ΠΟΡΙΣΜΑ.

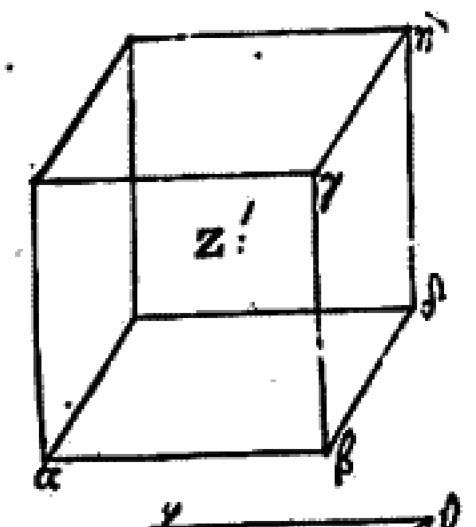
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν ἀριθμητικῶς ἀνάλογον ἐπιπέδων ἡ σύναψις, ἴση ἐστὶ τῷ μέσῳ τῶν ἄκρων ἐπιπέδῳ, τοσάκις λαμβανομένῳ, ὅσα εἰσὶ καὶ τὰ ἐπίπεδα.

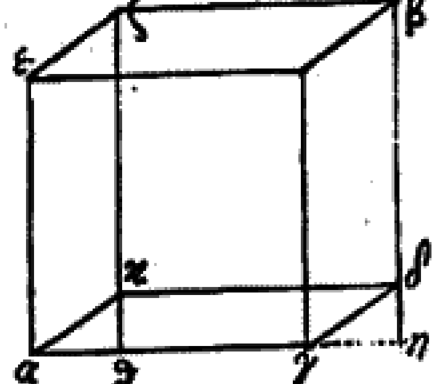
Πρότασις Ζ'.

Ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου δοθέντος, τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ αη, καὶ ζητείσθω τὸ αὐτοῦ στερεόν. Ἐπεὶ δὲ τοῦτο διχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι, ἢ γὰρ τοῦ δοθέντος παραλληλεπιπέδου πᾶσαι αἱ πλευραὶ ὀρθογώνιά εἰσι παραλληλόγραμμα, ἢ αἱ δύο μὲν, ἡ βάσις καὶ ἡ ταύτῃ ἀπεναντίον ῥομβοειδεῖς εἰσιν, αἱ δὲ λοιπαὶ ὀρθογώνια. Ἔστωσαν δὴ αἱ πλευραὶ πᾶσαι τοῦ δοθέντος παραλληλεπιπέδου ὀρθογώνια. εἶτα πολλαπλασιαθήτω ἡ αβ, ἐπὶ τὴν βδ, καὶ τὸ δα, γενόμενον πολλαπλασιαθήτω ὁμοίως ἐπὶ τὴν βγ, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. πολλαπλασιαζομένης γὰρ τῆς αβ, ἐπὶ τὴν βδ, συνίσταται ἡ αδ, βάσις. τῆς δὲ αδ, πάλιν ἐπὶ τὴν βγ, πολλαπλασιαζομένης, συνίσταται τὸ ὅλον αη. τὸ γὰρ στερεὸν ὑπὸ τριῶν διαστημάτων λέγεται περιέχεσθαι, μήκους, πλάτους καὶ βάθους, ὥσπερ τὸ ἐπίπεδον ὑπὸ δύο, μήκους δηλονότι καὶ πλάτους. διὸ τοῦτο μὲν, τοῦ μήκους μόνον ἐπὶ τὸ πλάτος πολλαπλασιαζομένου, ἢ καὶ ἀνάπαλιν, συνίσταται. ἐκεῖνο δὲ, τοῦ τε μήκους ἐπὶ τὸ πλάτος πολλαπλασιαζομένου, καὶ τοῦ γενομένου ἐπὶ τὸ ὕψος.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 5.





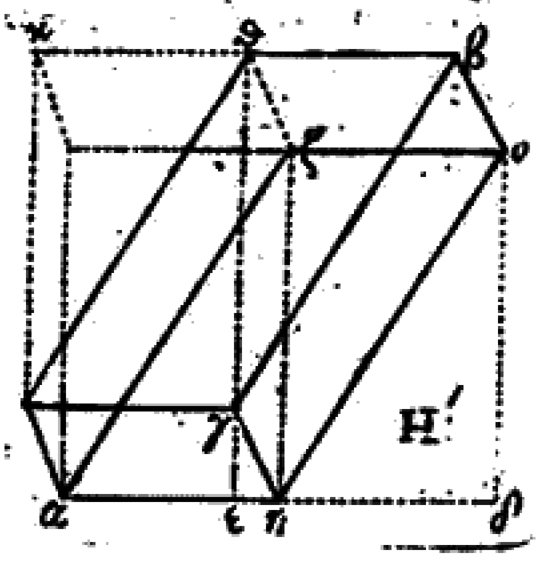
Ἔστω ἔτι παραλληλεπίπεδον τὸ αβ, καὶ ἐχέτω τὰς δύο τῶν αὐτοῦ πλευρῶν τήν τε βάσιν αδ, καὶ τὴν ταύτῃ ἀπεναντίον εβ, ῥομβοειδεῖς, τὰς δὲ λοιπὰς αζ, γβ, δζ, γε, ὀρθογώνια. Ἀναχθήτω δὴ ἡ αδ, βάσις ἐπὶ τὸ θηδκ, ὀρθογώνιον κατὰ τὴν β': τοῦ η': τοῦ α': μέρους· εἶτα πολλαπλασιαθήτω ἡ θη, ἐπὶ τὴν ηδ, τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος, καὶ γενήσεται πάντως τὸ θδ. τοῦτο δὲ πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ τὸ αε, ὕψος, καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω συσταθήσεται τὸ αβ, παραλληλεπίπεδον, ἴσον ὂν τῷ δοθέντι. ἕκαστον γὰρ τῶν ὀρθῶν παραλληλεπιπέδων, μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος, ἤγουν ὕψος ἔχον, δυσὶ συνίσταται πολλαπλασιασμοῖς, ὡς ἤδη δέδεικται.

Πρότασις Η'.

Ἐγκλινομένου παραλληλεπιπέδου δοθέντος, τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔστω ἐγκλινόμενον παραλληλεπίπεδον τὸ αβ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. Ἀλλ' εἰ καὶ τοῦτο διχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι, ἢ γὰρ ἡ τούτου βάσις ὀρθογώνιος εἴη, ἢ μή, δεῖ ἔμπης α: τὸ τῆς βάσεως ἐμβαδὸν ζητεῖν. Εὑρεθήσεται δὲ τοῦτο διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς μιᾶς αὐτοῦ πλευρᾶς, ἐὰν ὀρθογώνιον ᾖ, ἐπὶ τὴν ἑτέραν, ὡς ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω δέδεικται. Εἰ δὲ μὴ ὀρθογώνιον εἴη, ἀλλὰ ῥόμβος τις, ἢ ῥομβοειδές, ὀφείλει τὸ τούτου εὑρεθῆναι ὕψος, καὶ ἐπ' αὐτὸ πολλαπλασιασθῆναι τὴν πλευράν, ἐφ' ἧς ἡ κάθετος πίπτει. εἶτα τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ τοῦ ἐγκλινομένου ἐπιπέδου ὕψος ὁμοίως πολλαπλασιασθῆναι. Εὑρεθήτω οὖν τὸ ὕψος τῆς αγ, βάσεως, πιπτούσης καθέτου ἀπὸ τοῦ γ, ἐπὶ τῆς αη, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἡ αη, ἐπὶ τὴν ἐπ' αὐτῆς κάθετον, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ αγ, βάσις. τῆς δὲ αη, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβαλλομένης, πιπτέτω κάθετος ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ο, σημείου ἡ οδ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ὕψος. εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ αγ, βάσις ἐπὶ τὴν δο, κάθετον, καὶ τὸ γενόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον. διὰ γὰρ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αη, ἐπὶ τὴν γε, θηρεύεται τὸ τῆς αγ, βάσεως ἐμβαδόν, τῆς δὲ αγ, ἐπὶ τὴν δο, πολλαπλασιασθείσης, συνίσταται τὸ αθ, παραλληλεπίπεδον· καὶ ἐπεὶ τὰ αβ, αθ, στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσι βάσεως τὸ αὐτὸ ἔχοντα ὕψος, πάντως γε ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν κθ': τοῦ ια': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε ἐγνωσμένου τὸν τρόπον τοῦτον τοῦ στερεοῦ τοῦ αθ, παραλληλεπιπέδου, γινώσκεται καὶ τὸ τοῦ αβ, ἐγκλινομένου στερεόν. Ἐγκλινομένου ἄρα ἐπιπέδου δοθέντος, τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὕρηται.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 8.



Πρότασις Θ'.

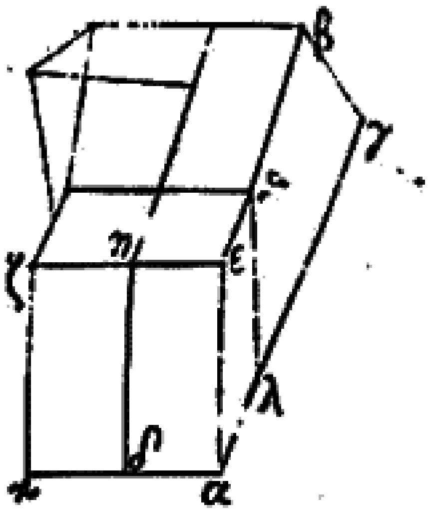
Τοίχου παραλληλεπιπέδου δοθέντος, τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔστω τοῖχος παραλληλεπίπεδος ὁ κθ, οὗ μῆκος μὲν τὸ κα, πλάτος δὲ τὸ αλ καὶ ὕψος τὸ αε. καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. Πολλαπλασιασθήτω δὴ τὸ κα, μῆκος ἐπὶ τὸ αλ, πλάτος, ἢ καὶ ἀνάπαλιν, καὶ τὸ γενόμενον ὁμοίως πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ αε, ὕψος, καὶ εὑρεθήσεται τὸ τοῦ κθ, στερεὸν κατὰ τὴν ἀνωτέρω. Εἰ δὲ δύο ὦσι τοῖχοι ἰσοπαχεῖς, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις

κεί-

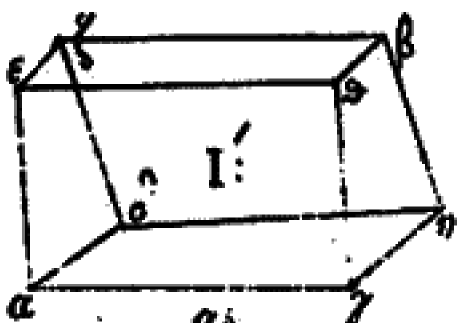
κείμενοι, ὡς οἱ κθ, δβ, καὶ ζητηθῇ τὸ τούτων στερεὸν, εὑρεθήτω α: τὸ στερεὸν ἑκατέρου χωρὶς κατὰ τὸν προδηλωθέντα τρόπον, καὶ τὰ εὑρεθέντα στερεὰ συναφθήτωσαν εἰς ἕν. εἶτα εὑρεθήτω καὶ τὸ τοῦ δθ, μέρους στερεὸν, καὶ τοῦτο ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ὅλου, κοινὸν γὰρ ὂν ἑκατέρῳ τοίχῳ λαμβάνεται δὶς, καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν ἴσον ἔσται τοῖς κθ, δβ, δοθεῖσι τοίχοις. Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 9.
ὁ λόγος σαφής. κἂν πλείονα ὦσι τείχη εἰς περιοχὴν τόπου τινὸς τὸ αὐτὸ γινέσθω.

Πρότασις Ι'.

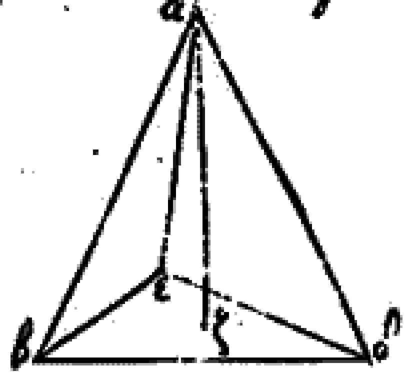


Τείχους ἀνίσου τῇ παχύτητι δοθέντος, τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔστω τεῖχος ἄνισον τῇ παχύτητι τὸ αβ, οὗ μῆκος μὲν τὸ αγ, πλάτος δὲ πρὸς τῇ βάσει τὸ αδ, καὶ ὕψος τὸ αε. πρὸς δὲ τῇ κορυφῇ ἔστω πλάτος τὸ εζ, ἔλαττον τοῦ αδ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὴν ϛ': τοῦ παρόντος τὸ μέσον ἐπίπεδον, τὸ μεταξὺ δηλονότι τούτων αη, καὶ εβ, ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὑπερέχον τε καὶ ὑπερεχόμενον. καὶ πολλαπλασιασθήτω τοῦτο ἐπὶ τὸ αε, ὕψος, καὶ τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῷ στερεῷ τοῦ αβ, δοθέντος τείχους. Ἡ δεῖξις ἡ αὐτή ἐστι τῇ ἐν τῇ ῥηθείσῃ ϛ': τοῦ παρόντος. τὸ γὰρ τοιοῦτον τεῖχος πρίσμα ἐστὶ τετμημένον τῷ εβ, ἐπιπέδῳ, παραλλήλῳ ὄντι τῇ αη, βάσει.



Πρότασις ΙΑ'.



Τῆς τυχούσης πυραμίδος τὸ στερεὸν εὑρεῖν.

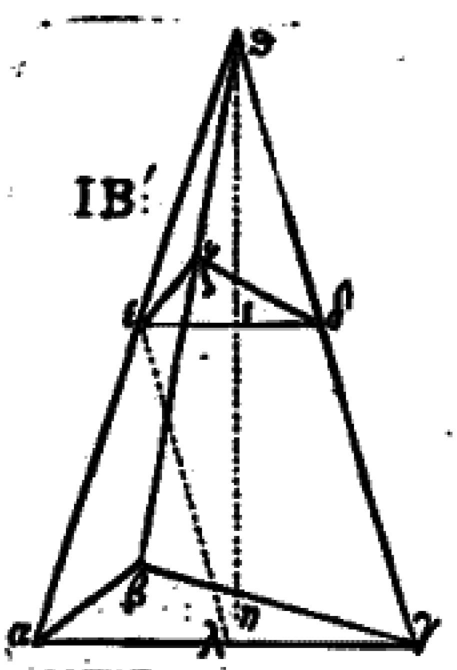
Ἔστω πυραμὶς ἡ αβδε, καὶ ζητηθήτω τὸ ταύτης στερεόν. Εὑρήσθω α: τὸ ἐμβαδὸν τῆς βδε, αὐτῆς βάσεως, καὶ ζα, ὕψος. εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ ὅλη βδε, βάσις ἐπὶ τὸ γ': τοῦ αζ, ὕψους, ἢ ὅλον τὸ αζ, ὕψος ἐπὶ τὸ γ': τῆς βδε, βάσεως, καὶ τὸ γενόμενον καθ' ἑκάτερον τὸν τρόπον ἴσον ἔσται τῷ στερεῷ τῆς δοθείσης πυραμίδος κατὰ τὸ γ': λῆμμα τοῦ β': τοῦ παρόντος.

Πρότασις ΙΒ':

Πυραμίδος κολούρου δοθείσης τὸ στερεὸν αὐτῆς εὑρεῖν.

Ε῎στω κόλουρος πυραμὶς ἡ αβγδεζ, καὶ ζητηθήτω τὸ ταύτης στερεόν. Μετρηθήτω δὴ ἥτε εδ, βάσις τῆς κορυφῆς τῆς δοθείσης πυραμίδος, καὶ τὸ ὕψος τῆς αὐτῆς Γεωμετρικῷ τινι μέτρῳ κατὰ τὰ ἐν τῇ Υ῾ψομετρίᾳ εἰρημένα, εἶτα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς αγ, ἡ λγ, ἴση τῇ εδ· καὶ μετρηθήτω αὖθις ἥτε αλ, καὶ αι, τῷ αὐτῷ μέτρῳ, ᾧ καὶ ἡ εδ, μεμέτρηται. *Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 10.*

μετρηθέντων δὲ καὶ τούτων, γενέσθω ὡς ἡ αλ, ὑπεροχὴ, ᾗ ὑπερέχει ἡ αγ, τὴν εδ, πρὸς αὐτὴν τὴν εδ, οὕτως ἡ ηι, τὸ ὕψος δηλονότι τῆς δοθείσης πυραμίδος πρὸς ἄλλο τι, καὶ εὑρεθήσεται ἡ ιθ, ὡς δείξομεν. δέδοται δὲ καὶ ἡ ηι, ἄρα καὶ ὅλη ἡ θη, δεδομένη ἔσται. τούτων δ᾽ οὕτω γενομένων, τμηθήτω ἑκατέρα τῶν θη, θι, εἰς τρία ἴσα, καὶ εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν ἑκατέρου τῶν αβγ, δεζ, ἐπιπέδων· καὶ ἐπὶ μὲν τὸ γ': τῆς θη, πολλαπλασιασθήτω ἡ αβγ, βάσις, ἐπὶ δὲ τὸ γ': τῆς θι, πολλαπλασιασθήτω ἔτι ἡ δεζ, τὸ δὲ γενόμενον διὰ τοῦ



ΙΒ'

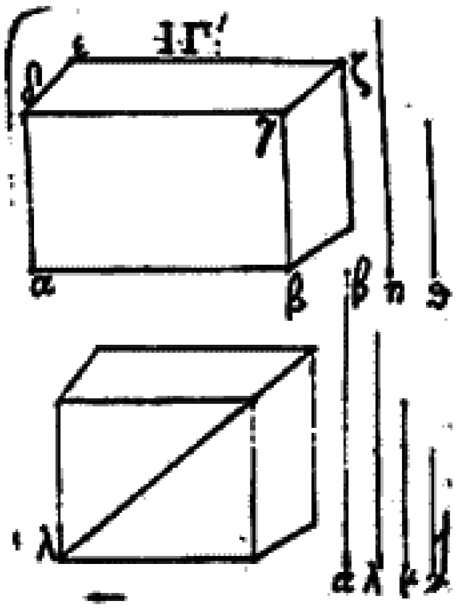
πολλαπλασιασμοῦ τῆς δεζ, ἐπὶ τὸ γ': τῆς θι, ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ γινομένου διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αβγ, ἐπὶ τὸ γ': τῆς θη, καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν ἴσον ἔσται τῷ στερεῷ τῆς δοθείσης αβγδεζ, κολούρου πυραμίδος· ἀναπεπληρώσθω γὰρ ἡ αβγθ, πυραμίς. καὶ ἐπεὶ ἡ λγ, ἴση εἴληπται τῇ εδ, καὶ παράλληλός ἐστι τῇ αὐτῇ, πάντως γε καὶ αἱ ελ, δγ, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν λγ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ· ὥστε κατὰ τὴν β': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ αἱ αγ, αθ, εὐθεῖαι ἀναλόγως τέμνονται· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αλ, πρὸς τὴν λγ, ἢ τὴν ἰσῳ ταύτῃ τὴν εδ, ἡ αε, πρὸς τὴν εθ, ὡς δ᾽ ἡ αε, πρὸς τὴν εθ, ἔχει καὶ ἡ ηι, πρὸς τὴν ιθ, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ια': τοῦ αὐτοῦ· ἄρα καὶ ὡς ἡ αλ, πρὸς τὴν εδ, ἔχει ἡ ηι, πρὸς τὴν ιθ. ἐγνωσμένων ἄρα τῶν τριῶν ὅρων αλ, εδ, ηι, γνωσθήσεται πάντως καὶ ὁ δ': ιθ, ὥστε καὶ ὅλη ἡ ηθ, ἐγνωσμένη ἔσται. πολλαπλασιαζομένης δὲ τῆς μὲν αβγ, βάσεως ἐπὶ τὸ γ': τῆς ηθ, συνίσταται κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ ὅλη αβγθ, πυραμίς. πολλαπλασιαζομένης δὲ τῆς εδζ, βάσεως ἐπὶ τὸ γ': τῆς ιθ, συνίσταται κατὰ τὴν αὐτὴν ἡ εδζθ, πυραμίς. ἀφαιρουμένης δὲ τῆς εδζθ, πυραμίδος ἀπὸ τῆς αβγθ, ἐναπολείπεται ἡ αβγδεζ, δοθεῖσα κόλουρος πυραμίς. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΙΓ':

Τὸ δοθὲν στερεὸν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον Γεωμετρικῶς αὐξῆσαι.

Ἔστω στερεὸν τὸ α ζ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς η, πρὸς τὴν θ, καὶ ζητηθήτω ἕτερον στερεὸν ὅμοιον τῷ δοθέντι· ὥστε ἔχειν τὸ δοθὲν πρὸς ἐκεῖνο, ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ. Γενέσθω δὴ ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ, ἡ α β, πρὸς τὴν κ, καὶ τῶν α β, κ, εὑρεθήτωσαν δύο ἑξῆς μέσοι ἀνάλογοι κατὰ τὴν ί: τοῦ ά: τοῦ ά: μέρους, αἱ λ, μ, καὶ συνεστάθω ἐπὶ τῆς λ, στερεὸν ὅμοιον τῷ δοθέντι α ζ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ α β, λ, μ, κ, εὐθεῖαι ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογοι, πάντως γε τὸ ἐπὶ τῆς α β, ά: πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς λ, β': ἔχει ὡς ἡ α β, ά: πρὸς τὴν κ, δ': τὰ γὰρ ὅμοια στερεὰ ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἀλλὰ ἡ α β, πρὸς τὴν κ, ἔχει, ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ, ἄρα καὶ τὸ ἐπὶ τῆς α β, στερεὸν πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς λ, ὅμοιον στερεὸν ἔχει ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ. Τὸ δοθὲν ἄρα στερεὸν κατὰ τὸν δοθέντα γεωμετρικῶς ηὔξηται λόγον.

Geom. Pr. lib. 5. Fig. 11.



Πρότασις ΙΔ':

Τὸ δοθὲν στερεὸν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον ἀριθμητικῶς αὐξῆσαι.

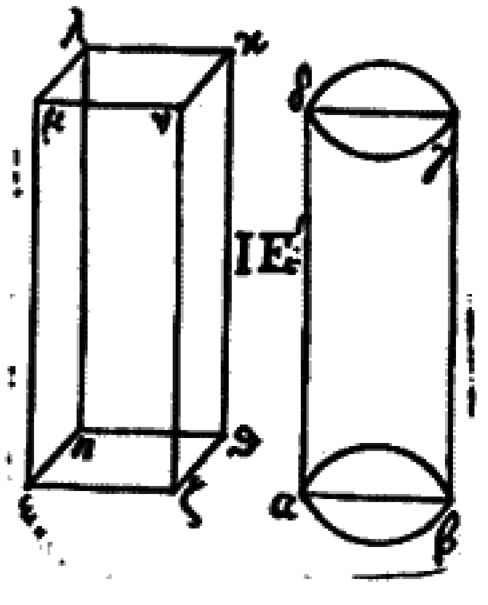
Ἔστω στερεὸν τὸ αὐτὸ α ζ, καὶ ζητηθήτω ἕτερον στερεὸν τούτου διπλάσιον, τριπλάσιον, ἢ ἄλλως πως μεῖζον. Διπλασιασθήτω δὴ τὸ α ζ, στερεόν, ἢ τριπλασιασθήτω, ἢ ἄλλως πως πολλαπλασιασθήτω κατὰ τὸν δοθέντα λόγον, καὶ τοῦ γινομένου εὑρεθήτω ἡ κυβικὴ ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσται ῥίζα τοῦ ζητουμένου. ἐὰν γὰρ εὑρεθῇ καὶ ἡ τοῦ δοθέντος στερεοῦ κυβικὴ ῥίζα, οἱ δύο οὗτοι κύβοι λόγον ἕξουσι πρὸς ἀλλήλους τὸν δοθέντα· ἀλλ' ὡς οἱ κύβοι, ἔχουσι καὶ τὰ ὅμοια στερεά. ἐὰν ἄρα γένηται ὡς ἡ κυβικὴ τοῦ δοθέντος ῥίζα πρὸς τὴν αὐτοῦ πλευράν, οὕτως ἡ εὑρεθεῖσα κυβικὴ ῥίζα πρὸς ἄλλην τινά, καὶ ἐπ' ἐκείνης συσταθῇ στερεὸν ὅμοιον τῷ δοθέντι, τὸ γενόμενον ἕξει πρὸς τὸ δοθὲν στερεὸν τὸν δοθέντα λόγον. Εἰ δὲ τὸ δοθὲν στερεὸν ἄγνωστον ᾖ, δίδοται δὲ ἡ αὐτοῦ πλευρά, συσταθήτω ἐπὶ τῆς δοθείσης πλευρᾶς κύβος, καὶ οὗτος διπλασιασθήτω, τριπλασιασθήτω κατὰ τὸν δοθέντα λόγον. Εἰ δὲ πλευταῖον οὔτε μὴν ἡ πλευρὰ αὐτοῦ δίδοται, μετρηθήτωσαν Γεωμετρικῷ τινι μέτρῳ αἱ πλευραὶ τοῦ δοθέντος, καὶ τὰ λοιπὰ γινέσθω, ὡς προείρηνται.

Πρότασις ΙΕ':

Τὸ τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου στερεὸν εὑρεῖν.

Ε῎στω κύλινδρος ὁ αβγδ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. Εὑρεθήτω δὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς αβ, αὐτοῦ βάσεως, καὶ ὕψος τοῦ αὐτοῦ. καὶ πολλαπλασιαθήτω ἡ αβ, αὐτοῦ βάσις ἐπὶ τὸ βγ, ὕψος. ὑποκείσθω γὰρ τὸ εκ, πρίσμα ἴσον τε καὶ ἰσοϋψὲς τῷ δοθέντι αβγδ, κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ τὸ εκ, πρίσμα ἴσον τῷ δοθέντι αβγδ, κυλίνδρῳ, καὶ ὕψος δὲ ἔχει ἴσον, πάντως γε ὥσπερ τὸ εκ, πρίσμα συνίσταται, τῆς αὐτοῦ βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος πολλαπλασιαζομένης κατὰ τὴν ιε: τοῦ παρόντος, οὕτω καὶ ὁ αγ, δοθεὶς κύλινδρος συσταθήσεται τῆς αὐτοῦ αβ, βάσεως ἐπὶ τὸ βγ, πολλαπλασιαζομένης ὕψος. Εἰ γὰρ μή, ἔσται δήπουθεν ἡ αβ, αὐτοῦ βάσις μείζων, ἢ ἐλάττων τῆς τοῦ εκ, πρίσματος βάσεως. τὸ γὰρ ὕψος ὑπετέθη ἴσον. Ε῎στω δὴ α: μείζων ἡ αβ, βάσις τοῦ αγ, κυλίνδρου τῆς εθ, βάσεως τοῦ εκ, πρίσματος. δυνατὸν ἄρα κατὰ τὴν ιζ': τοῦ δ': τοῦ α: τοῦ παρόντος ἐγγραφῆναι εἰς τὸν αβ, κύκλον πολύγωνον, οὗ ἡ περίμετρος μείζων ἔσται τῆς περιμέτρου τῆς εθ, βάσεως τοῦ εκ, πρίσματος. Ἐὰν δὲ τὸ πολύγωνον ἐκεῖνο ἐπὶ τὸ βγ, ὕψος τοῦ αγ, κυλίνδρου πολλαπλασιαθῇ, συσταθήσεται πρίσμα μεῖζον μὲν τοῦ εκ, τῷ παχύτητι, ἰσοϋψὲς δὲ τῷ αὐτῷ. ἀλλὰ τὸ εκ, πρίσμα ἰσοπαχές ἐστι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα τὸ συσταθὲν ἐκεῖνο πρίσμα, οὗ ἡ πολύγωνος βάσις εἰς τὸν αβ, κύκλον ἐγγέγραπται, μεῖζον ἔσται καὶ τοῦ αγ, κυλίνδρου, ἀλλὰ καὶ περιέχεται, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἔστιν ἄρα ὁ αβ, κύκλος μείζων τῆς εθ, βάσεως τοῦ εκ, πρίσματος.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 12.



Ε῎στω β': ὁ αβ, κύκλος, ἡ βάσις δηλ: τοῦ δοθέντος αγ, κυλίνδρου ἐλάττων τῆς εθ, βάσεως τοῦ εκ, πρίσματος. κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ἄρα ιζ': δύναται περιγραφῆναι περὶ τὸν αβ, κύκλον πολύγωνον, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττων ἔσται τῆς περιμέτρου τῆς εθ, βάσεως τοῦ εκ, πρίσματος. ὥστε πολλαπλασιαζομένου τοῦ περιγεγραμμένου ἐκείνου πολυγώνου ἐπὶ τὸ βγ, ὕψος τοῦ αγ, κυλίνδρου, συσταθήσεται πρίσμα ἔλαττον τοῦ τε εκ, πρίσματος, καὶ τοῦ αγ, κυλίνδρου. τὸ γὰρ εκ, πρίσμα ὑπετέθη ἴσον τῷ αγ, κυλίνδρῳ, ἀλλὰ καὶ περιέχει τὸν κύλινδρον, ἄτοπον ἄρα. ὥστε ὁ αβ, κύκλος οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶ τῆς εθ, βάσεως τοῦ εκ, πρίσματος. δέδεικται δὲ οὐδὲ μείζων, ἴσος ἄρα. Ω῞σπερ οὖν τὸ πρίσ-

μα

μα συνίσταται, πολλαπλασιαζομένης τῆς αὐτοῦ πλευρᾶς ἐπὶ τὸ ὕψος, οὕτω καὶ ὁ κύλινδρος, τοῦ αὐτοῦ γενομένου, συνίσταται. τὸ τοῦ ὀρθοῦ ἄρα κυλίνδρου εὕρηται στερεόν.

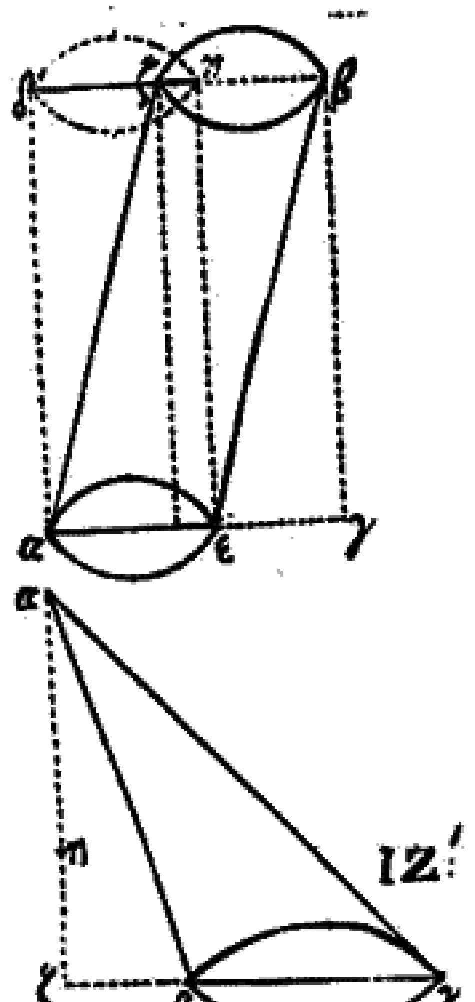
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι οἱ ἰσοϋψεῖς κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων τῶν αὐτῶν βάσεων τετράγωνα. οἱ γὰρ τοιοῦτοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις, αἱ δὲ βάσεις ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων αὐτῶν τετράγωνα, ὥστε καὶ δὴ ἴσου.

Πρότασις Ιϛ'.

Τὸ τοῦ ἐγκλινομένου κυλίνδρου στερεὸν εὑρεῖν.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 13.



Ἔστω ἐγκλινόμενος κύλινδρος ὁ αβ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. Μετρηθήτω δὴ Γεωμετρικῷ τινι ὀργάνῳ τὸ ὕψος αὐτοῦ, τοῦτο δ' ἐστὶν εἰπεῖν ἡ βγ, κάθετος, καὶ εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν τῆς αε, αὐτοῦ βάσεως. εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ αε, βάσις ἐπὶ τὸ βγ, ὕψος, καὶ τὸ γενόμενον παραστατικὸν ἔσται τοῦ στερεοῦ τοῦ αβ, κυλίνδρου. συνεστάτω γὰρ ἐπὶ τῆς αε, βάσεως ὀρθὸς κύλινδρος ὁ αη, τὸ αὐτὸ ἔχων ὕψος τῷ αβ· καὶ ἐπεὶ οἱ αβ, αη, κύλινδροι ἴσοι εἰσί, διὰ τὸ καὶ τὰ διὰ τῶν ἀξόνων αὐτῶν παραλληλόγραμμα ἴσα εἶναι κατὰ τὴν λε': τοῦ α': τοῦ Στοιχ', ὁ δὲ εθ, συνίσταται κατὰ τὴν ἀνωτέρω διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αε, βάσεως ἐπὶ τὸ αθ, ὕψος· πάντως γε καὶ ὁ αβ, συσταθήσεται ὁμοίως διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αε, βάσεως ἐπὶ τὴν βγ, ἴση γὰρ ἡ βγ, τῇ αθ, κατὰ τὴν λδ': τοῦ αὐτοῦ. τοῦ δοθέντος ἄρα ἐγκλινομένου κυλίνδρου, τὸ στερεὸν εὕρηται.

Πρότασις ΙΖ'.

Τὸ τοῦ κώνου στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω κῶνος τυχών, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. Μετρηθήτω δὴ τό, τε ὕψος καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως τοῦ αὐτοῦ Γεωμετρικῷ τινι ὀργάνῳ, ἔτι δὲ καὶ ἡ

τῆς

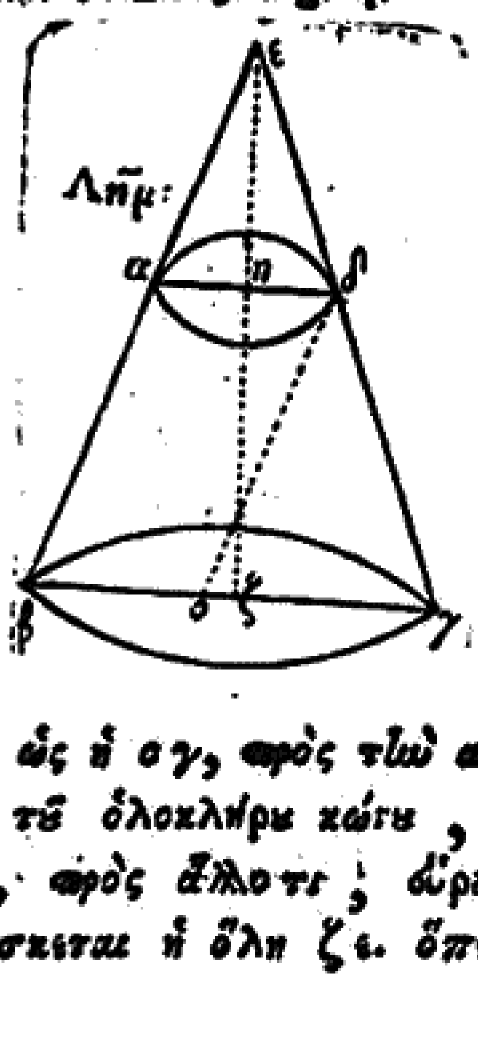
τῆς ἐγκλίσεως γωνία, εἴγε ἐγκλινόμενος ᾖ. εἶτα ληφθήτω ἀπὸ τῆς Κλίμακος τό, τε ἀναλογοῦν ὕψος, καὶ ἡ τῆς βάσεως διάμετρος, καὶ κατασκευασθήτω ἐν χάρτῃ ὅμοιος κῶνος τῷ δοθέντι α β γ· καὶ εὑρεθέντος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς β γ, βάσεως, πολλαπλασιασθήτω ἡ β γ, βάσις ἐπὶ τὸ γ': μέρος τοῦ α ζ, ὕψους, δηλ: ἐπὶ τὸ ζ η, καὶ τὸ γενόμενον ἔςαι τὸ ζητούμενον. Εἰ γὰρ ἡ β γ, βάσις ἐφ' ὅλην τὴν α ζ, πολλαπλασιασθῇ, συςαθήσεται κύλινδρος ἴσος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἔχων τῷ α β γ, κώνῳ. ἀλλ' ὅτι ὁ κῶνος τῷ κυλίνδρῳ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχει καὶ ὕψος ἴσον, γ': μέρος ἐςὶ τοῦ κυλίνδρου, ἄρα τῆς β γ, βάσεως ἐπὶ τὴν ζ η, γ': μέρος τῆς α ζ, πολλαπλασιαζομένης, συνίςαται ὁ α β γ, κῶνος.

Λ Η͂ Μ Μ Α.

Κολοβοῦ κώνου δοθέντος τὸ τοῦ ὁλοκλήρου ὕψος εὑρεῖν.

Ἔςω κολοβὸς κῶνος ὁ α β γ δ, καὶ ζητείσθω τὸ ὕψος τοῦ ὁλοκλήρου. Ἀχθήτω δὴ ἀπὸ τοῦ δ, παράλληλος τῇ α β, ἡ δ ο. Εἶτα γινέσθω ὡς ἡ ο γ, πρὸς τὴν α δ, τὸ ζ η, ὕψος τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου πρὸς ἄλλο τι, καὶ τοῦ εὑρεθέντος συναπτομένου τῷ ζ η, ὕψει, τὸ γενόμενον ἔςαι τὸ ζητούμενον· συμπεπληρώσθω γὰρ ὁ α β γ δ, κολοβὸς κῶνος, καὶ ἤχθω ἡ ζ η, ἐπὶ τὸ ε. καὶ ἐπεὶ αἱ γ β, δ α, παράλληλοί εἰσι, καὶ εἰς αὐτὰς πέπτωκεν ἡ ε γ, πάντως γε αἱ ὑπὸ ε δ α, ε γ β, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ διὰ τὰ αὐτὰ ἴσαι εἰσὶν ἔτι καὶ αἱ ὑπὸ ε α δ, ε β γ, τῇ δὲ ε β γ, ἴση ἐςὶν ἡ ὑπὸ δ ο γ, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι καὶ τὰς α β, δ ο· ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ε α δ, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ δ ο γ. ὥςε τὰ ε α δ, δ ο γ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν. ἔςιν ἄρα ὡς ἡ γ ο, πρὸς τὴν ο δ, ἡ δ α, πρὸς τὴν α ε, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ ο γ, πρὸς τὴν α δ, ἡ δ ο, ἤτοι ἡ α β, πρὸς τὴν α ε. ὡς δὲ ἡ β α πρὸς τὴν α ε, ἔχει καὶ ἡ ζ η, πρὸς τὴν η ε,

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 14.



κατὰ τὴν β': τοῦ ς': τῶν Στοιχ: ἄρα ὡς ἡ ο γ, πρὸς τὴν α δ, ἔχει καὶ ἡ ζ η, πρὸς τὴν η ε. ἐπεὶ δὲ ἡ ζ η, ὕψος ἐςὶ τοῦ ὁλοκλήρου κώνου, πάντως γε ἐὰν γίνηται ὡς ἡ ο γ, πρὸς τὴν α δ, ἡ ζ η, πρὸς ἄλλο τι; εὑρεθήσεται ἡ η ε, ἄγνωςος, ἧς τῆς ζ η, προςιθεμένης, γινώσκεται ἡ ὅλη ζ ε. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρό-

Πρότασις ΙΗ':

Τὸ τοῦ κολοβοῦ κώνου στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω κῶνος κολοβὸς ὁ τυχών, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. Μετρηθήτω δὴ ἥτε διάμετρος τῆς βάσεως, καὶ ὕψος τοῦ δοθέντος κώνου. Εἶτα λαμβανομένων ἐκ τῆς Κλίμακος τῶν ἀναλόγων τῇ τε διαμέτρῳ τῆς βάσεως, καὶ τῷ ὕψει τοῦ αὐτοῦ κώνου, συνιστάσθω ἐν χάρτῃ ὁ αβγδ, κῶνος ὅμοιος τῷ δοθέντι. καὶ ἀναπεπληρώσθω κατὰ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα ὁ εβγ, ὁλόκληρος κῶνος. ἀπὸ δὲ τοῦ ε, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς βγ, διαμέτρου τῆς αὐτοῦ βάσεως ἡ εζ, καὶ ἡ μὲν εζ, ὕψος ἔσται τοῦ ὁλοκλήρου κώνου, ἡ δὲ ζη, τοῦ αβγδ, κολοβοῦ κώνου, καὶ ἡ ηε, τοῦ αδε, τοῦ εἰς ἀναπλήρωσιν τοῦ ὁλοκλήρου κώνου. τούτων δ' ἐγνωσμένων, ζητηθήτω τὸ ἐμβαδὸν τῆς τε βγ, βάσεως τοῦ ὁλοκλήρου κώνου, καὶ αδ, κορυφῆς μὲν τοῦ κολοβοῦ κώνου, βάσεως δὲ τοῦ εἰς ἀναπλήρωσιν τοῦ ὁλοκλήρου. καὶ διαιρεθήτω ἑκατέρα τῶν εζ, εη, εἰς τρία ἴσα χωρὶς. εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ μὲν βγ, βάσις ἐπὶ τὸ γ': τῆς ζε, καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς βγ, ἐπὶ τὸ γ': τῆς ζε, ἀφῃρήσθω τὸ γινόμενον διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αδ, ἐπὶ τὸ γ': τῆς ηε, καὶ τὸ ἐναπολειπόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὴν ἀνωτέρω πολλαπλασιαζομένης τῆς βγ, ἐπὶ τὸ γ': τῆς εζ, συνίσταται ὁ εβγ, ὁλόκληρος κῶνος. πολλαπλασιαζομένης δὲ καὶ τῆς αδ, ἐπὶ τὸ γ': τῆς ηε, συνίσταται ὁ εαδ, τούτου δ' ἀφαιρουμένου ἀπὸ τοῦ εβγ, ἐναπολείπεται ὁ αβγδ, κολοβὸς κῶνος, ἀναλογῶν τῷ δοθέντι.

Πρότασις ΙΘ':

Τὸ τῆς σφαίρας στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω ἡ τυχοῦσα σφαῖρα, καὶ ζητηθήτω τὸ ταύτης στερεόν. Ληφθήτω δὴ ἡ διάμετρος τῆς αὐτῆς σφαίρας, καὶ μετρηθήτω γεωμετρικῷ τινι μέτρῳ. Εἶτα εἰλήφθω ἀπὸ τῆς κλίμακος εὐθεῖα ἔχουσα τοσαῦτα μέρη, ὅσους πόδας, ἢ βήματα ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας περιέχει διάμετρος, καὶ ταύτης δίχα τμηθείσης, γραφήτω περὶ αὐτὴν κύκλος, καὶ εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αὐτοῦ κύκλου, καὶ τὰ λοιπὰ γινέσθω ὡς προηρμήνευνται προτάσει δ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, καὶ ἔσται σοι τὸ ζητούμενον.

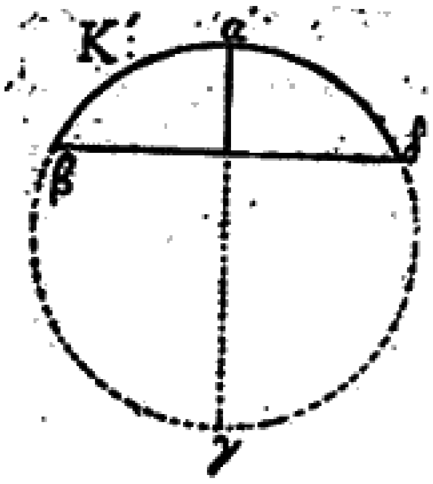
Πρό-

Πρότασις Κ:

Παντὸς τμήματος σφαίρας τὸ στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω τμῆμα σφαίρας τὸ τυχὸν, καὶ ζητείσθω τὸ στερεὸν αὐτοῦ. Μετρηθήτω δὴ ἡ τῆς βάσεως αὐτοῦ διάμετρος, καὶ τὸ ὕψος τοῦ δοθέντος τμήματος τῆς σφαίρας, καὶ συνιστάσθω ἐν χάρτῃ τὸ α β δ, ἀναλογοῦν τῷ δοθέντι, καὶ ἀναπεπληρώσθω ἡ ὅλη α β γ δ, σφαῖρα. Εἶτα εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν τῆς β δ, βάσεως τοῦ α β δ, δοθέντος τμήματος, καὶ γενέσθω ὡς τὸ ὕψος τοῦ β γ δ, λοιποῦ τμήματος τῆς αὐτῆς σφαίρας πρὸς τὸ ὕψος τοῦ α β δ, οὕτως ἡ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἡμιδιάμετρος πρὸς ἄλλο τι, καὶ τὸ εὑρεθὲν συναφθήτω τῷ ὕψει τοῦ α β δ, τμήματος τοῦ ἀναλογοῦντος τῷ δοθέντι, τοῦ δὲ γενομένου ἀφῃρήσθω τὸ γ': μέρος, καὶ ἐπ' αὐτὸ πολλαπλασιαθήτω ἡ β δ, βάσις τοῦ α β δ, τμήματος, καὶ τὸ γινόμενον ἔσται ἴσον τῷ στερεῷ τοῦ δοθέντος τμήματος κατὰ τὴν μδ': τοῦ πρώτου βιβλίου τοῦ παρόντος.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 15.

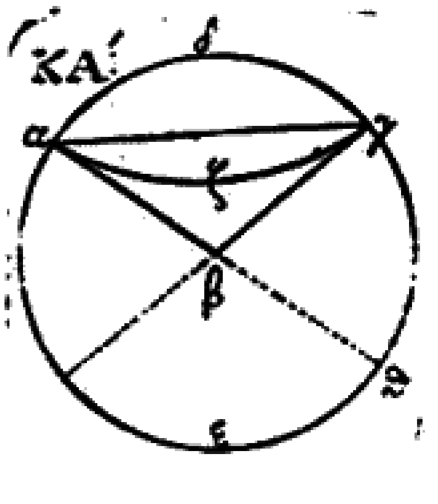


Πρότασις ΚΑ:

Τὸ τοῦ τομέως τῆς σφαίρας στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω τομεὺς σφαίρας ὁ τυχὼν, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου στερεόν. Μετρηθήτω δὴ ἥτε πλευρὰ τοῦ δοθέντος τομέως, ἥτις ἐστὶν ἡμιδιάμετρος τῆς αὐτοῦ σφαίρας, καὶ ἡ διάμετρος τῆς αὐτοῦ α ζ γ δ, βάσεως, καὶ συνιστάσθω ἐν χάρτῃ ὁ α β γ δ, τομεὺς τῆς α ε γ δ, σφαίρας. Εἶτα εὑρεθήτω ἡ ἐπιφάνεια τῆς α δ γ ζ, βάσεως τοῦ δοθέντος τομέως κατὰ τὴν λε': τοῦ α': τοῦ β': καὶ πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ τὸ γ': τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς σφαίρας, ἧς ἐστιν ὁ τομεὺς, καὶ τὸ γενόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὴν μγ': τοῦ α': τοῦ παρόντος ὁ α β γ δ, τομεὺς ἴσος ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς α ζ γ δ, βάσεως τοῦ α β γ δ, τομέως, καὶ ὕψος ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἀλλὰ τὸ τοῦ κώνου στερεὸν παράγεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἐπὶ τὸ γ': μέρος τοῦ ὕψους κατὰ τὴν ιζ': τοῦ παρόντος, ἐὰν ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς α δ γ ζ, βάσεως τοῦ α β γ δ, τομέως ἐπὶ τὸ γ': τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς α ε γ δ, σφαίρας πολλαπλασιασθῇ, τὸ τοῦ τομέως ἐξαχθήσεται στερεόν.

Geom. Pr. lib. 5. Fig. 16.



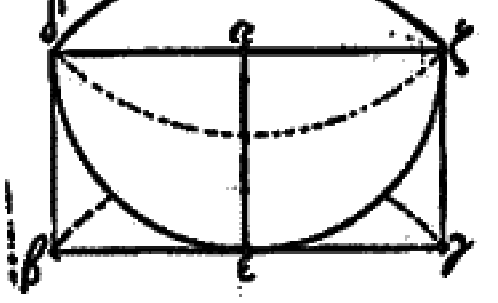
Πρό-

Πρότασις ΚΒ'.

Τὸ τοῦ πινακίσκου τοῦ τῇ ἀφαιρέσει τοῦ ἡμισφαιρίου ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω πινακίσκος ὁ δεζγβ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. Πολλαπλασιαθήτω ὁ περὶ τὴν δζ, γραφόμενος κύκλος ἐπὶ τὸ γ': μέρος τῆς αε, ἡμιδιαμέτρου, ἄγε διδομένας γ. εἰδὲ μὴ, μετρηθήτω ὅ, τε περὶ τὴν δζ, γραφόμενος κύκλος, καὶ ἡ τούτου ἡμιδιάμετρος, καὶ τὰ λοιπὰ γινέσθω ὡς εἴρηται. καὶ τὸ γενόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον. καὶ γὰρ τὸ γ': πόρισμα τῆς μα: τοῦ α: τοῦ παρόντος ὁ πινακίσκος ἴσος ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος, καὶ ὕψος ἡ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἡμιδιάμετρος. ἀλλ' ὁ κῶνος συνίσταται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἐπὶ τὸ γ': τοῦ ὕψους, ἄρα ἐὰν καὶ ὁ περὶ τὴν δζ, γραφόμενος κύκλος ἐπὶ τὸ γ': τῆς αε, πολλαπλασιαθῇ, τὸ τοῦ δβγζε, δοθέντος πινακίσκου στερεὸν γενήσεται.

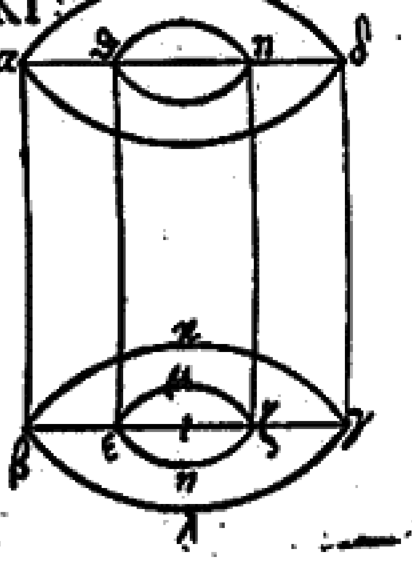
Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 17.



Πρότασις ΚΓ'.

Τὸ τοῦ κυλινδρικοῦ σίφωνος στερεὸν εὑρεῖν.

ΚΓ'

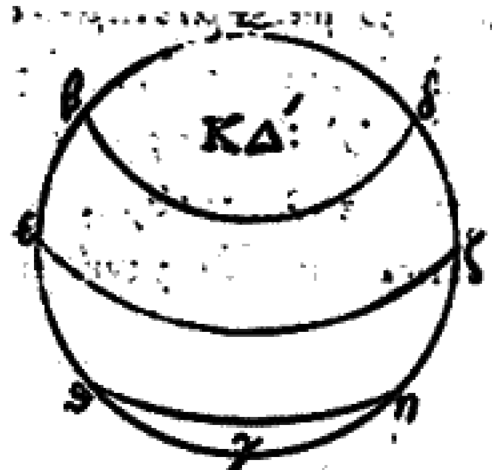


Ἔστω σίφων κυλινδρικὸς ὁ τυχὼν, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. Μετρηθήτω δὴ ἥτε διάμετρος τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ἐν ᾧ ὁ σίφων, καὶ τὸ ὕψος τοῦ αὐτοῦ. ἔτι δὲ καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως τοῦ μέρους τοῦ κυλίνδρου, οὗ τῇ ἀφαιρέσει ὁ σίφων ἐναπολείπεται. καὶ γραφήτω ἐν χάρτῃ ὁ αβγδ, κύλινδρος, ἔχων ὕψος μὲν ἀναλογοῦν τῷ τοῦ δοθέντος ὕψει τὴν αβ. διάμετρον δὲ τὴν βγ. αὐτὸ δὲ σίφωνος τὸ αβεθηζγδ, μέρος. Εἶτα εὑρεθήτω τὸ τετράγωνον τῆς βε, ἡμιδιαμέτρου, καὶ τὸ τῆς κγλβεμζη, ζώνης ὀρθογώνιον, ἤτοι τὸ ὑπὸ τῶν βε, εγ, περιεχόμενον. καὶ γενέσθω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βε, ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν βε, εγ, ὀρθογώνιον, τὸ τοῦ αβγδ, κυλίνδρου στερεὸν πρὸς ἄλλο τι. καὶ τὸ εὑρεθὲν ἴσον ἔσται τῷ αεζδ, κυλινδρικῷ σίφωνι κατὰ τὴν ιθ': τοῦ πρώτου τοῦ παρόντος.

Πρότασις ΚΔ'.

Τοῦ οἱουδήποτε τῆς σφαίρας μέρους τὸ στερεὸν εὑρεῖν, τοῦ ὑπὸ δύο περιεχομένου κύκλων παραλλήλων, ἢ μή.

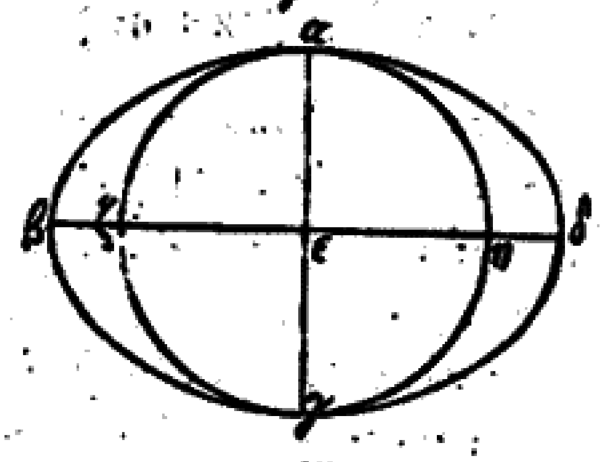
Ζητείσθω οὖν τὸ στερεὸν τοῦ β ε ζ δ, τμήματος τῆς α ε γ ζ, σφαίρας, περιεχομένου ὑπό τε τοῦ β δ, καὶ ε ζ, κύκλου. Εὑρέσθω α': τὸ στερεὸν τοῦ τε α β δ, καὶ α ε ζ, μέρους κατὰ τὴν κ': τοῦ παρόντος. εἶτα ἀφῃρείσθω τὸ τοῦ α β δ, ἐλάττονος στερεὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος α ε ζ, καὶ τὸ ἀπολειπόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον. ὁ λόγος σαφής. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον εὑρεθήσεται καὶ τὸ στερεὸν Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 18. τοῦ ε θ η ζ, καὶ παντὸς ἄλλου μέρους τῆς δοθείσης σφαίρας.



Πρότασις ΚΕ'.

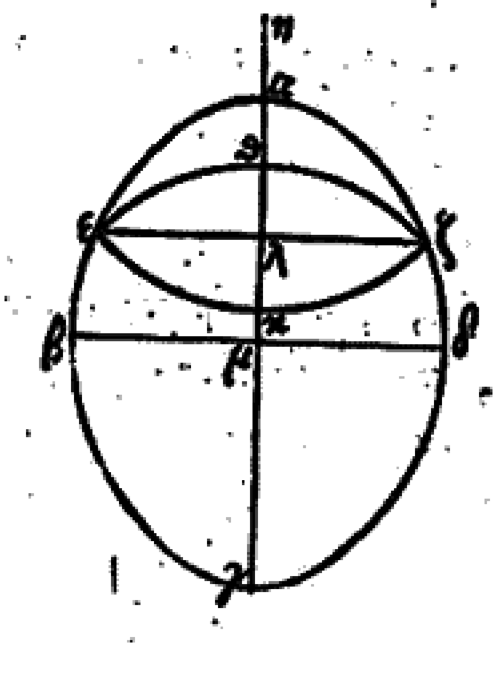
Τὸ τῆς σφαιροειδοῦς ἐλλείψεως στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω σφαιροειδὴς ἔλλειψις ἡ α β γ δ, καὶ ζητείσθω τὸ ταύτης στερεόν. Μετρηθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν ταύτης διαμέτρων ἤτε α γ, καὶ δ β. καὶ εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ περὶ μίαν τῶν αὐτῶν διαμέτρων γραφομένου, ὁποιανδήποτε βούλει, ὡς εἰπεῖν τοῦ α ζ γ η, κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ζ η, ἴση τῇ α γ, ἐλάττονι διαμέτρῳ τῆς ἐλλείψεως. τῆς δὲ λοιπῆς β δ, ληφθήτωσαν τὰ δύο τρίτα. εἶτα πολλαπλασιασθήτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ζ α η γ, κύκλου ἐπὶ τὸ ληφθὲν ἀπὸ τῆς δ β, καὶ τὸ γινόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον κατὰ τὴν μϛ': τοῦ α': τοῦ παρόντος.



Πρότασις Κϛ'.

Τοῦ οἱουδήποτε τῆς σφαιροειδοῦς ἐλλείψεως τμήματος τὸ στερεὸν εὑρεῖν.



Ἔστω σφαιροειδὴς ἔλλειψις ἡ α β γ δ, καὶ ζητείσθω τὸ στερεὸν τοῦ ε α ζ, αὐτῆς τμήματος. Εὑρεθήτω δὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ε θ ζ κ, κύκλου τοῦ περὶ τὴν ε ζ, γραφομένου· καὶ μετρηθήτω τό, τε λ α, ὕψος τοῦ ε α ζ, καὶ τὸ λ γ, τοῦ ε γ ζ, τμήματος. ἔτι δέ, καὶ ἡ γ μ, ἡμιδιάμετρος. Εἶτα εὑρεθήτω ἡ τετάρτη

ἀνά-

ἀνάλογος τῶν γλ, γμ, λα, καὶ προστεθήτω αὐτῇ τῇ λα, ὕψει τοῦ εαζ, τμήματος, ὥστε γενέσθαι τὴν ὅλην λη. τούτου δὲ γενομένου, πολλαπλασιασθήτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ εθζκ, κύκλου ἐπὶ τὸ γ′: τῆς λη, καὶ τὸ γινόμενον ἴσον ἔσται τῇ στερεᾷ τοῦ εαζ, δοθέντος τμήματος κατὰ τὴν μη′: τοῦ α′: τοῦ παρόντος.

Περὶ Κοιλομετρίας.

Πρότασις ΚΖ′:

Τὸ δοθὲν κυλινδρικὸν ἀγγεῖον μετρῆσαι.

Ἔστω ἀγγεῖον κυλινδρικὸν, οὗ αἱ ἀπεναντίον βάσεις ἴσαι, τὸ αβγδ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου χωρητικόν. Ληφθήτω δὴ ἡ ζη, ῥάβδος ἡ πρὸς τὰ τοιαῦτα χρησιμεύουσα, ἧς ἡ κατασκευὴ ἐν τῇ γ′: τοῦ παρόντος διέξεισιν προτάσει ι′: καὶ παραβληθήτω ἡ μὲν βγ, διάμετρος τῆς αὐτοῦ βάσεως τῇ ἐπὶ τοῦ ζμ, μέρους τῆς ῥάβδου διαιρέσει, ἤτοι τῇ τῶν διαμέτρων, καὶ ἔστω ἴση τῇ ζ 3, διαμέτρῳ. ἡ δὲ αβ, παραβληθήτω τῇ ἐπὶ τοῦ εη, μέρους τῆς αὐτῆς ῥάβδου διαιρέσει, ἤτοι τῇ τῶν ὕψεων, καὶ ἔστω ἴση τῇ ε 4. Εἶτα πολλαπλασιασθήτω ὁ γ, ἐπὶ τὸν δ, καὶ ὁ γενόμενος ιβ, παρίστησί σοι τὸ αβγδ, κυλινδρικὸν ἀγγεῖον, χωρητικὸν εἶναι ξεστῶν φέρ' εἰπεῖν, ἢ ἄλλου τινὸς μέτρου τῶν ὑγρῶν, καθ' ὃ καὶ ἡ ῥάβδος διῄρηται, δυοκαίδεκα. ὁ λόγος σαφής. κατὰ γὰρ τὸν τῆς διαιρέσεως λόγον τῆς ἐπὶ τῆς ζμ, πλευρᾶς τῆς ῥάβδου, ἡ τοῦ αβγδ, ἀγγείου βάσις, τριπλασία ἐστὶ τῆς τοῦ δαγβε, κυλινδρικοῦ μέτρου βάσεως, τὸ δὲ ὕψος τοῦ αὐτοῦ αβγδ, ἀγγείου τετραπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ δαγβε, κυλινδρικοῦ μέτρου. ὥστε τὸ αβγδ, ἀγγεῖον μέχρι μὲν τοῦ βε, ὕψους χωρεῖ ξέστας τρεῖς, μέχρι δὲ τοῦ βζ, ἕξ, μέχρι δὲ τοῦ βη, ἐννέα, καὶ μέχρι τοῦ βα, δυοκαίδεκα.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 19.

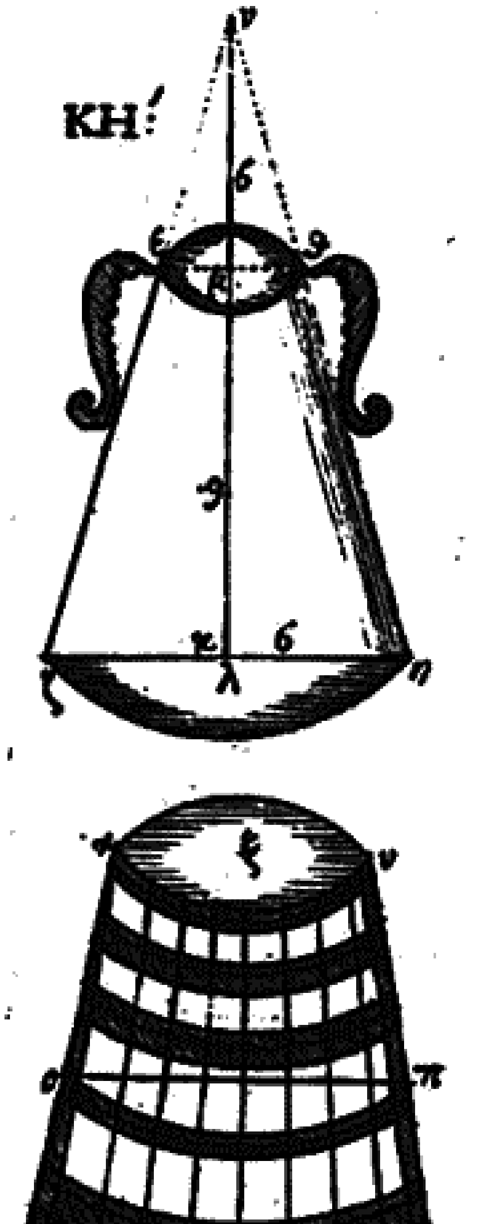
Πρότασις ΚΗ′:

Τὸ δοθὲν κωνοειδὲς ἀγγεῖον μετρῆσαι.

Ἔστω ἀγγεῖον κολοβοῦ κώνου φέρον σχῆμα, οἷος ὁ κάδος, τὸ εζηθ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου χωρητικόν. Μετρηθήτωσαν δὴ αἱ τῶν αὐτοῦ βάσεων διάμετροι τῇ τῶν μήκιων γραμμῇ, καὶ εὑρεθήτω ἡ ὑπεροχὴ τῆς ζ η, πρὸς τὴν ε θ, καὶ ἔςω αὕτη ἡ κ η. Εἶτα γενέσθω ὡς ἡ η κ, πρὸς τὴν ε θ, τὸ λ μ, ὕψος τοῦ ε ζ η θ, ἀγγείου πρὸς ἄλλο τι, καὶ τοῦτο ἔςαι τὸ μ ν· ὥςε τὸ λ ν, ὕψος ἐςὶ τοῦ ὁλοκλήρου ζ η ν, κώνου κατὰ τὸ λῆμμα τῆς ιη: τοῦ παρόντος. τούτου δ' εὑρεθέντος μερισθήτω ἑκάτερον τῶν λ ν, μ ν, εἰς τρία ἴσα χωρίς. Καὶ μετρηθήτω αὖθις ἑκατέρα τῶν ζ η, ἐπὶ τῇ τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων γραμμῇ, τῇ ἐν τῇ κοιλομετρικῇ ῥάβδῳ, καὶ ἡ μὲν ζ η, πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ τὸ γ': τῆς λ ν, ἡ δὲ ε θ, ἐπὶ τὸ γ': τῆς μ ν, καὶ τὸ γενόμενον ἀπὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ε θ, ἐπὶ τὸ γ': τοῦ μ ν, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ γενομένου ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ζ η, ἐπὶ τὸ γ': τῆς λ ν, καὶ τὸ λειπόμενον ἔςαι τὸ ζητούμενον. *Οἷον ἔςω ἡ μὲν ζ η, μερῶν ἴσων ἀλλήλοις δέκα, ἡ δὲ ε θ, τεσσάρων. ὥςε ἡ διαφορὰ αὐτῶν κ η, ἔςαι μερῶν ς. ἔςω καὶ ἡ λ μ, μερῶν θ: Γενέσθω δὴ ὡς ἡ κ η, ς: πρὸς τὴν ε θ, δ: ἡ λ μ, θ: πρὸς ἄλλην τινά, καὶ εὑρεθήσεται ἡ μ ν, μερῶν ς: ἡ ὅλη ἄρα λ ν, μερῶν ἔςαι ιε: ἧς τρίτον μέρος ὁ ε: τῆς δὲ μ ν, ὁ β. Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ζ η, παραβαλομένη τῇ τῶν διαμέτρων κοιλομετρικῇ γραμμῇ εὕρηται ἴση τῷ ζ 10, ἡ δὲ ε θ, τῷ ζ 4. πολλαπλασιαθήτω τοιγαροῦν ἡ ζ η, δηλ: ὁ ι: ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ε: τὸ τρίτον τῆς λ ν. καὶ γενήσεται ὁ ν: ἀριθμός, δηλωτικὸς τοῦ ζ η ν, κώνου. πολλαπλασιαζομένης δὲ καὶ τῆς ε θ, τοῦ δ: δηλ: ἐπὶ τὸν β: τὸ τρίτον ἀμέλει τῆς μ ν, γενήσεται ὁ η: παραςατικὸς τοῦ ε θ ν, κώνου. ἀφαιρουμένου τοίνυν τοῦ η: ἀπὸ τοῦ ν: τὸ ἐναπολειπόμενον ἔςαι μβ: καὶ τοσούτων ξεςῶν ὑγροῦ ἔςαι χωρητικὸν τὸ ε ζ η θ, ἀγγεῖον.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 20.

ΚΗ΄



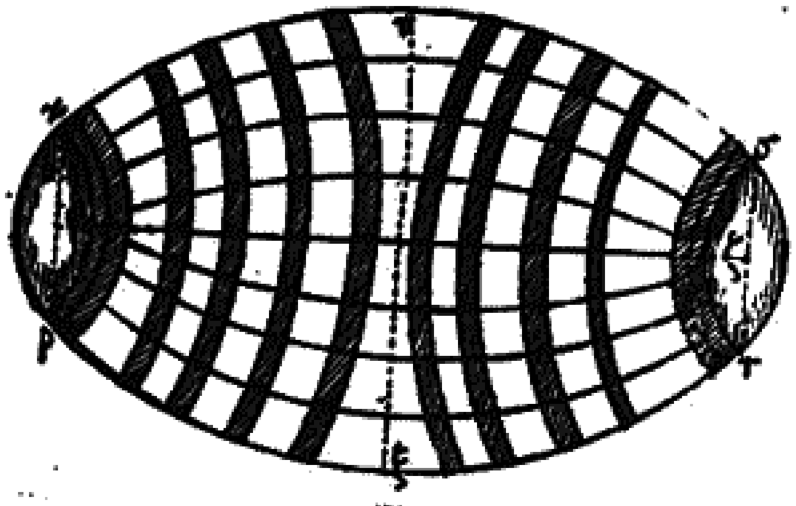
Τοῦτον τὸν τρόπον θηρεύεται τὸ χωρητικὸν τῶν κολοβοῦ κώνου φερόντων σχῆμα ἀγγείων· πηνίκα ἡ τῶν βάσεων διαφορὰ μεγάλη πώς ἐςιν, ὅτε δὲ ἐλαχίςη, οὕτως. Ἔςω εἰς ζήτησιν τὸ χωρητικὸν τοῦ κ λ μ ν, γείου. Μετρηθήτω δὴ τῇ μὲν τῶν ὑψέων γραμμῇ τὸ ρ ξ, αὐτοῦ ὕψος, τῇ δὲ τῶν

δια-

διαμέτρων ἡ ο π, μέση τῶν βάσεων· καὶ ἔςω ἡ μὲν ρ ξ, μερῶν τεσσάρων, ἡ δὲ ο π, ἴση τῇ ζ 4. Εἶτα πολλαπλασιαθήτω ὁ τέσσαρα ἐπὶ τὸν τέσσαρα, καὶ γενήσεται ὁ ἑκκαίδεκα, καὶ τοσούτων ξεςῶν ἔςαι τὸ κ λ μ ν, ἀγγεῖον χωρητικὸν ὑγρῦ.

Πρότασις ΚΘ':

Τῦ δοθέντος ἀγγείυ σχῆμα ὠοειδὲς φέροντος τὸ χωρητικὸν εὑρεῖν κατὰ τὸ κοινὸν ἔθος. *Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 21.*



Ἔςω ἀγγεῖον ὠοειδὲς κολοβὸν ἑκατέρωθεν τὸ κ ρ τ σ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου χωρητικόν. Μετρηθήτω δὲ ἡ τε κ ρ, διάμετρος τῇ τῶν διαμέτρων γραμμῇ, καὶ ἡ ἐν μέσῳ τῆς τε κ ρ, καὶ σ τ, δηλ: ἡ ν ξ, καὶ ἔςω ἡ μὲν ν ξ, ἴση τῇ 9 β, ἤτοι μερῶν ἑπτὰ καὶ ἡμίσεως, ἡ δὲ κ ρ, ἴση τῇ 9 σ, ἤτοι δύο καὶ ἡμίσεως. Εἶτα ληφθήτω ἡ μέση τούτων πέντε, καὶ μετρηθήτω ἡ φ ζ, τῇ τῶν ὕψεων γραμμῇ, καὶ ἔςω ἴση τῇ ι 7. εἶτα πολλαπλασιαθήτω ὁ πέντε ἐπὶ τὸν ἑπτὰ, καὶ γενήσεται ὁ πέντε καὶ τριάκοντα· καὶ τοσούτων ξεςῶν, ἢ ἄλλυ τινὸς μέτρυ χωρητικὸν ἔςαι τὸ κ ρ τ σ, δοθὲν ἀγγεῖον.

Α'ΛΛΩΣ Α'ΚΡΙΒΕ'ΣΤΕΡΟΝ.

Εὑρεθήτω α: τὸ χωρητικὸν τῦ ἡμίσεως τῦ δοθέντος ἀγγείυ, ἤτοι τὸ κ ρ ξ ν, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. Εἶτα εὑρεθήτω κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ τὸ τῦ ἑτέρυ ἡμίσεως χωρητικὸν, ἤτοι τῦ ν ξ τ σ· καὶ συναφθήτωσαν ἄμφω εἰς ἕν, καὶ τὸ ὅλον ἔςαι παραςατικὸν τῦ ὅλυ κ ρ τ σ. μικρᾶς τινος γενομένης ἀπάτης διὰ τὴν τῶν κ σ, ρ τ, κυρτότητα. Τῦτον τὸν τρόπον δύναται εὑρεθῆναι καὶ τὸ χωρητικὸν ἑκάςης ἀποθήκης σίτυ, κριθῆς, ζειᾶς, κέγχρου, καὶ τῶν ὁμοίων. δύναται γὰρ κατασκευασθῆναι χοῖνιξ, ἢ ἕτερόν τι μέτρον χωρητικὸν ὡρισμένης τινὸς ποσότητος, φέρ' εἰπεῖν λιτρῶν δέκα, ἢ καὶ πλειόνων, ὅμοιον φέρον σχῆμα τῷ τῆς ἀποθήκης, καὶ διαιρεθῆναι τὴν ῥάβδον τῇ τῆς βάσεως τῦ αὐτῦ χοίνικος πλευρᾷ, καθ' ὃν διῄρηται τρόπον· καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς ἀνωτέρω.

Πρό-

Πρότασις Λ':

Τὸν τῆς ψάμμου ἀριθμὸν, ὃν ἅπασα ἡ Γῆ περιέχειν ἠδύνατο, εὑρεῖν.

Ὅτι γε τὸ ἄπειρον ἐνεργείᾳ οὐκ ἐνδέχεται εἶναι, δέδεικται μὲν ὑπὸ πολλῶν ἀφίκτοις τισὶν ἐμπεδούμενον ἀποδείξεσιν. ἀκριβέστερον δὲ ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους. Ἐπεὶ δέ τινες τὴν παρὰ τὸ χεῖλος τῆς Θαλάσσης κειμένην Ἄμμον ἄπειρον εἶναι ὑπολαμβάνουσιν, ὡς ἀριθμῷ ἐγνωσμένῳ ἀπερίληπτον. ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ταύτην βουλόμενος ἀνελεῖν τὴν ὑπόληψιν, διδάσκει τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἠδύνατό τις μὴ μόνον τὴν παρὰ τὸ χεῖλος μιᾶς τινος θαλάσσης, ἢ καὶ δύο ἀριθμῆσαι, ἀλλὰ καὶ τὴν ἐν πάσῃ τῇ Γῇ, εἴγε τὸ ταύτης στερεὸν ἐκ λεπτοτάτων τῆς ἄμμου μορίων συγκείμενον εἴη. Ἐφοδεύει δὲ τὸν λόγον οὕτω, διὰ μιᾶς μόνης ὑποθέσεως. Ὑποτίθησι τοίνυν α': κόκκον κοριάνδρου ἐκ χιλίων ἐλαχίστων τῆς ἄμμου συγκεῖσθαι μορίων. δέκα δὲ κόκκους κοριάνδρου ἐφεξῆς κειμένους δάκτυλον ἕνα ποιεῖν. τὸν δὲ πόδα συγκεῖσθαι ἐκ δακτύλων ἑκκαίδεκα. ἐπεὶ δὲ τὸ βῆμα ἐκ ποδῶν σύγκειται πέντε, πάντως γε ἐὰν ὁ ιϛ, ἐπὶ τὸν ε, πολλαπλασιασθῇ, γενήσεται ὁ π. καὶ τοσούτων κόκκων κοριάνδρου τὸ βῆμα ἔσται παραστατικόν. τὸ δὲ ὀκτωστάδιον περιεκτικὸν ὂν βημάτων χιλίων. ἐὰν ὁ ὀγδοήκοντα ἐπὶ τὸν χίλια πολλαπλασιασθῇ περιέξει πάντως κόκκους κοριάνδρου χιλιάδας ὀγδοήκοντα. ἐπεὶ δὲ ἡ τῆς Γῆς διάμετρος ὀκτωσταδίων ἐστὶ 6876. ἐὰν ὁ 80000, ἐπὶ τὸν 6876, πολλαπλασιασθῇ, καὶ γένηται ὁ 550080000, δῆλον ὅτι ἡ τῆς γῆς ἅπασα διάμετρος σύγκειται ἐκ κόκκων κοριάνδρου 550080000, ὥστε ἡ τῆς γῆς ἅπασα διάμετρος τῇ τοῦ κοριάνδρου παραβαλλομένη διαμέτρῳ εὑρίσκεται ἔχειν ὡς 1 πρὸς 550080000. ἀλλ' αἱ σφαῖραι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων. ἄρα ἐὰν γένηται ὡς 1 πρὸς 550080000, ἡ τοῦ κοριάνδρου δηλ: διάμετρος πρὸς τὴν τῆς γῆς, οὕτως ὁ χίλια τὸ τοῦ κοριάνδρου στερεὸν πρὸς τὸν 550080000000. Εἶτα ὡς 1 πρὸς 550080000, οὕτω 550080000000 πρὸς τὸν 30248800640000000000, καὶ πάλιν ὡς 1 πρὸς 550080000, οὕτω 30258800640000000000 πρὸς 16645761056051200000000000000. ἔσται τὸ ὅλον τῆς τῆς γῆς στερεὸν περιεκτικὸν μορίων ψαμμοειδῶν ὅσων μονάδων ὁ ἔσχατός ἐστιν ἐνταῦθα ἀριθμός.

Τέλος τῆς ὅλης Γεωμετρικῆς Πραγματείας.

ΕΠΙ