ΠΕΡΙ' ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙ'ΑΣ ΣΥ'ΝΤΟΜΟΣ Ε'ΡΜΗΝΕΙ'Α.

ΠΡΟΟΙ'ΜΙΟΝ.

Εἰς δύο τῆς Γεωμετρίας τὰ ὁλοσχερέστερα αὐτῆς μέρη, ὡς ἐν τῷ περὶ ἐκείνης εἴρηται φιλοπονήματι, διαιρουμένης, τὸ Στοιχειῶδές φημι, εἴτ' οὖν Θεωρητικὸν, καὶ τὸ ταύτης Πρακτικόν. Ὅτι γε ἡ Τριγωνομετρία τῷ μὲν ὀφείλει ἕπεσθαι, τῷ δὲ προηγεῖσθαι, καὶ μέσην τινα τόπον ἔχειν χώραν, ἐντεῦθεν δῆλον. ὥσπερ γὰρ ἐν πολλοῖς τῶν παρ' αὐτῇ θεωρημάτων τε καὶ προβλημάτων τὰς ἀρχὰς παρὰ τοῦ Στοιχειώδους τῆς Γεωμετρίας ἐρανίζεται μέρους, καὶ πολλῷ μᾶλλον τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων, δι' ὧν καὶ τὰς ἀποδείξεις Γεωμετρικῶς κατασκευάζουσα ἐμπεδοῦται· οὕτω δὴ καὶ αὐτὴ τὸν αὐτὸν τρόπον τῷ πρακτικῷ ἐκείνης βοηθεῖ μέρει. Εἶτα ἐπεὶ αἱ ἕξεις ἐκ τοῦ ὑποκειμένου, περὶ ὃ καταγίνονται, καὶ τοῦ τέλους τὴν πρὸς ἀλλήλας διαφορὰν ἢ κοινωνίαν ἐσχήκασι. Πάντως γε καὶ δι' αὐτὸ τοῦτο εἰκότως τοῖς μέρεσι τῆς Γεωμετρίας συγκαταλέγεταί πως καὶ ἡ Τριγωνομετρία. περὶ γὰρ τὸ συνεχὲς ποσὸν καὶ αὐτὴ, ὥσπερ καὶ ἐκείνη, καταγίνεται· καὶ τοῦτο, ἢ ἀσχέτως καὶ καθ' αὑτὸ θεωρούμενον λαμβάνεται. Τέλος δ' ἔχει τὴν γνῶσιν τῶν ἐν αὐτῇ προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων, καὶ μέχρι τούτου τὰς ἀποδείξεις ἐφαπλοῖ. ἀλλ' ἐπεὶ πάλιν ἐκείνη μὲν περὶ παντὸς εἴδους σχημάτων, ἐπιπέδων τε καὶ στερεῶν πολυπραγμονεῖ, αὕτη δὲ περὶ μόνων τῶν τριγώνων τὴν διάσκεψιν ποιεῖται· τὸ δὲ τρίγωνον πρωτεύει τῶν ἄλλων ἁπάντων· ὅτι ἐκεῖνα ὡς ἐκ τριγώνων πως συνίσταται, καὶ εἰς τρίγωνα αὖθις ἀναλύεται, αὐτὸ δὲ οὔτε ἐξ ἄλλου τὴν σύστασιν ἔχει, οὔτε μὴν εἰς ἄλλο ἀναλυθῆναι δύναται, ἀλλ' ἐξ αὐτοῦ πως καὶ εἰς αὐτό. δῆλον, ὅτι μέσην ὀφείλει ἔχειν χώραν. ἵνα ὡς μερικὸν μὲν ἔχουσα τὸ ὑποκείμενον ὑπὸ τοῦ Στοιχειώδους τῆς Γεωμετρίας ταχθῇ μέρους, ὡς δὲ τὸ πρώτιστον τῶν σχημάτων, τοῦ πρακτικοῦ προηγεῖται, καὶ τοῦτο μᾶλλον κατὰ τὸ Στοιχειῶδες αὐτῆς, ἤτοι τὸ καὶ Θεωρητικὸν ἔλαχε μέρος. Διαιρεῖται γὰρ καὶ αὕτη, ὡς εἰρήσεται, εἰς δύο, καθὰ καὶ ἡ Γεωμετρία. τὸ δὲ πρακτικὸν ταύτης μέρος εἰς δύο ὑποδιαιρούμενον, ὧν θάτερον μὲν περὶ τῆς τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἀναλύσεως, θάτερον δὲ περὶ τῆς τῶν σφαιρικῶν πραγματεύεται, οὐκ ἀναγ-

ἀναγκαῖον κατ᾽ ἄμφω τοῦ πρακτικοῦ προηγεῖσθαι τῆς Γεωμετρίας μέρους. Διό τινες τὴν ἐσχάτην τῷ β΄: παρέχουσι τάξιν, μὴ μόνον τὸ πρακτικὸν τῆς Γεωμετρίας μέρος αὐτοῦ προπέμποντες, ἀλλά γε καὶ τὰ περὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων κατὰ Θεοδόσιον πραγματευόμενα.

Ἔστι δὲ Τριγωνομετρία ἕξις τις διανοητικὴ δι᾽ ἀποδεικτικῆς μεθόδου πρὸς τὴν τῶν τριγώνων συμβάλλουσα γνῶσιν, καὶ τὴν τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν εὕρεσιν, καθ᾽ ἣν τινῶν ἐγνωσμένων, ἢ γοῦν ὑποτιθεμένων τὰ λοιπὰ ζητεῖται. Ἓξ γὰρ ἐπὶ παντὸς θεωρεῖται τριγώνου, τρεῖς δηλ: πλευραί, καὶ γωνίαι τρεῖς. τούτων δὲ τὰ τρία μὲν ἐπρογενῆ δεῖ, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, γινώσκεσθαι, ἢ γοῦν δίδοσθαι, τὰ λοιπὰ δὲ ζητεῖσθαι. Διττοῦ δὲ γένους εἰσὶ τὰ τρίγωνα, εὐθύγραμμά τε καὶ σφαιρικά· καὶ εὐθύγραμμα μὲν τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα γραμμῶν, καὶ ἐν ἐπιπέδοις συνιστάμενα· ὡς καὶ ἐν ἄλλοις πλατύτερον εἴρηται. σφαιρικὰ δὲ τὰ ὑπὸ καμπύλων γραμμῶν περιεχόμενα, καὶ ἐν σφαίρᾳ καταγραφόμενα, ὧν αἱ πλευραὶ τόξα εἰσὶ μεγίστων κύκλων.

Διαιρεῖται δὲ ἡ Τριγωνομετρία εἰς δύο τὸ α΄: τὸ Ἐπιχειρῶδες αὐτῆς μέρος καὶ τὸ Πρακτικόν, ὡς ἤδη εἴρηται. καὶ ἐν μὲν τῷ Ἐπιχειρώδει περιέχεται ἐν δυσὶ βιβλίοις ἡ τῶν Ἡμιτόνων, Ἀπτομένων τε καὶ Τεμνουσῶν Ἑρμηνεία, ἔτι δὲ καὶ ἡ περὶ τῶν Λογαρίθμων διδασκαλία, καὶ ἄλλα τινὰ πρὸς τὸ β΄: αὐτῆς μέρος ὅτι μάλιστα συμβαλλόμενα. τὸ δὲ Πρακτικὸν αὖθις μέρος τῆς Τριγωνομετρίας διαιρεῖται εἰς δύο, καὶ τὸ μὲν α΄: ἐνασχολεῖται εἰς τὴν τῶν εὐθυγράμμων τε καὶ ἐπιπέδων τριγώνων διάλυσιν. ὃ καὶ Τριγωνομετρία ἐπίπεδος ἐπιγράφεται. τὸ δὲ β΄: εἰς τὴν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων Ἑρμηνείαν τε καὶ διάλυσιν, ὃ καὶ Σφαιρικὴ Τριγωνομετρία ἤκουσε. Πρὸς μὲν οὖν τὴν Σφαιρικὴν Τριγωνομετρίαν ἱκανὰ τὰ δύο κατὰ Θεοδόσιον περὶ σφαιρικῶν βιβλία, τὸ α΄: φημὶ καὶ β΄: καὶ τὸ Πρακτικὸν τῆς Ἀριθμητικῆς μέρος· πρὸς δὲ τὴν ἐπίπεδον συμβάλλει ἐς τὰ μάλιστα τὰ ἓξ τοῦ Εὐκλείδου ἐπίπεδα βιβλία, τὸ Πρακτικὸν τῆς Ἀριθμητικῆς μέρος, καὶ Ἐπιχειρῶδες τῆς Γεωμετρίας. Διὸ δεῖ τῷ βουλομένῳ ἐγκρατεῖ τῶν ἐν ἑκατέρῳ μέρει τῆς Τριγωνομετρίας γενέσθαι, ἐν ἐκείνοις ἀκριβῶς προγεγυμνάσθαι. Τὸ δὲ κινῆσαν τοὺς τῆς Μαθητικῆς γνησίους ἐραστὰς καὶ εἰς τὴν τῆς Τριγωνομετρίας ἔκθεσιν· ὅτι τῶν ἄλλων ἕκαστον σχημάτων εἰς Τρίγωνα ἀναλυθῆναι δύναται, ὥστε ἐγνωσμένων τῶν τριγώνων, γνωσθήσεται πάντως καὶ ὅ, τι οὖν ἄλλο σχῆμα. Ἐπεὶ δὲ παντὸς τριγώνου εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου αἱ πλευραὶ τόξα ὑποτείνουσι, δῆλον, ὅτι ἐγνωσμένου τοῦ λόγου, ὃν αἱ τῶν τόξων ὑποτείνουσαι πρὸς ἀλλήλας τε καὶ πρὸς τὴν διάμετρον ἔχουσι, γνωσθήσονται πάντως καὶ αἱ τῶν τριγώνων πλευραί, καθ᾽ ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσι λόγον. διὸ δεῖ πρὸς τὴν τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων διάλυσιν ζητεῖται ἡ γνῶσις τῶν ὑποτεινουσῶν.

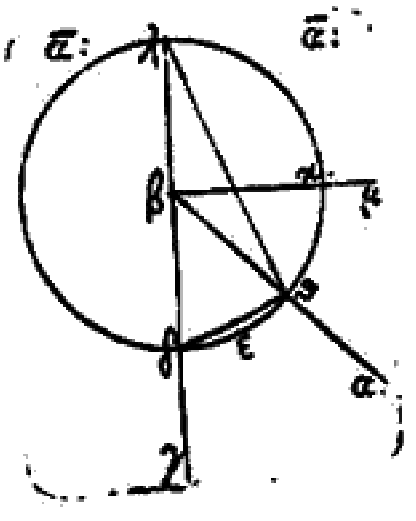
Ἔστι δέ, ὡς ἐν κεφαλαίῳ εἰπεῖν, τὰ ἐν ὅλῃ τῇ παρούσῃ Πραγματείᾳ θεω-

ρείρίμενα ἑξ· α': τὰ Ἡμίτονα, αἱ Ἐφαπτόμεναι ἑκάστου τόξου, καὶ αἱ Τέμνουσαι, καὶ ἡ τῶν Κανονίων τύπων κατασκευή. β': ἡ τῶν Λογαρίθμων φύσις, Τρίτον ἡ Χρῆσις αὐτῶν, δ': ἡ τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων Διάλυσις, ε': ἡ περὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων Θεωρία, καὶ ϛ': καὶ τελευταῖον ἡ τῶν αὐτῶν Διάλυσις. ὧν τὰ μὲν α': τέσσαρα εἰς τὸ α': τῆς Τριγωνομετρίας, ὡς εἴρηται, περιέχεται μέρος· τὰ δὲ λοιπὰ δύο ἐν τῷ β'. ἐπεὶ δὲ ἐν ὁποιαδήποτε σχεδὸν Μαθηματικῇ Πραγματείᾳ οἱ ὅροι προτάττεσθαι ὀφείλουσι, προὔργον κἀνταῦθα τοὺς εἰς τὴν παροῦσαν ἀνήκοντας ὅρους ἐκθέσθαι. Ἵνα δὴ τὰ ἑξῆς εὐληπτότερα γένηται, καὶ ἡ διδασκαλική, ἵνα μὴ καὶ ἐπιστημονικὴ εἴπω, κἀνταῦθα τηρηθῇ τάξις, οὗ τί ἂν ἄλλο εἰς εὐμάθειαν ἀναγκαιότερον;

ὍΡΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΊΑΣ.

Α': Εὐθύγραμμος γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν περιεχομένη, ὡς ἡ ὑπὸ αβγ.

Trigon. Lib. I. Fig. I.



Β': Μέτρον δὲ πάσης εὐθυγράμμου γωνίας ἐστὶ τόξον κύκλου ἀπὸ τῆς συνδρομῆς τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν, ὡς ἀπὸ κέντρου γραφομένου. ἔστι δὲ τοῦτο ἢ ἴσον τεταρτημορίῳ ὡς τὸ δεκ, ἢ μεῖζον ὡς τὸ θκλ, ἢ ἔλαττον ὡς τὸ δεθ. καὶ τὸ μὲν δεθ, μέτρον ἐστὶ τῆς ὑπὸ αβγ, γωνίας, τὸ δὲ δεκ, τῆς ὑπὸ μβγ, καὶ τὸ θκλ, τῆς ὑπὸ αβλ. ὥστε ἐπεὶ ὁ κύκλος εἰς μοίρας τξ, διαιρεῖται, εὐλόγως λέγεται καὶ τὸ τόξον ἢ ἡ γωνία τοσούτων ἢ τοσούτων μοιρῶν εἶναι.

Γ': Ὑποτείνουσα δὲ τόξου ἐστὶν ἡ τὰ πέρατα τοῦ τόξου ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, ὡς ἡ δθ, τοῦ δεθ, τόξου. Δύναται δὲ λέγεσθαι ἡ αὐτὴ δθ, ὑποτείνουσα καὶ τοῦ μείζονος τόξου θκλδ· οἰκειότερον ἔμπης λέγεται τοῦ δεθ, ἐλάττονος, ὡς δυναμένου γωνίαν ὑποτείνειν. Ἐπεὶ δὲ τὸ δεθ, μέτρον ἐστὶ τῆς ὑπὸ αβγ, γωνίας, ὡς ἤδη εἴρηται, λέγεται ἔτι ἡ αὐτὴ δθ, ὑποτείνουσα καὶ τῆς ὑπὸ αβγ, γωνίας.

Δ': Ὑποτείνουσα παραπληρώματος τόξου πρὸς ἡμικύκλιον ἐστὶν ἡ τὰ πέρατα τοῦ λοιποῦ τόξου μέχρι τοῦ ἡμικυκλίου ἐπιζευγνύουσα, ὡς ἡ θλ, ἥτις ὑποτείνουσα λέγεται τοῦ θκλ, παραπληρώματος τοῦ δεθ, τόξου. τὸ γὰρ δεθ, τόξον μετὰ τοῦ θκλ, ἡμικύκλιον ἀποπληροῖ.

Ε': Παραπλήρωμα δὲ ἁπλῶς τόξου ἐστὶν ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχεται τὸ τόξον ὑπὸ τοῦ τεταρτημορίου, ἢ ὑπερέχει τὸ τεταρτημόριον, ὡς τὸ θκ, παραπληπλήρωμα λέγεται τοῦ τε δεθ, τόξου, καὶ τοῦ λκθ. τὸ μὲν γὰρ δεθ, ὑπερέχεται ὑπὸ τοῦ δθκ, τεταρτημορίου, τὸ δὲ λκθ, ὑπερέχει τὸ λκ, τεταρτημόριον κατὰ τὸ θκ, ὅπερ καὶ διαφορὰ λέγεται τοῦ δεθ, πρὸς τὸ δθκ, καὶ τοῦ λκ, πρὸς τὸ λκθ.

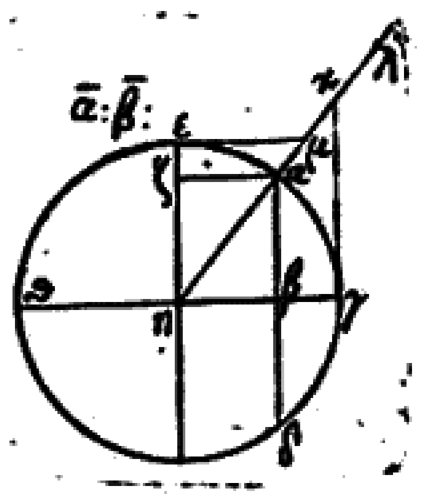
ϛ': Κοινὸν δὲ παραπλήρωμα ἔχειν δύο τόξα λέγεται, ὅταν τὰ τόξα ἄμφω ἡμικύκλιον ἀποπληρῶσιν, ὡς τὰ δεθ, θκλ, τόξα, κοινὸν ἔχουσι παραπλήρωμα τὸ θκ, ὅτι ἐκ τῶν δεθ, θκλ, τόξων συνίσταται τὸ δεθλ, ἡμικύκλιον.

Ζ': Παραπλήρωμα δὲ γωνίας ἐστὶν ὑπεροχὴ, καθ' ἣν ἡ γωνία ὑπὸ τῆς ὀρθῆς ὑπερέχεται, ἢ γοῦν ὑπερέχει τὴν ὀρθὴν, ὡς ἡ ὑπὸ αβμ, γωνία παραπλήρωμα λέγεται τῆς τε ὑπὸ αβγ, καὶ ὑπὸ αβλ. Ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ αβγ, ὑπερέχεται ὑπὸ τῆς δβμ, ὀρθῆς, ἡ δὲ ὑπὸ αβλ, ὑπερέχει τὴν λβμ, ὀρθὴν κατὰ τὴν ὑπὸ αβμ, ἥτις καὶ διαφορὰ γωνιῶν λέγεται.

Η': Κοινὸν δὲ παραπλήρωμα γωνίαι ἔχειν λέγονται, ὅτε δύο ὀρθὰς ἄμφω ποιοῦσιν ὡς αἱ δβα, αβλ.

Θ': Ἡμίτονον ἐστὶν ἡ ἡμίσεια ὑποτεινούσης διπλασίου τόξου, ὡς ἡ αβ. Ἡμίτονον λέγεται τοῦ αγ, τόξου, ὅτι ἡμίσειά ἐστι τῆς αδ, ὑποτεινούσης τοῦ αγδ, τόξου διπλασίου τοῦ αγ. ἐστι δὲ τῶν ἡμιτόνων τὸ μὲν Ὀρθὸν, τὸ δὲ Πλάγιον, καὶ τοῦ ὀρθοῦ αὖθις τὸ μὲν Ὁλικὸν λέγεται, τὸ δὲ τοῦ τόξου, τὸ δὲ τοῦ παραπληρώματος.

Trigon. Lib. 1. Fig. 2.



Ι': Ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστιν εὐθεῖα γραμμὴ ἐλάττων τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ κύκλου, πρὸς ὀρθὰς ἀπό τινος σημείου τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένη, ὡς ἡ αβ.

ΙΑ': Πλάγιον Ἡμίτονόν ἐστιν εὐθεῖά τις γραμμὴ ἐναπολαμβανομένη μεταξὺ τοῦ ὀρθοῦ Ἡμιτόνου, καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ὡς ἡ βγ, καὶ εζ· καλεῖται δὲ τὸ Πλάγιον Ἡμίτονον καὶ ὀϊστός.

ΙΒ': Ὁλικὸν Ἡμίτονόν ἐστιν ὀρθὸν Ἡμίτονον τεταρτημορίου, αὐτὴ δηλ: ἡ ἡμιδιάμετρος, οἷον ἡ εη. Ὁλικόν ἐστιν Ἡμίτονον τοῦ τε εαγ, τεταρτημορίου καὶ τοῦ εθ, διὸ καὶ μέγιστόν ἐστι τῶν λοιπῶν πάντων Ἡμιτόνων.

ΙΓ': Τόξου Ἡμίτονον ἐστὶν ὀρθὸν Ἡμίτονον ἐλάττονος ἢ μείζονος τόξου τοῦ τεταρτημορίου, ὡς τὸ αβ, ὅπερ Ἡμίτονον λέγεται τοῦ τε αγ, τόξου ἐλάττονος τοῦ εαγ, τεταρτημορίου, καὶ τοῦ αεθ, μείζονος τοῦ εθ, τεταρτημορίου. τὸ δὲ τοῦ τόξου Ἡμίτονον λέγεται καὶ τῆς γωνίας, ἧς τὸ τόξον μέτρον ἐστί. τὸ γὰρ αβ, Ἡμίτ: τοῦ αγ, τόξου, λέγεται ἔτι Ἡμίτονον τῆς τε ὑπὸ γηα, καὶ ὑπὸ αηθ, γωνίας.

ΙΔ':

ΙΔ': Παραπληρώματος Ἡμίτονόν ἐστιν, ὃ καὶ δεύτερον Ἡμίτονον λέγεται, ὀρθὸν ἡμίτονον παραπληρώματος τόξου, ὡς τὸ αζ. τοῦτο γὰρ λέγεται Ἡμίτονον παραπληρώματος, ὅτι ὀρθόν ἐστιν Ἡμίτονον τοῦ αε, τόξου, ὅπερ παραπλήρωμά ἐστι τοῦ αγ, τόξου, καθὰ ἐνταῦθα ὑπετέθη. ἐπεὶ δὲ τὸ παραπλήρωμα μὴ μόνον πρὸς τὸ ἔλαττον τοῦ τεταρτημορίου λαμβάνεται, ἀλλὰ καὶ πρὸς τὸ μεῖζον· τὸ αὐτὸ αζ, λέγεται Ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ τε αγ, τόξου καὶ τοῦ αεθ, τόξου. ἄμφω γὰρ τὰ γα, αεθ, τόξα τὸ αὐτὸ αε, ἔχουσι παραπλήρωμα, τὸ μὲν κατ' ἔλλειψιν, τὸ δὲ καθ' ὑπεροχὴν πρὸς τὸ τεταρτημόριον. ὥστε δῆλον ὅτι τὸ τεταρτημόριον οὐκ ἔχει Ἡμίτονον παραπληρώματος, ὅτι οὐδὲ παραπλήρωμα ἔχει. τὰ αὐτὰ δὲ καὶ περὶ τῶν γωνιῶν ἁρμόττει λέγεσθαι. Ἐπεὶ δὲ τὸ αζ, ἴσον ἐστὶ τῇ βπ, δῆλον, ὅτι παραπληρώματος Ἡμίτονόν ἐστι τὸ ἐναπολειπόμενον ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ Ἡμιτόνου, ἀφαιρεθέντος τοῦ Πλαγίου Ἡμιτόνου.

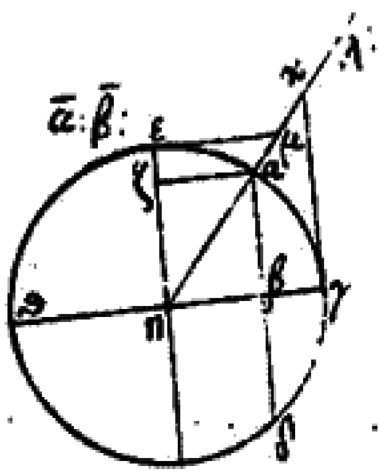
ΙΕ': Τὰ ἡμίτονα ἢ πρώτης τάξεώς εἰσιν, ἢ β': καὶ α: μὲν τάξεώς εἰσι παρὰ τὸ Ὁλικὸν Ἡμίτονον, τέσσαρα, ἡμίτονον δηλ: μοιρ: λ̄. ἡμίτον: μοιρ: ιη̄: ἡμίτ: μοιρ: λ̄ϛ, καὶ ἡμίτ: μοιρ: μῑ. δευτέρας δὲ τὰ λοιπὰ μέχρι τῶν ἐσχάτων.

Ιϛ': Τὰ Ἡμίτονα τόξων ἐλαχίστων ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς τόξοις, ὧν εἰσιν ἡμίτονα, ὡς πρὸς αἴσθησιν. ἡ γὰρ τοῦ ἡμικυκλίου περιφέρεια ἑκατέρωθεν συμπίπτει τῇ καθέτῳ, ὡς πρὸς αἴσθησιν, τῇ ἐπὶ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου ἀγομένῃ.

ΙΖ': Ἁπτομένη τόξου ἐστὶν εὐθεῖα γραμμή, καθ' ἓν πέρας τοῦ τόξου ἁπτομένη, καὶ περατουμένη ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ ἑτέρου πέρατος ἀγομένης τοῦ τόξου, ἥτις καὶ παράλληλός ἐστι τῷ ὀρθῷ τοῦ τόξου ἡμιτόνῳ. οἷον ἡ γκ, λέγεται ἁπτομένη τοῦ αγ, τόξου, ὅτι ἅπτεται αὐτοῦ κατὰ τὸ γ, καὶ περατοῦται ὑπὸ τῆς πλ, καὶ ἐστι τῷ αβ, ὀρθῷ ἡμιτόνῳ τοῦ αὐτοῦ τόξου παράλληλος. ἡ αὐτὴ δὲ λέγεται ἁπτομένη καὶ τῆς ὑπὸ απγ, γωνίας καὶ τῆς ὑπὸ απθ.

Trigon. Lib. 1. Fig. 3.

ΙΗ': Ἁπτομένη δὲ παραπληρώματός ἐστιν ἡ καθ' ἓν πέρας τοῦ παραπληρώματος τοῦ τόξου ἁπτομένη εὐθεῖα, καὶ περατουμένη ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ ἑτέρου πέρατος τοῦ αὐτοῦ παραπληρώματος, ὡς ἡ εμ, ἥτις ἁπτομένη λέγεται τοῦ αε, τόξου παραπληρώματος, τοῦ τε αγ, καὶ αεθ, τόξου. Λέγεται δ' ἔτι καὶ τῆς ὑπὸ απε, γωνίας ἁπτομένη, ἥτις παραπλήρωμά ἐστι τῆς τε ὑπὸ απγ, καὶ απθ.



ΙΘ': Τέμνουσα τόξου ἐστὶν εὐθεῖα γραμμὴ διά τε τοῦ κέντρου καὶ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου ἀγομένη, ἔξωθεν τοῦ κύκλου ὑπὸ τῆς τοῦ αὐτοῦ τόξου ἀπτομένης περατουμένη, ὡς ἡ ηκ, ἥτις λέγεται τέμνουσα τοῦ τε αγ, καὶ αεθ, τόξου. ἡ δ' αὐτὴ ἔτι λέγεται τέμνουσα τῆς τε ὑπὸ αηγ, καὶ αηθ.

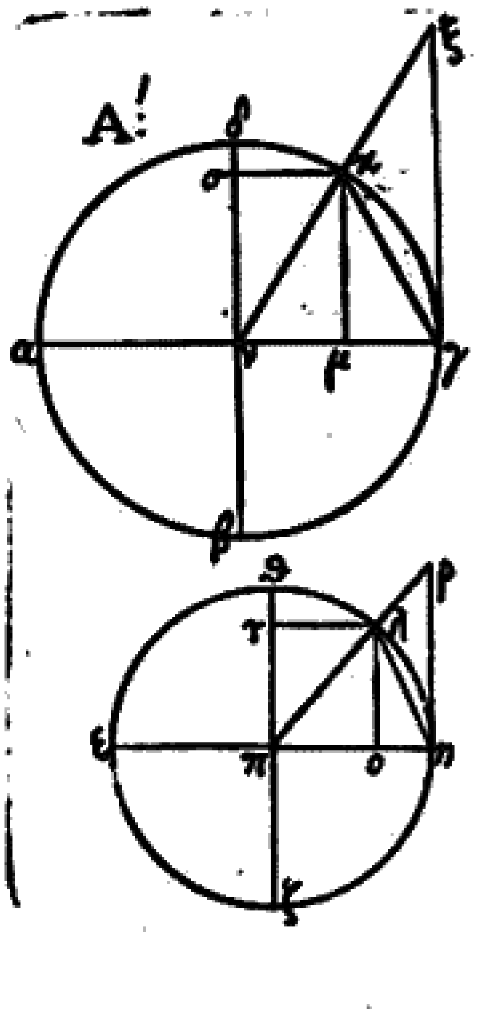
Κ': Τέμνουσα παραπληρώματος ἐστὶν εὐθεῖα γραμμὴ διά τε τοῦ κέντρου καὶ τοῦ πέρατος τοῦ παραπληρώματος τοῦ τόξου ἀγομένη, καὶ περατουμένη ὑπὸ τῆς τοῦ αὐτοῦ παραπληρώματος ἀπτομένης, ὡς ἡ ημ, ἥτις τέμνουσα λέγεται τοῦ αι, παραπληρώματος, τοῦ τε αγ, καὶ αεθ, τόξου. Ἡ αὐτὴ δ' ἔτι ημ, λέγεται Τέμνουσα καὶ τῆς ὑπὸ αηι, γωνίας, ἥτις ἐστὶ παραπλήρωμα τῆς τε ὑπὸ αηγ, καὶ αηθ, γωνίας.

Πρότασις Α': Θεώρημα.

Ἐν πᾶσι τοῖς κύκλοις ὁ αὐτός ἐστι λόγος τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου πρός τε τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον, καὶ παραπληρώματος ἡμίτονον, καὶ πλάγιον ἡμίτονον, καὶ ὑποτείνουσαν, καὶ ἀπτομένην, καὶ τέμνουσαν τῶν ὁμοίων τόξων.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ αβγδ, εζηθ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐπ' αὐτῶν τόξα ὅμοια τὰ γκ, ηλ. καὶ τοῦ μὲν γκ, ἔστω ὀρθὸν μὲν ἡμίτονον τὸ κμ, παραπληρώματος δὲ τὸ μν, πλάγιον δὲ τὸ μγ, ὑποτείνουσα δὲ ἡ γκ, ἀπτομένη δὲ ἡ γξ, καὶ τέμνουσα ἡ νξ. τοῦ δὲ ηλ, ὀρθὸν μὲν Ἡμίτονον τὸ λσ, παραπληρώματος δὲ τὸ οπ, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ὁρᾶται ἐπὶ τοῦ σχήματος. Λέγω ὅτι ὡς ἔχει τὸ Ὁλικὸν Ἡμίτονον τοῦ γκ, τόξου, ἤτοι ἡ ἡμιδιάμετρος τοῦ αβγδ, κύκλου πρὸς τὴν κμ, μν, μγ, γξ, νξ, ἔχει καὶ τὸ Ὁλικὸν Ἡμίτονον τοῦ ηλ, τόξου, ἤτοι ἡ ἡμιδιάμετρος τοῦ εζηθ, κύκλου πρὸς τὴν λο, οπ, οη, ηλ, ηρ, πρ. Ἐπεὶ γὰρ τὰ γκ, ηλ, τόξα ὅμοιά εἰσι, πάντως γε αἱ ὑπὸ γνκ, ηπλ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸν β': ὅρον τοῦ παρόντος, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ κμν, λοπ, ἴσαι, ὅτι ἑκατέρα ὀρθὴ κατὰ τὸν ι': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ μκν, ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ολπ. ὥστε τὰ κμν, λοπ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, καὶ κατὰ τὸν δ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ νκ, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν κμ, ὀρθὸν Ἡμίτονον, ἡ πλ, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν λο, ὀρθὸν Ἡμίτο-

Trigon. Lib. I. Fig. 4.



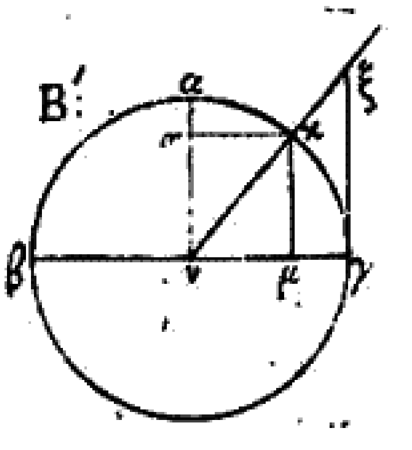
νον,

τον, ὅπερ ἦν τὸ α΄: ὡς δὲ ἡ κν, πρὸς τὴν νμ, ἤτοι τὴν κσ, ἡμίτ: παραπληρώματος, ἡ λπ, πρὸς τὴν πο, ἤτοι τὴν λτ, παραπληρώματος Ἡμίτονον, ὅπερ ἦν τὸ β΄: Αὖθις ἐπεὶ τὰ κνγ, λπη, τρίγωνα ἰσοσκελῆ εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ κνγ, λπη, ἴσαι, δῆλον ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ ὑπὸ νκγ, νγκ, λοιπαῖς ταῖς ὑπὸ πλη, πηλ, ἴσαι συναμφότεραι συναμφοτέραις. ἀλλὰ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἄρα καὶ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἴση ἐστίν, ἡ μὲν ὑπὸ νγκ, τῇ ὑπὸ πηλ, ἡ δὲ ὑπὸ νκγ, τῇ ὑπὸ πλη. ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἴσων νκμ, πλο, ἀπὸ τῶν ἴσων νκγ, πλη, ἐναπολείπονται δήπουθεν ἴσαι αἱ ὑπὸ μκγ, ολη. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ κμγ, λοη, ἴσαι εἰσὶ διὰ τὸ εἶναι ἑκατέραν ὀρθήν, ἄρα καὶ τὰ κμγ, λοη, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι. καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ΄: ὡς ἡ κμ, πρὸς τὴν μγ, ἔστι καὶ ἡ λο, πρὸς τὴν οη, ὡς δὲ ἡ νκ, πρὸς τὴν κμ, δέδεικται καὶ ἡ πλ, πρὸς τὴν λο, τρία μεγέθη τὰ νκ, κμ, μγ, καὶ ἕτερα αὐτοῖς ἴσα τῷ πλήθει, τὰ πλ, λο, οη, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσι λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμενα, ὥστε καὶ δι᾽ ἴσου ἀναλογόν εἰσι κατὰ τὴν κβ΄: τοῦ ε΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κν, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν μγ, Πλάγιον Ἡμίτονον, ἡ πλ, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν οη, Πλάγιον Ἡμίτονον, ὅπερ ἦν τὸ γ΄: εἰσὶ δὲ καὶ τὰ νγκ, πηλ, τρίγωνα ἰσογώνια ὡς δέδεικται, ἄρα ὡς ἡ νγ, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν γκ, ὑποτείνουσαν, οὕτως ἡ πη, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν ηλ, ὑποτείνουσαν, ὅπερ ἦν τὸ δ΄: Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται ἔτι καὶ ὡς ἡ νγ, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν γξ, ἀπτομένην τοῦ γκ, τόξου, καὶ νξ, τέμνουσαν τοῦ αὐτοῦ, ἔχειν καὶ τὴν πη, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν ηρ, ἀπτομένην τοῦ ηλ, τόξου, καὶ πρ, τέμνουσαν τοῦ αὐτοῦ. διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ νγξ, πηρ, τρίγωνα, ὡς δῆλον τῷ καὶ μικρὸν ἐπιστήσαντι. Ἐν πᾶσιν ἄρα τοῖς κύκλοις ὁ αὐτός ἐστι λόγος τοῦ Ὁλικοῦ Ἡμιτόνου πρός τε, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Β΄: Θεώρημα.

Τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον δύναται τό, τε ὀρθὸν ἡμίτονον καὶ ἡμίτονον παραπληρώματος ἑκάστου τόξου.

Trigon. Lib. 1. Fig. 5.



Ἔστω ἐπὶ τοῦ αβγ, κύκλου ὀρθὸν μὲν ἡμίτονον τοῦ γκ, τόξου τὸ κμ, ἡμίτονον δὲ παραπληρώματος τὸ κσ. Λέγω ὅτι τὸ ὁλικὸν Ἡμίτονον δύναται τό, τε κμ, καὶ κσ. ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὸν ι: ὅρον ἡ κμ, πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἐπὶ τῆς γν, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς νκ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν κμ, μν, κατὰ τὴν μζ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἴση δὲ ἡ μν, τῇ κσ, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς νκ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν κμ,

κσ,

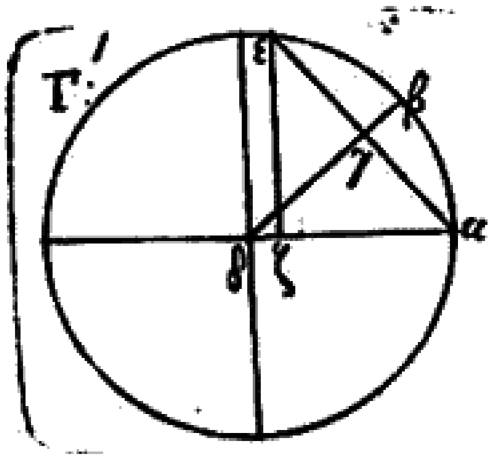
κσ, τετραγώνοις, ἀλλ' ἡ κν, ὁλικὸν ἡμίτονον, ἡ δὲ κμ, ὀρθὸν τοῦ κγ, τόξου, καὶ ἡ κσ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου. ἄρα τὸ Ὁλικὸν Ἡμίτονον δύναται τό, τε ὀρθὸν ἡμίτονον καὶ ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ γκ, τόξου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματός τινος τόξου, οὕτως ἡ ὑποτείνουσα τοῦ διπλασίου τόξου πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ.

Ἔστω τόξον τὸ αβ, οὗ ὀρθὸν ἡμίτονον τὸ αγ, ἡμίτονον δὲ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ αβ, τὸ γδ, κατὰ τὸν ιδ': ὅρον. ἔστω καὶ διπλάσιον τόξον τοῦ αβ, τὸ αε, οὗ ἡμίτονον ὀρθὸν τὸ εζ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον ἤτοι ἡ αδ, πρὸς τὴν δγ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου, ἔστι καὶ ἡ αε, ὑποτείνουσα τοῦ αε, διπλασίου τόξου πρὸς τὴν εζ, ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ. ἐπεὶ γὰρ τῶν αγδ, αεζ, τριγώνων αἱ ὑπὸ αγδ, εζα, γωνίαι ὀρθαί εἰσι κατὰ τὸν ι: ὅρον, ἡ δὲ ὑπὸ εαζ, κοινή, πάντως γε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ αδγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αεζ, ἴση ἐστίν. ἰσογώνια ἄρα τὰ αδγ, αεζ, τρίγωνα. ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι κατὰ τὴν δ': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αδ, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν δγ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου, οὕτως ἡ αε, ὑποτείνουσα τοῦ διπλασίου τόξου αε, πρὸς τὴν εζ, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ. ὡς τὸ ὁλικὸν ἄρα ἡμίτονον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trigon. Lib. 1. Fig. 6.



Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τόξου τινὸς μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ τε ἡμίσεως τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου καὶ πλαγίου ἡμιτόνου τοῦ ὅλου τόξου.

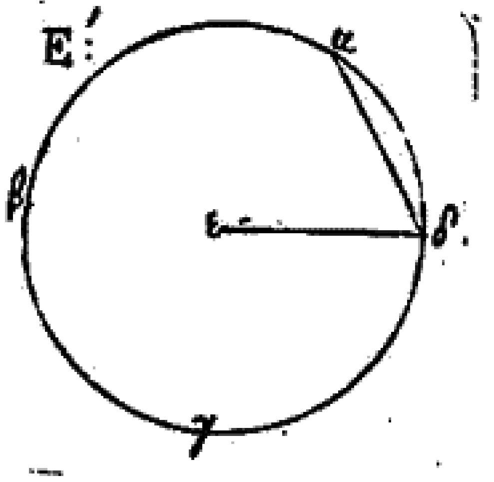
Ἔστω ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος τόξον τὸ αε, καὶ τούτου ἥμισυ τὸ αβ, οὗ ἡμίτονον τὸ αγ, τοῦ δὲ αε, ἡμίτονον πλάγιον τὸ αζ. Λέγω ὅτι τὸ αγ, ἡμίτονον τοῦ αβ, τόξου, ἡμίσεως τοῦ αε, μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ αζ, πλαγ: ἡμιτ: τοῦ ὅλου αε, τόξου. ἐπεὶ γὰρ τὰ αγδ, αεζ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν ὡς δέδεικται ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω, πάντως γε ὡς ἡ δα, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν αγ, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αβ, τόξου ἡμίσεως τοῦ αε, οὕτως ἡ αε, ὑποτείνουσα πρὸς τὴν αζ, πλάγιον ἡμίτονον τοῦ ὅλου αε, τόξου, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ δα, ὁλι-

ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν αε, ὑποτείνουσαν, ἡ γα, ἡμίτ: τοῦ αβ, πρὸς τὴν αζ, πλάγιον ἡμίτ: τοῦ αε, ὡς δὲ ἡ δα, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν αε, ἔστι καὶ τὸ ἥμισυ τῆς δα, πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς αε, ἤτοι τὸ αγ· ἄρα καὶ ὡς τὸ ἥμισυ τῆς δα, ὁλικοῦ ἡμιτόνου πρὸς τὸ αγ· ἡμίτονον τοῦ αβ, τόξου ἡμίσεως τοῦ ὅλου αε, οὕτω τὸ αγ, πρὸς τὸ αζ, πλάγιον ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ αε. Τὸ ἡμίτονον ἄρα τοῦ ἡμίσεως τόξου τινὸς μέσον ἐστὶν ἀνάλογον καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ε′: Θεώρημα.

Ὑποτείνουσα τόξου μοιρῶν ξ, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Trigon. Lib. I. Fig. 7.



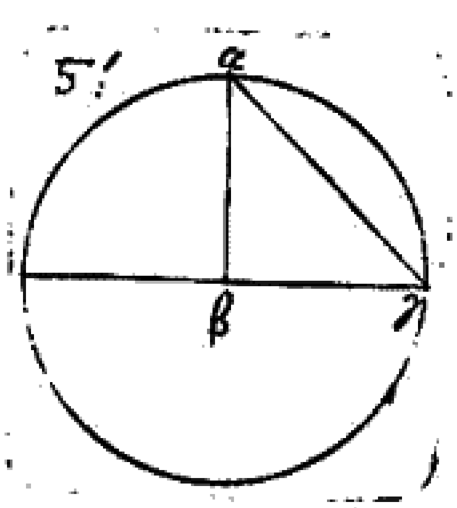
Ἔστω κύκλος ὁ αβγδ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ εδ, ὑποτείνουσα δὲ μοιρῶν ξ: ἡ δα. Λέγω ὅτι ἡ δα, ἴση ἐστὶ τῇ εδ. κατὰ τὸ πόρισμα γὰρ τῆς ιε′: τοῦ δ′: τοῦ Στοιχ: ἡ εδ, ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν αβγδ, ἐγγραφομένου κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἡ δα, πλευρά ἐστιν ἑξαγώνου. τοῦ γὰρ κύκλου ὅλου εἰς τξ: διαιρουμένου μοίρας, τὸ δα, τόξον μοιρῶν ὂν ξ, ἕκτον μερός ἐστι τοῦ ὅλου αβγδ, κύκλου. ἄρα ἡ δα, ἴση ἐστὶ τῇ εδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ′: Θεώρημα.

Ὑποτείνουσα τόξου μοιρῶν ϟ: δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Ἔστω τόξον μοιρῶν ϟ: τὸ αγ, οὗ κέντρον τὸ β, ὑποτείνουσα δὲ ἡ αγ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ. Λέγω ὅτι ἡ αγ, δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς βγ.

Trigon. Lib. I. Fig. 8.



ἐπεὶ γὰρ τὸ αγ, τόξον μοιρῶν ὑποτίθεται ϟ, καὶ μέτρον ἐστὶ τῆς ὑπὸ αβγ, γωνίας, πάντως γε καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ὥστε κατὰ τὴν μζ′: τοῦ α′: τοῦ Στοιχ: τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετραγώνοις, ἀλλ᾽ αἱ αβ, βγ, ἴσαι εἰσὶ, τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἑνὸς, ἤτοι τοῦ ἀπὸ τῆς βγ, καὶ ἑπομένως ἡ αγ, δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς βγ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἐπὶ δύο ἀριθμοὺς μερισθῇ χωρὶς, οἱ μερισταὶ ἀντιπεπόνθασι τοῖς πηλίκοις.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α, μεριζέσθω α': ἐπὶ τὸν β, καὶ ἔστω πηλίκον ὁ γ, μεριζέσθω β': ἐπὶ τὸν δ, καὶ ἔστω πηλίκον ὁ ε. Λέγω δὴ εἶναι ὡς ὁ β, μεριστὴς τῆς α': διαιρέσεως πρὸς τὸν δ, μεριστὴν τῆς β': διαιρέσεως, οὕτω τὸ ε, πηλίκον τῆς β': διαιρέσεως πρὸς τὸ γ, πηλίκον τῆς α': διαιρέσεως. ἐπεὶ γὰρ ὁ β, τὸν α, μερίσας παρέχει πηλίκον τὸ γ, δῆλον ὅτι ὁ β, τὸν γ, πολλαπλασιάζων τὸν α, ποιεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ δ, τὸν ε, πολλαπλασιάζων τὸν αὐτὸν α, ποιεῖ. ὥστε τῶν β, γ, ὡς ἄκρων λαμβανομένων, τῶν δὲ δ, ε, ὡς μέσων, ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἔσαι τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. καὶ οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ οὑτωσὶ κείμενοι ἀνάλογον ἔσονται. ἔσαι ἄρα ὡς ὁ β, πρὸς τὸν δ, ὁ τῆς α': διαιρέσεως μεριστὴς πρὸς τὸν τῆς β': ὁ ε, πρὸς τὸν γ, τὸ τῆς β': διαιρέσεως πηλίκον πρὸς τὸ τῆς α':

α	β	γ	δ	ε
60,	6,	10,	4,	15:

β	δ	ε	γ
6	4	15	10

ἀνάπαλιν

δ	β	γ	ε
4	6	10	15

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Τὸν αὐτὸν τρόπον δείκνυται, κἂν ἡ αὐτὴ συνεχὴς ποσότης διπλῇ διαιρεθῇ διανομῇ, τὸ τῆς α': διανομῆς διαιρετικὸν μέρος πρὸς τὸ τῆς β': ἔχειν, ὡς ὁ ἀριθμὸς τῶν παρεχομένων μερῶν τῆς β': διανομῆς πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν παρεχομένων τῆς α': διανομῆς μερῶν.

Πρότασις Η': Θεώρημα.

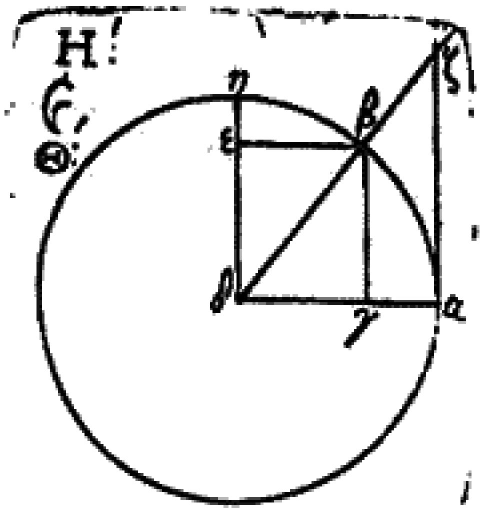
Ὡς τὸ ἡμίτομον τοῦ παραπληρώματος τόξου τμημὸς πρὸς τὸ ὀρθὸν ἡμίτομον τοῦ αὐτοῦ τόξου, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτομον πρὸς τὴν ἁπτομένην τοῦ τόξου.

Ἔστω τόξον τὸ αβ, οὗ ὀρθὸν ἡμίτονον τὸ βγ, ἡμίτονον δὲ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου τὸ βε, καὶ ἁπτομένη ἡ αζ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ βε, ἡμίτονον παραπληρώματος πρὸς τὸ βγ, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αβ, τόξου, οὕτω τὸ δα, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν αζ, ἁπτομένην τοῦ αὐτοῦ αβ, τόξου. Ἐπεὶ γὰρ ἐπὶ τῆς δα, ἑκατέρα τῶν γβ, αζ, πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκε κατὰ τὸν ὅρον τοῦ ὀρθοῦ ἡμιτόνου καὶ τῆς ἁπτομένης, πάντως γε τὰ δβγ, δαζ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι. παρὰ γὰρ τὰς

[illegible]

πρὸς τὸ γ καὶ α, ὀρθὰς γωνίας, ἔχουσι καὶ κοινὴν τὴν ὑπὸ β δ γ, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ γ, πρὸς τὴν γ β, ἡ δ α, πρὸς τὴν α ζ. ἀλλ' ἡ δ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ε β, τῶν γὰρ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ, καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἄρα ὡς τὸ ε β, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ α β, τόξου πρὸς τὸ γ β, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου, οὕτω τὸ δ α, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ α β, τόξου, ἤτοι τὴν α ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Trigon. lib. 1. Fig. 8.



Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ τε ἡμιτόνου τοῦ παραπληρώματος καὶ τῆς τεμνούσης τοῦ τόξου, καὶ ἀνάπαλιν.

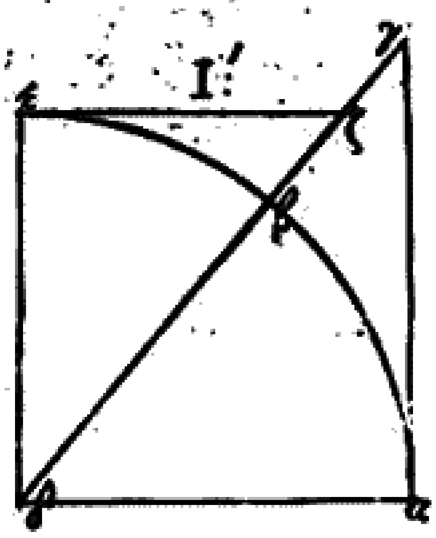
Ἔστω τόξον τὸ α β, οὗ ἡμίτονον παραπληρώματος τὸ ε β, καὶ τέμνουσα ἡ δ ζ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ε β, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ α β, τόξου πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν δ ζ, τέμνουσαν τοῦ αὐτοῦ α β, τόξου. Ἐπεὶ γὰρ αἱ β γ, ζ α, ὀρθαί εἰσιν ἐπὶ τῆς δ α, πάντως γε καὶ παράλληλοι. ὥστε κατὰ τὴν β': τοῦ ς': τοῦ Στοιχ: ὡς ἡ δ γ, πρὸς τὴν δ α, ἡ δ β, πρὸς τὴν δ ζ· ἀλλ' ἡ μὲν δ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ε β, ἥτις ὑπετέθη ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ α β, τόξου, ἡ δὲ δ α, τῇ δ β, ἡμιδιάμετρος γὰρ ἑκατέρα, ἄρα ὡς τὸ ε β, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ α β, τόξου πρὸς τὴν δ β, ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ δ β, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν δ ζ, τέμνουσαν τοῦ αὐτοῦ α β, τόξου. Ὅτι δὲ καὶ ἀνάπαλιν δῆλον. λαμβανομένου γὰρ τοῦ β η, παραπληρώματος ἀντὶ τόξου, τοῦ δὲ α β, ἀντὶ παραπληρώματος, ἔσται ὡς τὸ ε β, ἡμίτονον τόξου πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν δ ζ, τέμνουσαν τοῦ α β, παραπληρώματος.

Πρότασις Ι'. Θεώρημα.

Τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τῶν ἀπτομένων τόξου τε καὶ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου.

Ἔστω τόξον τὸ α β, οὗ ἀπτομένη ἡ α γ, παραπλήρωμα δὲ τοῦ αὐτοῦ τὸ β ε, οὗ ἀπτομένη ὁμοίως ἡ ε ζ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ α γ, ἀπτομένη τοῦ α β, τόξου πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ε ζ, ἀπτομένην τοῦ β ε, παραπληρώματος τοῦ β α, τόξου. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α β ε, τόξον τεταρτημόριόν ἐστι, πάντως γε ἡ ὑπὸ α δ ε, γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δ ε ζ, ὀρθὴ κατὰ τὸν ὅρον τῆς ἁπτομένης, ἄρα αἱ δ α, ε ζ, παράλληλοί εἰσιν. ὥστε καὶ αἱ ὑπὸ α δ ζ, ε ζ δ ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ δ α γ, δ ε ζ, ὁμοίως ἴσαι εἰσὶν, ὀρθαὶ γὰρ ἑκατέρα. ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ α γ δ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ε δ ζ, ἴση ἐστίν. ἰσογώνια ἄρα τὰ α δ γ, ε δ ζ, τρίγωνα, ὥστε καὶ ὅμοια. καὶ διὰ αὐτὸ τοῦτο καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι, τὰς ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ α, ἁπτομένη τοῦ α β, τόξου πρὸς τὴν α δ, ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ δ ε, ὁλικὸν ἡμίτονον, ἴση γὰρ ἡ δ α, τῇ δ ε, πρὸς τὴν ε ζ, ἁπτομένην τοῦ α β, τόξου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Trigon. Lib. 1. Fig. 9.

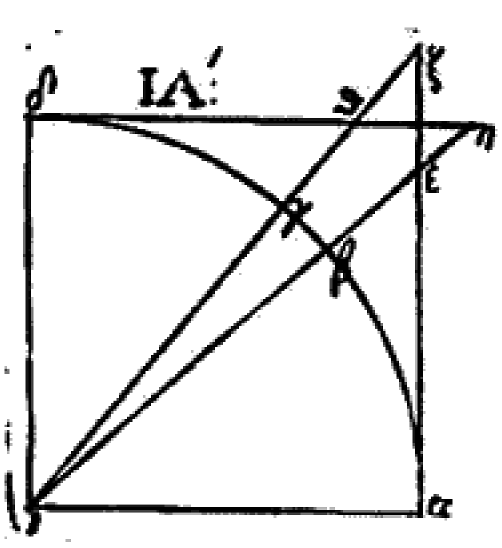


Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Ἁπτόμεναι τόξων ἁπτομέναις παραπληρωμάτων τῶν αὐτῶν τόξων ἀντιπεπονθότως εἰσὶν ἀνάλογον.

Ἔστωσαν τόξα μὲν τὰ α β, α γ, παραπληρώματα δὲ τῶν αὐτῶν τόξων τὰ β δ, γ δ, καὶ τοῦ μὲν α β, τόξου ἁπτομένη ἔστω ἡ α ε, τοῦ δὲ α γ, ἡ α ζ. ἔστω δὲ καὶ τοῦ μὲν β δ, παραπληρώματος τοῦ α β, τόξου ἁπτομένη ἡ δ η, τοῦ δὲ γ δ, παραπληρώματος τοῦ α γ, τόξου ἡ δ θ. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ α ε, ἁπτομένη τοῦ α β, τόξου ἐλάττονος πρὸς τὴν α ζ, ἁπτομένην τοῦ α γ, μείζονος τόξου, οὕτως ἡ δ θ, ἁπτομένη τοῦ δ γ, παραπληρώματος τοῦ α γ, μείζονος τόξου πρὸς τὴν δ η, ἁπτομένην τοῦ β δ, παραπληρώματος τοῦ α β ἐλάττονος τόξου. κατὰ γὰρ τὴν ἀνωτέρω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τῶν ἁπτομένων τοῦ α β, ἐλάττονος τόξου καὶ β δ, παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ὡς ἡ α ε, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν δ η. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α ε, δ η, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν α ζ, δ θ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον διὰ τὰ αὐτὰ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου τετραγώνῳ. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν α ε, δ η, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν α ζ, καὶ δ θ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ὥστε τῶν α ε, δ η, ἀντὶ ἄκρων λαμβανομένων, τῶν δὲ α ζ, δ θ, ἀντὶ μέσων, ἔσται ὡς ἡ α ε, πρὸς

Trigon. Lib. 1. Fig. 10.



τὴν

τὴν αζ, ἡ δθ, πρὸς τὴν δη, καὶ τὴν ιϛ΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

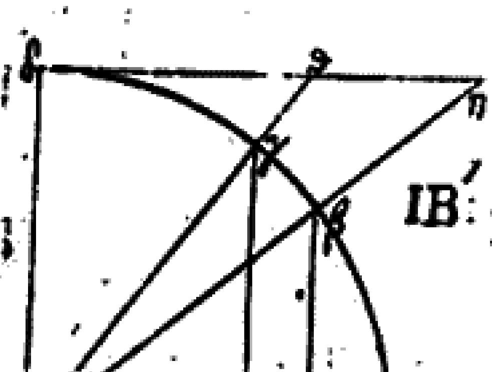
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι αἱ τῶν τόξων ἀπτόμεναι πρὸς τὰς τῶν παραπληρωμάτων τῶν αὐτῶν τόξων ἀπτομένας ἀντιπεπονθότως εἰσὶν ἀνάλογον· ἤτοι ὡς ἡ θατέρου τῶν τόξων ἀπτομένη πρὸς τὴν τοῦ παραπληρώματος τοῦ ἑτέρου τόξου ἀπτομένην, οὕτως ἡ τοῦ ἑτέρου τῶν τόξων ἀπτομένη πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ παραπληρώματος τοῦ ἐξ ἀρχῆς τόξου. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν αζ, ἡ δθ, πρὸς τὴν δη, ἔσται πάντως, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ αε, ἀπτομένη τοῦ αβ, τόξου πρὸς τὴν δθ, ἀπτομένην τοῦ γδ, παραπληρώματος τοῦ αγ, τόξου, οὕτως ἡ αζ, ἀπτομένη τοῦ αγ, τόξου πρὸς τὴν δη, ἀπτομένην τοῦ βδ, παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου.

Πρότασις ΙΒ΄.

Ἡμίτονα τόξων καὶ τέμνουσαι παραπληρωμάτων τῶν αὐτῶν ἀντιπεπονθότως εἰσὶν ἀνάλογον.

Ἔστω τόξα τὰ αβ, αγ, ὧν ἡμίτονα τὰ βε, γζ, παραπληρώματα δὲ αὐτῶν τὰ βδ, γδ, ὧν τέμνουσαι αἱ ιη, ιθ. Λέγω ὅτι ἐστὶν ἀντιπεπονθότως, ὡς τὸ βε, ἡμίτονον τοῦ αβ, ἐλάττονος τόξου πρὸς τὸ γζ, ἡμίτονον τοῦ αγ μείζονος τόξου, οὕτως ἡ ιθ, τέμνουσα τοῦ γδ, παραπληρώματος τοῦ αγ, μείζονος τόξου πρὸς τὴν ιη, τέμνουσαν τοῦ βδ παραπληρώματος τοῦ αβ, ἐλάττονος τόξου. καὶ γὰρ τὸ β΄: μέρος τῆς θ΄: τοῦ παρόντος τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ βε, ἡμιτόνου τοῦ αβ, τόξου, καὶ τῆς ιη, τεμνούσης τοῦ βδ, παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ αβ, τόξου. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν βε, ιη, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου τετραγώνῳ· ἀλλὰ δὴ καὶ τὸ ὑπό τε τοῦ γζ, ἡμιτόνου τοῦ αγ, τόξου, καὶ ιθ, τεμνούσης τοῦ γδ, παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ αγ, τόξου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου τετραγώνῳ, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βε, ιη, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γζ, ιθ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ὥστε καὶ τὴν ιϛ΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ τῶν βε, ιη, ἀντὶ ἄκρων λαμβανομένων, τῶν δὲ γζ, ιθ, ἀντὶ μέσων, ἔσται ὡς τὸ βε, πρὸς τὸ γζ, ἡ ιθ, πρὸς τὴν ιη. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ βε, ἡμίτονον τοῦ αβ, ἐλάττονος τόξου πρὸς τὴν ιθ, τέμνουσαν τοῦ γδ, παραπλη-

Trigon. Lib. I. Fig. II.



ΙΒ΄

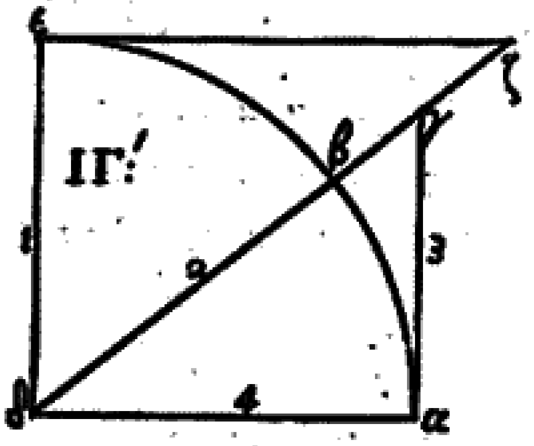
ρώματος τοῦ αγ, μείζονος τόξου, οὕτω τὸ γζ, ἡμίτονον τοῦ αγ, μείζονος τόξου πρὸς τὴν εη, τέμνουσαν τοῦ βδ, παραπληρώματος τοῦ αβ, ἐλάττονος τόξου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

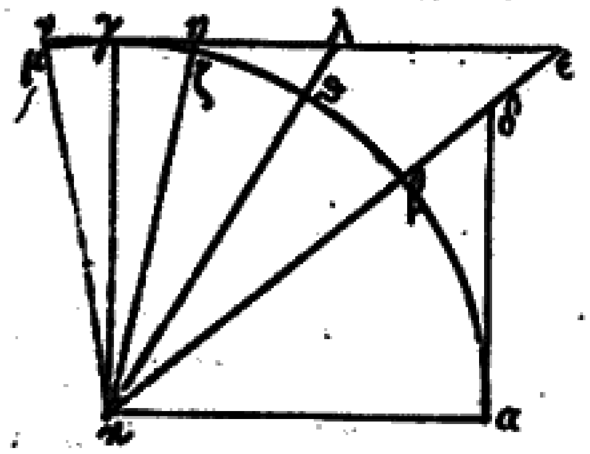
Πρότασις ΙΓ'.

Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπληρώματος τόξου τινός, οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ τόξου πρὸς τὴν τέμνουσαν αὐτοῦ.

Ἔστω τόξον τὸ αβ, οὗ ἀπτομένη ἡ αγ, τέμνουσα δὲ ἡ δγ, παραπλήρωμα δὲ τοῦ αὐτοῦ τόξου ἔστω τὸ βε, οὗ ἀπτομένη μὲν ἡ εζ, τέμνουσα δὲ ἡ δζ. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν δζ, ἡ αγ, πρὸς τὴν δγ. τὰ γὰρ δαγ, δεζ, τρίγωνα ὀρθογώνιά εἰσι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀπτομένων. ὥστε ἡ ὑπὸ δαγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δεζ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ γδα, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δζε, ἐναλλάξ, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς δα, εζ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα ἐπὶ τῆς δε. ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δγα, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ζδε, ὁμοίως ἴση ἐστίν. ἰσογώνια ἄρα τὰ δαγ, δεζ, τρίγωνα, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι τὰς ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ εδ, πρὸς τὴν δζ, ἡ αγ, πρὸς τὴν γδ. ἀλλ' ἡ μὲν εδ, ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον, ἡ δὲ δζ, τέμνουσα τοῦ εβ, παραπληρώματος, ἡ δὲ αγ, ἀπτομένη τοῦ αβ, τόξου, καὶ ἡ δγ, τέμνουσα τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπληρώματος τόξου τινός, οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ τόξου πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ αὐτοῦ.

Trigon. Lib. 1. Fig. 22.





Πρότασις ΙΔ'.

Διαφορὰ ἀπτομένων δύο τόξων τεταρτημορίου συμπληρούντων διπλῆ ἐστὶν ἀπτομένης τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν τόξων.

Ἔστωσαν δύο τόξα συμπληρωτικὰ τεταρτημορίου τὰ αβ, βγ. καὶ τοῦ μὲν αβ, ἔστω ἀπτομένη ἡ αδ, τοῦ δὲ βγ, ἡ γε. Κείσθω δὲ τὸ μὲν αβ, ἔλαττον, μεῖζον δὲ τὸ βγ. καὶ εἰλήφθω τὸ βζ, ἴσον τῷ

αβ,

$\alpha\beta$, ὥστε τὸ $\zeta\gamma$, ὑπεροχὴν εἶναι τοῦ $\beta\gamma$, πρὸς τὸ $\alpha\beta$, οὗ ἀπτομένη ἡ $\gamma\eta$. Λέγω τὴν ὑπεροχὴν τῆς $\gamma\epsilon$, ἀπτομένης τοῦ $\beta\gamma$, μείζονος τόξου πρὸς τὴν $\alpha\delta$, ἀπτομένην τοῦ ἐλάττονος $\alpha\beta$, τόξου διπλασίαν εἶναι τῆς $\gamma\eta$, ἀπτομένης τοῦ $\zeta\gamma$, τόξου, καθ' ὃ ὑπερέχει τὸ $\beta\gamma$, τοῦ $\alpha\beta$. εἰλήφθω γὰρ τὸ $\gamma\vartheta$, τόξον ἴσον τῷ $\alpha\beta$, καὶ διήχθω ἀπὸ τοῦ κ, κέντρου διὰ τοῦ ϑ, ἡ $\kappa\lambda$. εἶτα εἰλήφθω καὶ τὸ $\gamma\mu$, τόξον ἴσον τῷ $\gamma\zeta$, καὶ διήχθω διὰ τοῦ μ, ἡ $\kappa\nu$. καὶ ἐπεὶ τὸ $\alpha\beta$, τόξον ἴσον ἐστὶ τῷ $\beta\zeta$, δῆλον ὅτι ἡ ὑπὸ $\alpha\kappa\epsilon$, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $\epsilon\kappa\eta$· ἀλλ' ἡ ὑπὸ $\alpha\kappa\epsilon$, ἴση ἐστὶ τῇ ἐναλλὰξ $\kappa\epsilon\eta$, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $\epsilon\kappa\eta$, ἴση τῇ ὑπὸ $\kappa\epsilon\eta$, ἐστίν, ὥστε καὶ ἡ $\kappa\eta$, ἴση ἐστὶ τῇ $\eta\epsilon$, κατὰ τὴν ς: τοῦ α: τοῦ Στοιχ: αὖθις ἐπεὶ ἑκάτερον τῶν $\beta\zeta$, $\gamma\vartheta$, ἴσον εἴληπται τῷ $\alpha\beta$, ἴσα πάντως καὶ ἀλλήλοις ἐστί. κοινοῦ δ' ἀφαιρουμένου τοῦ $\zeta\vartheta$, ἐναπολείπονται καὶ τὰ $\gamma\zeta$, $\beta\vartheta$, ἴσα. ἀλλὰ τῷ $\gamma\zeta$, εἴληπται ἴσον τὸ $\gamma\mu$, ἄρα καὶ τὰ $\gamma\mu$, $\beta\vartheta$, ἴσα εἰσίν. ὥστε προστιθεμένων τῶν ἴσων $\gamma\mu$, $\beta\vartheta$, τοῖς ἴσοις $\alpha\beta$, $\vartheta\gamma$, ἔσονται καὶ τὰ $\alpha\vartheta$, $\vartheta\mu$, ἴσα, καὶ ἑπομένως γωνία ἡ ὑπὸ $\alpha\kappa\lambda$, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $\lambda\kappa\nu$, ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ $\alpha\kappa\lambda$, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $\kappa\lambda\nu$ ἐναλλὰξ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $\lambda\kappa\nu$, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $\kappa\lambda\nu$. ἡ $\kappa\nu$, ἄρα εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ $\nu\lambda$. ἡ δὲ $\kappa\nu$, ἴση ἐστὶ τῇ $\kappa\eta$, κατὰ τὴν ιε: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἄρα ἡ $\nu\lambda$, ἴση ἐστὶ τῇ $\kappa\eta$, τῇ δὲ $\kappa\eta$, ἴση δέδεικται καὶ ἡ $\eta\epsilon$, ἡ $\nu\lambda$, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ $\eta\epsilon$. κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς $\eta\lambda$, ἐναπολείπεται ἡ $\nu\eta$, ἴση τῇ $\lambda\epsilon$, ἀλλ' ἡ $\nu\eta$, διπλασία ἐστὶ τῆς $\gamma\eta$, διὰ τὸ καὶ τὸ $\mu\zeta$, τόξον διπλοῦν εἶναι τοῦ $\gamma\zeta$, ἄρα καὶ ἡ $\lambda\epsilon$, διπλῆ ἐστι τῆς $\gamma\eta$. ἀλλ' ἡ μὲν $\lambda\epsilon$, διαφορά ἐστι τῆς $\gamma\epsilon$, πρὸς τὴν $\alpha\delta$, ἡ γὰρ $\alpha\delta$, ἴση ἐστὶ τῇ $\gamma\lambda$, ὅτι καὶ τὰ $\alpha\beta$, $\gamma\vartheta$, τόξα ἴσα εἰσίν, ἡ δὲ $\gamma\eta$, ἀπτομένη τοῦ $\gamma\zeta$, διαφορᾶς τοῦ $\beta\gamma$, μείζονος τόξου πρὸς τὸ $\alpha\beta$, ἔλαττον. ἄρα ἡ διαφορὰ τῆς $\gamma\epsilon$, ἀπτομένης τοῦ $\beta\gamma$, μείζονος τόξου πρὸς τὴν $\alpha\delta$, ἀπτομένην τοῦ ἐλάττονος $\alpha\beta$, τόξου διπλῆ ἐστι τῆς $\gamma\eta$, ἀπτομένης τοῦ $\gamma\zeta$, διαφορᾶς τοῦ $\beta\gamma$, τόξου πρὸς τὸ $\alpha\beta$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α':

Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι δοθείσης τῆς ἀπτομένης τῆς διαφορᾶς δύο τόξων τεταρτημόριον συμπληρούντων, καὶ τῆς τοῦ ἐλάττονος τόξου, δοθήσεται ἡ ἀπτομένη τοῦ μείζονος τόξου διὰ προσθήκης. τοὔμπαλιν δὲ δοθείσης τῆς ἀπτομένης τῆς διαφορᾶς δύο τόξων τεταρτημόριον συμπληρούντων, καὶ τῆς τοῦ μείζονος τόξου, δοθήσεται καὶ ἡ τοῦ ἐλάττονος δι' ἀφαιρέσεως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β':

Ἔτι δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι ἡ ἀπτομένη τῆς διαφορᾶς δύο τόξων τεταρτημόριον συμπληρούντων μετὰ τῆς ἀπτομένης τοῦ ἐλάττονος ἴση ἐστὶ τῇ τεμνούσῃ τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν τόξων, ἡ γὰρ $\nu\lambda$, ἴση δέδεικται τῇ $\eta\epsilon$, ἡ δὲ $\eta\epsilon$, τῇ $\kappa\eta$, ὥστε καὶ ἡ $\nu\lambda$, νλ, ἴση ἐστὶ τῇ κη. σύγκειται δὲ ἡ νλ, ἔκ τε τῆς νγ, ἴσης τῇ γη, ἀποτομῇ τῆς διαφορᾶς τῶν αβ, βγ, τόξων, καὶ τῆς γλ, ἴσης τῇ αδ, ἀποτομῇ τοῦ αβ, ἐλάττονος τόξου, ἡ δὲ κη, τέμνουσά ἐστι τοῦ γζ, τόξου, ὅπερ ἐστὶ διαφορὰ τοῦ βγ, πρὸς τὸ αβ.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α. Γ'.

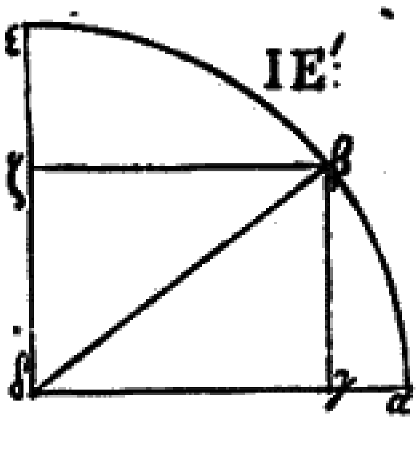
Τρίτον δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι ἡ ἀποτομὴ τοῦ μείζονος τόξου ἴση ἐστὶ τῇ τε ἀποτομῇ καὶ τεμνούσῃ τῆς διαφορᾶς τοῦ αὐτοῦ τόξου πρὸς τὸ ἔλαττον. τοῦ γὰρ βγ, μείζονος τόξου ἀποτομή ἐστιν ἡ γε. ταύτης δὲ τὸ νε, μέρος ἴσον ἐστὶ τῇ ηκ, τεμνούσῃ τοῦ γη, τόξου, προστιθεμένης δὲ τῆς γη, ἡ ὅλη γε, ἴση γίγνεται ταῖς γη, ηκ, ὁμοῦ λαμβανομέναις. ἀλλὰ τὸ γζ, τόξον διαφορά ἐστι τοῦ βγ, τόξου πρὸς τὸ αβ, καὶ ἡ μὲν γη, ἀποτομὴ τοῦ αὐτοῦ, ἡ δὲ ηκ, τέμνουσα, ἄρα ἡ γε, ἀποτομὴ τοῦ μείζονος τόξου ἴση ἐστὶ τῇ τε ἀποτομῇ καὶ τεμνούσῃ τῆς αὐτοῦ διαφορᾶς πρὸς τὸ ἔλαττον.

Πρότασις ΙΕ'.

Ἡμιτόνου τόξου τινὸς δοθέντος τὸ ἡμίτονον εὑρεῖν τοῦ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου.

Δοθήτω τοῦ αβ, τόξου τὸ βγ, ὀρθὸν ἡμίτονον, καὶ ζητηθήτω τὸ ἡμίτονον τοῦ βε, παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου. Ἀφαιρεθήτω δὴ τὸ τοῦ βγ, τετράγωνον ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ τοῦ ἐναπολειπομένου εὑρεθήτω ἡ τετραγώνος ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσται ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου. κατὰ γὰρ τὴν β'. τοῦ παρόντος τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον δύναται τό, τε ὀρθὸν ἡμίτονον ἑκάστου τόξου, καὶ ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου ἐπὶ τοῦ αβε, τεταρτημορίου, ἴσον ἐστὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τοῖς τετραγώνοις τοῦ τε βγ, ὀρθοῦ ἡμιτόνου τοῦ αβ, τόξου, καὶ ζβ, ἡμιτόνου τοῦ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου. ἀφαιρουμένου ἄρα τοῦ τετραγώνου τοῦ βγ, ὀρθοῦ ἡμιτόνου ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, ἐναπολείπεται τὸ τετράγωνον τοῦ βζ, οὗ ἡ τετραγώνος ῥίζα ἐστὶν ἡ αὐτὴ βζ.

Trigon. Lib. I. Fig. 15.



Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἀφαιρουμένου τοῦ ἡμιτόνου τοῦ παραπληρώματος τινὸς τόξου, ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου γνωσθήσεται καὶ τὸ πλάγιον ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου. ἀφαιρουμένης γὰρ τῆς ζβ, ἤτοι τῆς δγ, ἀπὸ τῆς δα, ἐναπολείπεται ἡ γα, πλάγιον ἡμίτονον τοῦ αβ, τόξου.

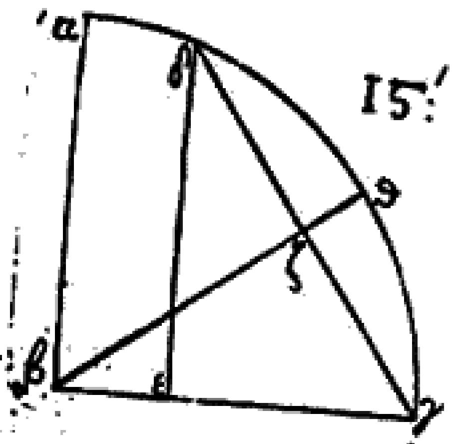
Πρό-

Πρότασις ΙϚʹ.

Ὀρθοῦ ἡμιτόνου τόξου τινὸς δοθέντος ὀρθὸν ἡμίτονον τόξου διπλασίου τοῦ δοθέντος εὑρεῖν, καὶ ἡμίσεως τοῦ αὐτοῦ.

Διδόσθω τὸ γζ, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ γθ, τόξου, καὶ ζητείσθω α: τὸ δε, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ γδ, τόξου διπλασίου τοῦ γθ. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ γθ, δοθέντος τόξου. εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ γθ, τόξου, οὕτως ἡ ὑποτείνουσα τοῦ γθδ, τόξου διπλασίου τοῦ γθ, πρὸς ἄλλο τι, κἀκεῖνο ἔσται τὸ ζητούμενον, ἤτοι τὸ δε. ἐξαχθήτω γὰρ ἡ γζ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὸ δ, ἀπὸ δὲ τοῦ β, ἤχθω διὰ τοῦ ζ, ἡ βζθ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνα τὰ βζγ, δεγ, ὀρθογώνιά εἰσι κατὰ τὰς ὑπὸ βζγ, δεγ, ἔχουσι δὲ καὶ κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ βγδ, πάντως γε ἰσογώνιά εἰσιν, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι, τὰς ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γβ, πρὸς τὴν βζ, ἡ γδ, πρὸς τὴν δε, ἀλλ' ἡ μὲν γβ, ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον, ἡμιδιάμετρος γάρ, ἡ δὲ γδ, ὑποτείνουσα τοῦ γθδ, τόξου διπλασία οὖσα τοῦ γζ, ὀρθοῦ ἡμιτόνου, διὸ καὶ γνωστή, ἡ δὲ βζ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ γθ, τόξου, καὶ ἡ δε, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ γθδ, διπλασίου τόξου τοῦ γθ. ἄρα ἐὰν γένηται ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ γθ, τόξου, οὕτως ἡ ὑποτείνουσα τοῦ γθδ, πρὸς ἄλλο τι, ἐκεῖνο ἔσται τὸ ἡμίτονον τοῦ γθδ, τόξου διπλασίου τοῦ γθ, δοθέντος. ὅπερ ἔδει τὸ α:

Trigon. Lib. 1. Fig. 14.

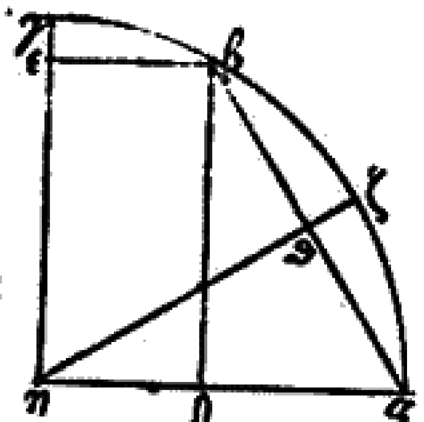


Διδόσθω ἔτι τὸ γθδ, τόξον, οὗ ἥμισυ ἔστω τὸ γθ, καὶ ζητείσθω τὸ γζ, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ γθ, τόξου. Εὑρεθήτω δὴ τὸ πλάγιον ἡμίτονον τοῦ γδ, ὅλου τόξου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ τοῦ γενομένου εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσται ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ γθ, τόξου ἡμίσεως τοῦ γδ. καὶ γὰρ τὴν δʹ: τοῦ παρόντος, τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τόξου τινὸς μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ τε ἡμίσεως τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ τοῦ πλαγίου ἡμιτόνου τοῦ ὅλου τόξου. ὥστε τὸ ὑπό τε τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ τοῦ πλαγίου ἡμιτόνου τοῦ ὅλου τόξου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὀρθοῦ ἡμιτόνου τοῦ ἡμίσεως τόξου τοῦ δοθέντος τετραγώνου. ἄρα τοῦ πλαγίου ἡμιτόνου τοῦ ὅλου τόξου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου πολλαπλασιαζομένου γινώσκεται τὸ τετράγωνον τοῦ ὀρθοῦ ἡμιτόνου τοῦ ἡμίσεως τόξου, οὗ τετράγωνος ῥίζα τὸ ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου.

Α Λ Λ Ω Σ.

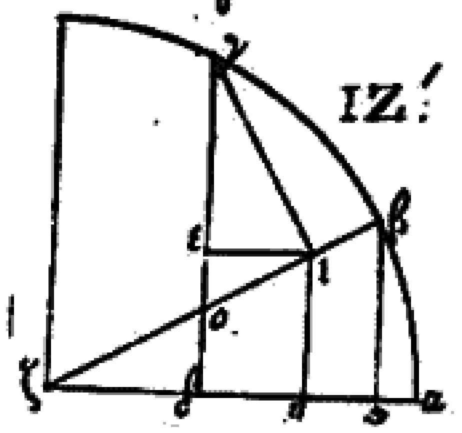
Ἔςω τὸ αβ, τόξον, ὗ παραπλήρωμα τὸ βγ. καὶ διδόσθω μὲν τὸ βδ, ἡμίτονον τοῦ αβ, δοθέντος τόξου. ζητείσθω δὲ τὸ ἡμίτονον τοῦ αζ, ἡμίσεως τοῦ αὐτοῦ αβ. Ἐπιζεύχθωσαν δὴ αἱ βα, ηζ. καὶ ἐπεὶ αἱ εβ, ηδ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν λδ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, εὑρεθήτω καὶ τὴν ἀλαιπέρω τὸ βε, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ βγ, παραπληρώματος. εἶτα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ηα, ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ γνωσθήσεται πάντως τὸ δα, πλάγιον ἡμίτονον τοῦ δοθέντος αβ, τόξου καὶ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς. τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ δα, συναφθήτω τῷ τετραγώνῳ τοῦ βδ, ὀρθοῦ ἡμιτόνου τοῦ αβ, τόξου, καὶ τοῦ γενομένου εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ βα, ὑποτείνουσα, ἧς τὸ ἥμισυ αθ, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον τοῦ αζ, ἡμίσεως. καὶ γὰρ τὴν μζ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ἀπὸ τῆς βα, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δα, δβ, τετραγώνοις. ὥστε ἐγνωσμένων τῶν ἀπὸ τῶν αδ, δβ, τετραγώνων, τὸ ἐξ αὐτῶν συμποσούμενον παρίστησι τὸ ἀπὸ τῆς βα.

Ozan. Lib. 1. Fig. 1.



Πρότασις ΙΖ':

Ἡμιτόνων δύο ἀνίσων τόξων δοθέντων, ἀπολειπομένων τοῦ τεταρτημορίου, τὸ ἡμίτονον εὑρεῖν τοῦ ἐκ τῶν δοθέντων δύο τόξων συγκειμένου.



Ἔςωσαν ἄνισα τόξα τὰ αβ, βγ, ἀπολειπόμενα τεταρτημορίου. καὶ τοῦ μὲν αβ, ἔςω ἡμίτονον τὸ βθ, τοῦ δὲ βγ, τὸ γι, τοῦ δὲ αβγ, τοῦ ἐκ τῶν δοθέντων συγκειμένου ἔςω ἡμίτονον τὸ γδ. καὶ διδόσθωσαν μὲν τὰ βθ, γι. ζητείσθω δὲ τὸ γδ. Εὑρεθήτωσαν δὴ τὰ ἡμίτονα τῶν παραπληρωμάτων τῶν αβ, βγ, δοθέντων τόξων κατὰ τὴν ιε': τοῦ παρόντος. εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ βγ, τόξου. οὕτω τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αβ, τόξου πρὸς ἄλλο τι, ὡς δὲ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου, οὕτω τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ βγ, τόξου πρὸς ἄλλο τι, καὶ συναφθήτωσαν τὰ εὑρεθέντα εἰς ἕν, καὶ τοῦτο ἔςαι τὸ ζητούμενον. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ι, τῇ μὲν βθ, παράλληλος ἡ ιν, τῇ δὲ θδ, ἡ ιε. καὶ ἐπεὶ τὰ ζδο, ζθβ, τρίγωνα ὀρθογώνιά εἰσιν, ἔχουσι δὲ καὶ κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ θζβ, ὅμοια πάντως γέ εἰσι, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι. Πάλιν ἐπεὶ τὰ ζδο, οει, ὀρθογώνια εἰσιν, ἔχουσι δὲ καὶ τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας, ἰσογώνια ἔπεται καὶ παν-

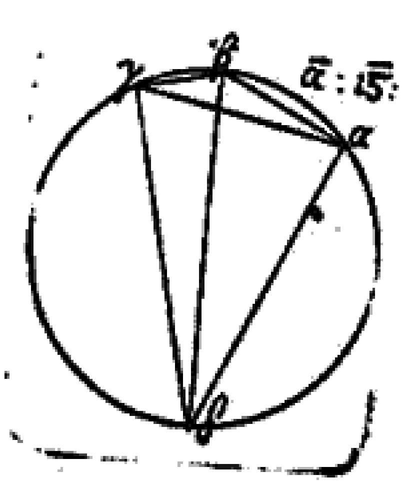
τα

αἱ εἰσιν. ὅτι δὲ καὶ τὰ ο ε ι, γ ε ι, ἰσογώνιά εἰσι, δῆλον. ἄρα καὶ τὰ ζ θ β, γ ε ι, ὅμοιά εἰσι, διὰ τὸ ἑκάτερον εἶναι ὅμοιον τῷ ζ δ ο, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β ζ, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ζ θ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ α β, τόξου, οὕτω τὸ γ ι, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ β γ, τόξου πρὸς τὴν γ ε. Αὖθις ἐπεὶ ἡ ι η, παράλληλος ἦκται τῇ β θ, πάντως γε ὡς ἡ β ζ, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ζ ι, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ β γ, τόξου, οὕτως ἡ β θ, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ α β, τόξου πρὸς τὴν ι η, ἢ γοῦν τὴν δ ε. γνωσθήσεται ἄρα ἡ ε δ, ἔγνωσται δὲ καὶ ἡ γ ε, γνωσθήσεται δήπουθεν καὶ ἡ ὅλη γ δ, τὸ ἡμίτονον δηλονότι τοῦ α β γ, τόξου τοῦ ἐκ τῶν δοθέντων α β, β γ, συγκειμένου.

ΑΛΛΩΣ.

Ὑποκείσθω ὁ κύκλος διῃρημένος εἰς μοίρας ρπ, ὥστε τὰς ὑποτεινούσας ἑκάστου τόξου ἀντὶ ἡμιτόνων τῶν αὐτῶν λαμβάνεσθαι, ἀντὶ δὲ τεταρτημορίου τὸ ἡμικύκλιον. τῶν δὲ α β, β γ, τόξων δοθέντων, τοῦ μὲν μοιρῶν ὄντος λ, τοῦ δὲ ιη, ζητείσθω τὸ ἡμίτονον τοῦ α β γ, τόξου μοιρῶν ὄντος μη. ἐπιζεύχθωσαν δὴ αἱ α β, β γ, γ α, α δ, γ δ, ὧν ἡ μὲν α β, ἀντὶ ἡμιτόνου λαμβάνεται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τόξου μοιρῶν λ, ἡ δὲ β γ, ἀντὶ ἡμιτόνου τόξου μοιρῶν ιη, ἡ δὲ γ α, ἀντὶ ἡμιτόνου τόξου μοιρῶν μη, ἡ δὲ α δ, ἀντὶ ἡμιτόνου τοῦ παραπληρώματος τοῦ α β, ἤτοι τόξου μοιρῶν ξ, καὶ ἡ δ γ, ἀντὶ ἡμιτόνου τοῦ παραπληρώματος τοῦ β γ, ἤτοι τόξου μοιρῶν οβ. Καὶ ἐπεὶ ὑποτίθενται ἐγνωσμέναι αἱ α β, β γ, εὑρεθήσονται πάντως καὶ αἱ α δ, δ γ, κατὰ τὴν ιε: τοῦ παρόντος. τούτων δὲ εὑρεθεισῶν πολλαπλασιασθήτω τὸ μὲν ἡμίτονον τοῦ α β, ἤτοι ἡ α β, ὑποτείνουσα, ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τοῦ γ δ, παραπληρώματος τοῦ β γ, τόξου, ἤτοι ἐπὶ τὴν γ δ, ὑποτείνουσαν, τὸ δὲ τοῦ β γ, ἡμίτονον ἐπὶ τὸ τοῦ α δ, ἡ β γ, δηλονότι ὑποτείνουσα ἐπὶ τὴν α δ, καὶ οἱ γενόμενοι συναφθήτωσαν εἰς ἕνα ἀριθμόν. εἶτα μερισθήτω ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, ἤτοι τὴν β δ, καὶ τὸ πηλίκον ἔσται ἡ γ α, ζητουμένη ἡμίτονον τόξου μοιρῶν μη. κατὰ γὰρ τὴν ι α: τοῦ Δ': τοῦ α: τῆς Γεωμετρίας τὸ ὑπὸ τῶν γ α, β δ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῶν β α, γ δ, καὶ γ β, δ α, ὥστε ἐγνωσμένων τούτων, γινώσκεται πάντως καὶ τὸ ὑπὸ τῶν γ α, β δ. ἐπεὶ δὲ γινώσκεται καὶ ἡ β δ, ὡς ὁλικὸν ἡμίτονον κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, δῆλον, ὅτι μεριζομένου τοῦ ἐκ τῶν δύο συμποσουμένου ἐπὶ τὴν β δ, γινώσκεται καὶ ἡ γ α, ζητουμένη.

Trigon. Lib. I. Fig. 16.



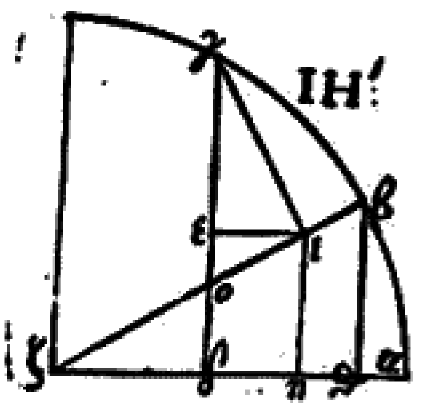
Πρότασις ΙΗ':

Ἡμιτόνων δύο τόξων ἀνίσων δοθέντων, τὸ ἡμίτονον τῆς τοῦ μείζονος πρὸς τὸ ἔλαττον διαφορᾶς εὑρεῖν.

Ἔστωσαν ἄνισα τόξα τὰ αβ, αγ, ὧν διαφορὰ τὸ βγ, καὶ τοῦ μὲν αβ, ἐλάττονος ἔστω ὀρθὸν ἡμίτονον τὸ βθ, τοῦ δὲ αγ, μείζονος τὸ γδ· διδομένου δὲ ἑκατέρου, ζητηθήτω τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ βγ. Ἐπιζεύχθω δὴ ἡ ζβ, καὶ εὑρεθήτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ τε αβ, τόξου, καὶ αγ, διὰ τῆς ιε: τοῦ παρόντος. Τούτων δ' εὑρεθέντων, γενέσθω ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου πρὸς τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ αγ, τόξου πρὸς ἄλλο τι, καὶ

Trigon. Lib. 1. Fig. 17.

τὸ εὑρεθὲν ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ὀρθοῦ ἡμιτόνου τοῦ αγ, τόξου. Εἶτα γενέσθω αὖθις ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ αβ, ἐλάττονος τόξου, οὕτω τὸ ἐναπολειφθὲν ἀπὸ τοῦ ὀρθοῦ ἡμιτόνου τοῦ αγ, μείζονος τόξου, διὰ τῆς α: πράξεως πρὸς ἄλλο τι, κἀκεῖνο ἔσται ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς βγ, διαφορᾶς. Πιπτέτω γὰρ ἀπὸ τοῦ γ, κάθετος ἐπὶ τῆς ζβ, ἡ γι. καὶ ἐπεὶ αἱ βθ, γδ, ὀρθαί εἰσιν ἑκατέρα ἐπὶ τῆς ζα, τὰ ζδο, πάντως



ζθβ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ζθ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αβ, πρὸς τὴν θβ, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ, οὕτως ἡ ζδ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αγ, πρὸς τὴν δο· ὥστε ἐγνωσμένων τῶν ζθ, θβ, ζδ, γνωσθήσεται καὶ ἡ δο· ἀφαιρουμένης δὲ τῆς δο, ἀπὸ τοῦ γδ, διδομένου, γνωσθήσεται καὶ τὸ ἐναπολειπόμενον ἀπὸ τοῦ γδ, ἤτοι τὸ ογ. Αὖθις ἐπεὶ τὸ οιγ, τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ζδο, διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἑκάτερον, καὶ τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἔχειν, τὸ δὲ ζδο, ὅμοιόν ἐστι καὶ τῷ ζθβ, πάντως γε καὶ τὸ ογι, ὅμοιόν ἐστι τῷ ζθβ, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζβ, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ζθ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου, οὕτως ἡ ογ, τὸ ἐναπολειπόμενον ἀπὸ τοῦ γδ, ὀρθοῦ ἡμιτόνου τοῦ αγ, τόξου πρὸς τὴν γι, ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς βγ, διαφορᾶς, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.