



Τ Ρ Ι Γ Ω Ν Ο Μ Ε Τ Ρ Ι Α Σ
Β Ι Β Λ Ι Ο Ν Δ Ε Υ Τ Ε Ρ Ο Ν
Π Ε Ρ Ι Τ Ω Ν Κ Α Λ Ο Τ Μ Ε Ν Ω Ν Λ Ο Γ Α Ρ Ι Θ Μ Ω Ν .

Π Ρ Ο Ο Ϊ Μ Ι Ο Ν .

Η Α'όρετος ἄμα καὶ ἀκάθεκτος τῶν εἰς τὰ Μαθηματικά προβλήματα τε καὶ θεωρήματα τὸν ἅπαντα δαπανησάντων βίον ἔφισις διαφέρει καὶ πῆς μηχανῆς, καὶ πολυτρόπως τὰς ἐφόδας ἐφ' ἑκάστης αὐτοῖς ἐφευρε πραγματείας, ὅπως δὲ αὐτῶν ἄχρηστῆρον τὰ εἰσδηποτουῦ μαθηματικά προβλήματα διαλύειν ἔχωσι, καὶ τὴν τῶν θεωρημάτων γνώσιν ἐντελῆ προξίξεται. καὶ τὰ μὲν ἐπισκιασμένα καὶ πολλοῖς ἄγνωστα ἀνακαλύπτειν, τὰ εὐσχερῆ δὲ, καί πως ἀνθρωπίνῃ ἀνέφικτα διανοία δοκαιοῦτα, ἢ ὅλως παρά τισιν ἀδύνατα λογιζόμενα, ἄχρηστε ἀποδεικνύειν, καὶ δυνατὰ πᾶσι τοῖς ποιεῖν ἐν τέτοις ἐθέλεσιν ἀπεργάζεσθαι. Διὸ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς παρόσης πραγματείας εὐρηται παρ' αὐτοῖς τὰ ἠμίτονα, αἱ ἀπτόμεσαι καὶ αἱ πέμψουσαι ἑκάστη τῶν, ὡς εἰς διάλυσιν ἑξηγῶντων ἀριθμῶν τε καὶ σφαιρικῶν, ὅτι μάλιστα τῆς αὐτῶν συμπλέξεως χρήσιμος. Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ τέχνη χρησιμὴ δυσχερὴς ἐστὶ καὶ ἐπίπονος, μὴ παντάπασιν ἐφισυχάσασθαι εἰς τὴν τέχνην εὐρίσιν, καὶ ἄλλω τινα προσπειροσθέντων ἔφοδον, ἄχρηστῆραν τε ἄμα καὶ σιωπερωτέραν, τὴν τῶν λογαρίθμων φημὶ σωτήριον καὶ ῥυθμόν. Εἰσὶ δὲ λογαρίθμοι καὶ λέγονται ἀριθμοὶ τινες ἀριθμητικῶς ἀνάλογοι, τοῖς Γεωμετρικῶν ἀναλογίαν τηρεῖν παρακτιθέμενοι, ὧν ἡ χρησιμὴ πολλῶν πῆς τῶν ἠμιτόνων, ἀπτομέων τε καὶ πέμψουσαν ἄχρηστῆρα. ὅπερ γὰρ ἐν τοῖς Γεωμετρικῶν ἀναλόγοις διὰ πολλαπλασιαστικῆς καὶ διαιρέσεως ἐν τῇ αἰ. τῆς Ἀριθμητικῆς πραγματείας μίρει ἐδιδάχθημεν ποιεῖν εἰς εὐρίσιν τῶν ἐξῆς ἀναλόγων ἀριθμῶν, ὡτ' αὐτὸ ποιεῖν ἔχομεν καὶ διὰ τῶν λογαρίθμων ἀπανώτερόν τε καὶ ἄχρηστῆρον. Ἐξωστω γὰρ ἐπὶ παραδείγματος Γεωμετρικῶν μὲν ἀνάλογοι ἀριθμοὶ οἱ ὑπὸ τῷ α, σοικεῖν, ἀριθμητικῶς δὲ οἰσυστοιχοῦντες τέτοις καὶ πλάτος ἦτοι μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντες, ὡς οἱ ὑπὸ τῷ β καὶ ε, ἢ δυάδι, ὡς οἱ ὑπὸ τῷ γ καὶ ζ, ἢ

a	β	γ	δ	ε	ζ	η.
1	1.	2.	3.	0.	0.	0.
2	2.	3.	4.	1.	1.	1.
4	3.	5.	7.	2.	3.	4.
8	4.	7.	10.	3.	5.	7.
16	5.	9.	13.	4.	7.	10.
32	6.	11.	16.	5.	9.	13.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ. 429

ἔξιάδῃ ὡς οἱ ὑπὸ τῷ δ κὴ η, ἢ ἄλλῳ τινὶ ἀριθμῷ . οἱ μὲν οὖν ὑπὸ τῷ β κὴ γ κὴ δ, κὴ λοιπῶν στοιχείων κείμενοι , Λογαρίθμοι τῷ ὑπὸ τῷ α, κειμένῳ λέγονται . δυνάμει δὲ οἱ αὐτοὶ ἢ ἀπὸ μονάδος ἀρχεῖν , ὡς οἱ ὑπὸ τῷ β γ δ, ἢ ἀπὸ τζήφρας, ὡς οἱ ὑπὸ τῷ ε ζ η. Τίνας δὲ τῶν ἀριθμῶν Γεωμετρικῶς ἀναλογίᾳ πρῶσι , καὶ τίνας ἀριθμητικῶς , εἶρηται ἐν τῇ περὶ ἀναλογιῶν τῷ β' : τμήματα τῆς ἀριθμητικῆς .

Τὸ δὲ χρήσιμον τῶν Λογαρίθμων τοιούτων τι . δοθέντων μὲν γὰρ δύο τιῶν ἀριθμῶν τῷ ἐν Γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ , ζητεῖται πάντως ὁ γ' : δοθέντων δὲ τριῶν , ζητεῖται ὁ δ' : εἰς εὐρεσιν δὲ τῶν ζητούμενων , εὐὲν μὲν δύο εἰσὶν εἰ δοθέντες , ὁφείλει δὲ β' : εἶθ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῆναι , κὴ ὁ γνωστός μειωθῆναι ἐπὶ τὸν α' : εὐὲν δὲ τρεῖς , τὸν β' : καὶ γ' : δεῖ ἀλλήλους πολλαπλασιάζειν , κὴ τὸν γνωστόν ἐπὶ τὸν α' : ὁμοίως μείζειν , τῆς ἐν αὐτοῖς ἀναλογίας τεταγμένης ἕσης , ὡς ἐν τῇ α' : τῆς ῥηθείσης εἶρηται πραγματείας , εὐὲν περὶ Μιθόδων ἢ ἑρμηνεία ἐγγίνετο . Ἐπεὶ δὲ πᾶσι ἐπίπορον ὅτι μάλιστα τοῖς διὰ πλειόνων σφαιραμετέροις χαρακτῆρων , κὴ εὐδὲ ἢ τυχεῖσα συμβαίνει πολλάκις ἀπάτη τοῖς μὴ μετ' ἀκριβείας ἀπάσης κὴ προσοχῆς ποιῶσι τὰς πράξεις . ἔξισίσοι λαμβάνειν ἀπὸ τῶν δοθέντων τὰς συστοιχουῦντας αὐτοῖς λογαρίθμους , καὶ μὲν δύο ὧσιν οἱ οἱ δοθέντες , διπλασίου τὸν τῷ β' : λογαρίθμον , καὶ τῷ γνωμένῳ ἀφίλει τὸν τῷ α' : , καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς παραθήσει σοι , τὸν ζητούμενον . εἰ δὲ γὰρ οἱ δοθέντες τρεῖς εἰσὶν ἀριθμοὶ , σιώαρον τὸν γ' : τῷ β' : λογαρίθμῳ , καὶ τῷ γνωμένῳ ἀφίλει τὸν α' : , καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς παρίξει σοι τὸν δ' : καὶ Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν . ὡσπερ γὰρ ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ εὐὲν τρεῖς ὧσιν εἰ ἀριθμοὶ , ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ πρὸ ἀπὸ τῶν μέσων , εὐὲν δὲ τέσσαρις , ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων , ἔτω καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ εὐὲν μὲν τρεῖς ὧσιν οἱ ἀριθμοὶ , ὁ ἐκ τῶν ἄκρων διπλασιόσῃ τῷ μέσῳ . εὐὲν δὲ τέσσαρις , ὁ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσος τῷ ἐκ τῶν μέσων , ὡς ἐν τοῖς ἐξῆς δηλωθήσεται .

Διττῷ δὲ γένει εἰσὶν οἱ Λογαρίθμοι , οἱ μὲν γὰρ κοινοὶ , οἱ δὲ τριγωνομετρικοὶ προσαγορεύονται . κὴ κοινοὶ μὲν εἰσὶν κὴ λέγονται Λογαρίθμοι , εἰ τοῖς καὶ φυσικῶς ἀρόδον συστοιχουῦντες ἀριθμοῖς , τριγωνομετρικοὶ δὲ οἱ τῶν ἡμιτόνων , ἀπτομένων τε καὶ τιμνυσῶν καλύμενοι Λογαρίθμοι , περὶ ὧν ἐνταῦθα ὁ λόγος . Ἴνα δὲ ἐπιτελεστέρα γένηται ἢ περὶ τῶν λογαρίθμων ἑρμηνεία , περὶ ἑρμηνείας τῶν καὶ τὸ δυνατὸν ἐρῶμεν . Ἐπεὶ δὲ εὐδὲ ἀληθινὸν οἶμαι Μαθηματικῇ πραγματεία οἰκειότερον πᾶσι ποιεῖν , ὡς ἐν τοῖς τῶν ἡμιτόνων , ἀπτομένων τε καὶ τιμνυσῶν κανονίοις κειμένων καὶ τῶν αὐτῶν λογαρίθμων . ὡς εἰς ἐπιτελεστέραν τῶν τοιούτων κανονίων ἀναγκαῖα πάντως ἢ ἀνάπτυξις τῷ ῥόπῳ τῆς ἑρμηνείας , μὴ μόνον τῶν ἡμιτόνων , ἀπτομένων τε καὶ τιμνυσῶν , ἀλλὰ γὰρ καὶ τῶν λογαρίθμων τῶν αὐτῶν . Διὸ δὴ μᾶλλον τῶν ἑρμηνείων ἐπιταί κὴ ἢ περὶ

ὄρει-

Δ': Το τινός ὀξείας γωνίας ἡμίπλευρον, λέγεται εἶναι ἡμίπλευρον καὶ τῆς ἀμβλείας ἔστι τῷ παραπληρώματος αὐτῆς μέχρι μοιρῶν ρπ, ὥστε εἶναι ἀμφοτέρων δύο συνίστασθαι ὀρθὰς γωνίας. εἴαν ἴαν ἡ ὀξεία γωνία μοιρῶν ἦ λ', τὸ ἡμίπλευρον τῆς αὐτῆς λέγεται ἡμίπλευρον καὶ γωνίας μοιρῶν ρν.

Πρότασις Α':

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον ὡσιν, ὁ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν μέσων συνάψα.

Ἐῴωσαν ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον οἱ α β γ δ, ὥστε εἶναι ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ἔστω δὲ καὶ διαφορὰ τῷ π β, πρὸς τὸν α, καὶ τῷ δ, πρὸς τὸν γ, ὁ ε. λέγω ὅτι ὁ ὑπὸ τῶν α δ, ἄκρων γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν β, καὶ γ, μέσων γινόμενῳ. ἀφαιρήσω γὰρ ὁ ε, ἀπὸ τῷ β, καὶ δ, καὶ ἐναπολειφθήσονται πάντως οἱ η, θ, ἀριθμοὶ, ὁ μὲν ἴσος τῷ α, ὁ δὲ τῷ γ. εἴπα συναφθήτω ὁ μὲν α, τῷ θ, ὁ δὲ γ, τῷ η, καὶ γινέσονται οἱ κ, λ, ἴσοι. εἴαν γὰρ ἴσοις ἴσα προσεθή, τὰ ὅλα εἰσὶν ἴσα. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ ε, διαφορὰ ἐστὶ τῷ π β, πρὸς τὸν α, καὶ τῷ δ, πρὸς τὸν γ, προσεθήτω ὁ αὐτὸς ε, ἐκατέρῃ τῶν κ, καὶ λ, καὶ γινέσονται πάντως οἱ μν, ἴσοι καὶ τὸ ῥηθὲν Β': ἀξίωμα. ἀλλ' ὁ μὲν ν, εἰσὶν ὁ ἐκ τῶν ἄκρων α, καὶ δ, σύγκειται γὰρ ἐκ τῶν ε θ α, καὶ ὁ ε, καὶ θ, ποιῶσι τὸν δ. ὁ δὲ μ, ὁ ἐκ τῶν β, καὶ γ, μέσων. σύγκειται γὰρ ἐκ τῶν ε η γ, καὶ ὁ ε, καὶ η, ποιῶσι τὸν β. ἄρα εἴαν τέσσαρις ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον ὡσιν, ὁ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν μέσων.

a.	β.	γ.	δ.
4.	6.	5.	7.
ε.	2.	ε.	2.
η.	4.	θ.	5.
γ.	5.	α.	4.
κ.	9.	λ.	9.
ε.	2.	ε.	2.
μ.	11.	ν.	11.

Πρότασις Β':

Ἐὰν ῥεῖς ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον ὡσιν, ὁ ἐκ τῶν ἄκρων γινόμενος διπλάσιός ἐστι τῷ μέσῳ.

Ἐῴωσαν οἱ α β γ, ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον, διαφορὰ δὲ τῷ π β, πρὸς τὸν α, καὶ τῷ γ, πρὸς τὸν β, ἔστω ὁ δ. λέγω τὸν ἐκ τῶν α, καὶ γ, ἄκρων γινόμενον εἶναι διπλάσιον τῷ β. ἔστω γὰρ καὶ διαφορὰ τῷ γ, πρὸς τὸν α, ὁ ε. εἴπα ἀφαιρήσω ὁ μὲν δ, ἀπὸ τῷ β, ὁ δὲ ε, ἀπὸ τῷ γ, καὶ ἐναπολειφθήσονται οἱ ζ, καὶ η, ὧν ἕκαστος πρὸς ἴσος εἶναι τῷ α. ἐπεὶ καὶ τῶν ὑπόθεσιν ὑπεροχὴ τῷ μὲν β, πρὸς τὸν α. εἰσὶν ὁ δ, τῷ δὲ γ, πρὸς τὸν αὐτὸν α, ὁ ε, ὥστε οἱ ῥεῖς ἀριθμοὶ ζ η α, ἴσοι εἰσὶν, οἱ δὲ α ζ, ἄκροι συναπτόμενοι ἀλλήλοις διπλάσιον ποιῶσι

α	β	γ.	δ	ε.
4	6	8.	2	4.
		2	4.	
ζ.	4.	η.4.	α.	4.
ζ.	4.	θ.8.		
δ.	2.	ε.	4.	
λ.	6.	κ.	12.	

432 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡ: ΠΡΩΤΟΝ

$\tau\epsilon\ \eta$, μίση. Συμμετρῶς δὴ καὶ ποιείτωσαν τὸν θ , ὁ θ , ἄρα διπλασιόσ' ἐ-
 σι $\tau\epsilon\ \eta$, ἀλλὰ καὶ ὁ ϵ , διπλασιόσ' ἐσι $\tau\epsilon\ \delta$, ὡς ὁφόμεθα. ἄρα εἰὰν ὁ ϵ , τῷ θ ,
 ἄρωςιθῆ, καὶ γινῆται ὁ κ , τῷ δὲ η , ὁ δ , καὶ γινῆται ὁ λ , παύτως γὰρ καὶ ὁ κ ,
 διπλασιόσ' ἐσι $\tau\epsilon\ \lambda$. ἀλλ' ὁ μὲν κ , ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν γ , καὶ α , ἄκρων γνο-
 μῶν, σύγκειται γὰρ ἐκ τῶν η καὶ θ , καὶ ὁ η , μὲν $\tau\epsilon\ \epsilon$, ἴσος ἐστὶ τῷ γ , ὡς ἐκ
 τῆς κατασκευῆς δῆλον. ἀφαιρῶμεν γὰρ τῷ ϵ , ἀπὸ τῷ γ , ἐναπολείπεται ὁ η ,
 ὁ δὲ λ , ἴσος ἐστὶ τῷ β , μίση, σύγκειται γὰρ ἐκ τῶν ζ , καὶ δ . ἄρα ὁ ἐκ τῶν
 α , καὶ γ , ἄκρων γνομέων διπλασιόσ' ἐσι $\tau\epsilon\ \beta$, μίση.

Ὅτι δὲ ὁ ϵ , διπλασιόσ' ἐσι $\tau\epsilon\ \delta$, δῆλον, οἱ γὰρ $\alpha\beta\gamma$, δοθέντες ἀριθμοὶ
 ἀριθμητικῶς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ ἴση ὑπεροχὴ ὑπερέχει ὁ γ , τῷ β , καὶ ὁ β ,
 $\tau\epsilon\ \alpha$, ὡς διπλασιαζόμενων τῶν ὄρων, διπλασιαζέται καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῷ γ , ἀρὸς
 τῷ α . ἢ τῷ γ , ἄρα ὑπεροχὴ ἀρὸς τὸν α , τῆς τῷ β , ὑπεροχῆς ἀρὸς τὸν αὐτὸν
 α , διπλασία ἐστίν.

Α Λ Λ Ω Σ.

Εἰλήφθω ὁ δ , ἴσος τῷ β . καὶ ἐπεὶ ἴση ὑπεροχὴ ὑπερέχει ὁ γ , τῷ β , τῷ α , καὶ
 ὁ γ , τῷ β , καὶ τὴν ὑπόθεσιν, δῆλον, ὅτι ὁ β , τῷ αὐτῷ ὑπεροχὴ ὑπερέχει
 μὲν τοῦ α , ὑπερέχεται δὲ ὑπὸ τοῦ γ . ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α , ἀρὸς τὸν
 β , ὁ δ , ἀρὸς τὸν γ . Εἰὰν δὲ πᾶσαι ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ὡς $\alpha\ \beta\ \delta\ \gamma$
 ἀνάλογον, ὁ ἐκ τῶν ἄκρων γνομέων ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν μίσην 4 6 6 8
 καὶ τὴν ἀνωτέρω, δῆλον, ὅτι ὁ ἐκ τῶν α , καὶ γ , ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ
 τῶν β , καὶ δ , ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν β , καὶ δ , διπλασιόσ' ἐσι $\tau\epsilon\ \beta$, ἄρα καὶ ὁ ἐκ τῶν
 α , καὶ γ , ἄκρων διπλασιόσ' ἐσι $\tau\epsilon\ \beta$, μίση. εἰὰν ἄρα τρεῖς ἀριθμοὶ ἀριθμη-
 τικῶς ἀνάλογον ὡς $\alpha\ \beta\ \gamma$, ὁ ἐκ τῶν ἄκρων γνομέων διπλασιόσ' ἐσι $\tau\epsilon\ \beta$, μίση.

Πρότασις Γ':

Εἰὰν ὡς ἢ ὅποσοιῦν ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον, ἢ τῷ ἑκάστῳ πα-
 ρὰ τοῦ πρώτου διαφορὰ πρὸς τὴν τῷ δευτέρῳ παρὰ τοῦ α': τοῦ αὐ-
 τῷ ἔχει λόγον, ὅν τὰ διαστήματα πάντα πρὸς ἑμ καὶ Γεωμετρι-
 κῶς ἀνάλογον.

Ἐστωσαν ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον οἱ $\alpha\ \beta\ \gamma$.

	α.	2.	
δεξὴ λέγω τὴν η , ἔχαστε ἀριθμὸν παρὰ τὸν α , ἀρῶ-	β.	4.	θ. 2.
την διαφορὰν τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ἀρὸς τὴν τοῦ	γ.	6.	
δεξιῆς διαφορὰν παρὰ τὸν α , ἀρῶτε, ὅν καὶ τὰ μεταξὺ	δ.	8.	
αὐτῶν διαστήματα ἀρὸς ἑμ κατὰ γεωμετρικῶς ἀναλογίαν.	ε.	10.	
Ἐστω γὰρ διαφορὰ τοῦ β , ἀρὸς τὸν α , ὁ θ . καὶ ἐπεὶ ἡ	ζ.	12.	
αὐτὴ διαφορὰ ἐστὶ καὶ τῷ γ , ἀρὸς τὸν β , καὶ τῷ δ , ἀρὸς	η.	14.	κ. 12.
τὸν γ , καὶ τῷ ϵ , ἀρὸς τὸν δ , καὶ τῷ ζ , ἀρὸς τὸν ϵ , καὶ τῷ	λ.	6.	μ. 1. κ. 12.

η, πρὸς τὸν ζ, πάντως γε ὁσάκις ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ μεταξὺ τῶ β': καὶ α': διάστημα, τοσάκις πολλαπλασιασθήσεται καὶ ἡ τῶ β': πρὸς τὸν α': διαφορὰ. ὡς ὁ ἀριθμὸς πῶν διαστημάτων πῶν δοθέντων ἀριθμῶν, καὶ ἡ τῶ η, ἔχεται ἀριθμῶ διαφορὰ πρὸς τὸν α': ἰσάκις εἰς πολλαπλάσια τῶ μεταξὺ τῶ β': καὶ α': ἀριθμῶ διαστήματος, καὶ πῶς θ, τῶ β': πρὸς τὸν α': διαφορᾶς. καὶ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια ἐν τῇ αὐτῇ εἰς ἰσάκις λόγοι γεωμετρικῶς πρὸς τὰ ὧν εἰσιν ἰσάκις πολλαπλάσια. ἄρα ὁ ἀριθμὸς πῶν διαστημάτων πῶν δοθέντων ἀριθμῶν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ μεταξὺ τῶ β': καὶ α': διάστημα καὶ γεωμετρικῶς ἀναλογίας, ὅν καὶ ἡ τῶ η, ἔχεται ἀριθμῶ διαφορὰ πρὸς τὸν α, πρῶτον.

Πρότασις Δ':

Ἐὰν ἴωσιν ὅποσοιῦν ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἐξῆς ἀνάλογον, ἡ τῶ ἔχεται πρὸς τὸν α': διαφορὰ μεριζομένη ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶ διαστημάτων παρέξει τῶ τῶ μείζονων πρὸς τῶ ελαττομας διαφορὰ.

Ἐῶσαν οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἐξῆς ὄντες ἀνάλογον. Λέγω τῶ τῶ ἔχεται η, διαφορὰν παρὰ τὸν α, πρῶτον μεριζομένην ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν πῶν διαστημάτων πῶν αὐτῶν ἀριθμῶν παρέξει τῶ διαφορὰν κατ' ἰσὺν ὑπερίχει ὁ, τε β, τῶ α, καὶ ὁ γ, τῶ β, καὶ τῶ λοιπῶν ἕκαστος τῶ πρὸ αὐτῶ. Ἀφηρήθω γὰρ ὁ α, τῶ η, καὶ ἐναπολείφθῃται διαφορὰ, εἴτ' οὐδ' ὑπεροχὴ τῶ η, πρὸς τὸν α, ὁ κ. ἔσω δὲ καὶ ἀριθμὸς τῶ διαστημάτων τῶ δοθέντων ἀριθμῶν ὁ λ. καὶ ἵππει καὶ τῶ ἀνωτέρω ἡ τῶ η, πρὸς τὸν α, διαφορὰ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον γεωμετρικῶς πρὸς τῶ τῶ β, παρὰ τὸν α, διαφορὰ, ὅν ὁ ἀριθμὸς πῶν διαστημάτων πρὸς ἐν διάστημα. ἔσαι πάντως ὡς ὁ ἀριθμὸς πῶν διαστημάτων ἦτοι ὁ λ, πρὸς ἐν διάστημα, ἦτοι τὸ μ, ἡ τῶ η, πρὸς τὸν α, διαφορὰ, δηλ: ὁ κ, ἀριθμὸς πρὸς τῶ τῶ β, παρὰ τὸν α, διαφορὰ. ὡς πολλαπλασιαζομένη τῶ κ, ἐπὶ τὸν μ, καὶ τὸν κινύνα πῶς μεθόδου πῶν ξιῶν, καὶ τῶ γενομένη ἐπὶ τὸν λ, μεριζομένη, δοθήσεται ὁ δ': ἡ τῶ β, δηλ: πρὸς τὸν α, διαφορὰ. Ἐπει δὲ ὁ κ, ἐπὶ τὸν μ, πολλαπλασιαζόμενος ὁ αὐτὸς διαμύνει, διάτοι τῶ εἰάν ὁ κ, ἦτοι ἡ τῶ η, πρὸς τὸν α, διαφορὰ ἐπὶ τὸν λ, ἀριθμὸν πῶν διαστημάτων μεριδῆ ἴσους, δοθήσεται ἡ τῶ β, πρὸς τὸν α, διαφορὰ. ἡ αὐτὴ δὲ διαφορὰ ἔστι καὶ πῶν λοιπῶν διαφορὰ. ἄρα εἰάν ὡσιν ὅποσοιῦν ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς, καὶ τὰ ἐξῆς.

Πρότασις Ε΄

Εὰν μὲν τέσσαρες ἀριθμοὶ γεωμετρικῶς ἀνάλογον ὦσιν, οἱ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν ἄκροι ἀλλήλοις συσπτόμενοι ἴσοι εἰσὶ πῶς μέσοις ἀλλήλοις καὶ αὐτοῖς συσπτόμενοι. εἰ μὲν δὲ φῆς διπλασίοι τοῦ μέσου.

Ἐστωσαν δὲ οἱ $\alpha \beta \gamma \delta$, ἀριθμοὶ γεωμετρικῶς ἀνάλογον, ὡς ὁ α , πρὸς τὸν β , ὁ γ , πρὸς τὸν δ . Λογάριθμοι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ $\epsilon \zeta \eta \theta$. Λέγω ὅτι οἱ ϵ , καὶ θ , ἀλλήλοις συσπτόμενοι ἴσοι εἰσὶ πῶς $\zeta \eta$, ἀλλήλοις συσπτόμενοι. καὶ γὰρ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα οἱ $\epsilon \zeta \eta \theta$, ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς εἰσὶν ἀνάλογον, πῶν δὲ ἔπος ἔχοντων, εἰάν τεσσαρες ἀριθμοὶ ὦσιν, ὁ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ πρὸς τὸν ἐκ τῶν μέσων καὶ τὸν ἄκρον ἴσος ἐστὶ πρὸς τὸν ἐκ τῶν μέσων. ἄρα ὁ ἐκ τῶν ϵ , καὶ θ , ἄκρων ἴσος ἐστὶ πρὸς τὸν ἐκ τῶν ζ , καὶ η , ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν ϵ , καὶ θ , ὡσπερ καὶ ὁ ἐκ τῶν ζ , καὶ η , γίνεται, συσπτόμενοι ἀλλήλοις τῶν αὐτῶν. ἄρα συσπτόμενοι ἀλλήλοις οἱ ϵ , καὶ θ , ἴσοι εἰσὶ πῶς ζ , καὶ η , συσπτόμενοι καὶ αὐτοῖς ἀλλήλοις. Ὀμοίως δειχθήσεται καὶ τὸ β΄: δοθέντων γὰρ τῶν $\alpha \beta \gamma$, ἐπεὶ οἱ $\epsilon \zeta \eta$, ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς εἰσὶν ἀνάλογον, δῆλον ὅτι οἱ ϵ , καὶ η , ἀλλήλοις συσπτόμενοι διπλασίοι εἰσὶ τῷ ζ . εἰάν τεσσαρες ἀριθμοὶ, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν μὲν δοθέντων λογαρίθμων, ἀριθμήσεται καὶ ὁ δ΄: ἀφαιρέμενος τῷ α : ἀπὸ τοῦ γινόμενου ἔκπε τῷ β΄: καὶ γ΄: ἀλλήλοις συσπτόμενοι. δύο δὲ ὁμοίως δοθέντων, ἀριθμήσεται ὁ γ΄: εἰάν ὁ β΄: διπλασιασθῆ, καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιρηθῆ ὁ α :

Πρότασις ς΄

Εὰν δύο ἀριθμοὶ ἀλλήλους πολλαπλασιάζοντες ποιῶσιν τινα, οἱ τούτων λογάριθμοι ἴσοι εἰσὶ πρὸς τὸν λογάριθμον τούτου ὑπὸ αὐτῶν γενομένου καὶ πρὸς τῆς μονάδος, εἰ μὲν δὲ τῆς μονάδος πρόσκηται ἀριθμὸς, ἀπὸ τῶν λογαρίθμων λαμβανόμενος.

Ἐστωσαν δὲ οἱ $\alpha \beta$, ἀριθμοὶ, καὶ πολλαπλασιάσασθε ἀλλήλους ποιείτωσαν τὸν γ . ἔστωσαν δὲ καὶ λογάριθμοι τῶν α , καὶ β , οἱ ϵ , καὶ ζ , ἀπὸ τῆς δ , μονάδος ἀρχόμενοι, καὶ ἴση ἀλλήλους ὑπεροχῇ ὑπερέχοντες. λέγω ὅτι οἱ ϵ , καὶ ζ , λογάριθμοι ἴσοι εἰσὶ πρὸς τὸν γ , λογάριθμον καὶ πρὸς τῆς μονάδος. καὶ γὰρ τὸν δ πολλαπλασιάσας καὶ τὸν β , πῶς

δ .	α .	β .	γ .
1.	4.	6.	24.
1.	2.	3.	4.
θ .	ϵ .	ζ .	η .

Ε.Υ.Δ. ΠΡΟΣΚ.Τ.Π.
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ. 435

πιποίηκε τὸν γ, ἔστιν ὡς ἡ δ, μονὰς πρὸς τὸν α, πολλαπλασιάσασα, ὁ β, πολλαπλασιασθεὶς πρὸς τὸν γ, ἔξαχθεύτα· ὡςτε πέντε ἀριθμοὶ οἱ δ α β γ, Γεωμετρικῶς εἰσιν ἀνάλογοι, ἔχοντες λογαρίθμους πρὸς θ ε ζ η, ἄρα καὶ τὴν ἀνωτέρω οἱ θ κ η, ἄκροι ἀλλήλοισι συσπτόμενοι ἴσοι εἰσὶ τοῖς ε κ ζ, μέσοις ἀλλήλοισι συσπτομένοις. ἀλλ' οἱ ε κ ζ, λογαρίθμοι εἰσὶ τῷ α κ β, ἀλλήλους πολλαπλασιασάντων ἀριθμῶν, ὁ δὲ η, τῷ ὑπ' αὐτῶν γυνομένῳ, καὶ ὁ θ, πρὸς μονάδος. εἰ δὲ ἄρα δύο ἀριθμοὶ ἀλλήλους, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ὅταν δὲ τῇ μονάδι προσκίπται τζίφρα ἀντὶ λογαρίθμου, οἱ πᾶν πολλαπλασιαζόντων λογαρίθμοι εἰσὶν ἴσοι τῷ ὑπ' αὐτῶν γυνομένῳ. Ἐποκείθω γὰρ τῇ δ, μονάδι τζίφρα, τοῖς δὲ α κ β, ἀριθμοῖς οἱ κ καὶ λ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ δ, μονὰς πρὸς τὸν α, ἔστι καὶ ὁ β, πρὸς τὸν γ, δῆλον ὅτι καὶ τὰ εἰρημίνα ὁ πρὸ γ, λογαρίθμος μὲν τῷ πρὸς μονάδος λογαρίθμῳ ἴσος ἐστὶ τοῖς κ καὶ λ, λογαρίθμοις τῶν α κ β, πολλαπλασιαζόντων ἀλλήλους ἀριθμῶν. ἀλλ' ἡ τζίφρα ἐδέσσει προσίθῃσιν, ἄρα οἱ κ καὶ λ, ἀλλήλοισι συσπτόμενοι ἴσοι εἰσὶ τῷ μ, τῷ ὑπ' αὐτῶν γυνομένῳ λογαρίθμῳ.

δ.	α.	β.	γ.
1.	4.	6.	24.
0.	1.	2.	3.
	κ.	λ.	μ.

Πρότασις Ζ΄:

Παμπὸς ἀριθμὸς ὁ λογαρίθμος διπλασιαζόμενος, εἰ μὴ ἀπὸ τῷ γυνομένῳ ὁ πρὸς μονάδος ἀφαιρεθῆ λογαρίθμος, ἴσος ἐστὶ τῷ λογαρίθμῳ τῷ ὑπ' αὐτῷ τετραγώνῳ.

Ἐστω τυχῶν ἀριθμὸς ὁ α, ὁ λογαρίθμος ὁ β, καὶ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος ποιείτω τὸν γ. Λέγω ὅτι ὁ β, διπλασιαζόμενος, εἰ μὴ ἀπὸ τῷ γυνομένῳ ἀφαιρεθῆ ὁ πρὸς μονάδος λογαρίθμος, ἴσος ἐστὶ τῷ τῷ γ, λογαρίθμῳ. Εἰλήφθω γὰρ ὁ δ, ἴσος τῷ α, καὶ ἔστω πρὸς ε, μονάδος λογαρίθμος ὁ ζ. καὶ ἐπεὶ ὁ α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας, τὸν γ, πιποίηκεν, ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω οἱ τῷ α κ δ, λογαρίθμοι ἀλλήλοισι συσπτόμενοι ἴσοι εἰσὶ τῷ π τῷ γ, λογαρίθμῳ καὶ τῷ πρὸς μονάδος. ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν λογαρίθμων τῷ α καὶ δ, γυνομένους διπλασιάζει τῷ λογαρίθμῳ τῷ α. ἄρα διπλασιαζόμενος ὁ λογαρίθμος τῷ α, ἴσος ἐστὶ τῷ π τῷ γ, λογαρίθμῳ καὶ τῷ πρὸς μονάδος. ἔχοντες οὖν ἐγνωσμένον τὸν λογαρίθμον τῷ α, καὶ τῶν διπλασιάζοντες, εἰ μὴ ἀφίλωμεν ἀπὸ τῷ γυνομένῳ τὸν πρὸς μονάδος λογαρίθμον.

ε.	α.	δ.	γ.
1.	4.	4.	16.
ζ.	β.	β.	
1.	2.	2.	4.

436 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΙΑΣ ΜΕ'Ρ. ΠΡΩΤΟΝ

αριθμὸν δεδομένον καὶ αὐτὸν, ἀρήσομεν τὸν λογαριθμὸν τῷ γ. παυτὸς ἄρα ἀριθμὸς ὁ λογαριθμὸς διπλασιαζόμενος καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τῆς δῆλον, ὅτι δοθέντος τῷ λογαρίθμῳ τῷ τετραγώνῳ, εἰ μὴ καὶ τῇ μονάδι προσκηται ἀριθμὸς ἀντὶ λογαρίθμῳ, προσιδεμένῳ τῷ τῆς μονάδος λογαρίθμῳ τῷ τετραγώνῳ λογαρίθμῳ, ὁ γινόμενος διπλασιόσῃσι τῷ τῆς ρίζης λογαρίθμῳ, ὡς εἰς δύο ἐκείνῳ διηρημένῳ, γινώσκειται ὁ τῆς ρίζης λογαριθμὸς. εἰ δὲ τῇ μονάδι προσκηται τρίπλα, ὁ τῷ τετραγώνῳ λογαριθμὸς μόνος διπλασιόσῃσι τῷ τῆς ρίζης. διὸ δεῖ ἐκείνον δίχα διαιρεῖν, καὶ γινώσκειται ὁ τῆς ρίζης λογαριθμὸς.

Πρότασις Η'.

Ὁ τῆς ρίζης λογαρίθμῳς τριπλασιαζόμενος ἴσος ἐστὶ τῷ τῷ κύβῳ λογαρίθμῳ, καὶ τῷ διπλασίῳ ἀριθμῷ τῷ τῆς μονάδος λογαρίθμῳ.

Ἐστω δὲ ἀριθμὸς ὁ α, ἢ λογαριθμὸς ὁ β, καὶ εἰ αὐτὸν μὲν πολλαπλασιάσας, ποιείτω τὸν γ, τετραγώνον, ἢ λογαριθμὸς ὁ ε. τὸν γ, δὲ πολλαπλασιάσας ποιείτω τὸν δ, κύβον. Λέγω τὸν β, λογάρ. τῷ α, ἀριθμῷ, ρίζαν ὄντα τῷ γ, τριπλασιαζόμενον ἴσος εἶναι τῷ τῷ δ, λογαρίθμῳ μὲν τῷ διπλασίῳ ἀριθμῷ τῷ τῆς μονάδος λογαρίθμῳ. Ἐστω γὰρ μονὰς ἡ θ, καὶ ταύτης λογαριθμὸς ὁ η, καὶ ἐπεὶ ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασιάσας πεποίηκε τὸν δ, πάντως γε καὶ τὸν ε' τῷ παρόντος οἱ β καὶ ε, ἴσοι εἰσὶ συναρμότεροι συναρμότεροις τοῖς η καὶ ζ. κοινῶ δὲ λαμβανομένῳ τῷ η, εἰ η, β, ε, ὁμοῦ ἴσοι εἰσὶ τῷ ζ, μὲν τῷ η, δις λαμβανομένῳ, ἀλλ' οἱ ε καὶ η, διπλασιοί εἰσι τῷ β, καὶ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, οἱ τρεῖς δὲ η β ε, τριπλασιοί τῷ αὐτῷ. ἄρα τῷ β, τριπλασιαζόμενον, ὁ γινόμενος ἴσος ἔσται τῷ ζ, μὲν τῷ η, δις λαμβανομένῳ. ἔστι δὲ ὁ μὲν β, ὁ τῆς ρίζης λογαριθμὸς, ὁ δὲ ζ, ὁ τῷ κύβῳ, καὶ ὁ η, ὁ τῆς μονάδος. ὁ τῆς ρίζης ἄρα λογαριθμὸς τριπλασιαζόμενος ἴσος ἐστὶ τῷ τῷ κύβῳ καὶ τὰ ἐξῆς.

θ.	α.	γ.	δ.
1.	4.	16.	64.
η.	β.	ε.	ζ.
1.	2.	3.	4.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τῆς δῆλον, ὅτι εἴθε τῇ μονάδι τρίπλα κείται ἀντὶ λογαρίθμῳ, δοθέντος τῷ λογαρίθμῳ τῷ κύβῳ, καὶ εἰς τρία διηρημένῳ, γινώσκειται ὁ τῆς ρίζης

λογάριθ: καὶ ἀνάπαλιν, δοθέντος τῆ λογαρίθμου τῆς ῥίζης, καὶ πάλιν ἑξαπλασιαζομένου, γινώσκεται ὁ τῆ κύβου λογαρίθμος.

Πρότασις Θ':

Ἐὰν ὁποσοιοῦ ἀριθμοὶ ἀλλήλους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσιν τινα, οἱ τῶν πολλαπλασιαζόμενων λογαρίθμοι ὁμοῦ λαμβανόμενοι ἴσοι εἰσὶ τῷ τῆ ἐσχάτως ἐξ αὐτῶν ἔξαγομένῳ.

Ἐσώσω ἀριθμοὶ οἱ α β γ δ, καὶ ἀλλήλους πολλαπλασιάσαντες ποιείτωσαν τὸν ε. Λέγω τὸν τῆ ε, λογαρίθμον ἴσον εἶναι τοῖς λογαρίθμοις τῶν α β γ δ, ἀριθμῶν ὁμοῦ εἰλημμένους. ἔπει γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας ποιήσει τὸν ζ, οἱ τῆ α, καὶ β, λογαρίθμοι ἴσοι εἰσὶ τῷ τῆ ζ, καὶ πάλιν ε': τῆ παρόντος. ἔαν δὲ ὁ γ, τὸν ζ, πολλαπλασιάσῃ, ποιήσει πάντως τὸν η, καὶ καὶ τὸν αὐτὸν ὁ τῆ η, λογαρίθμος ἴσος εἰσὶ τοῖς λογαρίθμοις τῶν γ καὶ ζ. ἀλλ' ὁ τῆ ζ, ἴσος δέδεικται τοῖς λογαρίθμοις τῶν α καὶ β, ὁ τῆ η, ἄρα λογαρίθμος ἴσος εἰσὶ τοῖς τῶν α β γ, λογαρίθμοις. ὁμοίως πάλιν, ἔαν ὁ δ, τὸν η, πολλαπλασιάσῃ, ποιήσει πάντως τὸν θ, ὡς καὶ τὸν ῥηθῆσιν ε': ὁ τῆ θ, λογαρίθμος ἴσος εἰσὶ τοῖς τῆ η καὶ δ, λογαρίθμοις. ἀλλ' ὁ τῆ η, λογαρίθμος ἴσος δέδεικται τοῖς τῶν α β γ, λογαρίθμοις. ἄρα ὁ τῆ θ, λογαρίθμος ἴσος εἰσὶ τοῖς τῶν α β γ δ, λογαρίθμοις. Τὸν αὐτὸν τρόπον δεῖχθήσεται καὶ πλείονες ὄσιν οἱ ἀριθμοὶ τὸν τῆ ἐσχάτω λογαρίθμον ἴσον εἶναι τοῖς τῶν δοθέντων ἀριθμῶν λογαρίθμοις. ἔαν ἄρα ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀλλήλους, καὶ πάλιν ἐξῆς.

α.	β.	γ.	δ.	ε.
2.	4.	5.	8.	320.
<hr/>				
α.	β.	ζ.		
2.	4.	8.		
<hr/>				
γ.	ζ.	η.		
5.	8.	40.		
<hr/>				
δ.	η.	θ.		
8.	40.	320.		

Πρότασις Ι':

Ἐὰν ὁποιοῦ ἀριθμοὶ γεωμετρικῶς ἀνάλογον ὄσιν ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενοι, δοθέντος τῆ λογαρίθμου τῆ ἐσχάτου ἀριθμοῦ, δεῖχθήσεται ὁ λογαρίθμος τῆ α': μετὰ τῆ μονάδα, τῶν λογαρίθμων ἀπὸ τῆς μονάδος ἀρχομένων.

Τῶν α β γ δ ε ζ η, ἀριθμῶν ἐν γεωμετρικῇ ὄντων ἀναλογία δοθήτω ὁ τῆ η, ἐσχάτω λογαρίθμος, καὶ ζητηθῆτω ὁ τῆ α, α': μὴ τὴν μονάδα. Μιριθήτω δὴ ὁ τῆ η, λογαρίθμ: ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν διαστημάτων, καὶ τὸ πηλίκον εἶσαι ὁ ζητούμενος. ἔπει γὰρ ἐνταῦθα οἱ λογαρίθμοι ἀρχοῦνται ἀπὸ τῆ β, τζί.

438 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

β_2 τζήρας η̄ μονάδι προσηκείνης, δήλον, ὅτι ὅσα εἰσὶ τὰ διαστήματα τὰ μεταξὺ μονάδος ᾱ καὶ η̄, ἀριθμοὶ, ποσῶς εἰσι τῷ πλήθει καὶ οἱ λογαριθμοὶ, εἰ δὲ τῷ ᾱ μὴ τὴν μονάδα κείκειος ἀριθμὸς διαφορά ἐστὶ, καθ' ὅσον ἀλλήλων οἱ λογαριθμοὶ ὑπερέχουσιν ἢ ὑπερέχονται ἐκπαιτὲ εἶδει ὑπεροχῆς καὶ ἐλλείψεως, ἄρα κῆταυθα ὁ τῷ β_2 λογαριθμὸς διαφορά ἐστὶ πῶν λογαριθμῶν τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, καὶ ὁ τῷ η_2 λογαριθμὸς ἐξαπλασίως ἐστὶ τῷ λογαριθμῷ τῷ β_2 , ποσῶς εἰσι καὶ τὰ διαστήματα. ἔα δὲ ὁ τῷ η_2 λογαριθμὸς ἐπὶ πῶν ἀριθμῶν πῶν διαστημάτων μεριδῆ, διαθήσεται ὁ τῷ β_2 ἀπὸρ εἶδες δεῖξαι.

α.	2.	0
β.	4.	3
γ.	8.	
δ.	16.	
ε.	32.	
ζ.	64.	18.

Πρότασις Ι Α:

Ἀριθμοὶ ὁποσωνοῦ ἐφεξῆς γεωμετρικῶς ἀνάλογον καμμένου, τῶν ᾱ καὶ β̄: λογαριθμῶν δοθέντων, τὸς τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν λογαριθμοὶ.

Ἐστωσαν ἐφεξῆς γεωμετρικῶς ἀνάλογον οἱ ᾱ β̄ γ̄ δ̄ ε̄ ζ̄ η̄, ἀριθμοὶ, καὶ τῶν ᾱ καὶ β̄, λογαριθμῶν δοθέντων, ζητηθῆτωσαν οἱ πῶν λοιπῶν λογαριθμοὶ. Ἀφαιρήσῃ δὲ ὁ ἐλάττω ἀπὸ τῶν μείζονος, καὶ ὁ ἐξαπλασιάζει δὲ εἰς ἐπὶ τὸ μείζον χωρῶσιν οἱ ἀριθμοὶ, προσεθήτω τῷ μείζονι, ἔα δὲ ἐπὶ τὸ ἐλάττω, ἀφαιρέσῃ αὐτὸν ἀπὸ τῶν ἐλάττω, καὶ ἔξῃς τὸς ζητούμενους. οἱ γὰρ λογαριθμοὶ ἴσῃ ἀλλήλους ὑπερέχουσιν ὑπεραχῆ, ἢ ἀλλήλοις ὑπερέχονται. δοθέντων ἄρα τῶν ᾱ καὶ β̄: λογαριθμῶν, καὶ τῶν ἐλάττω ἀπὸ τῶν μείζονος ἀφαιρέσῃ, γινώσκεται ἢ πῶν λογαριθμῶν διαφορά: ὕστερ ἄρα εἶραται προσεθείη καὶ μὲν τῷ μείζονι, ἐπὶ τὸ μείζον προσβαυότων τῶν ἀριθμῶν, ἀφαιρέσῃ δὲ αὐτὸν ἀπὸ τῶν ἐλάττω, ἐπὶ τὸ ἐλάττω ἴσῃτων. Ἡ' καὶ ἔτω, διπλασιασθήτω ὁ β̄: καὶ τῷ γενομένῳ, ἀφαιρέσῃται ὁ ᾱ: καὶ ἀφαιρέσῃται πάντως ὁ γ̄: τότε δ' αὐτὸς διπλασιαζομένῳ, ἀφαιρέσῃται ἀπὸ τοῦ γενομένου ὁ β̄: καὶ γινώσκεται ὁ δ̄: τότε δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἐξῆς γινώσκεται καὶ ἀφαιρέσῃται πάντως οἱ λογαριθμοὶ τῶν λοιπῶν καὶ τὸ πρόβλημα πῶς εἰ: καὶ παρόντος. ἀριθμῶν ἄρα ὁποσωνοῦ, καὶ τὰ ἐξῆς.

α.	2.	2.
β.	4.	4.
γ.	8.	6.
δ.	16.	8.
ε.	32.	10.
ζ.	64.	12.
η.	128.	14.

Πρότασις ΙΒ΄:

Ἀριθμῶν ἀποσωμαῶ ἐφεξῆς γεωμετρικῶς ἀνάλογον κειμένων, πᾶν τὸ αἰ: καὶ ἐκάτε λογαρίθμων δευτέρων, τὸς τῆς ἐν μέσῳ λογαρίθμου εἶραϊν.

Ἐστωσαν ἐφεξῆς ἀνάλογον γεωμετρικῶς αἱ α β γ δ ε ζ η, ἀριθμοί, καὶ τῆς αὐτῆς α, πρώτου, καὶ η, ἑκάτε δευτέρων λογαρίθμων, ζητηθήτωσαν οἱ τῆς ἐν μέσῳ λογαρίθμοι. Ἀφαιρήτω δὴ ὁ ἐλάττω ἀπὸ τοῦ μείζονος, καὶ ὁ ἀπολειφθεὶς μειωθήτω ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῆς διασημάτων, καὶ τὸ πηλίκον προσεθήτω τῆς ἐλάττω, ἢ ἀφαιρήτω τῶ μείζονος, καὶ πῶτο γινέτω καὶ τὸς ἐξῆς, καὶ ἀριθμῶνται οἱ ζητούμενοι λογαρίθμοι. ἴση γὰρ ἀλλήλων, ὡς εἶρηται, οἱ λογαρίθμοι ὑπεροχῆ ὑπερίχουσιν. ὥστε ἐκτὸς τοῦ αἰ: ὅσα εἰσὶ τὰ διαστήματα, τοσαῦτα εἰσὶ καὶ αἱ διαφοραὶ. Διὸ δεῖ τὸν ἐλάττω τῶ μείζονος ἀφελεῖν, ἵνα τὸ ἐκ πασῶν τῶν διαφορῶν ἀπολειφθῆ. πῶτα δὲ μειζομένη ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν διασημάτων, γινώσκειται ἡ ἐκάστη διαφορὰ, ἥτις προσεθιμένη τῶ ἐλάττω παρέχει τὸν μετ' αὐτὸν. τούτῳ δ' αὐθις προσεθιμένη, δίδωσι τὸν μετ' ἐκεῖνον, καὶ ἔτις δευτερεύουσιν πάντες οἱ μεταξύ. τὰ αὐτὰ γενήσονται, καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος ἢ διαφορὰ ἀφαιρήσῃ, καὶ πῶτο γένηται καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. ἀριθμῶν ἀρα ἀποσωμαῶ ἐφεξῆς γεωμετρικῶς ἀνάλογον κειμένων, καὶ τὰ ἐξῆς.

α.	2.	3.
β.	6.	6.
γ.	18.	9.
δ.	51.	12.
ε.	162.	15.
ζ.	186.	18.
η.	1158.	21.

Πρότασις ΙΓ΄:

Τὸ τις δεκάδος λογαρίθμος δευτέρων, πάντων τῶν λοιπῶν τῆς κτῆ τῶν δεκαδικῶν λόγων προβαυμῶν τὸς λογαρίθμος εἶραϊν.

Κεῖθω λογαρίθμος μονάδος μετ' ο, δεκάδος δὲ 10000000, καὶ ζητηθήτωσαν οἱ λογαρίθμοι τῶν ἐπὶ τὸ μείζον καὶ τῶν δεκαδικῶν χωρέτων λόγων ἀριθμῶν, φέρ' εἰπεῖν τῶ 10, 100, 1000, καὶ λοιπῶν. διπλασιασθήτω ὁ λογαρίθμος τῶ 10, δηλ: ὁ 10000000, τριπλασιασθήτω, τετραπλασιασθήτω, πενταπλασιασθήτω, καὶ ἐνὶ λόγῳ ἀυξήσῃτω καὶ τῶ ἐπακολέθησιν τῶν τῶ πολλαπλασίαι εἰδῶν, καὶ ἀριθμῶνται οἱ ζητούμενοι λογαρίθμοι τῶν καὶ τῶν δεκαδικῶν ἀποϊόντων λόγων ἀριθμῶν, ὡς ἔρξῃς ἐπὶ τῶ

0—000000.00
10—100000.00
100—200000.00
1000—300000.00
10000—100000.00
100000—500000.00
1000000—600000.00
10000000—700000.00
100000000—800000.00
1000000000—900000.00

ἑξαχθήτω ἡ τετραγώνος ῥίζα, καὶ ἔ-
 σαι αὕτη ὁ 31622776. Ἐὰν δὲ ζή-
 τησῇ καὶ ὁ μεταξὺ μονάδος καὶ τῆ
 31622776 μίσος ἀνάλογος, πολ-
 λαπλασιασθήτω ὁ 31622776 ἐπὶ τὸν
 10000000, καὶ τῷ γινομένῳ 316227-
 760000000 ἀριθθήτω ἡ τετραγώνος ῥί-
 ζα, καὶ κείνη ἔσται ὁ ζητούμενος. τέτων
 γινομένων καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου ἀριθμοῦ,
 ἀριθθήσεται ὁ μίσος ἀνάλογος αὐτῆτι καὶ
 καὶ τῆς μονάδος ἐγγύτερον τῆ ἀληθείας.

3
 0,5,8
 0,4,1,9
 0,4,6,2,7,0,5
 0,4,5,8,3,0,3,8
 0,1,5,7,0,4,4,5,2,3
 0,1,2,7,9,1,7,5,9,3,4
 0,3,4,4,8,5,2,1,8,7,6,7,8,2
 0,1,4,9,8,4,6,6,2,6,2,1,2,1,6,4
 1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0 | 31622776

Πρότασις Ι Ε΄:

Τῶν ἡμιτόνων ἑκάστου τῶν δοθέν-
 των τῶς λογαριθμοὺς αὐτῶν ἀ-
 ρεῖν ἔ τὰ κανόμια αὐτῶν κατασ-
 κεύσασαι.

3
 6,ε
 6,2,6
 6,3,2,2
 6,3,2,4,2
 6,3,2,4,4,7
 6,3,2,4,5,4,7
 6,3,2,4,5,5,4,6:

Δοθήτωσαν τὰ ἡμίτονα ἑκάστου τῶν,
 καὶ γὰρ ἀριθμήτωσαν κατὰ τινὰ τῶν προειρ-
 μηνόθεντων ἔστων, καὶ ζητηθήτωσαν οἱ αὐτῶν λογαριθμοί. Κείτω οὐκ τῷ
 ὀλικῷ ἡμιτόνῳ λογαριθμὸς οἱ 100000.00. εἴπε γινέτω ὡς τὸ ὀλικὸν ἡμίτο-
 νον πρὸς τὸ ἡμίτονον πρῶτως αὐτῷ ἔλαττον, ἔτω τὸ ἡμίτονον πῆτο πρὸς ἄλ-
 λοτι. καὶ ἐπεὶ καὶ τὴν προειρηθείσαν ἐρμηνείαν τῆς τῆς ἡμιτόνων ἀρίθσεως,
 καὶ τῆς τῶν κανονίων κατασκευῆς πρῶτως ἔλαττον τῷ ὀλικῷ ἡμιτόνῳ ἐστὶ τὸ ἡ-
 μίτονον 9999999, γινέτω ὡς ὁ 10000000 πρὸς τὸν 9999999, ἔπως ὁ 9999999
 πρὸς ἄλλον τινὰ, καὶ ἀριθθήσεται γ΄: ἑξῆς ἀνάλογος ὁ 9999998. τέτων δ' ἀρι-
 θήσεται ζητηθήτω τὸν αὐτὸν ἔστων καὶ ὁ δ΄:, καὶ ἔσιν ἔπος ὁ 9999996. τῶν
 λεπτῶν ἡδὴ παριωραμένων. ὡς γὰρ ὁ 9999999 πρὸς τὸν 9999998, ἔχει καὶ
 ὁ 9999998, πρὸς τὸν 9999996. τῆς ἀνάξσεως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς γινου-
 μένης, ἀριθθήσεται ε΄: μὲν ἐν τῷ αὐτῷ τῶς ἀρτέροις λόγῳ ὁ 9999994. , ε΄: δὲ
 ὁ 9999992. ζ΄: δὲ ὁ 9999990. η΄: δὲ ὁ 9999988. θ΄: δὲ ὁ 9999985.
 ι΄: δὲ ὁ 9999982. Τὸν αὐτὸν ἔστων ἀριθήσονται καὶ οἱ λοιποὶ τῶν τῶν
 αὐτὸν λόγον ἔχόντων, ὅν καὶ ὁ α΄: πρὸς τὸν β΄: καὶ ὁ β΄: πρὸς τὸν γ΄: καὶ ὁ
 γ΄: πρὸς τὸν δ΄:, καὶ καθ'ἑξῆς ὁμοίως. τέτων δὲ γ: ἀριθήσονται, διπλασιασθήτω
 καὶ πλάτος ἑκάστων τῶν κανονίων ἡμιτόνων, ἀπτομένων τε καὶ τεμεντων, ὥ-
 στε διηρημένον εἶναι ἑκάστων τῶν κανονίων τέτων καὶ πλάτος εἰς ἑπτὰ παραλληλό-
 γραμμα ὀρθογώνια. καὶ μῆκος δὲ εἰς ὅσα καὶ ἑκάστων τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομέ-

K k k

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π
 ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

442 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡ. ΠΡΩΤΟΝ

νωντε κὲ τεμνυσῶν κανόνιον διαιρεῖται. καὶ ἐν μὲν τῷ α': παραλληλογράμμῳ τεχ-
 θήτωσαν οἱ τῶν τῶν ἀριθμοὶ, ἐν δὲ τῷ β': οἱ πῶν ἡμιτόνων ἐκάστῃ τῶν ἀτάκ-
 τως, ὡς προηρμήνευται, ἐν δὲ τῷ γ': οἱ πῶν ἀπτομένων, καὶ ἐν τῷ δ': οἱ πῶν
 τεμνυσῶν. τῶν δὲ ἕτω κειμένων ἀρχάμενος ἀπὸ τῷ α': ὄρου πῶν ἡμιτόνων,
 θίς ἐν τῷ α': παραλληλογράμμῳ τῷ αὐτῷ κανόνιῳ καὶ συσοιχίᾳ τῷ ὀλικῷ ἡμι-
 τόνῳ τὸν 100000000, λογαριθμῶν, καὶ συσοιχίᾳ δὲ τῷ β': ὄρου πῶν ἡμιτόνων,
 ἦτοι τῷ 9999999 τὸν 99999999. καὶ συσοιχίᾳ δὲ τῷ γ': ἦτοι τῷ 9999998
 τὸν 99999999. καὶ συσοιχίᾳ δὲ τῷ δ': ἦτοι τῷ 99999996 τὸν 99999998, κὲ
 ἐπὶ πῶν ἐφεξῆς τῶν κατ' ἀριθμητικῶν ἀναλογίᾳ ἀτάκτως χωρουῦντας ἐπὶ τῷ
 λαττον μονάδι ἀλλήλων ἐλλείπαντας. Ἐπεὶ δὲ ἐν μέσῳ α': πὲρ καὶ β': ὄρου, ὡς-
 πιρ καὶ β': καὶ γ':, καὶ γ': καὶ δ':, καὶ τῶν λοιπῶν περιεμπίπτωσι τὰ ἡμίονα
 τῶν μεταξὺ τῶν, ἵνα καὶ τῶν λογαριθμῶν τῶν ἐν τοῖς αὐτοῖς ἔχῃς κανονίοις
 ἀποχείρως, ἀπὸ μὲν τῷ α': ὄρου πῶν ἡμιτόνων μέχρι τῷ β': τῶν αὐτῶν λο-
 γαριθμῶν ἦτοι τὸν 100000000, ἀπὸ δὲ τῷ β': μέχρι τῷ γ': τὸν αὐτῶν, ἦτοι
 τὸν 99999999, ἀπὸ δὲ τῷ γ': μέχρι τῷ δ': τὸν αὐτῶν, ἦτοι τὸν 99999998,
 ἀπὸ δὲ τῷ δ': μέχρι τῷ ε': τὸν αὐτῶν, ἦτοι τὸν 99999998: ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ
 τῶν ἄλλων, καὶ ἔξῃς κανόνια ἐπιτελῆ πῶν τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομένων, καὶ τεμνυ-
 σῶν ἐκάστῃ τῶν μὲν πῶν λογαριθμῶν αὐτῶν, ὡς ἐν τοῖς ἐξῆς ἑνωτέρων δε-
 λωθήσεται.

Ἰστέον δ' ὅτι ἐπεὶ μεταξὺ πῶν ὄρων πῶν ἡμιτόνων ἀπὸ τῷ ὀλικῷ ἀρχομένων,
 πλείονες μεσολαβῆσιν ἀριθμοὶ συσοιχοῦντες τοῖς λεπτοῖς, καὶ μηδὲ, ἢ μικρόν
 τι παραλλάττοντες καὶ τὸν α': χαρακτῆρα, τὸν εἰς χώραν κείμενον μονάδος, δια-
 ποι τῶν α': ὄρος πῶν λογαριθμῶν ἐφαπλῆται μέχρι τῷ ε': σίχου τῷ συσοιχοῦ-
 τος τῶν μοιρ: π'θ, νη', λ': τὰ γὰρ μείζω τῶν τῶν τῶν μάλλον προσεγγίζουσι τῷ
 πεταρτημοσίῳ, διὸ δὴ καὶ οἱ συσοιχοῦντες αὐτοῖς ἀριθμοὶ πῶν ἡμιτόνων, καὶ οἱ
 αὐτοὶ εἰσι τῷ β': ὄρου πῶν ἡμιτόνων, σωμαπτονται μὲν τοῖς τῷ α': διὰ τὰ αὐτὰ
 δὲ καὶ ὁ β': ἐφαπλῆται μέχρι τῷ ἑπτακαίδεκάτῃ σίχου πῶν ἡμιτόνων, τῷ συ-
 σοιχοῦτος τῶν μοιρ: π'θ, κς'. κ", ὡς ἐπὶ τῇ πῶν λογαριθμῶν καταστροφῇ,
 ἕτα πλείονες εἰσιν ἀριθμοὶ τῷ αὐτῷ ὄρου τῶν ἡμιτόνων, τὰς πλείονας μὲν
 δεῖ σωμαπτεῖν τῷ προηγεμένῳ, τὸν δ' ἔχατον τῷ ἐποκειμένῳ, καὶ ἕτως ἴσ-
 μεν μέχρι τίνος ἕκαστος πῶν ὄρων τῶν λογαριθμῶν ὀφείλει ἐφαπλῆθαι. ὅτι δὲ
 καὶ ἡ ἕφοδος αὐτῆ καὶ λόγον χωρεῖ πρὸς ἄρισιν τῶν λογαριθμῶν τῶν ἡμιτόνων
 ἐκάστῃ τῶν, δῆλον. οἱ γὰρ λογαριθμοὶ ἀριθμοὶ εἰσιν ἀριθμητικῶς, ὡς εἴ-
 ρηται, ἀνάλογον, τοῖς γεωμετρικῶς ἀνάλογον κειμένοις συσοιχοῦντες. ἀλλὰ μὲν
 καὶ οἱ τὸν ἕφοπον τῶν ἀρισκόμενοι ποιῶντοί εἰσιν, ἀρα τῶν ἡμιτόνων δεξεί-
 των, ἐκάστῃ τῶν ἀρῆται καὶ οἱ τῶν λογαριθμοὶ.

Πρό-

Ε.Υ.Δ. τῆς Κ.τ.Π.
 ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Πρότασις Ιζ΄:

Τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων δοθέντων, τὸς τῶν ἀπτομέμων λογαρίθμους εἶρεῖν.

Δοθήτωσαν οἱ τῶν ἡμιτόνων λογάριθμοι, ἢ γουὺ εἰρηθῆτωσαν δια τῆς ἀνα-
 πέρω, καὶ ζητηθῆτωσαν οἱ τῶν ἀπτομένων λογάριθμοι. Αἰ βῆ δὴ τὸν λογάριθμον
 τῷ παραπληρώματός τινος πῆξ ἀντὶ α΄ ὄρου, ἀντὶ β΄ δὲ τὸν λογάριθμον τῷ ἡ-
 μιτόνῳ τῷ αὐτῷ πῆξ, καὶ ἀντὶ γ΄ ὄρου τὸν λογάριθμον τῷ ὀλικῷ ἡμιτόνῳ. Εἴ-
 τα σύναψον τὸν γ΄ ὄρον πρὸς β΄, καὶ τῷ γενομένῳ ἀφίλε τὸν α΄ καὶ ὁ ἐναπο-
 λειφθεὶς ἔσται λογάριθμος τῆς ἀπτομένης τῷ αὐτῷ πῆξ. οἷον ζητηθῆτω ὀλο-
 γάριθμος τῆς ἀπτομένης πῆξ ἔξηκ. β΄ ἰ. ἐπεὶ δὲ τῷ
 τῷ παραπλήρωμά ἐστι πῆξον μοιρ. π΄θ, νθ, ν". τότε δὲ ὄρος α΄: 100000000
 λογάριθμός ἐστιν ὁ 100000000, θῆς αὐτὸν ἐν βαθμῷ
 α΄, ὑπ' αὐτὸν δὲ καὶ βᾶθος ἐν β΄: βαθμῷ θῆς τὸν
 λογάριθμον τῷ αὐτῷ πῆξ δηλ: τὸν 56855749. ἐπὶ δὲ
 γ΄: βαθμῷ ὑπὸ τὸν β΄: θῆς αὐθῆς τὸν λογάριθμον
 τῷ ἡμιτόνῳ τῷ ὀλικῷ, τὸν 100000000. εἴτα σύναψον
 τὸν γ΄ ὄρον πρὸς β΄: καὶ τῷ γενομένῳ 156855749 ἀφίλε
 τὸν α΄ ἤτοι τὸν 100000000, καὶ ἐπεὶ ἐναπολείπεται ὁ 56855749, δῆλον ὅτι
 λογάριθμος τῆς ἀπτομένης πῆξ ἔξηκ. β΄ ἰ, ἐστὶν ὁ 56855749. ἔστι δὲ ἴσος
 τῷ λογαρίθμῳ τῷ ἡμιτόνῳ τῷ αὐτῷ πῆξ, ὅτι καὶ ἐπὶ τῆς πράξεως ὁ γ΄: τῷ α΄:
 ὄρω ἴσος ἐστὶ. καὶ γὰρ τῷ ἡ: τῷ α΄: τῷ παρόντος ὡς τὸ ἡμίτονον τῷ παρα-
 πληρώματός τινος πῆξ ὁρὸς τὸ ὄρθον ἡμίτονον τῷ αὐτῷ πῆξ, ἔτω τὸ ἔλικὸν
 ἡμίτονον ὁρὸς τῷ ἀπτομένην τῷ αὐτῷ πῆξ. οἱ δὲ λογάριθμοι ἀριθμητικῶς
 εἰσὶν ἀνάλογον τειῶν ὄρων δοθέντων, καὶ ζητημένῳ τῷ δ΄: ἐὰν ὁ γ΄: συωφθῆ
 τῷ β΄: καὶ τῷ γενομένῳ ἀφαιρηθῆ ὁ α΄: ὁ λειπόμειός ἐστιν ὁ ζητούμενος. ὡς καὶ ἐπὶ
 τῷ παρόντος, ἐπεὶ δίδονται οἱ τρεῖς ὄροι καὶ ἐζητεῖτο ὁ δ΄: ὑγιῆς παύτως ἢ
 πράξις ἐστὶν.

ὄρος α΄:	100000000
β΄:	156855749
γ΄:	100000000
<hr/>	
	156855749
	100000000
<hr/>	
	56855749

Ζητηθῆτω ἔτι δια τὸ σαφέστερον ὁ λογάριθμος πῆξ ἔξηκ.
 α΄ ζ, ὁ λογάριθμος ὁ 73088239. Ἐπεὶ οὖν τότε παρα-
 πλήρωμά ἐστι πῆξον μοιρῶν π΄θ, ν γ', ὁ λογάριθμος ὁ
 99999991, εἰλήφθω ἀντὶ α΄ ὄρου ὁ λογάριθμος ἔτος
 99999991, ἀντὶ δὲ β΄: ὁ 73088239, καὶ ἀντὶ τῷ γ΄:
 ὁ λογάριθμος τῷ ὀλικῷ ἡμιτόνῳ, δηλ: ὁ 100000000. Εἴτα
 συωφθῆτω ὁ γ΄: τῷ β΄: καὶ τῷ γενομένῳ 173088239 ἀ-
 φαιρηθῆτω ὁ α΄: δηλ: ὁ 99999991. καὶ ὁ ἐναπολειπόμενος
 73088248 ἔσται ὁ ζητούμενος λογάριθμος ὁ τῆς ἀπτομέ-

α΄:	99999991
β΄:	73088239
γ΄:	100000000
<hr/>	
	173088239
	99999991
<hr/>	
	73088248

Ε.Γ.Δ της Κ.τ.Π.
 ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

444 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡ: ΠΡΩΤΟΝ

νης δηλ: τῶν ἐξ ηκ: α: ζ. ἢ αὐτῆς χρώμενος ἐφόδῳ ἢ ἐπὶ τῶν λοιπῶν, ἀρή-
σεις πάντα τὰς τῶν ἀπτομέων ἑκάστου τῶν λογαρίθμων.

Πρότασις ΙΖ':

Τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων δευτέρου τῶν τεμνυσῶν ἑκάστου
τῶν λογαρίθμων ἀρῆν.

Δοθέντων αὖ τῶν ἡμιτόνων λογαρίθμοι, ἢ γὰρ ἀριθμήσαντες καὶ τὸν εἰς
τὸ παράνομα, καὶ ζητήσαντες αὖ λογαρίθμοι τῶν τεμνυσῶν ἑκάστου τῶν. ἀρ-
ξάμενος δὲ ἀπὸ τοῦ τῶν μοιρῶν π'θ, κ'θ, ν", ὅπερ ἐστὶν ἑξατον, λάβετε ἀντι-
μέτ' α: ἀριθμὸν λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου τοῦ αὐτοῦ τῶν, δηλονότι τὸν 100000000,
ἀντι β': δὲ τὸν λογαρίθμον τοῦ ἑλικῆ ἡμιτόνου, ἥτοι τὸν αὐτὸν 100000000. τέ-
τα δὲ διπλασιασθέντος, ἀφαιρήσαντες τὸ γνησίου 200000000 ἂ α: καὶ ἐπεὶ ἐνα-
παλείπεται ὁ 100000000, θὲς καὶ συσσιχίαν τὴν παραπληρώματος, τὸ εἶς ἀρ-
χῆς εἰλημμένου τῶν, τὸ ἐξ ηκ: δηλονότι β': ι, ἀντι τῆς τεμνύσεως αὐτῆ
λογαρίθμον τὸν 100000000. καὶ γὰρ τὸν θ': τοῦ α: τὸ παρόντος αἰς τὸ ἡμι-
τόνον τινος τῶν πρὸς τὸ ἑλικὸν ἡμίτονον, ἔσω τὸ ὀλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸν τε-
μνυσῶν τὴν παραπληρώματος τὸ αὐτῆ τῶν. οἱ δὲ λογαρίθμοι ἀριθμητικῶς
εἰσὶν ἀνάλογον. ἄρα δευτέρου τῶν δύο ὄρων τῶν λογαρίθμων δηλ: τοῦ ἡμιτόνου τῶν
δευτέρου τῶν, καὶ τῶν λογαρίθμων τῶν ὀλικῆ ἡμιτόνου, καὶ τῶν γ': ζητηθέντων, κα-
τὰ τὸ πόρ: τῆς εἰ: τὸ παρόντος ὀφείλει ὁ β': διπλασιασθῆναι, καὶ τὸ γνησίου
ἀφαιρήσαντες ὁ α: καὶ ὁ ἐναπολείπόμενος εἶναι ὁ ζητούμενος. ἀλλὰ δὲ τὸ αὐτὸ
γίγνεται καὶ ἐπὶ τὸ παρόντος, ὕγιης ἄρα ἡ πράξις.

Ζητήσαντες ἔτι ὁ λογαρίθμος τῆς τεμνύσεως τῶν ἐξ ηκ: α: ι. εἰλήφθω ἀντι α:
ὄρα ὁ λογαρίθμος τοῦ ἡμιτόνου τῶν μοιρῶν π'θ: ν", ὅπερ ἐστὶ παραπλήρωμα τῶν
δευτέρου, δηλονότι ὁ 99999982. ἀντι δὲ β': ὁ λογαρίθμος τοῦ ὀλικῆ ἡμιτό-
νου, ἥτοι ὁ 100000000. τῶν δὲ διπλασιασθέντος, ἀφαιρήσαντες τὸ γνησίου
200000000 ἂ 99999982, καὶ ἐπεὶ ἐναπαλείπεται ὁ 100000018, δῆλον ὅτι
λογαρίθμος ἀντι τεμνύσεως τῶν ἐξ ηκ: α: ι ἐστὶν ὁ 100000018. τῶν γνησίου
ἀκριβῶς καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν, ἀριθμήσαντες δὲ παύσαντες οἱ λογαρίθμοι τῶν τεμνυσῶν
ἑκάστου τῶν, ἄπειρ ἢ τὸ ζητούμενον.

Α' Π Ο Σ Η Μ Ε Γ Ω Σ Ι Σ.

Εὐρεθέντων δὲ τῶν λογαρίθμων ἡμιτόνων, ἀπτομέων καὶ τεμνυσῶν καθ' ὅτι
ἤδη ἡρμάνεται ἕξιον, καὶ τῶν κανόνων κατασκευασθέντων. ἐπεὶ ἐν μετ' α:
παραλληλογράμμῳ αἱ τὰ τῶν ἐναημαίοντες ἐγγράφονται ἀριθμοί, ἐν δὲ τῶν
β': οἱ τὰ ἡμίτονα παρεῶντες, ἐν δὲ τῶν γ': οἱ τὰς ἀπτομέων, καὶ ἐν τῶν δ':
οἱ τὰς τεμνύσεως, καὶ ἐν τῶν εἰ: αἱ τῶν ἡμιτόνων λογαρίθμοι, αἰς εἶρηται ὅρα.
εἰ: τὸ παρόντος, ἵνα πληρῆσται αἰς τὰ αὐτὰ κανόνια, ταχθέντων ἐν μετ'