ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΔΙΑΛΥΣΕΩΣ.

ΟΡΟΙ.

Α': Διάλυσις τριγώνων ἐστὶν ἔφοδος ἀποδεικτικὴ πρὸς εὕρεσιν ὅτι μάλιστα συμπλοῦσα τῶν πλευρῶν παντὸς τριγώνου καὶ γωνιῶν, καὶ αὐτοῦ ἔτι τοῦ ἐμβαδοῦ διά τινων ἐγνωσμένων, ἢ γοῦν δεδομένων ἐν αὐτοῖς πρὸς γνῶσιν τῶν λοιπῶν ἡμᾶς ἄγουσα.

Β': Ἐπὶ παντὸς τριγώνου δύο τῶν αὐτοῦ γωνιῶν δοθεισῶν, καὶ ἡ λοιπὴ γινώσκεται· αἱ τρεῖς γὰρ τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, ἤτοι μοιρῶν ρπ̄, κατὰ τὴν λβ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Γ': Ἐπὶ παντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου μιᾶς δοθείσης γωνίας, αἱ λοιπαὶ γινώσκονται. τὰ γὰρ ἰσόπλευρα καὶ ἰσογώνιά εἰσι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ε': τοῦ α': Εὐκλείδου.

Δ': Ἐπὶ παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου μιᾶς δοθείσης γωνίας, καὶ αἱ λοιπαὶ γινώσκονται. τούτου γὰρ αἱ πρὸς τὴν βάσιν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν ε': τοῦ αὐτοῦ:

Ε': Ἐπὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μιᾶς τῶν παρὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν δοθείσης, ἡ λοιπὴ γινώσκεται. αἱ δύο γὰρ αἱ παρὰ τὴν ὀρθὴν ἴσαι εἰσὶ μιᾷ ὀρθῇ, ἤτοι μοιρῶν ϟ̄.

Ϛ': Τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου δοθεισῶν αἱ τούτου πλευραὶ οὐ γνωσθήσονται. τῶν γὰρ ἀνίσων τὰ ὅμοια ἰσογώνια μέν ἐστιν, οὐ μὴν δὲ καὶ ἰσόπλευρα.

Πρότασις Α':

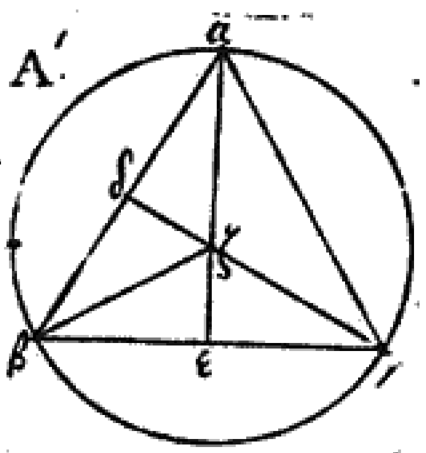
Παντὸς εὐθυγράμμου τριγώνου αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι τοῖς τῶν ἀπεναντίων γωνιῶν ἡμιτόνοις.

Ἔστω α': τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ αβγ. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβ, αὐτοῦ πλευρὰ πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον

τῆς

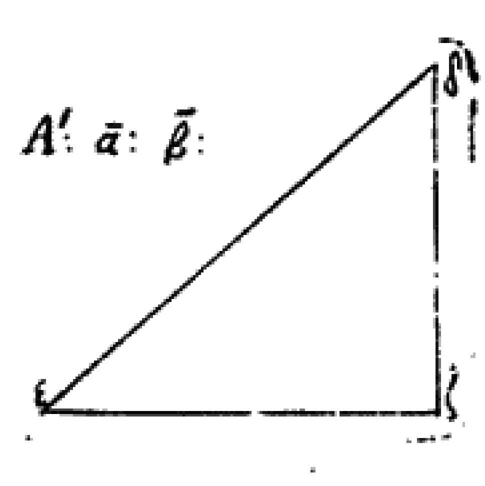
τῆς ὑπὸ βαγ. Γραφήτω δὴ περὶ τὸ αβγ, τρίγωνον κύκλος ὁ αβγ, κατὰ τὴν ε΄: τοῦ δ΄: τοῦ Στοιχ: καὶ εὑρεθήτω τὸ τοῦ κύκλου κέντρον κατὰ τὴν α΄: τοῦ γ΄: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ ζ. Εἶτα διαιρεθήτω δίχα ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, κατὰ τὰ δ καὶ ε, σημεῖα. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, κέντρου ἀχθήτωσαν αἱ ζδ, ζε, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζβ, ζγ. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, δίχα τέτμηται, καὶ αἱ ζδ, ζε, διὰ τοῦ κέντρου διέρχονται, πάντως γε κατὰ τὴν γ΄: τοῦ γ΄: τοῦ αὐτοῦ ἑκατέρα τῶν ζδ, ζε, κάθετός ἐστιν. ὥστε καὶ τῶν βδ, βε, ἑκατέρα κάθετός ἐστιν, ἡ μὲν ἐπὶ τῆς ζδ, ἡ δὲ ἐπὶ τῆς ζε. καὶ κατὰ τὸν γ΄: ὅρον τοῦ β΄: τοῦ παρόντος, ἡ μὲν βδ, ὀρθὸν ἡμίτονόν ἐστι τῆς ὑπὸ βζδ, γωνίας, ἡ δὲ βε, τῆς ὑπὸ βζε. Αὖθις ἐπεὶ ἡ βγ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ζε, καὶ αἱ ζβ, ζγ, ἴσαι εἰσὶν ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, κοινὴ δὲ ἡ ζε, δῆλον ὅτι τὰ ζβε, γζε, τρίγωνα ἴσα εἰσί, καὶ τάς τε πλευρὰς καὶ γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων ὑποτεινομένας πλευρῶν ἴσας ἔχει κατὰ τὴν η΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε ἡ ὑπὸ βζε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γζε. ἡ ὅλη δὲ ὑπὸ βζγ, τῆς ὑπὸ βζε διπλασία ἐστίν, ἀλλ' ἡ ὑπὸ βζγ, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ, κατὰ τὴν κ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχ:, ἄρα ἡ ὑπὸ βζε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ, κατὰ τὸ Ζ΄: ἀξίωμα. ὥστε ἡ βε, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βαγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ βδ, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ. ὅτι ἡ ὑπὸ βζδ, ἧς ἡμίτονον δέδεικται ἡ βδ, ἴση ἐστὶ διὰ τὰ αὐτὰ τῇ ὑπὸ αγβ. ὡς δὲ ἡ αβ, ὅλη πρὸς ὅλην τὴν βγ, ἔστι καὶ ἡ βδ, ἡμίσεια πρὸς τὴν βε, ἡμίσειαν, καὶ δέδεικται ἡ μὲν βδ, ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, ἡ δὲ βε, τῆς ὑπὸ βαγ. ἄρα τοῦ αβγ, τριγώνου ὡς ἡ αβ, πλευρὰ πρὸς τὴν βγ, ἔστι τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 1.



Ἔστω β΄: τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ δεζ. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ εζ, πρὸς τὴν ζδ, οὕτω τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ δ, γωνίας πρὸς τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ε. κατὰ γὰρ τὸν εἰρημένον γ΄: ὅρον τοῦ β΄. τοῦ α΄: τοῦ παρόντος ἡ μὲν εζ, ὀρθὸν ἡμίτονόν ἐστι τῆς πρὸς τῷ δ, ἡ δὲ ζδ, τῆς πρὸς τῷ ε. ἄρα ὡς ἡ εζ, πρὸς τὴν ζδ, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ δ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ε. ἑκατέρα γὰρ τῶν εζ, ζδ, καὶ ὡς πλευρὰ ἡ αὐτή, καὶ ὡς ὀρθὸν ἡμίτονον λαμβάνεται κατὰ διάφορον λόγον.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 2.

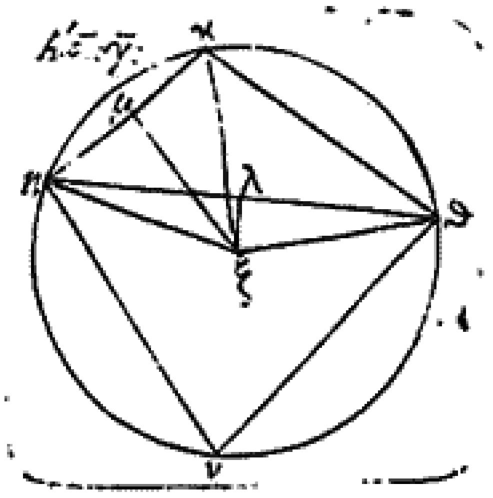


Ἔστω γ΄: ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ηθκ, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ θη, πρὸς

τὴν

τὴν ηκ, οὕτω τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ηκθ, ἀμβλείας γωνίας πρὸς τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ηθκ, ὀξείας. Διαιρεθήτωσαν γὰρ αἱ θη, ηκ, δίχα ἑκατέρα κατὰ τὰ λ καὶ μ. καὶ γραφήτω περὶ τὸ ηθκ τρίγωνον κύκλος ὁ κηνθ, καὶ ἀπὸ τοῦ ξ, κέντρου ἀχθήτωσαν αἱ ξλ, ξμ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ξη, ξθ, ξκ, ην, θν, καὶ ἐπεὶ κατὰ τὰ προειρημένα ἡ ηλ, ὀρθὸν ἐστιν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ηξλ, κάθετος γάρ ἐστιν ἐπὶ τῆς ξλ, κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχ:, ἡ δὲ ὑπὸ ηξλ; ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηνθ, διὰ τὸ διπλασίαν εἶναι τὴν ὑπὸ ηξθ, ἑκατέρας, ὡς προδέδεικται, πάντως γε ἡ ηλ, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον καὶ τῆς ὑπὸ ηνθ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ηνθ, παραπλήρωμά ἐστι τῆς ὑπὸ ηκθ, πρὸς δύο ὀρθὰς, κατὰ τὴν κβ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ β': τοῦ α':

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 3.



τοῦ παρόντος ἡ ηλ, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον καὶ τῆς ὑπὸ ηκθ, ἀμβλείας γωνίας. Ὅτι δὲ καὶ ἡ ημ, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ηθκ, δῆλον. ἔστι γὰρ ἡ αὐτὴ ημ, ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ηξμ, ἡ δὲ ὑπὸ ηξμ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηθκ, διὰ τὸ διπλασίαν εἶναι τὴν ὑπὸ ηξκ, τῆς τε ὑπὸ ηξμ, καὶ ηθκ, ἀλλ' ὡς ὅλη ἡ ηθ, πρὸς ὅλην τὴν ηκ, οὕτω καὶ ἡ ηλ, ἡμίσεια πρὸς τὴν ημ, ἡμίσειαν. ἄρα ὡς ἡ θη, πλευρὰ πρὸς τὴν ηκ, πλευρὰν, οὕτω τὸ τῆς ηκθ, ὀρθὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ τῆς ὑπὸ ηθκ, ὀρθὸν ἡμίτονον. ὅπερ ἦν τὸ ὑποκειθέν. παντὸς ἄρα εὐθυγράμμου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Β':

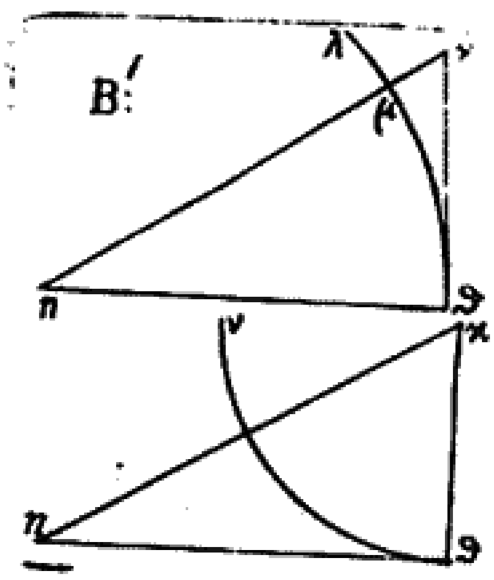
Ἐπὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ μὲν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευραὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς προσκειμένης γωνίας τῇ ἡγουμένῃ πλευρᾷ, καὶ ἀνάπαλιν. αἱ δὲ περὶ ἑκατέραν τῶν λοιπῶν γωνιῶν, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς αὐτῆς γωνίας, καὶ ἀνάπαλιν.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ηθκ, Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ηθ, πλευρὰ πρὸς τὴν θκ, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας, τῆς τῇ ηθ, ἡγουμένῃ πλευρᾷ προσκειμένης. καὶ πάλιν ὡς ἡ κθ, πρὸς τὴν θη, τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς πρὸς τῷ κ, γωνίας, προσκειμένης καὶ αὐτῆς τῇ θκ, ἡγουμένῃ πλευρᾷ, καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ κθ, πρὸς τὴν θη, κατὰ τὴν α': ἀναλογίαν, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον. ὡς δὲ ἡ ηθ, κατὰ τὴν β': ἀναλογίαν, πρὸς τὴν θκ, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ κ, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον. καὶ ἔτι ὡς ἡ θη,

πρὸς

πρὸς τὴν η κ, τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας· ὡς δὲ ἡ θ κ, πρὸς τὴν κ η, ἐπὶ τοῦ β': σχήματος, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς πρὸς τῷ κ, γωνίας. Κέντρῳ γὰρ τῷ η, καὶ διαστήματι τῷ η θ, γραφήτω τόξον τὸ θ λ. καὶ ἐπεὶ ἐν ταῦθα ἡ μὲν η θ, ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον τοῦ θ μ, τόξου, ἡ δὲ θ κ, ἀπτομένη τοῦ αὐτοῦ, τὸ δὲ θ μ, τόξον μέτρον ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας κατὰ τὸν β': ὅρον τοῦ α': βιβλίου τοῦ α': τμήματος, πάντως γε κατὰ τὸν γ': τοῦ β': τοῦ αὐτοῦ, ἡ μὲν η θ, ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον καὶ τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας, ἡ δὲ θ κ, ἀπτομένη, καὶ ἡ η κ, τέμνουσα τῆς αὐτῆς· λαμβανομένης τοίνυν τῆς μὲν η θ, καὶ ἀντὶ πλευρᾶς καὶ ἀντὶ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, τῆς δὲ θ κ, ὁμοίως ἀντὶ πλευρᾶς καὶ ἀντὶ ἀπτομένης, ἔσται πάντως ὡς ἡ η θ, πλευρὰ πρὸς τὴν θ κ, πλευρὰν, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς αὐτῆς γωνίας, ὥστε καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ κ θ, ἐπὶ τοῦ α': σχήματος πρὸς τὴν η θ, ἡ ἀπτομένη τῆς αὐτῆς γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τοῦ β': σχήματος, ὡς ἡ κ θ, πρὸς τὴν θ η, τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς πρὸς τῷ κ, γωνίας. κέντρῳ γὰρ τῷ κ, καὶ διαστήματι τῷ κ θ, γραφομένου τοῦ θ ν, τόξου, ἔστι κατὰ τὰ εἰρημένα ἡ μὲν κ θ, ὁλικὸν ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ κ, γωνίας, ἡ δὲ θ η, ἀπτομένη τῆς αὐτῆς, καὶ ἡ η κ, τέμνουσα.

Trig. Anal. lib. 1. Fig 4



Πρὸς τούτοις λαμβανομένης τῆς μὲν θ η, καὶ ἀντὶ πλευρᾶς καὶ ἀντὶ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, τῆς δὲ η κ, καὶ ἀντὶ πλευρᾶς καὶ ἀντὶ τεμνούσης τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας, συναχθήσεται εὐχερῶς, καὶ ὡς ἡ θ η, πρὸς τὴν η κ, τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας, καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ κ η πρὸς τὴν η θ, ἡ τέμνουσα τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ β': σχήματος.

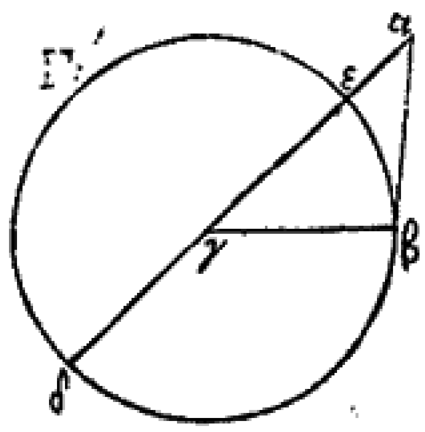
Πρότασις Γ'.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις ἑκατέρα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῆς τε ἐκ τῶν λοιπῶν πλευρῶν συγκειμένης, καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον κατὰ τὸ β, τὸ α β γ. Λέγω ὅτι ἡ α β, αὐτοῦ πλευρὰ μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῆς τε συγκειμένης ἐκ τῶν α γ, γ β, καὶ τῆς διαφορᾶς τῆς α γ, πρὸς τὴν γ β. Κέντρῳ γὰρ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ γ β, γραφήτω κύκλος ὁ β ε δ, καὶ ἐξαχθήτω ἡ α γ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὸ δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ γ,

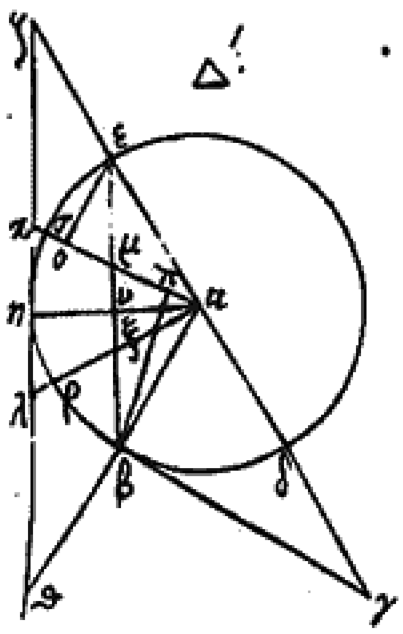
κενκέντρον ἐστὶ τοῦ βεδ, κύκλου, πάντως γε αἱ γβ, γε, ἴσαι εἰσί. διαφορὰ δὲ τῆς αγ, πρὸς τὴν γβ, ἡ εα. ἔστι δὲ καὶ ἡ γδ, ἴση τῇ γβ, ἡ αδ, ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν γβ, γα. ἀλλ᾽ ἡ βα, ἅπτεται τοῦ βεδ, κύκλου, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ις΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἡ δὲ αδ, τέμνει τὸν αὐτὸν κύκλον, ἄρα κατὰ τὴν λϛ΄: τοῦ αὐτοῦ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δα, αε, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ ἑπομένως ἡ αβ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αδ, αε. ἀλλ᾽ ἡ μὲν αδ, ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν αγ, γβ, ἡ δὲ αε, ἡ τῆς αγ, πρὸς τὴν γβ, διαφορὰν, ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ αβ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῆς τε ἐκ τῶν αγ, γβ, συγκειμένης, καὶ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἡ γβ, μέση ἀνάλογος τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν γα, αβ, καὶ τῆς διαφορᾶς τῆς αγ, πρὸς τὴν αβ, τοῦ α, κέντρου λαμβανομένου, καὶ διαστήματι τῷ αβ, γραφομένου τοῦ κύκλου· ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις ἄρα τριγώνοις ἑκάτερα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 3.



Πρότασις Δ΄:

Ἐπὶ παντὸς εὐθυγράμμου τριγώνου ὡς ἡ ἐκ τῶν δύο συγκειμένη πλευρῶν τῶν περὶ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθεῖα πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν, οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ ἡμίσεως τῶν λοιπῶν δύο ἀγνώστων γωνιῶν πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν.



Ἔστω τρίγωνον εὐθύγραμμον τὸ αβγ, οὗ ἐγνωσμένη ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν βα, αγ, πλευρῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ἡμισείας τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ, γωνιῶν πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν. κέντρῳ μὲν δὴ τῷ α, καὶ διαστήματι τῇ αβ, ἐλάττονι πλευρᾷ γραφήτω κύκλος ὁ βεδ, τέμνων τὴν μείζονα πλευρὰν αγ, κατὰ τὸ δ, καὶ ἐξαχθήτω ἡ αγ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ ζ, τέμνουσα τὸν κύκλον κατὰ τὸ ε. τοῦ δὲ βε, τόξου δίχα διαιρουμένου κατὰ τὸ η, ἐπιζεύχθω ἡ αη, ἐφ᾽ ἧς ἤχθω κάθετος διὰ τοῦ η, ἡ ζθ, συμπίπτουσα τῇ αβ, ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ θ. ἀπὸ δὲ τοῦ α, παράλληλος τῇ βγ, ἤχθω ἡ ακ, καὶ γενέσθω τῇ ὑπὸ εακ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ θαλ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ εβ, τέμνουσα τὴν μὲν ακ, κατὰ τὸ μ, τὴν δὲ αη, κατὰ τὸ ν, καὶ τὴν αλ, κατὰ τὸ ξ. ἀπὸ δὲ τῶν ε καὶ β, σημείων συμπιπτέτωσαν κάθετοι ἐπὶ τῆς ακ, αἱ εο, βπ. καὶ ἐπεὶ τὸ α, κέντρον ἐστὶ τοῦ εβδ, κύκλου, πάντως γε ἡ αε, τῇ αβ, ἴση ἐστίν, ὥστε ἡ εγ, ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν βα, αγ, πλευρῶν. ἡ δὲ γδ, ἡ τῶν αγ, αβ, διαφορά. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ακ, παράλληλος ἦκται τῇ βγ, δῆλον, ὅτι ἡ ὑπὸ εακ, ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγβ, ἐντὸς κατὰ τὴν κθ': τοῦ ά: τῶν Στοιχ: ἀλλ' ἡ ὑπὸ εαβ, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ αγβ, αβγ, κατὰ τὴν λβ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ καβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βαγ, ἴση ἐστί. γέγονε δὲ ἡ ὑπὸ λαβ, ἴση τῇ ὑπὸ εακ, ἄρα ἡ ὑπὸ καλ, διαφορά ἐστι τῶν ὑπὸ καβ, εακ, δηλονότι τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ. Αὖθις ἐπεὶ τὸ βε, τόξον τέτμηται δίχα κατὰ τὸ η, πάντως γε τὸ ηβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ηε. ἔστι δὲ καὶ τὸ βρ, ἴσον τῷ εσ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς ὑπὸ βαρ, εασ, γωνίας, ἄρα καὶ τὸ ρη, ἴσον ἐστὶ τῷ ησ. ὥστε ἡ ὑπὸ ηαρ, γωνία ἡμίσειά ἐστι τῆς διαφορᾶς τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ, γωνιῶν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εαη, ἴση τῇ ὑπὸ ηαβ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ὑπὸ εαβ, ἴση ταῖς ὑπὸ αβγ, αγβ, ὡς προδέδεικται, ἄρα ἡ ὑπὸ ηαβ, ἡμίσειά ἐστι τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ. ἀλλ' ἡ μὲν ηθ, ἀπτομένη ἐστὶ τῆς ὑπὸ ηαβ, ἡ δὲ ηλ, τῆς ὑπὸ ηαρ. ἄρα ἡ μὲν ηθ, ἀπτομένη ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ, γωνιῶν, ἡ δὲ ηλ, τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν αὐτῶν. Τούτων οὖν οὕτω προαποδεδειγμένων, εὐχερῶς συναχθήσεται τὸ ὑποκείμενον. ἐπεὶ γὰρ ἡ αη, δίχα τέμνει τὴν εβ, περιφέρειαν κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε δίχα τέμνει καὶ τὴν εβ, ὑποτείνουσαν, ὥστε καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει κατὰ τὴν αὐτήν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ζθ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς αη. καὶ κατὰ τὴν κζ': τοῦ ά: τοῦ αὐτοῦ ἡ εβ, παράλληλός ἐστι τῇ ζθ. κατὰ δὲ τὸ πόρισμα τῆς δ': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ ὡς ἡ αη, πρὸς τὴν αν, ἔστι καὶ ἡ ηλ, πρὸς τὴν νξ. ἀλλ' ὡς ἡ αη, πρὸς τὴν αν, ἔστι καὶ ἡ ηθ, πρὸς τὴν νβ, ἄρα ὡς ἡ ηθ, πρὸς τὴν νβ, οὕτως ἡ ηλ, πρὸς τὴν νξ. πάλιν ἐπεὶ τὰ βπμ, εομ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, πάντως γε κατὰ τὴν δ': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ βπ, πρὸς τὴν εο, ἔστι καὶ ἡ βμ, πρὸς τὴν εμ, ἀλλ' ἡ μὲν βπ, ἡμίτονόν ἐστι τῆς ὑπὸ βαπ, ἤτοι τῆς ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ εο, ἡμίτονον ὁμοίως ἐστὶ τῆς ὑπὸ εαο, ἤτοι τῆς ὑπὸ αγβ, ὡς δὲ τὰ ἡμίτονα, οὕτω καὶ αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ κατὰ τὴν ά: τοῦ παρόντος. ἄρα ὡς ἡ αγ, πλευρὰ πρὸς τὴν αβ, ἡ βμ, πρὸς τὴν με, καὶ συνθέσει ὡς ἡ εγ, πρὸς τὴν δγ, διαφορὰν, ἡ βε, πρὸς τὴν μξ, διαφοράν. ἴση γὰρ ἡ βξ, τῇ με. ἢ ὡς ἡ βν, ἡμίσεια πρὸς τὴν νξ, ἡμίσειαν διαφορᾶς. ἀλλ' ὡς ἡ βν, πρὸς τὴν νξ, δέδεικται καὶ ἡ θη, πρὸς τὴν ηλ. ἄρα ὡς ἡ εγ, πρὸς τὴν δγ, ἡ ηθ, πρὸς τὴν ηλ. ἐπὶ παντὸς ἄρα εὐθυγράμμου τριγώνου ὡς ἡ ἐκ τῶν δύο συγκειμένη, καὶ τὰ ἑξῆς.

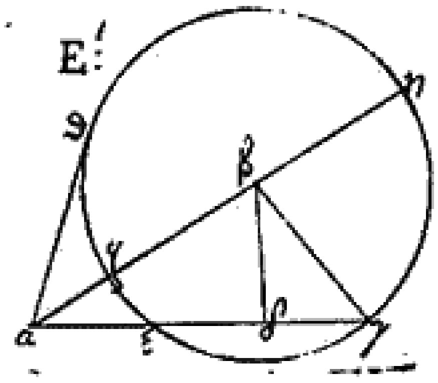
Πρό-

Πρότασις Ε′:

Ἐὰν ἐπὶ τῆς μείζονος πλευρᾶς τοῦ δοθέντος τριγώνου κάθετος ἀπὸ τῆς ἀπεναντίον ἀχθῇ γωνίας, ἔσται ὡς ἡ μείζων πλευρὰ, ἐφ᾽ ἧς ἡ κάθετος πίπτει, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν λοιπῶν δύο, οὕτως ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν πρὸς τὴν τῶν τμημάτων διαφορὰν τῆς μείζονος, τῶν ὑπὸ τῆς καθέτου γενομένων.

Ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ, οὗ μείζων πλευρὰ ἡ α γ· καὶ ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ β, σημείου κάθετος ἐπὶ τῆς α γ, ἡ β δ, Λέγω ὅτι ὡς ἡ α γ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν α β, β γ, οὕτως ἐστὶν ἡ τῶν α β, β γ, διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν α δ, δ γ, μερῶν διαφοράν. Κέντρῳ γὰρ τῷ β, καὶ διαστήματι τῇ β γ, ἐλάττονι γραφήτω κύκλος ὁ γ η ζ ε, τέμνων τὴν μὲν α β, κατὰ τὸ ζ, τὴν δὲ α γ, κατὰ τὸ ε. καὶ ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἀχθήτω ἁπτομένη τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἡ α θ, κατὰ τὴν ιζ′: τοῦ γ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, καὶ ἤχθω ἡ α β, ἐπὶ τὸ η. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν λς′: τοῦ αὐτοῦ τὸ ἀπὸ τῆς α θ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν η α, α ζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ α, α ε. Λαμβανομένων δὴ τῶν γ α, α ε, ἀντὶ ἄκρων, τῶν δὲ η α, α ζ, ἀντὶ μέσων, ἔσται ὡς ἡ α γ, πρὸς τὴν α η, β′: ἡ α ζ, γ′: πρὸς τὴν α ε, δ′: κατὰ τὴν ις′: τοῦ ς′: τοῦ Στοιχ:. ἀλλ᾽ ἡ μὲν α η, σύγκειται ἐκ τῶν α β, β γ, ἴση γὰρ ἡ β η, τῇ β γ, ἡ δὲ α ζ, διαφορά ἐστι τῆς α β, πρὸς τὴν β γ, ἴση γὰρ ἡ β ζ, τῇ β η, καὶ ἡ α ε, ὁμοίως διαφορά ἐστι τῶν α δ, δ γ, τμημάτων. ἴση γὰρ ἡ ε δ, τῇ δ γ, κατὰ τὴν γ′: τοῦ γ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἄρα ὡς ἡ γ α, μείζων πλευρὰ τοῦ α β γ, δοθέντος τριγώνου πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν α β, β γ, λοιπῶν πλευρῶν τοῦ αὐτοῦ, οὕτως ἡ τῶν α β, β γ, διαφορὰ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν α δ, δ γ. ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς μείζονος πλευρᾶς τοῦ δοθέντος, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 6.

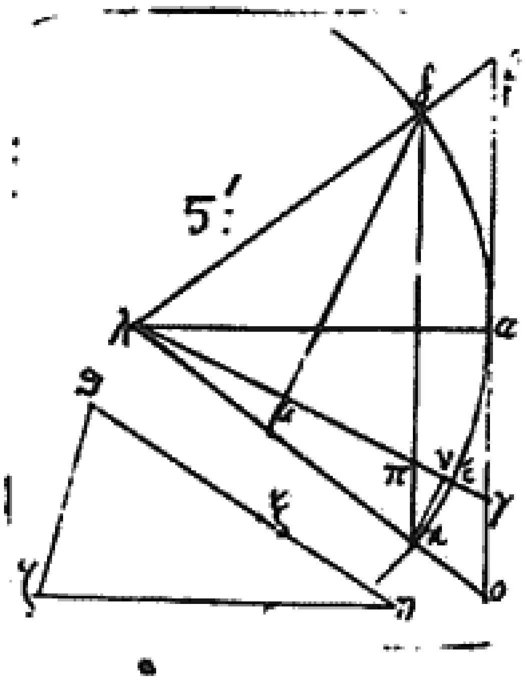


Πρότασις ϛ':

Ἐὰν ἀπτόμεναι δύο τινῶν τόξων ἢ γωνιῶν, ἡμιτόνοις ἑτέρων τόξων ἢ γωνιῶν ἀνάλογον ὦσι, τὰ ἡμίτονα τῆς τε συνάψεως τῶν α: τόξων ἢ γωνιῶν, καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν τόξων ἀνάλογον ἔσονται ταῖς ἀπτομέναις τῆς ἡμισυνάψεως καὶ ἡμιδιαφορᾶς τῶν β: τόξων.

Ἔστωσαν δὴ αἱ α β, α γ, ἀπτόμεναι τῶν α δ, α ε, τόξων ἀνάλογον τοῖς ἡμιτόνοις τῶν πρὸς τῷ ζ, καὶ η γωνιῶν τοῦ ζ η θ, τριγώνου. Λέγω ὅτι τὰ ἡμίτονα τῆς τε συνάψεως τῶν α δ, α ε, δοθέντων τόξων, καὶ διαφορᾶς τῶν αὐτῶν ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ἀπτομέναις τῆς τε ἡμισυνάψεως καὶ ἡμιδιαφορᾶς τῶν πρὸς τῷ ζ καὶ η, γωνιῶν τοῦ ζ η θ, τριγώνου. Γενέσθω γὰρ τὸ α κ, τόξον ἴσον τῷ α δ, καὶ ἀπὸ τῶν δ καὶ κ, σημείων πιπτέτωσαν κάθετοι ἐπὶ τῆς λ γ, αἱ δ μ, κ ν, καὶ ἐπιζευχθω ἡ δ κ. καὶ ἐπεὶ τὸ α κ, τόξον ἴσον γέγονε τῷ α δ, τόξῳ, πάντως γε τὸ ε κ, διαφορά ἐστι τῶν α δ, α ε, τὸ δὲ δ ε, σύναψις τῶν αὐτῶν, καὶ τὸ μὲν δ μ, ἡμίτονον τῆς συνάψεως τῶν α δ, α ε, τὸ δὲ κ ν, ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν. ἔστω δὲ καὶ διαφορὰ τῶν η θ, θ ζ, ἡ η ξ. ἀλλ' ὡς ἡ β α, ἀπτομένη πρὸς τὴν α γ, ὑπετέθη καὶ τὸ τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας ἡμίτονον τοῦ ζ η θ, τριγώνου πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ η. ὡς δὲ τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ η, ἔστι καὶ ἡ η θ, πρὸς τὴν θ ζ, κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος, ἄρα ὡς ἡ α β, ἤτοι ἡ α ο, πρὸς τὴν α γ, οὕτως ἡ η θ, πρὸς τὴν θ ζ, ἤτοι τὴν θ ξ, καὶ ἀναστροφῇ, ἄρα ὡς ἡ α ο, ἤτοι ἡ β α, πρὸς τὴν γ ο, ἡ η θ, πρὸς τὴν η ξ, ἀλλὰ καὶ διαιρέσει, ὡς ἡ θ ξ, ἤτοι ἡ θ ζ, πρὸς τὴν ξ η, ἡ α γ, πρὸς τὴν γ ο, συνθέσει ἄρα ὡς β γ, πρὸς τὴν γ ο, διαφορὰν ἡ ἐκ τῶν η θ, θ ζ, πρὸς τὴν ξ η, διαφοράν. ὡς δὲ ἡ ἐκ τῶν η θ, θ ζ, πρὸς τὴν ξ η, διαφοράν, ἔστι καὶ ἡ ἀπτομένη τῆς ἡμισυνάψεως τῶν πρὸς τοῖς ζ, καὶ η, γωνιῶν πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν κατὰ τὴν δ': τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν γ ο διαφοράν, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ἡμισυνάψεως τῶν πρὸς τοῖς ζ καὶ η, γωνιῶν πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν αὐτῶν, ἀλλ' ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν γ ο, ἔστι καὶ ἡ δ π, πρὸς τὴν π κ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς δὲ ἡ δ π, πρὸς τὴν π κ, ἔστι καὶ τὸ δ μ, ἡμίτονον τοῦ δ ε, τόξου πρὸς τὸ κ ν, ἡμίτονον τοῦ ε κ, τόξου κατὰ τὴν δ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα ὡς τὸ δ μ, ἡμίτονον

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 7.



τῆς

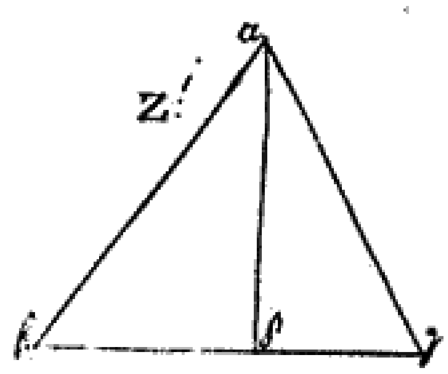
τῆς συναψέως τῶν δοθέντων τόξων αδ, αε, πρὸς τὸ κε, ἡμίτονον τῆς αὐτῶν διαφορᾶς, οὕτως ἡ ἁπτομένη τῆς ἡμισυναψέως τῶν πρὸς τοῖς ζ, η, γωνιῶν πρὸς τὴν ἁπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν. ἐὰν ἄρα ἁπτόμεναι δύο τινῶν τόξων ἢ γωνιῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ζʹ:

Ἐπὶ παντὸς εὐθυγράμμου τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος ἑκάστης γωνίας, οὕτω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν πλευρῶν, καθ᾽ ἣν ὑπερέχει τοῦ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν αὐτὴν γωνίαν τετραγώνου, ἢ γοῦν ὑπερέχεται ὑπ᾽ ἐκείνου.

Ἔστω αʹ: τρίγωνον ὀξυγώνιον τὸ αβγ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν αβ, βγ, πλευρῶν, καθ᾽ ἣν ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς αγ. Πιπτέτω δὴ ἀπὸ τοῦ α, κάθετος ἐπὶ τῆς βγ, ἡ αδ. Ἐπεὶ οὖν τοῦ αβδ, τριγώνου ἡ ὑπὸ αδβ, γωνία ὀρθή ἐστι, πάντως γε ἡ ὑπὸ δαβ, παραπλήρωμά ἐστι τῆς πρὸς τῷ β. καὶ διὰ τὴν αʹ: τοῦ παρόντος ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δαβ, γωνίας, οὕτως ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ. Λαμβανομένων ἄρα τῶν αβ, βδ, ἀντὶ βάσεων, καὶ τῆς βγ, ἀντὶ ὕψους, καὶ τοῦ σχήματος ἀποπληρουμένου, ἔσται πάντως κατὰ τὴν αʹ: τοῦ ϛʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν βγ, βδ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, ἐστι καὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δαβ, ὡς δέδεικται. ἄρα τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δαβ, ἔχει, ὡς τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον. καὶ ἑπομένως, ὡς τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, βδ, περιεχόμενον. ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, βδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἐστὶν ὑπεροχὴ, καθ᾽ ἣν ὑπερέχουσι τὰ τετράγωνα τῶν αβ, βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνου, κατὰ τὴν ιγʹ: τοῦ βʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ δὲ ὑπὸ δαβ, γωνία παραπλήρωμά ἐστι τῆς πρὸς τῷ β, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώ-

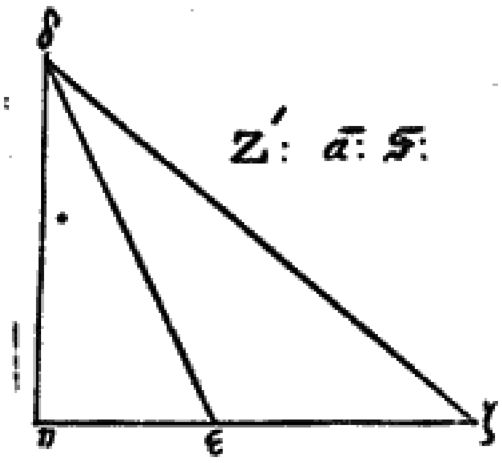
Trig. Anal. lib. 1. Fig. 8.



γώνιον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν τετραγώνων τῶν αβ, βγ, καθ' ἣν ὑπερέχουσι τοῦ τετραγώνου τῆς αγ. ἐπὶ παντὸς ἄρα εὐθυγράμμου τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Ἔστω β': τὸ δεζ, ἀμβλυγώνιον τρίγωνον. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς ὑπὸ δεζ, γωνίας, οὕτω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν δε, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὴν ὑπεροχήν, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς δζ, τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν δε, εζ, τετραγώνων. Πιπτέτω γὰρ ἀπὸ τοῦ δ, σημείου κάθετος ἡ δη, συμβάλλουσα τῇ ζε, ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ η. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν α': τοῦ παρόντος ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ η, ὀρθῆς γωνίας, ἤτοι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 9.



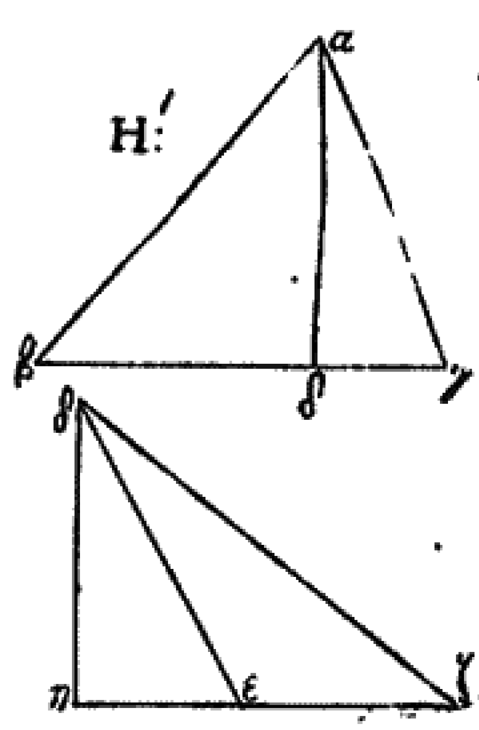
ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ηδε, οὕτως ἡ δε, πρὸς τὴν εη, καὶ ἀνάπαλιν, πάντως γε ἀντὶ βάσεων λαμβανομένων τῶν δε, εη, καὶ τῆς εζ, ἀντὶ ὕψους λαμβανομένης, ἔσται ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ηδε, γωνίας, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν δε, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ηε, εζ, περιεχόμενον. κατὰ γὰρ τὴν α': τοῦ ς': τῶν μὲν δε, εη, βάσεων τόπον ἐχουσῶν, ὕψους δὲ τῆς εζ, ἔστιν ὡς ἡ δε, πρὸς τὴν εη, τὸ ὑπὸ τῶν δε, εζ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ηε, εζ. ἀλλ' ὡς ἡ δε, πρὸς τὴν εη, οὕτως ἐστὶ καὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δε, ὡς δέδεικται, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ηδε, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν δε, εζ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ηε, εζ, οὕτως ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν δε, εζ, πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ηε, εζ. ἀλλὰ κατὰ μὲν τὸν ζ': ὅρον τὸν ἐν τῷ α': τοῦ παρόντος τμήματος ἡ ὑπὸ ηδε, παραπλήρωμά ἐστι μὴ μόνον τῆς ὑπὸ ηεδ, ὀξείας γωνίας, ἀλλ' οὐχ ἧττον καὶ τῆς ὑπὸ δεζ, ἀμβλείας. κατὰ δὲ τὴν ιβ': τοῦ β': τοῦ Στοιχειωτοῦ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ηε, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπεροχή ἐστι, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς δζ, τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν δε, εζ, τετραγώνων, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς ὑπὸ δεζ, γωνίας, οὕτω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν δε, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὴν ὑπεροχήν, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς δζ, τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν δε, εζ, τετραγώνων. ἐπὶ παντὸς ἄρα εὐθυγράμμου τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις Η':

Ἐπὶ παντὸς τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς τυχούσης γωνίας, οὕτως ἡ μία τῶν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πλευρῶν πρὸς τὴν κάθετον τὴν ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἀγομένην πλευρᾶς ἀπὸ τῆς προσκειμένης γωνίας τῇ προτέρᾳ πλευρᾷ.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 10



Ἔστω τρίγωνον εὐθύγραμμον τὸ αβγ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτως ἡ αβ, πλευρὰ πρὸς τὴν αδ, κάθετον. κατὰ γὰρ τὸ ...ὴν α: τοῦ παρόντος ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βδα, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτως ἡ αβ, πρὸς τὴν αδ. ἀλλὰ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βδα, τὸ ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, ἡ αβ, πρὸς τὴν αδ.

∴ Ὁμοίως δειχθήσεται τὸ αὐτὸ καὶ ἐπὶ τοῦ δεζ, ἀμβλυγωνίου τριγώνου. ὡς γὰρ τὸ τῆς πρὸς τῷ η, ὀρθῆς γωνίας ἡμίτονον, ἤτοι τὸ ὁλικὸν, πρὸς τὸ τῆς ὑπὸ ηεδ, γωνίας ἡμίτονον, οὕτως ἡ δε, πρὸς τὴν δη. ἀλλὰ τὸ ἡμίτονον τῆς δεη, γωνίας ἡμίτονόν ἐστι καὶ τῆς ὑπὸ δεζ, ἀμβλείας γωνίας κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ β': τοῦ α: τοῦ παρόντος, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δεζ, ἀμβλείας γωνίας, οὕτως ἡ δε, πρὸς τὴν δη, κάθετον. ἐπὶ παντὸς ἄρα τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Θ':

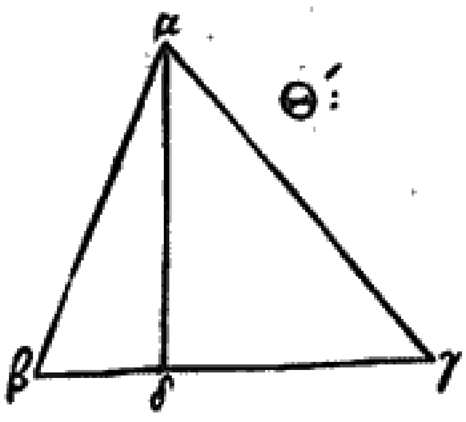
Ἐπὶ παντὸς τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονόν τινος γωνίας, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πλευρῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διπλοῦν ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διπλοῦν ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, τριγώνου. Ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτως ἡ αβ, πρὸς

τὴν

τὴν αδ. πάντως γε τῶν αβ, αδ, ἀντὶ βάσεων εἰλημμένων, καὶ τῆς βγ, ἀντὶ ὕψους, ἔσαι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αδ, βγ, περιεχόμενον. καὶ γὰρ τὴν α: τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ τῶν μὲν αβ, αδ, ἀντὶ βάσεων, ἀντὶ δὲ ὕψους τῆς βγ, εἰλημμένης, ἔστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αδ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αδ, βγ, περιεχόμενον. ἀλλ' ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αδ, δέδεικται

Trig. Anal. lib. 1. Fig 11.

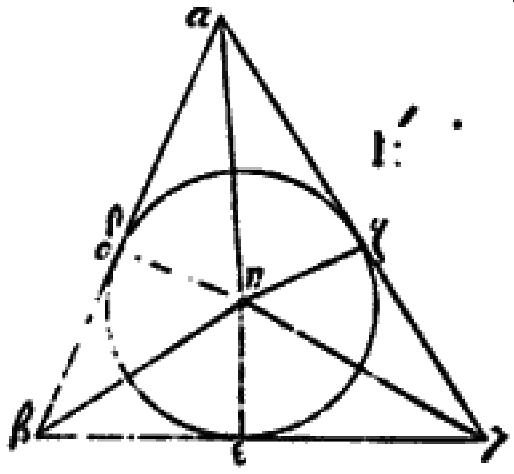


καὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αδ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αβγ, τριγώνου, κατὰ τὴν μα: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτω τὸ ὑπὸ αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διπλοῦν ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, τριγώνου. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τοῦ δεζ, ἀμβλυγωνίου τριγώνου τῶν ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω. ὅτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δεζ, ἀμβλείας γωνίας, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν δε, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διπλοῦν ἐμβαδὸν τοῦ δεζ, τριγώνου, τῆς εζ, ἀντὶ ὕψους λαμβανομένης, κειμένων τῶν δε, δη, ἀντὶ βάσεων. ἐπὶ παντὸς ἄρα τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονόν τινος γωνίας, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ι':

Ἐὰν εἰς τρίγωνον κύκλος ἐγγραφῇ τὸ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τοῦ τριγώνου ἐμβαδῷ.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 12.



Ἐγγραφέντω εἰς τὸ αβγ, τρίγωνον ὁ δεζ, κύκλος, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τοῦ η, κέντρου ἐπὶ τὰς ἁφὰς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου αἱ ηδ, ηζ, ηε. Λέγω ὅτι τὸ ὑπό τε τῆς δη, ἡμιδιαμέτρου τοῦ δεζ, κύκλου, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐμβαδῷ τοῦ αβγ, τριγώνου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ αδη, γωνία ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν ιη: τοῦ γ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε κατὰ τὴν μα: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ αδη, τριγώνου, ἤτοι ἴσον τῷ αδηζ, σχήματι. ἴσον γὰρ τὸ αδη, τρίγωνον τῷ δζη, τριγώνῳ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τάς τε αδ, δζ, εὐθείας

καὶ

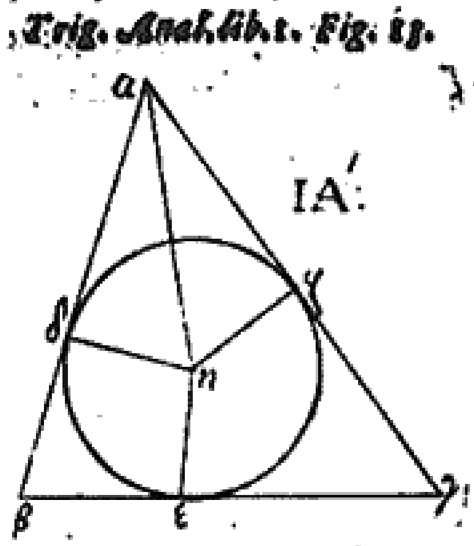
καὶ τὸ πόρισμα τῆς λϛ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, καὶ ἔτι ταῖς δη, ηζ, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βε, εη, ἴσον τῷ βδηε, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γε, εη, τῷ εηζγ. ὥστε τὴν μὲν δη, ἡμιδιάμετρον ἀντὶ μιᾶς λαμβανομένης πλευρᾶς, ἀντὶ δὲ τῆς ἑτέρας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν αδ, βε, εγ, τὸ περιεχόμενον ὑπ᾽ αὐτῶν ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς δηζα, δηεβ, εηζγ, τουτέστι τῷ ἐμβαδῷ τοῦ αβγ, τριγώνου, ἀλλ᾽ ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν αδ, βε, εγ, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιπεριμέτρῳ τοῦ αβγ, τριγώνου, αἱ γὰρ δα, αζ, ἴσαι εἰσὶν, ὥσπερ καὶ αἱ δβ, βε, καὶ εγ, γζ, κατὰ τὸ ῥηθὲν πόρισμα τῆς λϛ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε αἱ τρεῖς αδ, βε, εγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς αζ, δβ, ζγ, ἄρα τὸ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ δεζ, κύκλου, καὶ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐμβαδῷ τοῦ αβγ, τριγώνου. ἐὰν ἄρα εἰς τρίγωνον κύκλος ἐγγραφῇ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑ΄:

Ἐπὶ παντὸς τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομὴν τῆς ἡμισείας ἑκάστης γωνίας, οὕτω τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, καθ᾽ ἣν ὑπερέχει ἡ ἡμιπερίμετρος τῆς ὑποτεινούσης τὴν γωνίαν πρὸς τὸ τοῦ τριγώνου ἐμβαδόν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομὴν τῆς ἡμισείας τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας, οὕτω τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, καθ᾽ ἣν ὑπερέχει ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ αὐτοῦ αβγ, τριγώνου τῆς βγ, ὑποτεινούσης τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίαν πρὸς τὸ τοῦ αβγ, τριγώνου ἐμβαδόν. Ἐγγραφήτω δὴ κύκλος εἰς τὸ αβγ, τρίγωνον κατὰ τὴν δ΄: τοῦ δ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ ὁ δεζ, οὗ κέντρον τὸ η. ἀπὸ δὲ τοῦ η, κέντρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἤχθωσαν αἱ ηδ, ηε, ηζ, ηα. καὶ ἐπεὶ τὸ αδη, τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ δ, κατὰ τὴν ιη΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε κατὰ τὴν β΄: τοῦ παρόντος ὡς ἡ αδ, πρὸς τὴν δη, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομὴν τῆς ὑπὸ δαη. λαμβανομένων δὲ τῶν αδ, δη, ἀντὶ βάσεων, καὶ τῆς ἡμιπεριμ: τοῦ αβγ, τριγώνου ἀντὶ ὕψους. ἐπεὶ κατὰ τὴν α΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἐστὶν ὡς ἡ αδ, βάσις πρὸς τὴν δη, βάσιν, οὕτω τὸ ὑπὸ τῆς αδ, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς δη, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, ὡς δὲ ἡ αδ, πρὸς τὴν δη, δέδεικται καὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομὴν τῆς ὑπὸ δαη, γωνίας, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 18.



ἀποτεμνομένην τῆς ὑπὸ δαη, γωνίας, οὕτω τὸ ὑπό τε τῆς αδ, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς δη, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ τριγώνου. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ δαη, γωνία ἡμίσειά ἐστι τῆς ὑπὸ βαγ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τάς τε δα, αζ, καὶ δη, ηζ, ἡ δὲ αδ, ὑπεροχὴ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου, καθ' ἣν ὑπερέχει τῆς βγ, ὡς δειχθήσεται. καὶ τὸ ὑπὸ τῆς δη, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τοῦ τριγώνου ἐμβαδῷ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτεμνομένην τῆς ἡμισείας τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας, οὕτω τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου καὶ ὑπεροχῆς τῆς αὐτῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει τῆς βγ, ὑποτεινούσης πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, τριγώνου.

Ὅτι δὲ ἡ αδ, ὑπεροχή ἐστι τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὴν βγ, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ὡς δέδεικται ἀνωτέρω αἱ δα, αζ, καὶ δβ, βε, καὶ εγ, γζ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, πάντως γε ἡ βγ, μετὰ τῆς αδ, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιπεριμέτρῳ τοῦ αβγ, τριγώνου, ὑπεροχὴ ἄρα τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὴν βγ, ἡ αδ, ἐστί. ἐπὶ παντὸς ἄρα τριγώνου, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον ὅτι ὥσπερ ἡ αδ, ἢ αζ, ὑπεροχή ἐστι τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ βδ, ὑπεροχή ἐστι τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ πρὸς τὴν γα, καὶ ἡ εγ, ἢ γζ, πρὸς τὴν αβ. ὥστε ἀκριβῶς δειχθήσεται τὸ αὐτὸ καὶ ἐφ' ἑκατέρας τῶν λοιπῶν δύο γωνιῶν.

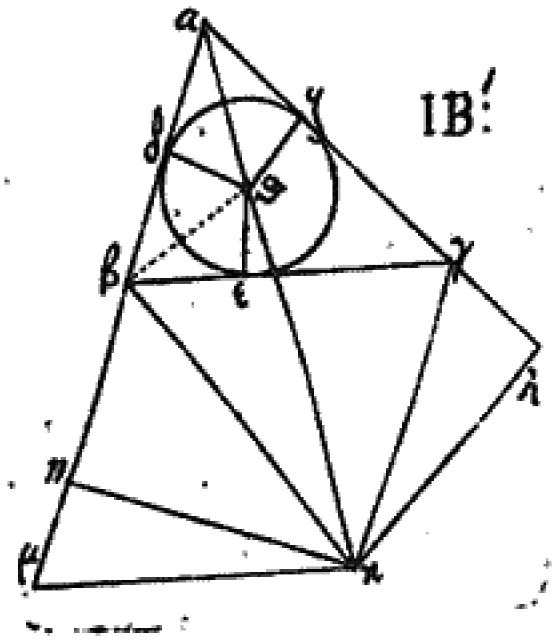
Πρότασις ΙΒ'.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ περιεχομένου ὀρθογωνίου ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν, καὶ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν λοιπῶν ὑπεροχῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὰς ἄλλας τοῦ τριγώνου πλευράς.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. Λέγω ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, τριγώνου μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ περιεχομένου ὀρθογωνίου ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, καὶ αδ, ὑπεροχῆς τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὴν βγ, πλευρὰν τοῦ αβγ, τριγώνου, καὶ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν βε, εγ, λοιπῶν ὑπεροχῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὰς λοιπὰς γα, αβ, πλευράς. Ἐγγραφήτω δὴ κύκλος εἰς τὸ αβγ, τρίγωνον ὁ δεζ, καὶ τῆς αβ, ἐξαγομένης κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως, εἰλήφθω ἡ μὲν βη, ἴση τῇ εγ, ἡ δὲ ημ, ἴση τῇ βε. ἀπὸ δὲ τοῦ η, ἀνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς αμ, ἡ ηκ, συμβάλλουσα τῇ αθ, διὰ τοῦ κέντρου ἐξαγομένῃ κατὰ τὸ κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βκ, μκ. ἐξαχθήτω δὲ καὶ ἡ αγ, ἐπὶ τὸ λ, ὥστε τὴν γλ, ἴσην εἶναι τῇ βε, ἤτοι τῇ ημ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κγ, κλ. ἐπεζεύχθω ἔτι καὶ ἡ βθ.

ἡ βθ. Δείκνυται, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομὴν τῆς δαθ, γωνίας, οὕτω τὸ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου αβγ, καὶ ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ἡ ἡμιπερίμετρος ὑπερέχει τῆς βγ, πλευρᾶς πρὸς τὸ τοῦ τριγώνου ἐμβαδὸν κατὰ τὴν αὐτοῦ τριγώνου... ἀλλ' ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομὴν τῆς ὑπὸ δαθ, γωνίας, ἐστὶ καὶ ἡ αδ, πρὸς τὴν δθ, κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος. ὡς δὲ ἡ αδ, πρὸς τὴν δθ, ἡ αη, πρὸς τὴν ηκ, διὰ τὴν τῶν τριγώνων αδθ, αηκ, ὁμοιότητα, ἄρα ὡς ἡ αη, πρὸς τὴν ηκ, οὕτω τὸ ὑπό τε τῆς αδ, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ αὐτοῦ ἐμβαδόν. Ἐπεὶ δὲ τῶν μὲν αη, ηκ, ἀντὶ βάσεων εἰλημμένων, τῆς δὲ θε, ἡμιδιαμέτρου ἀντὶ ὕψους, ἐστὶν ὡς ἡ αη, πρὸς τὴν ηκ, τὸ ὑπό τε τῆς αη, καὶ θε, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς θε, καὶ ηκ, κατὰ τὴν α': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε ὡς τὸ ὑπό τε τῆς αδ, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὸ τοῦ τριγώνου ἐμβαδὸν, οὕτω τὸ ὑπό τε τῆς αη, καὶ θε, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς θε, καὶ ηκ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς αη, καὶ θε, ἴσον ἐστὶ τῷ τοῦ τριγώνου ἐμβαδῷ κατὰ τὴν ι': τοῦ παρόντος. ἡ γὰρ αη, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιπεριμέτρῳ τοῦ αβγ, τριγώνου, συγκειμένη ἐκ τῶν αδ, δβ, καὶ βη, ἤτοι εγ, τὸ δὲ ὑπό τε τῆς θε, καὶ ηκ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν διαφορῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ τριγώνου πρὸς τὰς λοιπὰς δύο αὐτοῦ πλευρὰς, ὡς ὀψόμεθα, ἄρα ὡς τὸ ὑπό τε τῆς αδ, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αὐτοῦ, οὕτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν διαφορῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ πρὸς τὰς λοιπὰς πλευράς. ἡ δὲ αδ, ὑπεροχή ἐστι τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ τριγώνου πρὸς τὴν βγ, αὐτοῦ πλευρὰν, ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, τριγώνου μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου καὶ αδ, διαφορᾶς αὐτῆς πρὸς τὴν βγ, πλευρὰν περιεχομένου ὀρθογωνίου, καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν λοιπῶν διαφορῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὰς αβ, αγ, πλευράς.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 14.



ΙΒ'

Ὅτι δὲ τὸ ὑπό τε τῆς θε, καὶ ηκ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν διαφορῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, οὑτωσὶ δειχθήσεται. Τοῦ τοίνυν δβεθ, τετραπλεύρου αἱ ὑπὸ δβε, δθε, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, διὰ τὸ καὶ τὰς λοιπὰς δύο δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, ἀλλὰ κατὰ τὴν ιγ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ δβε, εβη, ἄρα αἱ δβε, δθε, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβη. κοινῆς δ' ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ δβε, ἐγκαταλείπεται ἡ ὑπὸ δθε, ἴση τῇ ὑπὸ εβη. αὖθις αἱ δα, αζ, ὥσπερ καὶ αἱ δβ, βε, εἰσὶν ἴσαι κατὰ τὸ πόρισμ: τῆς λϛ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ. εἴληπται δὲ καὶ ἡ γλ, ἴση τῇ βε, ἤτοι τῇ δβ. ἑκατέρα δὲ τῶν βη, ζγ ὁμοίως εἴληπται ἴση τῇ εγ, ἄρα αἱ αη, αλ, ἴσαι εἰσὶ, κοινὴ δὲ ἡ ακ, καὶ ἡ ὑπὸ ηακ, τῇ λακ, ἴση, ὡς ἐν τῇ ἀνωτέρω δέδεικται, ἄρα κατὰ τὴν δ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ κη, τῇ κλ, καὶ ἡ ὑπὸ ακη, γωνία τῇ ὑπὸ αλκ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ημ, τῇ γλ, ἴση, ἄρα κατὰ τὴν αὐτὴν ἡ κμ, ἴση ἐστὶ τῇ κγ. ὥστε τῶν βμκ, βγκ τριγώνων ἐπεὶ αἱ δύο βμ, μκ, δυσὶ ταῖς βγ, γκ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, κοινὴ δὲ ἡ βκ, πάντως γε κατὰ τὴν η': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ βμκ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βγκ, ἡ δὲ ὑπὸ μβκ, τῇ ὑπὸ γβκ, ἡ ἄρα ὑπὸ ηβγ, γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς βκ. τέμνεται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δθε, ὁμοίως δίχα ὑπὸ τῆς θβ, διὰ τὰ αὐτὰ, καὶ δέδεικται ἴση ἡ ὑπὸ ηβγ, τῇ ὑπὸ δθε, ἄρα καὶ ἡ ἡμίσεια ηβκ, τῇ ἡμισείᾳ βθε, ἴση ἐστὶν, ἀλλὰ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βηκ, βεθ, ὀρθή ἐστιν, ἄρα τὰ βηκ, βεθ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ὥστε ὡς ἡ βη, πρὸς τὴν ηκ, ἡ θε, πρὸς τὴν εβ. ἐπεὶ δὲ τέσσαρα μεγέθη τὰ βη, ηκ, θε, εβ, ἀνάλογόν εἰσιν, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων βη, εβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ηκ, θε. ἀλλ' ἡ ηβ, ἴση εἴληπται τῇ εγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γε, εβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ηκ, θε, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γε, εβ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν διαφορῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὰς λοιπὰς βα, αγ, πλευράς, ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς θε, καὶ ηκ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν λοιπῶν διαφορῶν. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποτεθέν.

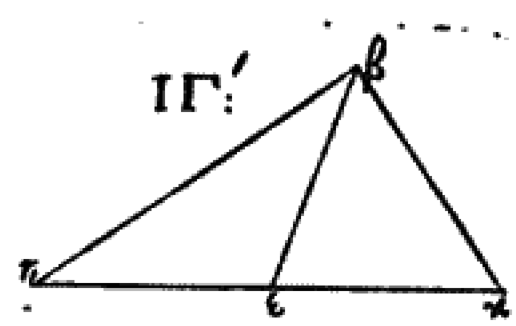
Πρότασις ΙΓ':

Ἐπὶ παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν αὐτοῦ σκελῶν, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας πρὸς τὴν βάσιν τοῦ αὐτοῦ.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ηεβ. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν βε, εη, σκελῶν, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τῆς ὑπὸ βεη, κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας πρὸς τὴν βη, πλευράν. Ἐξήχθη γὰρ ἡ ηε, ἐπὶ τὸ κ, ὥστε τὴν εκ, ἴσην εἶναι τῇ εη, ἢ εβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βκ. καὶ ἐπεὶ αἱ ηε, εβ, εκ, ἴσαι εἰσὶ, πάντως γε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εη, γραφόμενος κύκλος διέρχεται καὶ διὰ τῶν β καὶ κ, σημείων, καὶ ἡ ὑπὸ ηβκ, γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ ἐστὶ, καὶ ἑπομένως ὀρθὴ κατὰ τὴν λα': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. κατὰ δὲ τὴν λβ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ ηεβ, γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ εβκ, εκβ. ἀλλ' αἱ ὑπὸ εβκ, εκβ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ε': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ ηεβ, διπλασία ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ὑπὸ εβκ, εκβ. ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν α': τοῦ παρόντος ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ηβκ, ὀρθῆς πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βκη,

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 13.

ΙΓ'



ὑπὸ

οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ η κ, πρὸς τὴν η β. πάντως γε καὶ ἐπὶ τοῦ η ε β, τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τῆς ὑπὸ η ε β, γωνίας, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν η ε, ε β, αὐτοῦ σκελῶν, ἤτοι ἡ η κ, πρὸς τὴν η β, βάσιν τοῦ αὐτοῦ η ε β, ἰσοσκελοῦς τριγώνου, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἡμίτ: τῆς ὑπὸ η β κ, τουτέστι, τὸ ὁλικὸν πρὸς τὴν η κ, συγκειμένην ἐκ τῶν σκελῶν τοῦ η ε β, τριγ: οὕτω τὸ ἡμίτ. τῆς ἡμισείας τῆς ὑπὸ η ε β, κατὰ κορυφὴν πρὸς τὴν η β, βάσιν τοῦ αὐτοῦ η ε β, τριγ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

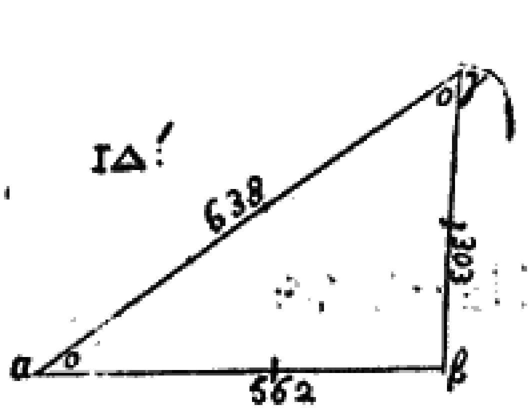
Ἰστέον δ᾽ ὅτι καὶ ἐπὶ τοῦ παρόντος μετὰ τοὺς ὅρους ἐπηχθησάν τινα θεωρήματα πρὸς τρανωτέραν τῶν παχθησομένων ἐφεξῆς προβλημάτων κατάληψιν, καὶ τάξιν διδασκαλικὴν τῆς περὶ διαλύσεως τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἐφόδου. διὸ δεῖ προειδέναι καὶ τοῦτο, ὅτι τὰ μὲν διδόμενα ἐφ᾽ ἑκάστου τριγώνου γραμμῇ ἐλαχίστῃ σημειοῦνται, τὰ δὲ ζητούμενα τζίφρᾳ. προηγήσεται δὲ ἡ περὶ τῶν ὀρθογωνίων ἔρευνα τῆς περὶ τῶν ἄλλων εἰδῶν τῶν τριγώνων.

Πρότασις ΙΔ'.

Παντὸς ὀρθογωνίου τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν δοθεισῶν τὰς λοιπὰς αὐτοῦ δύο γωνίας εὑρεῖν.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον κατὰ τὸ β, τὸ α β γ, καὶ δοθεισῶν τῶν α β, β γ, αὐτοῦ πλευρῶν, ζητηθήτωσαν αἱ πρὸς τοῖς α καὶ γ, αὐτοῦ γωνίαι. Γενέσθω δὴ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ': ἀνάλογος ζητηθήτω ἐν τοῖς κανονίοις, ἔνθα αἱ ἀπτόμεναι ἑκάστου τάξει, καὶ ὁ συστοιχῶν αὐτῷ κατὰ τὰ ἀριστερὰ ἀριθμὸς ἔσται ὁ ζητούμενος, δηλ: παραστατικὸς τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας. τούτου δ᾽ ἀφαιρουμένου ἀπὸ μιᾶς ὀρθῆς μοιρῶν δηλ: ϙ': ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσται τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας παραστατικός. οἷον ἔστω ἡ μὲν α β, πλευρὰ ποδῶν φιρ᾽ εἰπεῖν, ἢ ἄλλου τινὸς γεωμετρικοῦ μέτρου φξβ, ἡ δὲ β γ, τγ: πολλαπλασιασθήτω δὴ ὁ 303. ἐπὶ τὸν 100000.00. ἤτοι τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, καὶ ὁ γενόμενος 30300000.00 μερισθήτω ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῆς α β, πλευρᾶς δηλον: τὸν 562. καὶ τὸ πηλίκον ὁ 5391459, ζητηθήτω ἐν τοῖς κανονίοις, καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται συστοιχῶν σχεδὸν τῷ 28 καὶ 20'. δῆλον ὅτι ἡ πρὸς τῷ α, γωνία μοιρῶν ἐστι σχεδὸν 28. καὶ 20'.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 16.



ἀφαι-

ἀφαιρουμένου δὲ τοῦ 28 καὶ 20′ ἀπὸ τοῦ 90. ἐπεὶ ἐναπολείπεται ὁ 61 καὶ 40′: πάντως γε ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία μοιρῶν ἐστι 61. καὶ 40′. κατὰ γὰρ τὴν β′: τοῦ παρόντος ἐπὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευραὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς προσκειμένης γωνίας τῇ ἡγουμένῃ πλευρᾷ, καὶ ἀνάπαλιν. Ἐπεὶ οὖν κἀνταῦθα ἡ μὲν α β, δύναται ληφθῆναι ἀντὶ ὁλικοῦ ἡμιτόνου τῆς ζητουμένης πρὸς τῷ α, γωνίας, ἡ δὲ β γ, ἀντὶ ἀπτομένης τῆς αὐτῆς γωνίας κατὰ τὸν γ′: ὅρον τοῦ β′: τοῦ α′: τοῦ παρόντος. δῆλον ὅτι ἐὰν γένηται ὡς ἡ α γ, πλευρὰ πρὸς τὴν β γ, πλευρὰν, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλο τι, εὑρεθήσεται ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, καὶ διὰ τῶν κανονίων τῶν ἀπτομένων γνωσθήσεται ἡ πρὸς τῷ α, γωνία, ἧς τινος ἀφαιρουμένης ἀπὸ τῆς ὀρθῆς, γνωσθήσεται καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

```
562.—303.——10000.00
                303
     ——————————————
         3030000000
      { 2200
  562 { 5140
      { 820
      |  2580
      |   3320
      |    5100
      {       42
      {
      {5391459.
```

Εἰ δὲ βούλει ἀπονώτερον τούτου τυχεῖν, εὑρεθήτωσαν καθ᾽ ὃν προειρημένῳ ται τρόπον οἱ λογάριθμοι καὶ τῶν τριῶν ὅρων τούτων 562.303. καὶ 100000.00. καὶ οἱ μὲν τοῦ β′: καὶ γ′: ὅρου λογάριθμοι συναφθήτωσαν ἀλλήλοις, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ α′: ὅρου, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς εὑρεθήτω ἐν τοῖς κανονίοις, καὶ ὁ κατὰ τὰ ἀριστερὰ αὐτῷ συστοιχῶν ἀριθμὸς ἔσται ὁ ζητούμενος. ὁ λόγος σαφὴς ἐκ τῶν προειρημένων περὶ τῶν λογαρίθμων.

```
 274973.63. λογάρ: ποδ: 562
 248144.26. λογάρ: ποδ: 303
1000000.00. λογάρ: ὁλικοῦ ἡμιτόνου.
——————————
1248144.26. σύναψις β′: καὶ γ′: ὅρου.
 274973.63
——————————
0973170.63. λογάρ: γων: μοιρ: 28.20′
```

Πρότασις ΙΕ:

Παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου δοθείσης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν, καὶ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν, τὰς λοιπὰς δύο αὐτοῦ γωνίας εὑρεῖν.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον κατὰ τὸ β, τὸ α β γ, καὶ δοθείσης τῆς τε β γ, αὐτοῦ πλευρᾶς καὶ α γ, ὑποτεινούσης τὴν πρὸς τῷ β, ὀρθὴν γωνίαν. Ζητηθήτωσαν αἱ πρὸς τοῖς α, γ, λοιπαὶ γωνίαι. Γενέσθω δὴ ὡς ἡ α γ, πρὸς τὴν γ β, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, καὶ ὁ εὑρεθεὶς