῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου πρὸς τὰς αβ, αγ, αὐτοῦ πλευρὰς, καὶ τοῦ γενομένου εὑρεθήτω ἡ τετράγ: ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσαι παραστατικὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου. κατὰ γὰρ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ περιεχομένου ὀρθογωνίου ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῆς πρὸς μίαν τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, καὶ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ὑπεροχῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὰς ἄλλας πλευράς.

Πρότασις ΚΘ'.

Παντὸς τριγώνου τοῦ τε ἐμβαδοῦ δοθέντος, καὶ τῶν πλευρῶν, τὰς γωνίας αὐτοῦ εὑρεῖν.

Δοθήτω τοῦ αβγ, τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν, καὶ αἱ αβ, βγ, γα, αὐτοῦ πλευραὶ, καὶ ζητείσθωσαν αἱ γωνίαι. Α'φαιρεθήτω δὴ ἡ μία τῶν αὐτοῦ πλευρῶν, φέρ' εἰπεῖν, ἡ βγ, ἀπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου, καὶ εὑρεθήσεται ἡ ὑπεροχὴ, καθ' ἣν ἡ ἡμιπερίμετρος ὑπερέχει τῆς βγ, πλευρᾶς. ταύτῃ δὲ γενομένου πολλαπλασιαθήτω ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν εὑρεθεῖσαν ὑπεροχήν. Εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου, καὶ ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ἡ ἡμιπερίμετρος τῆς βγ, ὑπερέχει, πρὸς τὸ τοῦ τριγώνου ἐμβαδὸν, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλο τι. καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ': ἀνάλογος ἀποτεμνομένη ἔσαι τοῦ ἡμίσεως τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας, τῆς ὑποτεινομένης δηλ: ὑπὸ τῆς βγ, ληφθείσης πλευρᾶς κατὰ τὴν ια': τοῦ παρόντος. ἥτις εὑρισκομένη ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων, ἀποτεμνόντων, καὶ τεμνουσῶν, δώσει σοι τὸν ἀριθμὸν τοῦ ἡμίσεως τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας, οὗτινος διπλασιαζομένου, γνωσθήσεται ἡ πρὸς τῇ α, γωνία. τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρεθήσεται καὶ ἑκατέρα τῶν πρός τε τῇ β, καὶ γ, ἡ μὲν, ἀφαιρουμένης τῆς αγ, ὑποτεινούσης αὐτὴν ἀπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου, ἡ δὲ, τῆς αβ, καὶ τῶν λοιπῶν γενομένων ὡς προειρημένως.

Α'ΛΛΩΣ.

Πολλαπλασιασθήτωσαν αἱ βα, αγ, πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας, εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διπλοῦν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ αβγ, τριγώνου, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλο τι. καὶ τὸ εὑρεθὲν ἔσαι ἡμίτονον τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας κατὰ τὴν θ': τοῦ παρόντος. οὗτινος εὑρεθέντος ἐν τοῖς κανονίοις, γνωσθήσεται ἡ πρὸς τῇ α, γωνία. Τοῦτον τὸν τρόπον εὑρεθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ δύο γωνίαι.

Τέλος τοῦ περὶ διαλύσεως τῶν ἐπιπέδων τριγώνων Βιβλίου.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΝ ΤΗ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΑΝΗΚΟΝΤΩΝ.

ΟΡΟΙ.

Α' Γωνία δύο κύκλων ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλοις τεμνομένων ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν καθέτων τῶν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις τῶν κύκλων ἀγομένων πρὸς τὴν κοινὴν αὐτῶν τομήν. Οἷον τῶν αβγδ, αεγζ, κύκλων γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ βηε, ἑκατέρα γὰρ τῶν βη, εη, ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τῆς αγ, κοινῆς τομῆς τῶν αβγδ, αεγζ, κύκλων καὶ ἡ μὲν βη, ἐν τῷ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστίν, ἡ δὲ εη, ἐν τῷ τοῦ αεγζ. Καλεῖται δὲ αὕτη καὶ γωνία τῆς κλίσεως, καὶ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ βαε.

Β: Μέτρον γωνίας δύο κύκλων ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλοις τεμνομένων ἐστὶ τόξον μεγίστου κύκλου, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις αὐτῶν πρὸς τὴν κοινὴν τομὴν ἀγομένων καθέτων. Οἷον τῆς ὑπὸ βηε, ἤτοι τῆς ὑπὸ βαε, γωνίας τῶν αβγδ, αεγζ, κύκλων μέτρον ἐστὶ τὸ βε, τόξον τοῦ βεδζ, μεγίστου κύκλου, ὅπερ μέτρον ἐστὶ καὶ τῆς ἀπεναντίον βγε.

Γ': Τρίγωνον σφαιρικόν ἐστι τὸ ὑπὸ τριῶν τόξων μεγίστων ἐν σφαίρᾳ κύκλων περιεχόμενον σχῆμα.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 1.

Δ': Ἰσόπλευρον μὲν τὸ τὰ τρία τόξα ἴσα ἔχον.

Ε' Ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰ δύο μόνα τόξα ἴσα ἔχον.

ς' Σκαληνὸν δὲ τὸ τὰ τρία ἄνισα ἔχον τόξα.

Πρότασις Α'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐν σφαίρᾳ τέμνωσιν ἀλλήλους, αἱ κατὰ κορυφὴν αὐτῶν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλοις εἰσίν.

Τεμνέτωσαν ἀλλήλους ἐν τῇ αὐτῇ ὅπης σφαίρᾳ οἱ αβγδ, αεγζ, μέγιστοι κύκλοι.

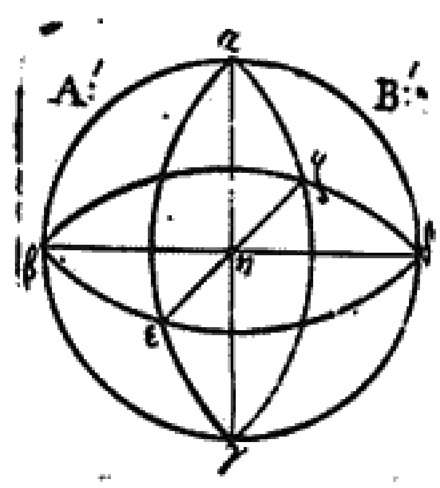
κλοι. Λέγω τὰς κατὰ κορυφὴν αὐτῶν γωνίας τὰς ὑπὸ βαε, ζαδ, ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. Διήχθωσαν δὴ διὰ τοῦ η, κέντρου τῆς σφαίρας αἱ βηδ, εηζ, ὥστε πρὸς ὀρθὰς εἶναι ἐπὶ τῆς αηγ, κοινῆς τομῆς τῶν αβγδ, αεγζ, κύκλων, καὶ διὰ τῶν βε, γραφήτω κύκλος μέγιστος ὁ βεδζ. καὶ ἐπεὶ αἱ βηδ, εηζ, εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ η, πάντως γε κατὰ τὴν ιε: τοῦ α. τοῦ Στοιχειωτοῦ αἱ ὑπὸ βηε, δηζ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, μέτρον δὲ τῆς μὲν ὑπὸ βηε, γωνίας τὸ βε, τόξον ἐστί, κατὰ τὸν β': ὅρον τοῦ παρόντος. τῆς δὲ δηζ, τὸ δζ, ἄρα καὶ τὰ βε, δζ, τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἀλλὰ τὸ μὲν βε, μέτρον ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ βαε, τὸ δὲ δζ, καὶ τῆς ὑπὸ δαζ. ἄρα αἱ ὑπὸ βαε, δαζ, κατὰ κορυφὴν γωνίαι τῶν αβγδ, αεγζ, κύκλων ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐν σφαίρᾳ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Β:

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους ἐν τῇ αὐτῇ ὄντες σφαίρᾳ, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσι.

Τεμνέτωσαν ἀλλήλους ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ αβγδ, αεγζ, κύκλοι κατὰ τὰ α, καὶ γ, σημεῖα. Λέγω τὰς ὑπὸ βαε, εαδ, ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βηε, εηδ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, κατὰ τὴν ιγ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ βηε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαε, ἡ δὲ ὑπὸ εηδ, τῇ ὑπὸ εαδ, τῶν μὲν γὰρ μέτρον κοινὸν τὸ βε, τῶν δὲ τὸ εδ, τόξον, πάντως γε καὶ αἱ ὑπὸ βαε, εαδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους ἐν τῇ αὐτῇ ὄντες σφαίρᾳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 2.



Πρότασις Γ':

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐν σφαίρᾳ τέμνωσιν ἀλλήλους, αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Τεμνέτωσαν ἀλλήλους οἱ αὐτοὶ κύκλοι αβγδ, αεγζ, κατὰ τὰ α καὶ γ, σημεῖα. Λέγω τὰς ὑπὸ βαε, βγε, ἀπεναντίον γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. τὸ γὰρ βε, τόξον μέτρον ἐστὶν ἑκατέρας. ὧν δὲ τὸ αὐτὸ μέτρον, ἐκεῖναι πάντως ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐν σφαίρᾳ τέμνωσιν καὶ τὰ ἑξῆς.

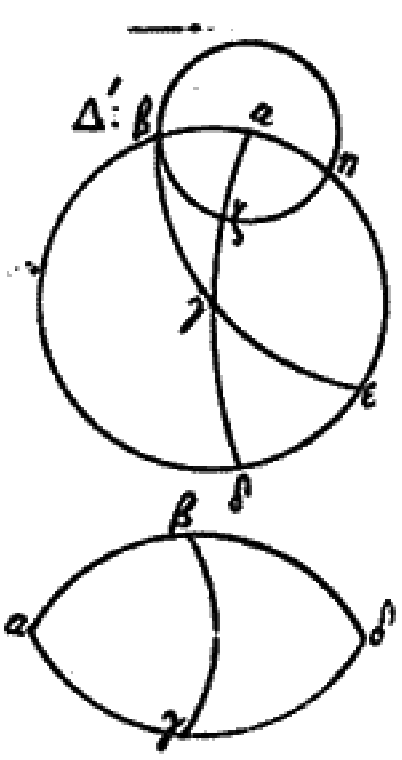
Πρό-

Πρότασις Δ':

Παντὸς τριγώνου σφαιρικοῦ αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω τρίγωνον σφαιρικὸν τὸ α β γ, ἐν σφαίρᾳ τῇ α β δ ε. Λέγω ὅτι αἱ δύο αὐτοῦ πλευραὶ, δὺς εἰπεῖν αἱ α β, β γ, μείζονές εἰσι τῆς λοιπῆς α γ. Κέντρῳ μὲν δὴ τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ α β, γραφήτω κύκλος ὁ β ζ η. καὶ ἐπεὶ τὸ α γ δ, ἡμικύκλιόν ἐστι διὰ τὸ δίχα τὰς μεγίστους ἐν σφαίρᾳ κύκλους τέμνεσθαι, κατὰ τὴν ι: τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν, πάντως γε τὸ α γ, ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, οἱ δὲ πόλοι παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἡμικυκλίῳ ἀλλήλων ἀφίστανται, ἄρα τὸ γ, σημεῖον οὐκ ἔστιν ὁ ἕτερος τοῦ β ζ η, κύκλου πόλος· ἀλλ᾽ ἀπὸ τοῦ γ, ἐπὶ τὴν β ζ η, περιφέρειαν τοῦ β η ζ, κύκλου πεπτώκασι τὰ γ ζ, γ β, τόξα, ἄρα κατὰ τὴν κα: τοῦ β': τῶν Σφαιρικῶν τὸ γ ζ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ γ β. προστιθεμένων δὲ τῶν α β, α ζ, ἴσων, πάντως γε τὰ α β, β γ, μείζονά ἐστι τοῦ α ζ γ, ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν. τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσονται καὶ αἱ α β, α γ, μείζονες τῆς β γ. Παντὸς ἄρα τριγώνου σφαιρικοῦ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 3.



Πρότασις Ε':

Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ τρεῖς πλευραὶ ἐλάττονές εἰσι τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Ἔστω τρίγωνον σφαιρικὸν τὸ α β γ. Λέγω τὰς τρεῖς τούτου πλευρὰς α β, β γ, γ α, ἐλάττονας εἶναι τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Ἐξαχθήτωσαν αἱ α β, α γ, κατὰ τὸ συνεχὲς, καὶ ἐπεὶ καμπύλαι εἰσὶ, συμπεσοῦνται πάντως γε ἀλλήλαις, συμπιπτέτωσαν δὴ κατὰ τὸ δ· καὶ ἐπεὶ οἱ μέγιστοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι δίχα τέμνονται, κατὰ τὴν ι: τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν, δῆλον ὅτι τὰ α β δ, α γ δ, τόξα ἡμικύκλιά εἰσιν, ἀλλὰ τὰ β δ, γ δ, μείζονά ἐστι τοῦ β γ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, προστιθεμένων ἄρα τῶν α β, α γ, τοῖς τε β δ, γ δ, καὶ β γ, χωρὶς, ἔσονται τὰ α β, α γ, β γ, ἐλάττονα τῶν α β δ, α γ δ, τὰ δὲ α β δ, α γ δ, ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, ὡς ἡμικύκλια, ἄρα τὰ α β, α γ, β γ, ἐλάττονά εἰσι τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Παντὸς ἄρα σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ τρεῖς καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

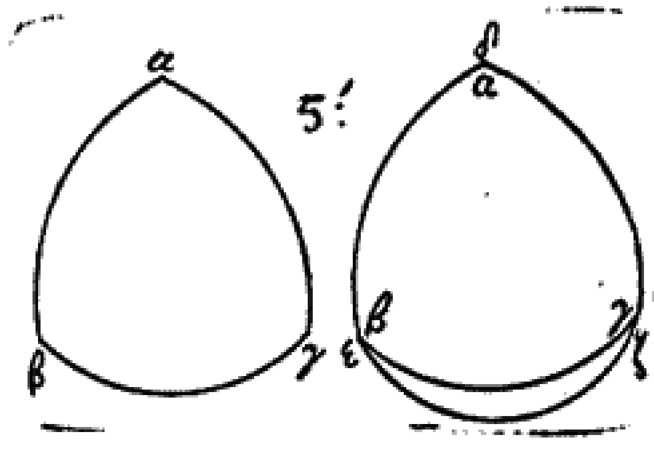
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου οὐδὲ μία τῶν πλευρῶν ἡμικυκλιόν ἐστιν, ἄλλως γὰρ αἱ αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου πλευραὶ μείζονες ἔσονται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Πρότασις ϛ'.

Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι ὑποτείνουσι πλευραί.

Ἐχέτωσαν τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα τὰς αβ, αγ, πλευρὰς ἴσας ταῖς δε, δζ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, καὶ τὴν πρὸς τῷ α, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ δ. Λέγω καὶ τὴν βγ, ἴσην εἶναι τῇ εζ, καὶ ὅλον τὸ αβγ, ὅλῳ τῷ δεζ, καὶ τὴν μὲν πρὸς τῷ β, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ ε, τὴν δὲ πρὸς τῷ γ, τῇ πρὸς τῷ ζ. Ἐφαρμοσθήτω γὰρ τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δεζ, καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, ἴση ἐστὶ τῇ δε, συμπεσεῖται πάντως τὸ μὲν α, σημεῖον τῷ δ, τὸ δὲ β, τῷ ε, καὶ ἡ αβ, τῇ δε. Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ, ἐφαρμοσθήσεται δήπουθεν καὶ ἡ αγ, τῇ δζ. εἴγαρ μὴ, οὐδὲ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ, ὥστε καὶ τὸ γ, σημεῖον συμπεσεῖται τῷ ζ. ἄρα καὶ ἡ βγ, ἐφαρμοσθήσεται τῇ εζ. ἄλλως γὰρ αὖ ἡ ἐντὸς πεσεῖται ἡ ἐκτός. Πιπτέτω δὲ ἡ βγ, ἐντὸς τῆς εζ. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ί. οἱ μέγιστοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι δίχα ἀλλήλους τέμνονται, δῆλον ὅτι τὰ βγ, εζ, τόξα ἡμικυκλιά ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω. τὸ αὐτὸ ἕψεται ἄτοπον, κἂν ἐκτὸς ὑποτεθῇ πίπτειν. ἐφαρμοσθήσεται ἄρα καὶ ἡ βγ, τῇ εζ, ὥστε καὶ τὸ αβγ, τρίγωνον ἐφαρμοσθήσεται τῷ δεζ, καὶ ἔσται ἡ μὲν πρὸς τῷ β, γωνία τῇ πρὸς τῷ ε, ἡ δὲ πρὸς τῷ γ, τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση. Ἐὰν ἄρα δύο σφαιρικὰ τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 4.



ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν δύο τρίγωνα σφαιρικὰ τὰς πλευρὰς ἴσας ἔχῃ, καὶ τὰς γωνίας πάντως γε ἴσας ἕξει.

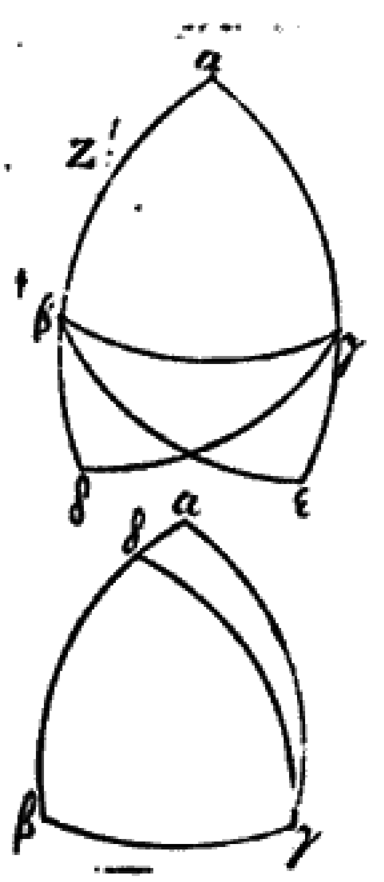
Πρό-

Πρότασις Ζ'.

Τῶν ἰσοσκελῶν σφαιρικῶν τριγώνων αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων πλευρῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ α β γ, ἔχον τὰς α β, α γ, αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας, λέγω ὅτι αἱ πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ γωνίαι, αἱ ὑπὸ α β γ, α γ β, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ τῶν α β, α γ, προσεκβληθεισῶν πλευρῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν, ἤτοι αἱ ὑπὸ γ β δ, β γ ε, ὁμοίως ἴσαι εἰσίν. Εἰλήφθωσαν γὰρ τὰ β δ, γ ε, τόξα ἴσα, καὶ γραφήτωσαν τὰ γ δ, β ε. καὶ ἐπεὶ τῶν β α ε, γ δ α, τριγώνων αἱ β α, α ε, πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς γ α, α δ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, κατά τε τὴν ὑπόθεσιν καὶ κατασκευήν, κοινὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία, πάντως γε κατὰ τὴν ἀνωτέρω αἱ β ε, γ δ, βάσεις ἴσαι εἰσὶ καὶ ἡ ὑπὸ α β ε, γωνία τῇ ὑπὸ α γ δ, ἡ δὲ πρὸς τῷ ε, τῇ πρὸς τῷ δ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τῶν β γ ε, γ β δ, τριγώνων τάς τε ὑπὸ β γ ε, γ β δ, γωνίας, καὶ τὰς ὑπὸ γ β ε, β γ δ, ἴσας ἀλλήλαις εἶναι, ἀλλ' αἱ μὲν ὑπὸ β γ ε, γ β δ, εἰσὶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν, τῶν δὲ γ β ε, β γ δ, ἴσων ἀφαιρουμένων ἀπὸ τῶν α β ε, α γ δ, ἴσων, ἀπολείπονται καὶ αἱ πρὸς τὴν βάσιν ἤτοι αἱ ὑπὸ α β γ, α γ β, ἴσαι. Τῶν ἰσοσκελῶν ἄρα σφαιρικῶν τριγώνων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 5.



Πρότασις Η'.

Ἐὰν σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἰσοσκελὲς ἔσται τὸ τρίγωνον.

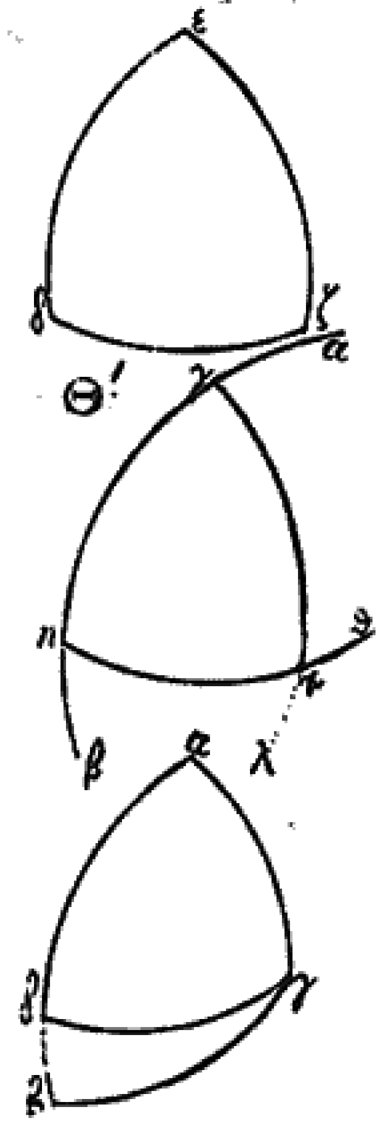
Ἔστωσαν τοῦ α β γ, σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ ὑπὸ α β γ, α γ β, πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι, λέγω τὸ α β γ, τρίγωνον ἰσοσκελὲς εἶναι, ἤτοι τὰς α β, α γ, αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας ἔχειν. Εἰ γὰρ μή, ἔσται πάντως ἡ μία αὐτῶν μείζων, ἔστω δὴ ἡ α β, μείζων τῆς α γ. καὶ ἀφῃρήσθω ἡ β δ, ἴση τῇ α γ, καὶ γραφήτω τὸ δ γ, τόξον. καὶ ἐπεὶ τὰ α γ β, δ β γ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς α γ, δ β, ἴσας, κατὰ τὴν κατασκευήν, κοινὴν δὲ τὴν β γ, καὶ τὴν ὑπὸ δ β γ, γωνίαν τῇ ὑπὸ α γ β, ἴσην, πάντως γε κατὰ τὴν ς': τοῦ παρόντος ἕξουσι καὶ τὴν α β, ἴσην τῇ δ γ, καὶ τὸ α β γ, τρίγ: ἴσον ἔσται τῷ δ β γ, τὸ ὅλον τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἡ α β, τῆς α γ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται οὐδὲ ἐλάττων, ἴση ἄρα. Ἐὰν ἄρα σφαιρικοῦ τριγώνου καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις Θ΄:

Πρὸς τῷ δοθέντι τόξῳ μεγίστου κύκλου, καὶ τῷ πρὸς αὐτῷ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ ἴσην γωνίαν συστήσασθαι.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 6.



Ἔστω τόξον μεγίστου κύκλου τὸ α β, καὶ σημεῖον τὸ γ, καὶ ζητείσθω συσταθῆναι πρὸς τῷ γ, σημείῳ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δ ε ζ, δοθείσῃ. Κέντροις τοῖς ε, καὶ γ, διαστήματι δὲ ἴσῳ τεταρτημορίῳ γραφήτωσαν τὰ δ ζ, η θ, τόξα, καὶ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ η θ, τὸ η κ, ἴσον τῷ δ ζ, καὶ διὰ τῶν γ κ, σημείων γραφήτω τόξον μεγίστου κύκλου τὸ κ λ, κατὰ τὴν ις΄: τοῦ α΄: τῶν Σφαιρικῶν, καὶ ἡ ὑπὸ η γ κ, γωνία ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ δ ε ζ, δοθείσῃ, ἐπεὶ γὰρ τῆς μὲν ὑπὸ δ ε ζ, μέτρον ἐστὶ τὸ δ ζ, τόξον, κατὰ τὸν β΄: ὅρον, τῆς δὲ ὑπὸ η γ κ, τὸ η κ, τὸ δὲ η κ, ἴσον ἐστὶ τῷ δ ζ, κατὰ τὴν κατασκευήν, πάντως γε καὶ αἱ γωνίαι ἴσαι εἰσί. πρὸς τῷ δοθέντι ἄρα τόξῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Ἰστέον δὲ ὅτι καὶ ἄλλῳ τινὶ διαστήματι δυνατὸν ἕτερά τινα τόξα γραφῆναι, καὶ ληφθῆναι ἀπὸ τοῦ ἀορίστου ἴσον τῷ ὡρισμένῳ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθαι ὡς προειρημένως, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον.

Πρότασις Ι΄:

Ἐπὶ παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, καὶ ἀνάπαλιν ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

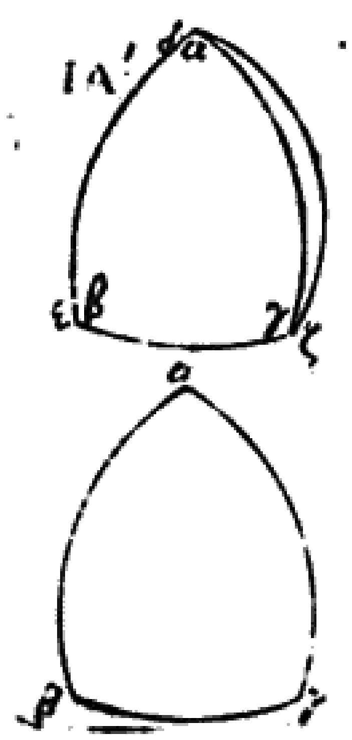
Ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ, ἔχον τὴν πρὸς τῷ γ, γωνίαν μείζονα τῆς πρὸς τῷ α. Λέγω τὴν α β, μείζονα εἶναι τῆς β γ. Γενέσθω γὰρ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ ὑπὸ α γ δ, γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ α. καὶ ἐπεὶ τοῦ α δ γ, τριγώνου αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι εἰσί, πάντως γε κατὰ τὴν η΄: τοῦ παρόντος αἱ δ α, δ γ, ἴσαι εἰσί, κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς δ β, ἔστι δήπουθεν ἡ α δ β, ἴση ταῖς δ γ, δ β, ἀλλ᾽ αἱ δ γ, δ β. μείζονές εἰσι τῆς β γ, κατὰ τὴν δ΄: τοῦ παρ: ἄρα καὶ ἡ α δ β, μείζων ἐστὶ τῆς β γ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ αβ, μείζων τῆς βγ. Λέγω ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ αγβ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ. εἰ γὰρ μὴ, ἢ ἴση ἐστὶν ἢ ἐλάττων· καὶ εἰ μὲν ἴση, ἔσται πάντως ἴση καὶ ἡ αβ, τῇ βγ. εἰ δὲ ἐλάττων, ἐλάττων, ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. ἐπὶ παντὸς ἄρα σφαιρικοῦ τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑ′:

Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 7.



Ἐχέτωσαν δὴ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα τὰς αβ, βγ, πλευρὰς ἴσας ταῖς δε, δζ. τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ τῇ δζ, καὶ τὴν βάσιν βγ, βάσει τῇ εζ, ὁμοίως ἴσην. Λέγω ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εδζ. ἐφαρμοζομένης γὰρ τῆς αβ, ἐπὶ τῆς εδ, πάντως γε τὸ μὲν α, σημεῖον συμπεσεῖται τῷ δ, τὸ δὲ β, τῷ ε, καὶ ἡ βγ, ἐφαρμοσθήσεται ἐπὶ τῆς εζ, καὶ τὸ γ, συμπεσεῖται τῷ ζ, ὥστε καὶ ἡ αγ, ἐφαρμοσθήσεται ἐπὶ τῆς δζ. εἰ γὰρ μὴ, ἢ ἐντὸς τῆς δζ, ἢ γοῦν ἐκτὸς πεσεῖται. Πεπτέτω δὴ ἐντός. καὶ ἐπεὶ αἱ αγ, δζ, τόξα εἰσὶ μεγίστων κύκλων, οἱ δὲ μέγιστοι κύκλοι δίχα τέμνονται, κατὰ τὴν ι: τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν, πάντως γε τὰ αγ, δζ, τόξα ἡμικύκλιά εἰσιν, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ι: τοῦ παρόντος. Ἐὰν ἄρα δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΒ′:

Ἐὰν σφαιρικοῦ τριγώνου τῆς βάσεως προσεκβληθείσης, αἱ δύο πλευραὶ ἴσαι ὦσιν ἡμικυκλίῳ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἴση ἔσται τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται. εἰ δὲ αἱ πλευραὶ μείζονες ὦσιν ἡμικυκλίου, ἡ ἐκτὸς γωνία ἐλάττων ἔσται τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει μείζονες δύο ὀρθῶν· ἐὰν δὲ τελευταῖον αἱ πλευραὶ ἐλάττονες ὦσιν ἡμικυκλίου, ἡ ἐκτὸς γωνία μείζων ἔσται τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἐλάττονες δύο ὀρθῶν.

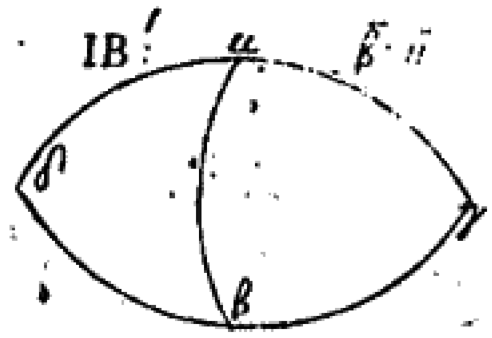
Ἔστωσαν τῷ αβγ, σφαιρικῷ τριγώνῳ αἱ γα, αβ, πλευραὶ ἴσαι ἡμικυκλίῳ,

καὶ

καὶ ἐκβληθήτω ἡ γ β, αὐτῆ βάσις ἐπὶ τὸ δ, ὥστε τὸ γ β δ, ἡμικύκλιον εἶναι. Λέγω τὴν ὑπὸ α β δ, ἐκτὸς γωνίαν ἴσην εἶναι τῇ ὑπὸ α γ β, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. καὶ τὰς ὑπὸ α β γ, α γ β, πρὸς τῇ βάσει ἴσας δυσὶν ὀρθαῖς. Ἐκβληθήτω δὴ ἡ γ α, πλευρὰ, καὶ συμπιπτέτω τῇ γ β δ, κατὰ τὸ δ, οὐ γὰρ οἷόν τε ἄλλως γενέσθαι, διὰ τὸ ἑκατέραν τῶν α γ, β γ, τόξα μεγίστων εἶναι κύκλων. καὶ ἐπεὶ οἱ μέγιστοι κύκλοι δίχα τέμνονται, κατὰ τὴν ι: τῶν α: τῶν Σφαιρικῶν, πάντως γε καὶ τὸ γ α δ, ἡμικύκλιόν ἐστιν, ὥσπερ καὶ τὸ γ β δ. ἀλλὰ καὶ αἱ γ α, α β, ἴσαι ἡμικυκλίῳ ὑπετέθησαν, ἄρα αἱ γ α, α β, ἴσαι εἰσὶ τῇ γ α δ. κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς γ α, ἐναπολείπονται αἱ α β, α δ, ἴσαι, καὶ κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος, αἱ ὑπὸ α β δ, α δ β, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ α δ β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α γ β, κατὰ τὴν γ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ α β δ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α γ β, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. Αὖθις ἐπεὶ αἱ α β δ, α γ β, ἴσαι εἰσὶν ὡς δέδεικται, κοινῆς λαμβανομένης τῆς ὑπὸ α β γ, πάντως γε αἱ ὑπὸ α β δ, α β γ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ α γ β, α β γ, ἀλλ' αἱ ὑπὸ α β δ, α β γ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὡς ἐφεξῆς οὖσαι, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ α β γ, α γ β, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

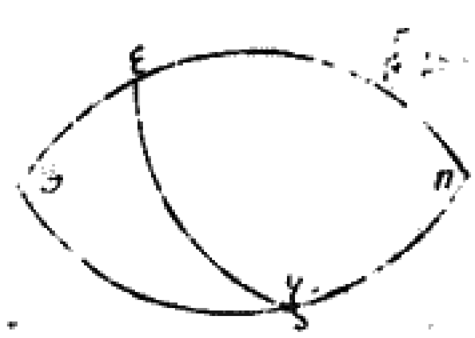
Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 8.

IB



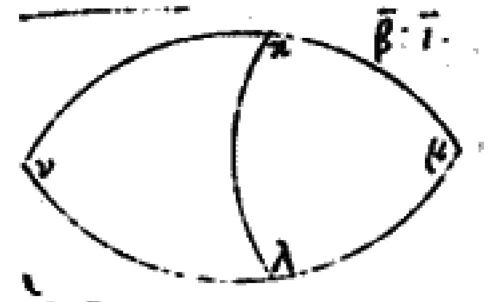
Ἔστωσαν δεύτερον τοῦ ε ζ η, τριγώνου αἱ η ε, ε ζ, πλευραὶ μείζονες ἡμικυκλίου. Λέγω τὴν ὑπὸ ε ζ θ, ἐκτὸς γωνίαν ἐλάττονα εἶναι τῆς ὑπὸ ε η ζ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ τὰς ὑπὸ ε ζ η, ε η ζ, πρὸς τῇ βάσει μείζονας δύο ὀρθῶν. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἡ η ε θ, ἡμικύκλιόν ἐστιν, αἱ δὲ η ε, ε ζ, μείζονες ἡμικυκλίου, πάντως γε αἱ η ε, ε ζ, μείζονές εἰσι τῆς η ε θ. κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς η ε, ἐναπολείπεται ἡ ε ζ, μείζων τῆς ε θ, καὶ κατὰ τὴν ι: τοῦ παρόντος ἡ ὑπὸ ε ζ θ, γωνία ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ε θ ζ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ε θ ζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ε η ζ, κατὰ τὴν γ': τοῦ αὐτοῦ. ἄρα ἡ ὑπὸ ε ζ θ, ἐλάττων ἐστὶ καὶ τῆς πρὸς τῷ η. ἡ ἐκτὸς τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς ὑπὸ ε ζ η, πάντως γε αἱ ὑπὸ ε ζ θ, ε ζ η, ἐλάττονές εἰσι τῶν ὑπὸ ε η ζ, ε ζ η, ἀλλ' αἱ ὑπὸ ε ζ θ, ε ζ η, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἄρα αἱ ὑπὸ ε η ζ, ε ζ η, μείζονές εἰσι δύο ὀρθῶν.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 9.



Ἔστωσαν τρίτον τοῦ κ λ μ, τριγώνου, αἱ μ κ, κ λ, πλευραὶ ἐλάττονες ἡμικυκλίου. Λέγω τὴν ὑπὸ κ λ ν, ἐκτὸς γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ὑπὸ κ μ λ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. καὶ τὰς ὑπὸ κ λ μ, κ μ λ, πρὸς τῇ βάσει ἐλάσσονας δύο ὀρθῶν. καὶ τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων ἐπεὶ τὸ μ κ ν, τόξον ἡμικύκλιόν ἐστι, κατὰ τὴν ἑν-

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 10.



ῥηθεῖσαν ί: τοῦ ά: τῶν Σφαιρικῶν, πάντως γε αἱ μ κ, κ λ, ἐλάττονές εἰσι τῆς μ κ ν, καὶ ἑπομένως ἡ κ ν, μείζων ἐστὶ τῆς κ λ. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ κ λ ν, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ κ ν λ, κατὰ τὴν ί: τοῦ παρόντος, ἡ δὲ ὑπὸ κ ν λ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ μ, κατὰ τὴν γ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ κ λ ν, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς πρὸς τῷ μ. κοινῆς δὲ ὡς καὶ πρότερον εἰλημμένης τῆς ὑπὸ κ λ μ, ἔσονται ταύτης αἱ ὑπὸ κ λ ν, κ λ μ, μείζονες τῶν ὑπὸ κ λ μ, κ μ λ, ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ κ λ ν, κ λ μ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἄρα αἱ ὑπὸ κ λ μ, κ μ λ, πρὸς τὴν βάσιν ἐλάττονές εἰσι δύο ὀρθῶν. ἐὰν ἄρα Σφαιρικοῦ τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

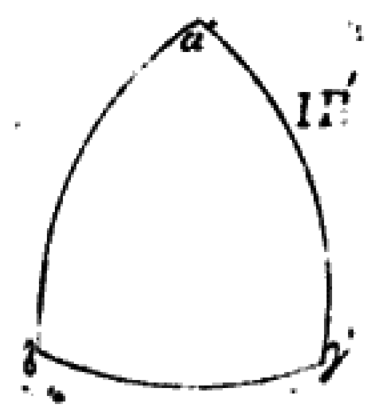
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν καὶ τὸ ἀνάπαλιν. Σφαιρικοῦ δηλ: τριγώνου τῆς βάσεως ἐκβληθείσης, εἰ μὲν ἡ ἐκτὸς γωνία ἴση ᾖ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ. εἰδὲ ἡ ἐκτὸς γωνία ἐλάττων ᾖ τῆς ἐντὸς καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι μείζονες δύο ὀρθῶν, αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ μείζονές εἰσιν ἡμικυκλίου. εἰδὲ πλεῖστον ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς μείζων ᾖ, καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει ἐλάττονες δύο ὀρθῶν, αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου.

Πρότασις ΙΓ':

Τῶν ἰσοσκελῶν σφαιρικῶν τριγώνων, ὧν αἱ πλευραὶ τεταρτημόριά εἰσι, τούτων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ὀρθαί εἰσιν, ὧν δὲ μείζονες τεταρτημορίων, ἀμβλεῖαι, ὧν δὲ ἐλάττονες τεταρτημορίων, ὀξεῖαι, καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ὧν αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ὀρθαί, αἱ πλευραὶ τεταρτημόριά εἰσιν, ὧν δὲ ἀμβλεῖαι αἱ γωνίαι, αἱ πλευραὶ μείζονες τεταρτημορίων, καὶ ὧν αἱ γωνίαι ὀξεῖαι, αἱ πλευραὶ ἐλάττονες τεταρτημορίων.

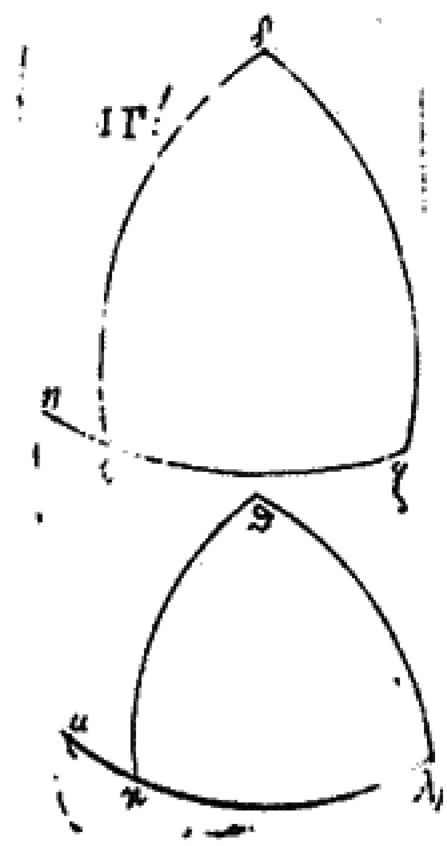
Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 11.



Ἔστωσαν τοῦ α β γ, ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ α β, α γ, πλευραὶ τεταρτημόρια. Λέγω τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας, τὰς ὑπὸ α β γ, α γ β, ὀρθὰς εἶναι ἑκατέραν. ἐπεὶ γὰρ αἱ α β, α γ, τεταρτημόριά εἰσι, πάντως γε ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω αἱ ὑπὸ α β γ, α γ β, πρὸς τῇ βάσει γωνίαι τοῦ α β γ, τριγώνου δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἀλλ᾽ αἱ α β, α γ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ α β γ, α γ β, ἄρα ἑκατέρα ὀρθή ἐστιν. Ἔστω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ, πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν ὀρθή, λέγω ὅτι αἱ αβ, αγ, τεταρτημόριά εἰσι. ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν αβγ, αγβ, ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, πάντως γε αἱ δύο ὁμοῦ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω αἱ αβ, αγ, ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, ἀλλὰ δὴ καὶ ἴσαι κατὰ τὴν η΄: τῆς παρούσης, ἄρα ἑκατέρα τῶν αβ, αγ, πλευρῶν τεταρτημόριόν ἐστιν, ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Ἔστωσαν β΄: αἱ δε, δζ, πλευραὶ τοῦ δεζ, ἰσοσκελοῦς τριγώνου μείζονες τεταρτημορίων. Λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ δεζ, δζε, πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἀμβλεῖαί εἰσι, καὶ ἀνάπαλιν. κατὰ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν αἱ δε, δζ, ὁμοῦ μείζονές εἰσιν ἡμικυκλίου, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ ὑπὸ δεη, ἐκτὸς γωνία ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δζε, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· κοινῆς δὲ λαμβανομένης τῆς ὑπὸ δεζ, ἔσονται αἱ ὑπὸ δεη, δεζ, ἐλάττονες τῶν ὑπὸ δζε, δεζ. ἀλλ' αἱ ὑπὸ δεη, δεζ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἄρα αἱ ὑπὸ δζε, δεζ, μείζονές εἰσι δύο ὀρθῶν. Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν αἱ ὑπὸ δεζ, δζε, μείζονες δύο ὀρθῶν ἤτοι ἀμβλεῖαι. Λέγω ὅτι αἱ δε, δζ, μείζονές εἰσι τεταρτημορίων. κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω αἱ δε, δζ, ὁμοῦ μείζονές εἰσιν ἡμικυκλίου. εἰσὶ δὲ ἴσαι κατὰ τὴν ζ΄: τῆς παρούσης, ἑκατέρα τῶν αὐτῶν μείζων ἐστὶ τεταρτημορίου. ὅπερ ἦν τὸ β΄:

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 12.



Ἔστωσαν ἔτι αἱ θκ, θλ, ἐλάττονες τεταρτημορίων. Λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ θκλ, θλκ, πρὸς τῇ βάσει ὀξεῖαί εἰσι. κατὰ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν αἱ θκ, θλ, ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου, ὥστε κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ μὲν ὑπὸ θκμ, ἐκτὸς γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ θλκ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. αἱ δὲ ὑπὸ θκλ, θλκ, ἐλάττονες δύο ὀρθῶν, εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι κατὰ τὴν ζ΄: τῆς παρούσης, ἄρα ἑκατέρα ὀξεῖά ἐστιν. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἑκατέρα τῶν θκλ, θλκ, ὀξεῖα. Λέγω ὅτι καὶ τῶν θκ, θλ, πλευρῶν ἑκατέρα ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου. κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω αἱ θκ, θλ, ὁμοῦ ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου, εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι, ἄρα ἑκατέρα τῶν αὐτῶν ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου. τῶν ἰσοσκελῶν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

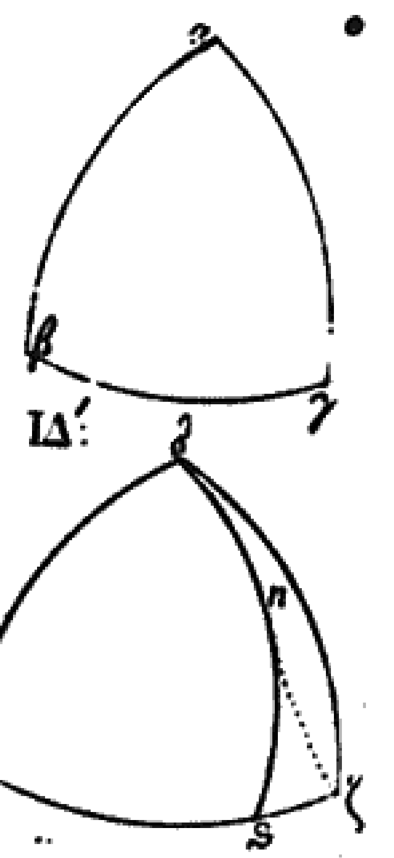
Πρό-

Πρότασις ΙΔ':

*** Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην.**

Ἐχέτωσαν τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα τὰς αβ, αγ, πλευρὰς ἴσας ταῖς δε, δζ, ἡ δὲ ὑπὸ εδζ, γωνία ἔστω μείζων τῆς ὑπὸ βαγ. Λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ εζ, βάσεως τῆς βγ, μείζων ἐστί. Κείσθω δὲ πρῶτον ἑκατέραν τῶν αβ, αγ, καὶ δε, εζ, ἴσην εἶναι τεταρτημορίῳ. Γενέσθω δὴ κατὰ τὴν θ': τοῦ παρόντος ἡ ὑπὸ εδθ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ βαγ. καὶ ἐπεὶ ἡ δη, ἐντὸς πίπτει τῶν δε, δζ, λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη κατὰ τὸ συνεχὲς οὐκ ἂν διὰ τοῦ ζ, διελεύσεται, ὡς ἡ δηζ. εἰ γὰρ δυνατόν, τὰ δζ, δηζ, τόξα ἡμικύκλια ἔσονται, κατὰ τὴν ι': τοῦ α': τῶν Σφαιρικῶν, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. διελεύσεται ἄρα διὰ τοῦ θ, σημείου ἐν μέσῳ ὄντος τοῦ ε καὶ ζ. καὶ κατὰ τὴν ϛ': τοῦ παρόντος ἡ εθ, βάσις ἴση ἔσται τῇ βγ, ἀλλὰ τῆς εθ, μείζων ἐστὶν ἡ εζ, ἄρα ἡ εζ, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς βγ, ὅπερ ἦν τὸ α': Ὅτι δὲ καὶ ἀνάπαλιν ἀληθές, δῆλον. Ἔστω γὰρ ἡ εζ, βάσις μείζων τῆς βγ, λέγω ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ εδζ, γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ. ἀφαιρεθήτω γὰρ ἡ εθ, ἴση τῇ βγ, καὶ διὰ τῶν θ καὶ δ, ἤχθω τὸ δηθ, τόξον. καὶ ἐπεὶ ἡ δε, ἴση ἐστὶ τῇ δθ, ὡς καταγραφομένου τοῦ εθ, τόξου ἀπὸ τοῦ δ, τῇ δὲ εδ, ἴση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν αβ, αγ, ὡς τεταρτημόρια, πάντως γε κατὰ τὴν ια': τοῦ παρόντος καὶ ἡ ὑπὸ εδθ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ, ἀλλὰ τῆς ὑπὸ εδθ, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ εδζ. εἰ γὰρ μή, οὐδὲ ἡ εζ, βάσις μείζων ἂν εἴη τῆς εθ, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὴν κατασκευήν. ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 13.

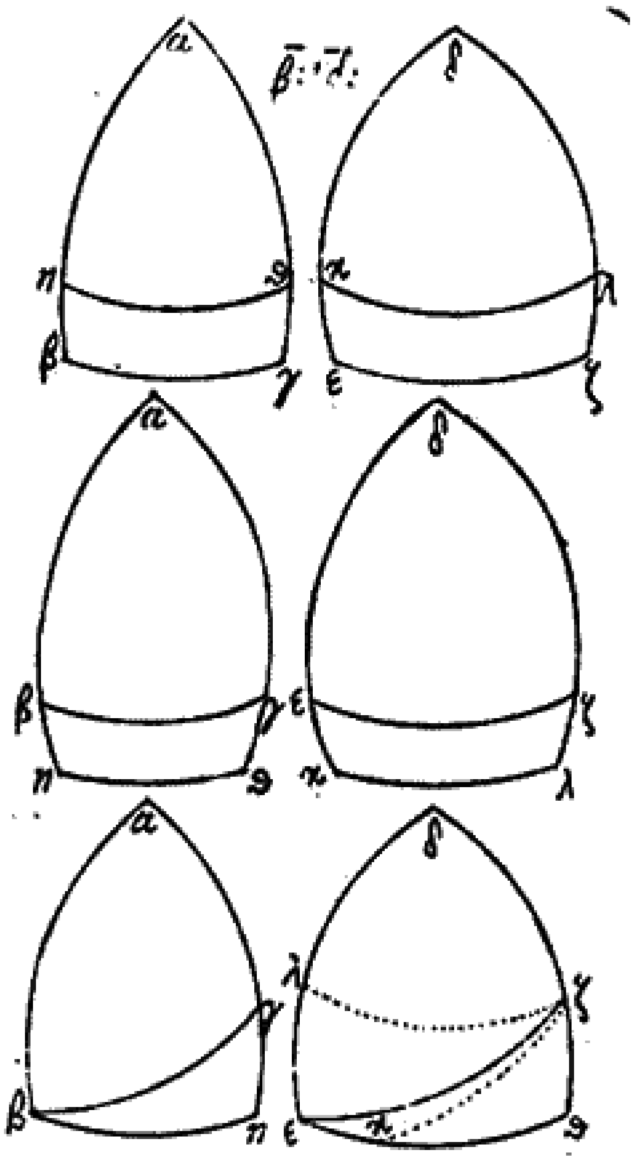


ΙΔ':

Κείσθω δεύτερον ἑκάστην τῶν αβ, αγ, δε, δζ, πλευρῶν μείζονα εἶναι τεταρτημορίου, καὶ ἴσας ἀλλήλαις. Λέγω δὴ καὶ οὕτω ἐπεὶ ἡ ὑπὸ εδζ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ εζ, βάσις τῆς βγ· ληφθήτωσαν γὰρ τὰ αν, αξ, δκ, δλ, ἴσα τεταρτημορίοις, καὶ γραφήτωσαν ἀπὸ τῶν α καὶ δ, σημεί-

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 14.

μείων τὰ ηθ, κλ, τόξα. καὶ ἐπεί, κατὰ τὴν θ΄: τοῦ β΄: τῶν Σφαιρικῶν τά τε ηθ, βγ, καὶ κλ, εζ, τόξα ὅμοιά εἰσι, πάντως γε ὡς τὸ κλ, πρὸς τὸ εζ, οὕτω τὸ ηθ, πρὸς τὸ βγ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ κλ, πρὸς τὸ ηθ, τὸ εζ, πρὸς τὸ βγ. ἀλλὰ τὸ κλ, μεῖζόν ἐστι, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τοῦ ηθ· ἄρα καὶ τὸ εζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ βγ. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, κἂν ἐλάττω ὑποτεθῶσι τεταρτημορίου, τὰ αβ, αγ, δε, δζ. ἐξαγομένων γὰρ τῶν αβ, αγ, δε, δζ, μέχρι τεταρτημορίου, κατὰ τὸ συνεχὲς ὡς αἱ αβη, αγθ, δεκ, δζλ, ἐπεὶ τὰ βγ, ηθ, ὅμοιά εἰσιν, ὥσπερ καὶ τὰ εζ, κλ, ἀχιραῦς συναχθήσεται, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω τὸ εζ, μεῖζον τοῦ βγ. Ἀλλὰ δὴ κείσθω ἔτι τὰ μὲν αβ, δε, μείζονα τεταρτημορίων, τὰ δὲ αγ, δζ, ἐλάττονα. καὶ ἴσω τὸ μὲν αβ, ἴσον τῷ δε, τὸ δὲ αγ, τῷ δζ, ἡ δὲ ὑπὸ εδζ, γωνία μείζων τῆς ὑπὸ βαγ. Λέγω ὅτι καὶ ἡ εζ, βάσις μείζων ἐστὶ τῆς βγ, βάσεως. Ἐξαχθήτωσαν γὰρ κατὰ τὸ συνεχὲς τὰ αγ, δζ, τόξα ἐπὶ τὰ ηθ, σημεῖα, ὥστε ἴσα εἶναι τοῖς αβ, δε, καὶ γραφήτωσαν ὡς ἀπὸ πόλων τῶν α καὶ δ, τὰ βη, εθ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ εθ, τὸ θκ, ἴσον τῷ βη, καὶ διὰ τῶν κ, καὶ ζ,



γραφήτω τὸ κζ, τόξον. καὶ ἐπεὶ τὰ αγ, δζ, ἴσα ὑπετέθησαν, γεγόνασι δὲ καὶ τὰ αγη, δζθ, ἴσα, πάντως γε ἀφαιρουμένων τῶν αγ, δζ, ἴσων ἐναπολείπονται τὰ γη, ζθ, ἴσα. εἴληπται δὲ καὶ τὰ βη, κθ, ἴσα, καὶ αἱ ὑπὸ βηγ, κθζ, γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ α΄: τῶν Σφαιρικῶν, ἄρα κατὰ τὴν ς΄: τοῦ παρόντος τὰ βγ, κζ, τόξα ἴσα εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ ὑπὸ δεθ, δθε, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ζ΄: τοῦ αὐτοῦ, ἡ δὲ ὑπὸ δεθ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζεκ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δθε, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζεκ, ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ζθε, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζκε, κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ παρόντος, ἐλάττονα

γὰρ

γὰρ ἡμικυκλίου εἰσὶ τὰ ζ θ, θ κ, ὡς ὀψόμεθα. ἄρα ἡ ὑπὸ ζ κ ε, πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζ ε κ, ὥστε καὶ ἡ ζ ε, μείζων ἐστὶ τῆς ζ κ, κατὰ τὴν ι: τοῦ αὐτοῦ. ἴση δὲ ἡ ζ κ, τῇ β γ, ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ ζ ε, μείζων ἐστὶ τῆς β γ, ὅπερ ἦν τὸ ὑποχεθέν. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

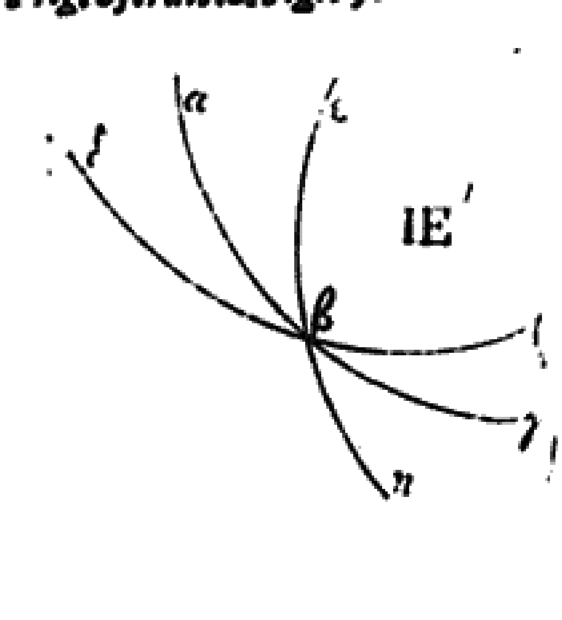
Ὅτι δὲ τὰ ζ θ, θ κ, ἐλάττονά εἰσιν ἡμικυκλίου δῆλον. εἰ γὰρ μὴ, ἔσονται ἴσα ἢ μείζονα. Ἔστω δὴ ά: ἴσα. καὶ πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ι β': αἱ ὑπὸ θ κ ζ, θ ζ κ, πρὸς τῇ βάσει δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ δ ζ κ, κ ζ θ, ὁμοίως δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι ὡς ἐφεξῆς, ἄρα αἱ ὑπὸ θ κ ζ, θ ζ κ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ δ ζ κ, κ ζ θ. κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ κ ζ θ, ἐναπολείπονται αἱ ὑπὸ δ ζ κ, θ κ ζ, ἴσαι, ἡ δὲ ὑπὸ δ ζ κ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζ θ κ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ι β': ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ θ κ ζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζ θ κ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ζ θ κ, ὀρθὴ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ζ κ θ, καὶ ἑπομένως τὸ ζ, πόλος ἐστὶ τοῦ θ κ, κατὰ τὴν ι ά: τοῦ ά: τῶν Σφαιρικῶν, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν κατασκευήν. ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν μείζω, ἄρα κατὰ τὸ ι β': τοῦ παρ: ἡ ὑπὸ δ ζ κ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζ θ κ. γεγραμμένου δὲ ὡς ἀπὸ πόλου τοῦ δ, τοῦ ζ λ, τόξου, ἡ ὑπὸ δ ζ λ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζ θ κ, κατὰ τὴν ι β': τοῦ ά: τῶν Σφαιρικῶν. τῆς δὲ ὑπὸ ζ θ κ, ἐλάττων δέδεικται ἡ ὑπὸ δ ζ κ: ἄρα ἡ ὑπὸ δ ζ κ, ἐλάττων ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ δ ζ λ. τὸ ὅλον τοῦ μέρους, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα τὰ ζ θ, θ κ, μείζονά εἰσιν ἡμικυκλίου, ἀλλ' οὐδὲ ἴσα, ὡς δέδεικται, ἐλάττονα ἄρα.

Πρότασις ΙΕ':

Ἐὰν κύκλος κύκλον τέμνῃ τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἢ δύο ὀρθὰς ποιεῖ, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Κύκλος δὴ ὁ α β γ, τεμνέτω τὸν δ β ζ, κατὰ τὸ β, σημεῖον. Λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ α β δ, α β ζ, γωνίαι ἢ δύο ὀρθαί εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι: εἰ μὲν γὰρ ὁ α β γ, διὰ τοῦ πόλου διέρχεται τοῦ δ β ζ, κύκλου, δῆλον ὅτι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, κατὰ τὴν ι β': τοῦ ά: τῶν Σφαιρικῶν: Εἰ δὲ ὁ α β γ, κύκλος οὐ διέρχεται διὰ τοῦ πόλου τοῦ δ β ζ, εὑρεθήτω ὁ πόλος τοῦ δ β ζ, διὰ τῆς ι ζ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἔστω οὗτος ὁ ε, καὶ διὰ τῶν ε, καὶ β, σημείων γραφήτω ὁ ε β η, κύκλος. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δ β ε, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ δ β α, α β ε, ὥσπερ τὸ ὅλον τοῖς οἰκείοις μέρεσι, κοινῆς προσκειμένης τῆς ὑπὸ ε β ζ, ἔσονται πάντως δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ δ β ε, ε β ζ, ἴσαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ δ β α, α β ε, ε β ζ. Αὖθις ἐπεὶ ἡ ὑπὸ α β ζ, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ α β ε, ε β ζ, κοινῆς προσκειμένης τῆς ὑπὸ δ β α, ἔσονται

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 15.



ὁμοίως

ἡμισείως δύο αἱ ὑπὸ δβα, αβζ, ἴσαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ δβα, αβε, εβζ, ἀλλὰ ταῖς δυσὶ ταύταις ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ δβε, εβζ, ὡς δέδεικται, ἄρα αἱ δύο ὑπὸ δβα, αβζ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβζ, αἱ δὲ ὑπὸ δβε, εβζ, ὀρθαὶ εἰσὶ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιβ΄: τοῦ ά: τῶν Σφαιρ:, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ δβα, εβζ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. Ἐὰν ἄρα κύκλος τέμνῃ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ις΄:

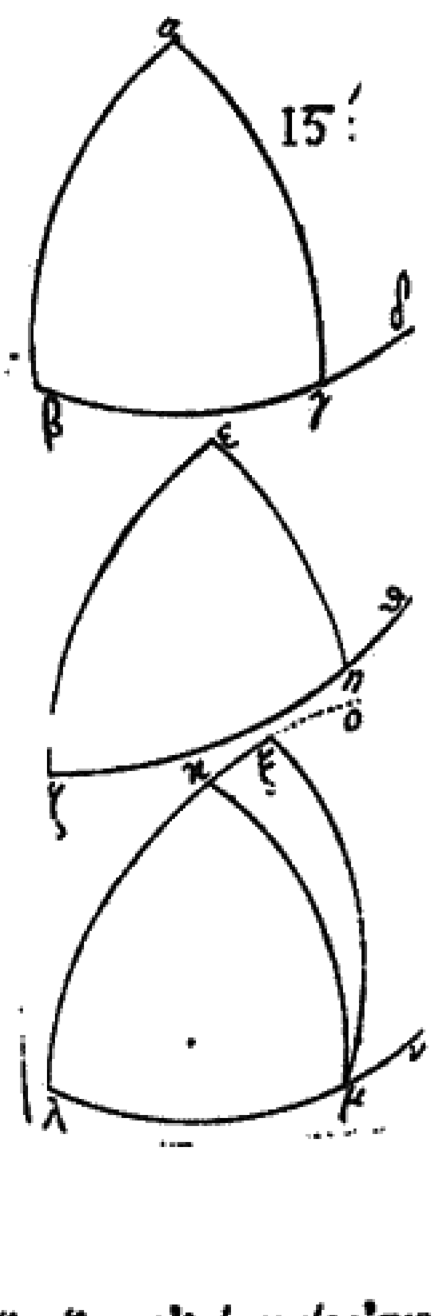
Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι τῶν δύο μὲν ὀρθῶν μείζονές εἰσι, τῶν ἓξ δὲ ἐλάττονες.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 16.

Ἔστω τρίγωνον σφαιρικὸν τὸ αβγ. Λέγω ὅτι αἱ τρεῖς τούτου γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, μείζονές εἰσι δύο ὀρθῶν. Ἐπεὶ δὲ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ πλευραὶ ἢ ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, ἢ μείζονες, ἢ ἐλάττονες· Κείσθω ά: τὰς αβ, αγ, ἴσας εἶναι ἡμικυκλίῳ, καὶ ἐκβληθήτω ἡ βγ, ἐπὶ τὸ δ. κατὰ γοῦν τὴν ιβ΄: τοῦ παρόντος ἡ μὲν ὑπὸ αγδ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ β, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, αἱ δὲ ὑπὸ αβγ, αγβ, πρὸς τῇ βάσει ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, ὥστε προστιθεμένης τῆς πρὸς τῷ α, ἔσονται αἱ τρεῖς μείζονες δύο ὀρθῶν.

Ἔστωσαν β΄: τοῦ εζη, τριγώνου αἱ εζ, εη, πλευραὶ μείζονες ἡμικυκλίου, καὶ τῆς ζη, ἐκβαλλομένης ἐπὶ τὸ θ, ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ εηθ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ εζη, αἱ δὲ ὑπὸ εζη, εηζ, πρὸς τῇ βάσει μείζονες δύο ὀρθῶν, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιβ΄: πάντως γε προστιθεμένης τῆς πρὸς τῷ ε, αἱ τρεῖς ὁμοῦ αἱ ὑπὸ εζη, ζηε, ηεζ, πολλῷ μείζονές εἰσι τῶν δύο ὀρθῶν.

Ἔστωσαν τρίτον αἱ κλ, κμ, πλευραὶ τοῦ κλμ, τριγώνου ἐλάττονες ἡμικυκλίου. Καὶ ἐπεὶ τῆς λμ, βάσεως ἐκβαλλομένης κατὰ τὸ ν, ἡ ὑπὸ κμν, ἐκτὸς γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ κλμ, ἐντός. Γενέσθω ἡ ὑπὸ ξμν, ἴση τῇ ὑπὸ κλμ, καὶ ἐκβαλλομένη ἡ λκ, συμπιπτέτω τῇ μξ, κατὰ τὸ ξ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ξμν, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κλμ, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ παρόντος αἱ λξ, ξμ, πλευραὶ ἴσαι ἡμικυκλίῳ εἰσίν. αἱ ἄρα μξ, ξκ, ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου, καὶ ἡ ὑπὸ λκμ, ἐκτὸς γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ κξμ, ἐντὸς καὶ



 ἀπε-