ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

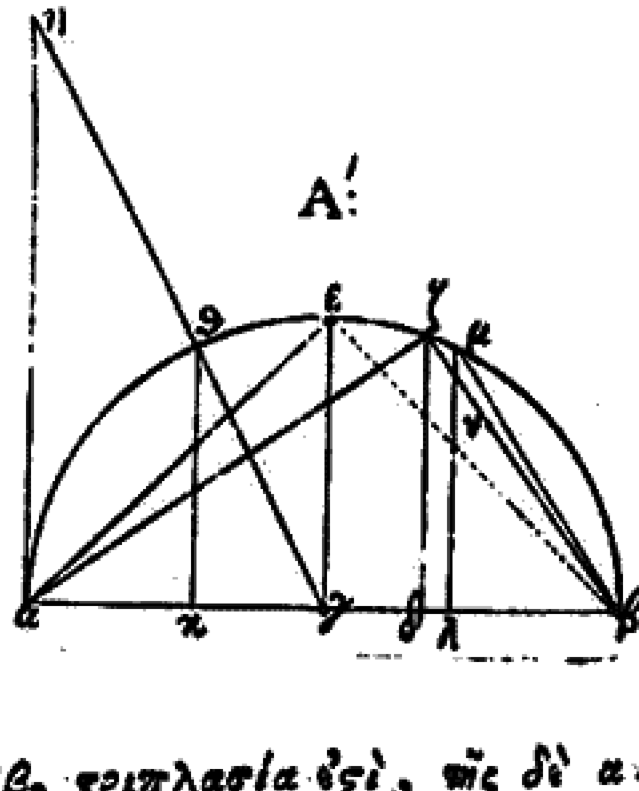
ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Πρότασις Α′.

Διαμέτρου σφαίρας δοθείσης, τὰς τῶν πέντε σωμάτων πλευρὰς εὑρεῖν τῶν τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένων σφαίρᾳ.

Ἔστω διάμετρος σφαίρας ἡ αβ, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ τῶν πέντε σωμάτων τῶν τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένων σφαίρᾳ πλευραί. Τμηθήτω δὴ ἡ δοθεῖσα τῆς σφαίρας διάμετρος αβ, κατὰ τὰ γ, καὶ δ, ὥστε τὴν μὲν αγ, ἴσην εἶναι τῇ γβ, τὴν δὲ αδ, διπλασίαν τῆς δβ, καὶ γραφήτω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ αεβ, ἀπὸ δὲ τῶν γ, καὶ δ, ἀνεστάθωσαν κάθετοι αἱ γε, δζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ, ζβ, εβ. εἶτα ἀνεστάθω καὶ ἀπὸ τοῦ α, κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ αη, ἴση τῇ αβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηγ, τέμνουσα τὸ αεβ, ἡμικύκλιον κατὰ τὸ θ, ἀπὸ δὲ τοῦ θ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ θκ.

Geom. Sol. Lib. a Fig. 1.



Ἐπεὶ δὲ ἡ γκ, μείζων τῆς γδ, ὡς ὀψόμεθα, εἰλήφθω ἡ γλ, ἴση τῇ γκ, καὶ ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ λ, κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ λμ, ἡ δὲ ζβ, τμηθήτω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ ν. Λέγω τὴν μὲν αζ, πλευρὰν εἶναι πυραμίδος τῆς τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένης σφαίρᾳ, τὴν δὲ βζ, κύβου, τὴν δὲ βε, ὀκταέδρου, τὴν δὲ βν, δωδεκαέδρου, καὶ τὴν μβ, εἰκοσαέδρου.

Δείκνυται. Ἐπεὶ ἡ αδ, διπλασία ἐστὶ τῆς δβ, ὡς δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς, παύπως γε ἡ ὅλη αβ, τῆς μὲν δβ, τριπλασία ἐστὶ, τῆς δὲ αδ, ἡμιόλιος. ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν αδ, ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀ-

πὸ

τὸ τῆς αζ, κατὰ τὴν α΄: τοῦ γ΄: τοῦ α΄: μέρους. αἱ γὰρ αβ, αζ, αδ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι κατὰ τὸ β΄: πόρισμα τῆς η΄: τοῦ ϛ΄: τῶν Στοιχείων, ἡ αβ, ἄρα δυνάμει ἡμιόλιός ἐστι τῆς αζ, ἀλλ' ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιόλιός ἐστι τῆς πλευρᾶς τῆς ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πυραμίδος κατὰ τὴν γ΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, καὶ ιγ΄: τοῦ γ΄: τῶν στερεῶν. ἡ δὲ αβ, ὑπετέθη διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ αζ, ἄρα πλευρά ἐστι τῆς πυραμίδος. Αὖθις ἐπεὶ ἡ αδ, διπλάσιός ἐστι τῆς δβ, πάντως γε ἡ ὅλη αβ, τριπλασία ἐστὶ τῆς αὐτῆς δβ. ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν δβ, ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν α΄: τοῦ γ΄: τοῦ α΄: μέρους. αἱ γὰρ αβ, βζ, δβ, ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, ἄρα ἡ αβ, δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς βζ, ἀλλὰ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλάσιός ἐστι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κατὰ τὴν ζ΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, ὑπετέθη δὲ ἡ αβ, διάμετρος τῆς σφαίρας, ἄρα ἡ βζ, πλευρά ἐστι κύβου. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ αβ, διπλασία ἐστὶ τῆς γβ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν γβ, ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εβ, κατὰ τὰ προειρημένα, ἡ αβ, ἄρα δυνάμει διπλάσιός ἐστι τῆς εβ, ἀλλὰ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλάσιός ἐστι τῆς τοῦ ὀκταέδρου κατὰ τὴν η΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, ἔστι δὲ ἡ αβ, διάμετρος σφαίρας κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα ἡ εβ, πλευρά ἐστιν ὀκταέδρου τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ.

Ἐπεὶ δ' ἔτι καὶ ἡ ζβ, πλευρά ἐστι κύβου, ὡς δέδεικται, καὶ τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ ν, ἡ βν, ἄρα πλευρά ἐστι δωδεκαέδρου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιζ΄: τοῦ ιγ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ὅτι δὲ καὶ ἡ βμ, πλευρά ἐστιν εἰκοσαέδρου, οὑτωσὶ δειχθήσεται. Ἐπεὶ ἡ αη, ἴση ἐστὶ τῇ αβ, πάντως γε διπλασία ἐστὶ τῆς αγ, ὥσπερ καὶ ἡ αβ. ἀλλ' ὡς ἡ ηα, πρὸς τὴν αγ, ἔχει ἡ θκ, πρὸς τὴν κγ, ἄρα καὶ ἡ θκ, διπλασία ἐστὶ τῆς κγ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς θκ, τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς κγ, κατὰ τὴν β΄: τοῦ γ΄: τοῦ α΄: μέρους, συναμφότερα δὲ τό, τε ἀπὸ τῆς θκ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς κγ, ταυτὸν δ' ἐστιν εἰπεῖν τὸ ἀπὸ τῆς θγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κγ, τῇ δὲ θγ, ἴση ἐστὶν ἡ γβ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γβ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κγ, ἤτοι τοῦ ἀπὸ τῆς γλ, ἴση γὰρ εἴληπται ἡ γλ, τῇ κγ, ἀλλὰ τῆς μὲν γβ, διπλασία ἐστὶν ἡ αβ, τῆς δὲ γλ, ἡ κλ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἄρα πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κλ. κατὰ δὲ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ΄: τοῦ ιγ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλάσιός ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγράφεται, καὶ ἡ αβ, διάμετρός ἐστι τῆς δοθείσης σφαίρας, ἄρα ἡ κλ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγράφεται. σύγκειται δὲ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τῶν δύο τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγραφομένων κύκλον κατὰ τὸ αὐτὸ πόρ:. δῆλον ἄρα ὅτι ἑκατέρα τῶν ακ, λβ, πλευρά ἐστι δεκαγώνου, ἀλλὰ τῇ κλ, ἴση ἐστὶν ἡ λμ, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αὐτὴ λμ καὶ τῇ θκ, διὰ τὸ ἴσον ἀφίστασθαι τοῦ κέντρου κατὰ τὴν ιδ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχ:, καὶ ἡ θκ, ὁμοίως

ἴση

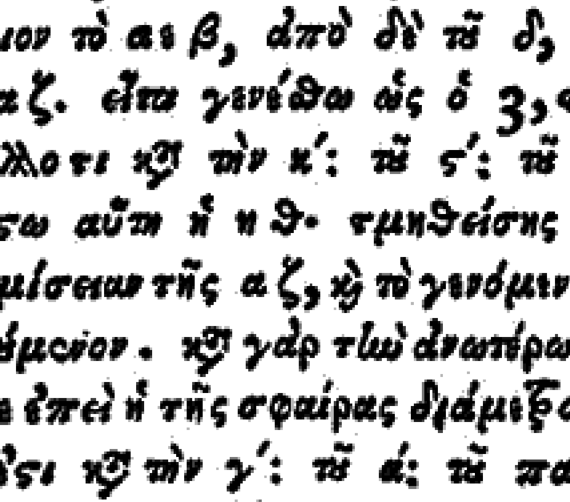
ἴση τῇ κλ, ἑκατέρα γὰρ διπλασία δέδεικται τῆς κγ, ἄρα ἡ λμ, πλευρά ἐστιν ἑξαγώνου, ἡ δὲ λβ, δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγραφομένων κύκλον, δυνάται δὲ ταῦτα ἡ βμ, ἄρα κατὰ τὴν ι: τοῦ εἰρημένου ιγ':, ἡ μβ, πλευρά ἐστι πενταγώνου, ἀλλ' ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρά, ἐστὶ καὶ εἰκοσαέδρου, ἡ μβ, ἄρα εἰκοσαέδρου ἐστὶ πλευρά. Ὅτι δὲ ἡ κγ, μείζων ἐστὶ τῆς γδ, δῆλον. ἡ μὲν γὰρ αβ, διπλασία ἐστὶ τῆς γβ, ἡ δὲ αδ, τῆς δβ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ δβ, λοιπῆς τῆς γδ, διπλασία ἐστὶν, ἡ ὅλη δὲ γβ, τῆς αὐτῆς γδ, τριπλασία ἐστὶν, ἀλλ' ἡ γβ, τῆς κγ, δέδεικται διπλασία, ἡ γβ, ἄρα μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν γδ, ἢ τὴν κγ, ὥστε κατὰ τὴν ι: τοῦ ε: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἡ κγ, μείζων ἐστὶ τῆς γδ. Διαμέτρου ἄρα σφαίρας δοθείσης αἱ τῶν πέντε σωμάτων πλευραὶ εὕρηνται, τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ περιλαμβανομένων.

Πρότασις Β':

Διαμέτρου σφαίρας δοθείσης, τὰς τῶν πέντε σωμάτων ἐπιφανείας εὑρεῖν.

Ἔστω διάμετρος σφαίρας ἡ αβ, καὶ ζητείσθω α: ἡ τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετραέδρου ἐπιφάνεια. Τμηθήτω δὴ ἡ αβ, κατὰ τὸ δ, ὥστε τὴν αδ, διπλασίαν εἶναι τῆς δβ, καὶ γραφέτω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ αεβ, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, σημείου ἀνεστάθω κάθετος ἡ δζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ. εἶτα γενέσθω ὡς ὁ 3, πρὸς τὸν 4, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αζ, τετράγωνον πρὸς ἄλλο τι κατὰ τὴν κ': τοῦ ς': τοῦ παρ:, καὶ εὑρεθήτω ἡ τούτου τετραγώνου ῥίζα, καὶ ἔστω αὕτη ἡ ηθ. τμηθείσης δὲ τῆς αζ, δίχα, πολλαπλασιασθήτω ἡ ηθ, ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς αζ, καὶ τὸ γενόμενον πολλαπλασιασθήτω αὖθις ἐπὶ τὸν 4, καὶ ἕξεις τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὴν ἀνωτέρω ἡ αζ, πλευρά ἐστι τετραέδρου τοῦ ἐν τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ, ὥστε ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος τῆς τοῦ ἐν αὐτῇ τετραέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἡμιόλιός ἐστι κατὰ τὴν γ': τοῦ α: τοῦ παρόντος, ἡ δὲ τῆς σφαίρας διάμετρος δέδοται, δέδοται πάντως καὶ ἡ αζ, καὶ ἡ ταύτης ἡμίσεια. Ὅτι δὲ καὶ ἡ ηθ, δέδοται, δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ, τῇ πιπτούσῃ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἡ αζ, ἐπὶ τῆς αὐτοῦ βάσεως κατὰ τὴν ιε: ἢ ι: τοῦ δ': τοῦ α: μέρους, πάντως γε πολλαπλασιαζομένης τῆς ηθ, ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς αζ, τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῷ ἐμβαδῷ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιβ': τοῦ γ': τοῦ α: μέρους. ἀλλὰ τὸ τετράεδρον

Geom: Sol. lib. 2. Fig. 2.



περιέχεται τέτρασιν ἰσοπλεύροις τριγώνοις, ἄρα τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἡ αζ, εὑρεθέντος, καὶ ἐπὶ τὸν 4, πολλαπλασιασθέντος, γνωσθήσεται ἡ τοῦ τετραέδρου ἐπιφάνεια. ὅπερ ἦν τὸ προταχθέν.

Ζητείσθω β΄: ἡ τοῦ κύβου ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ. Πολλαπλασιασθήτω δὴ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, ἐφ᾽ ἑαυτήν, καὶ τὸ γενόμενον διπλασιασθήτω, καὶ ἕξεις ἐμβαδὸν ἴσον τῇ τοῦ κύβου ἐπιφανείᾳ, τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ. κατὰ γὰρ τὴν α΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος τὸ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας τετράγωνον ὑποδιπλάσιόν ἐστι τῆς τοῦ κύβου ἐπιφανείας τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ.

Ζητείσθω γ΄: ἡ τοῦ ὀκταέδρου ἐπιφάνεια. Εὑρεθήτω δὴ α΄: ἡ τοῦ τετραέδρου ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, καὶ ταύτης δίχα διαιρεθείσης, προστεθήτω τῇ ὅλῃ ἡ ἡμίσεια, καὶ τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὀκταέδρου τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ ὄντος σφαίρᾳ, ἐν ᾗ καὶ τὸ ὀκτάεδρον, κατὰ γὰρ τὴν ια΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος ἡ τοῦ ὀκταέδρου ἐπιφάνεια ἡμιόλιός ἐστι τῆς τοῦ τετραέδρου τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ.

Ζητείσθω δ΄: ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια. Εὑρεθήτω δὴ ἡ αὐτοῦ πλευρὰ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐφ᾽ ἑαυτήν, καὶ τοῦ γενομένου τετραγώνου ἀφῃρήσθω τὸ δ΄: τοῦ δ᾽ ἐναπολειφθέντος εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ αὕτη πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς εὑρεθείσης πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου, τὸ δὲ γενόμενον πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸν 20, καὶ γενήσεται ἐμβαδὸν ἴσον τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ, τοῦ ἐν τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. ἐπεὶ γὰρ τὸ εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιέχεται κατὰ τὸν κη΄: ὅρον τοῦ ια΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ δὲ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρὰ δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς ἀπὸ μιᾶς τῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον πλευρὰν καθέτου κατὰ τὴν ι΄: τοῦ δ΄: τοῦ α΄: μέρους, πάντως γε ἀφαιρουμένου τοῦ δ΄: μέρους ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς εὑρεθείσης τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρᾶς, καὶ τοῦ ἐναπολειφθέντος τῆς τετραγώνου εὑρεθείσης ῥίζης, εὑρεθήσεται ἡ κάθετος ἡ ἀπὸ μιᾶς τῶν γωνιῶν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου, ταύτης δὲ ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου πολλαπλασιασθείσης τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αὐτοῦ δίδοται τριγώνου. τούτου δὲ ἐπὶ τὸν εἴκοσι πολλαπλασιαζομένου, δίδοται ἅπασα ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια.

Ζητείσθω ε΄: ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια τοῦ τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένου σφαίρᾳ, ᾗ καὶ τὰ λοιπά. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἥτε τοῦ κύβου πλευρά, καὶ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια. εἶτα γενέσθω ὡς ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ κύβου, οὕτως ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ δωδεκαέδρου. Δείκνυται διὰ τῆς δ΄: τοῦ ιδ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

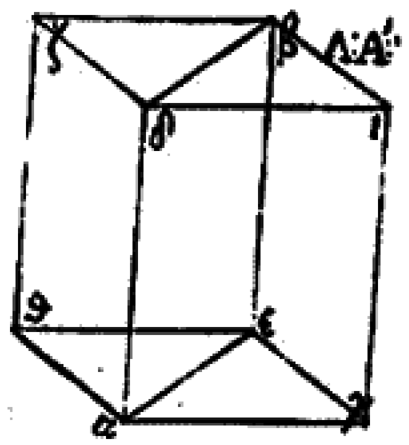
Λῦμ.

Λῆμμα Α'.

Τριγωνοειδοῦς δοθέντος πρίσματος τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

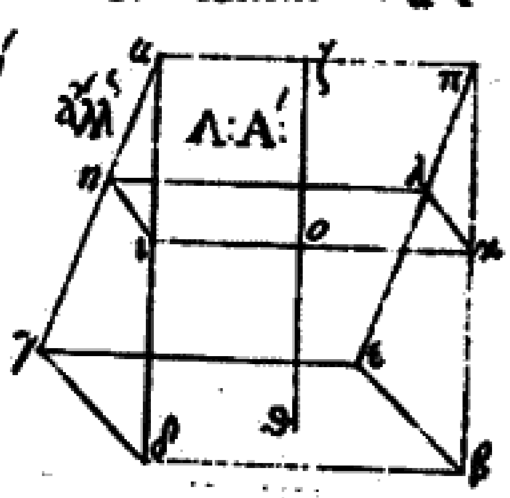
Ἔστω τριγωνοειδὲς πρίσμα τὸ αγεβδ, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου στερεόν. Εὑρεθήτω δὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αγε, τριγώνου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς α: τοῦ η: τοῦ α: τμήμ: καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὴν εβ, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ε, παράλληλος τῇ αγ, ἡ εθ, ἀπὸ δὲ τοῦ α, ἡ αθ, παράλληλος καὶ αὐτὴ τῇ γε, καὶ πληρωθήσεται τὸ αγεθ, παραλληλόγραμμον διπλάσιον ὂν τοῦ αγε, τριγώνου, τούτου δὲ ἐπὶ τὴν εβ, πολλαπλασιαζομένου, συσταθήσεται τὸ αβ, διπλάσιον ὂν καὶ αὐτὸ τοῦ δοθέντος πρίσματος. πᾶν γὰρ παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τινὶ τεμνόμενον κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίων, δίχα τέμνεται κατὰ τὴν κη: τοῦ ια: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥσπερ οὖν τὸ ὅλον αβ, παραλληλεπίπεδον διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ὅλης αγεθ, βάσεως ἐπὶ τὸ εβ, ὕψος συνίσταται, οὕτω δήπουθεν καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αγε, ἡμισείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ αὐτὸ εβ, ὕψος συσταθήσεται. Ὅτι δὲ καὶ τὸ αβ, παραλληλεπίπεδον δίχα τέμνεται, δῆλον. τέμνεται γὰρ τῷ αεβδ, ἐπιπέδῳ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν (αγεθ, διβζ, ἀπεναντίων ἐπιπέδων.

Geom. Sol Lib. 2. Fig: 3.



Ἄλλως. Ἔστω τριγωνοειδὲς πρίσμα τὸ αβ, οὗ βάσις παραλληλόγραμμος ἡ βδγε, κορυφὴ δὲ ἡ απ, εὐθεῖα, κοινὴ συνδρομὴ τοῦ τε αδβπ, καὶ αγεπ, παραλληλογράμμου, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου στερεόν. Πιπτέτω δὴ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς απ, κάθετος ἐπὶ τῆς γβ, βάσεως ἡ ζθ, καὶ τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ ο, εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ γβ, βάσις ἐπὶ τὸ θο, ἥμισυ τοῦ ζθ, ὕψους. ἢ γοῦν τμηθήτω δίχα ἡ γβ, βάσις, καὶ τὸ ἥμισυ ταύτης πολλαπλασιασθήτω ἐφ' ὅλον τὸ ζθ, ὕψος, καὶ τὸ γενόμενον καθ' ἑκάτερον τὸν τρόπον, ἴσον ἔσται τῷ δοθέντι πρίσματι. εἰ γὰρ ἡ γβ, βάσις ἐφ' ὅλον τὸ ζθ, ὕψος πολλαπλασιασθῇ, γενήσεται παραλληλεπίπεδον διπλάσιον τοῦ πρίσματος, ὥστε πολλαπλασιαζομένης τῆς γβ, βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ζθ, ὕψους, ἢ τοῦ ζθ, ὕψους πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς γβ, βάσεως, γενήσεται παραλληλεπίπεδον ἴσον τῷ δο-

Geom: Sol. lib. 2. Fig. 4.



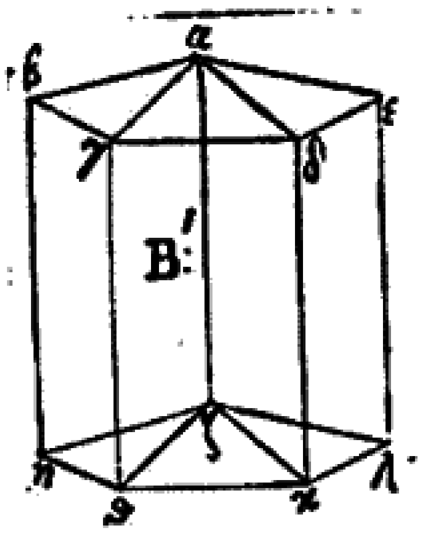
θέντι πρίσματι, Τριγωνοειδοῦς ἄρα πρίσματος δοθέντος τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὕρηται.

Λῆμμα Β':

Πρίσματος οἱουδήποτε δοθέντος, τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔστω πρίσμα τυχὸν τὸ αθκ, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου στερεόν. διαιρείσθω ἑκατέρα τῶν παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν αβγδε, ζηθκλ, εἰς τρίγωνα τὰ αβγ, αγδ, αδε, ζηθ, ζθκ, ζκλ, καὶ εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου τῶν τῆς μιᾶς πλευρᾶς, ὡς εἰπεῖν τῆς ζηθκλ, καὶ συναφθήτωσαν τὰ ζηθ, ζθκ, ζκλ, εὑρεθέντα τρίγωνα εἰς ἕν, κἀκεῖνο πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ δοθέντος πρίσματος, κἄντε ὀρθὸν ᾖ, κἄν τε πλάγιον, καὶ τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῷ δοθέντι πρίσματι. Διῃρημένων γὰρ τῶν αβγδε, ζηθκλ, παραλλήλων πλευρῶν, διαιρεῖται καὶ τὸ δοθὲν πρίσμα εἰς τοσαῦτα τριγωνοειδῆ πρίσματα, εἰς ὅσα καὶ ἑκατέρα τῶν αὐτοῦ πλευρῶν διαιρεῖται τρίγωνα, εὑρεθέντων δὲ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τῆς ζηθκλ, πλευρᾶς, εὑρίσκεται καὶ ὅλη ἡ ζηθκλ, πλευρά. ὥσπερ οὖν ἕκαστον τριγωνοειδὲς πρίσμα συνίσταται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς μιᾶς τῶν παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν ἐπὶ τὸ αὐτοῦ ὕψος κατὰ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα, οὕτω καὶ τὸ πολυγωνικὸν πρίσμα συνίσταται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς μιᾶς τῶν παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν ἐπὶ τὸ ὕψος. Πρίσματος ἄρα τοῦ αθκ, δοθέντος τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὕρηται.

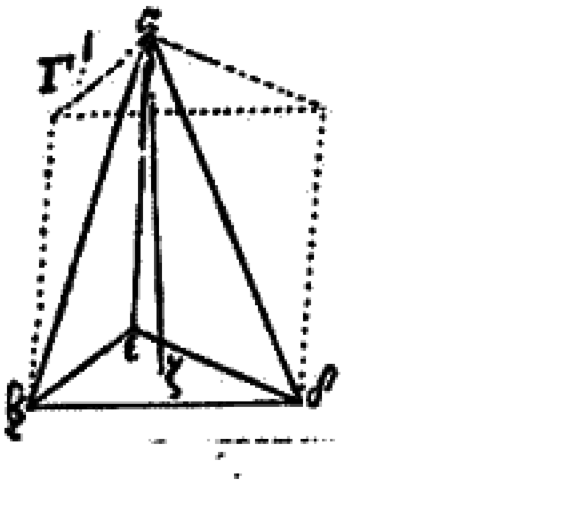
Geom. Sol. Lib. 2. Fig. 1.



Λῆμμα Γ':

Τῆς τυχούσης πυραμίδος τὸ στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω τυχοῦσα πυραμὶς ἡ αβδε, καὶ ζητείσθω τὸ στερεὸν αὐτῆς. Πιπτέτω δὴ κάθετος ἀπὸ τῆς α, κορυφῆς τῆς αὐτῆς πυραμίδος ἐπὶ τῆς βδε, βάσεως ἡ αζ, καὶ τμηθήτω ἡ αὐτὴ αζ, εἰς τρία ἴσα. Εἶτα εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν τῆς βδε, βάσεως, καὶ πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ τὸ γ': μέρος τῆς αζ. ἢ γοῦν διαιρεθήτω ἡ βδε, βάσις εἰς τρία ἴσα, καὶ τὸ γ': αὐτῆς μέρος πολλαπλασιαθήτω ἐφ' ὅλην τὴν αζ, καὶ τὸ γενόμενον καθ' ἑκάτερον τὸν τρόπον ἴσον ἔσται τῷ στερεῷ τῆς δοθείσης πυραμίδος. καὶ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς ζ': τοῦ ιβ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πᾶσα πυραμὶς γ': μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ



τὴν

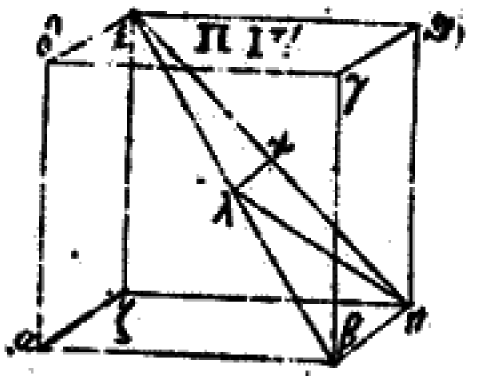
τὴν αὐτὴν βάσιν αὐτῇ ἔχοντος, καὶ ὕψος ἴσον, ἀλλὰ τὸ τοῦ πρίσματος στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, ἄρα ἡ πυραμὶς ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ γ': μέρους τῆς βάσεως αὐτῆς ἐφ' ὅλον τὸ ὕψος, ἢ τῆς ὅλης βάσεως ἐπὶ τὸ γ': τοῦ ὕψους μέρος. Τῆς τυχούσης ἄρα πυραμίδος τὸ στερεὸν εὕρηται.

Πρότασις Γ':

Διαμέτρου σφαίρας δοθείσης τὰ τῶν πέντε σωμάτων στερεὰ εὑρεῖν.

Δοθήτω ἡ ε β, διάμετρος τῆς σφαίρας, καὶ ἔστω α: κύβος ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ τὸ στερεὸν ζητεῖται ὁ α θ. Μεριζθήτω δὴ τὸ τετράγωνον τῆς ε β, δοθείσης διαμέτρου ἐπὶ τὸν 3, ἀριθμὸν, καὶ τοῦ πηλίκου εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσται ῥίζα καὶ τοῦ δοθέντος κύβου, ἴση δηλ: τῇ α β· εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ εὑρεθεῖσα αὕτη κυβικὴ ῥίζα ἐφ' ἑαυτὴν δὶς, καὶ συσταθήσεται ὁ δοθεὶς α θ, κύβος. ἡ γὰρ ε β, δοθεῖσα τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς τοῦ ἐν αὐτῇ κύβου πλευρᾶς κατὰ τὴν ζ': τοῦ ι: τοῦ παρ: μεριζομένου ἄρα τοῦ τετραγώνου τῆς αὐτῆς ε β, ἐπὶ τὸν 3, τὸ πηλίκον πάντως γε ἴσον ἐστὶ τῇ α γ, πλευρᾷ τοῦ α θ, κύβου, τούτου δὲ ἡ τετράγωνος εὑρεθεῖσα ῥίζα, ἔσται ἡ α β, ἥτις ἐστὶ καὶ ῥίζα κυβικὴ τοῦ α θ, κύβου. πολλαπλασιασθείσης δὲ τῆς α β, ἐφ' ἑαυτὴν, γενήσεται τὸ α γ, τετράγωνον, ὃ καὶ πλευρά ἐστι τοῦ αὐτοῦ κύβου. τούτου δὲ αὖθις ἐπὶ τὴν αὐτὴν α β, ἤτοι τὴν α ζ, τὸ ὕψος τοῦ δοθέντος κύβου πολλαπλασιαζομένου, συνίσταται δήπουθεν ὁ α θ, κύβος.

Geom. Sol Lib. 2. Fig.6.



Ἄλλως. Μεριζθήτω τὸ τετράγωνον τῆς κ β, ἡμιδιαμέτρου τῆς δοθείσης σφαίρας ἐπὶ τὸν 3, καὶ τοῦ πηλίκου εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα. εἶτα πολλαπλασιασθήτω τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ε β, δοθείσης διαμέτρου ἐπὶ τὸ γ': μέρος τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, καὶ τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῷ στερεῷ τοῦ δοθέντος α θ, κύβου. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κ, κέντρου τῆς δοθείσης σφαίρας εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐφ' ἑκάστην γωνίαν τοῦ ἐν αὐτῇ κ θ, κύβου, διαιρεθήσεται ὁ αὐτὸς κύβος εἰς πυραμίδας ἓξ ἴσας, ὧν βάσεις μὲν αἱ πλευραὶ τοῦ αὐτοῦ κύβου, ὕψος δὲ τὸ κ, κέντρον, ὥστε ἐὰν ἀπὸ τοῦ κ, κέντρου πέσῃ κάθετος ἐπὶ τῆς α γ, βάσεως ὡς ἡ κ λ, καὶ ἐπὶ τὸ γ': μέρος τῆς αὐτῆς πολλαπλασιασθῇ ὅλη ἡ τοῦ κύβου ἐπιφάνεια, συσταθήσεται πάντως ὁ α θ, δοθεὶς κύβος. πᾶσα γὰρ πυραμὶς συνίσταται διὰ πολλα-

πλα-

πλασιασμοῦ τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ γ': τοῦ ὕψους. τὸ γὰρ στερεὸν τῆς πυραμίδος οὕτως θηρεύεται, ὡς εἴρηται ἐν τῷ γ': λήμ: τῆς παρούσης, καὶ ἐν τῇ στερεομετρίᾳ. Ἐπεὶ δὲ ἡ τῆς σφαίρας ἡμιδιάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς καθέτου τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐν αὐτῇ κύβου πιπτούσης κατὰ τὴν θ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, πάντως γε εὑρεθείσης τῆς τετραγώνου ῥίζης τοῦ γ': μέρους τοῦ τετραγώνου τῆς κβ, ἡμιδιαμέτρου, εὑρίσκεται ἡ κλ, τὸ ὕψος δηλ: τῶν ἓξ πυραμίδων, ἐφ' ἃς ὁ κύβος αθ, διαιρεῖται. ἀλλὰ τὸ τετράγ: τῆς κβ, διαμέτρου δυνάμει ὑποδιπλάσιόν ἐστι τῆς τοῦ αθ, κύβου ἐπιφανείας κατὰ τὴν α': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἐὰν τὸ διπλάσιον τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου ἐπὶ τὸ γ': μέρος τῆς εὑρεθείσης τοῦ τετραγώνου ῥίζης πολλαπλασιασθῇ, ὁ αθ, συσταθήσεται κύβος. Διαμέτρου ἄρα σφαίρας δοθείσης, τὸ στερεὸν τοῦ ἐν αὐτῇ εὕρηται κύβου.

Ἔστω β': ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετράεδρον ἐγγεγραμμένον, καὶ ζητηθήτω τὸ αὐτοῦ στερεόν. Εὑρεθήτω δὴ α': κατὰ τὰ εἰρημένα τὸ στερεὸν τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύβου, καὶ εἰλήφθω τούτου τὸ γ': καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὴν ιβ': τοῦ α': τοῦ παρ: τὸ τοῦ κύβου στερεὸν τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετραέδρου τριπλάσιόν ἐστιν.

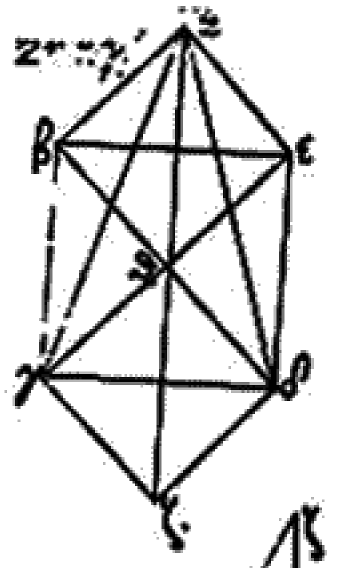
Ἄλλως. Τμηθήτω ἡ τῆς σφαίρας δοθεῖσα διάμετρος εἰς τρία ἴσα, καὶ εἰλήφθωσαν τὰ δύο τρίτα αὐτῆς μέρη· εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ ὅλη ἡμιδιάμετρος ἐφ' ἑαυτήν, καὶ τμηθήτω τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον εἰς τρία. ἀφαιρουμένου δὲ ἀπ' αὐτοῦ ἑνὸς τρίτου, εὑρεθήτω τοῦ λοιποῦ ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ γινέσθω ὡς ὁ 4, πρὸς τὸν 3, οὕτω τὸ τετράγωνον τῆς εὑρεθείσης ταύτης τετραγώνου ῥίζης πρὸς ἄλλο τι, ἐφ' ὃ καὶ πολλαπλασιασθήτω ἡ ἡμίσεια τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, τὸ δὲ γενόμενον αὖθις πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ γ': μέρος τῶν εἰρημένων δύο τρίτων τῆς δοθείσης διαμέτρου, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. πᾶσα γὰρ πυραμὶς κατὰ τὸ λῆμμα τὸ γ': τῆς παρούσης προτάσεως συνίσταται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς οἰκείας βάσεως ἐπὶ τὸ γ': μέρος τοῦ ὕψους. Ὅτι δὲ κἀνταῦθα τοῦτο γίνεται, δῆλον. δοθείσης γὰρ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, καὶ εἰς τρία διαιρεθείσης, λαμβάνεται τὰ δύο αὐτῆς τρίτα μέρη, ὅτι ἐγνωσμένον δεῖ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετραέδρου. πολλαπλασιαζομένης δὲ τῆς δοθείσης διαμέτρου ἐφ' ἑαυτήν, καὶ εὑρισκομένης τῆς τετραγώνου ῥίζης τῶν δύο τρίτων τοῦ ἀπ' αὐτῆς τετραγώνου, γινώσκεται καὶ ἡ τοῦ τετραέδρου πλευρά. κατὰ γὰρ τὴν γ': τοῦ α': τοῦ παρόντος ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιόλιός ἐστι τῆς πλευρᾶς τῆς ἐν αὐτῇ πυραμίδος, γνωσθείσης δὲ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραέδρου, καὶ μεθόδου γενομένης τῶν τριῶν, ὥστε εἶναι ὡς ὁ 4, πρὸς τὸν 3, οὕτω τὸ τετράγωνον τῆς τοῦ τετραέδρου πλευρᾶς πρὸς ἄλλο τι, γινώσκεται καὶ ἡ κάθετος ἡ ἀπὸ μιᾶς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τῆς τοῦ τετραέδρου δηλ: βάσεως, ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον τοῦ αὐτοῦ τριγώνου πίπτουσα πλευρὰν κατὰ τὴν ι': τοῦ δ': τοῦ παρόντος. πολ-

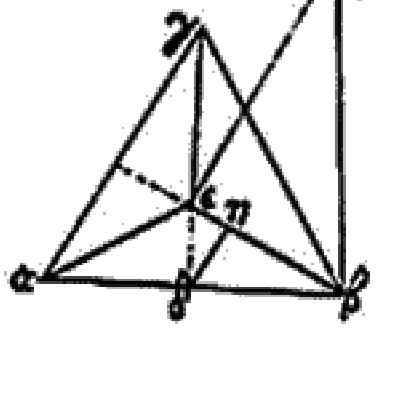
λα-

λαπλασιαζομένης δὲ τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ τετραέδρου πλευρᾶς ἐπὶ τὴν εὑρεθεῖσαν κάθετον, γινώσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς τοῦ τετραέδρου βάσεως κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος, ταύτης δὲ πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ τὸ γ': τοῦ ὕψους τοῦ τετραέδρου, γινώσκεται τὸ στερεὸν τοῦ αὐτοῦ τετραέδρου. ὅπερ ἔδει τὸ ζητούμενον.

Ζητηθήτω γ': τὸ στερεὸν τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ὀκταέδρου, ἧς ἡ διάμετρος δέδοται. Πολλαπλασιασθήτω δὴ τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τῆς δοθείσης διαμέτρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ γ': μέρος τῆς αὐτῆς διαμέτρου, καὶ τὸ γενόμενον, ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἔστω γὰρ ὀκτάεδρον τὸ αβγδεζ, διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας, ἣ τὸ δοθὲν περιλαμβάνεται ὀκτάεδρον, ἡ γε. Ἐπεὶ δὲ τὸ τῆς γε, τετράγ: ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γβ, βε, κατὰ τὴν μζ': τοῦ α: τῶν Στοιχειωτῶν, δῆλον, ὅτι τὸ αὐτὸ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βγ, μόνου, ἤτοι τοῦ βγδε. ἐγνωσμένης δὲ τῆς γε, γινώσκεται καὶ τὸ ταύτης τετράγωνον, τούτου δὲ εἰς δύο ἴσα τεμνομένου, γινώσκεται καὶ τὸ βγδε. ἀλλ' ἐὰν τοῦτο ἐπὶ τὸ γ': τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς σφαίρας πολλαπλασιασθῇ, γενήσεται ἡ αβγδε, ἢ ἡ ζδεβγ, πυραμίς· ἄρα ἐὰν τὸ βγδε, τετράγωνον τὸ ἥμισυ δηλ: τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ γ': μέρος τῆς δοθείσης διαμέτρου πολλαπλασιασθῇ, γενήσεταί τι σῶμα ἴσον ταῖς δυσὶ ταύταις πυραμίσι αβγδε, ζδεβγ, ἤτοι τῷ αβγδεζ, ὀκταέδρῳ.

Geom. Sol. Lib. 2. Fig. 7.





Ζητηθήτω δ': τὸ στερεὸν τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ εἰκοσαέδρου. Εὑρεθήτω δὴ α: ἥτε πλευρὰ καὶ ἐπιφάνεια τοῦ εἰκοσαέδρου κατὰ τὰς ἀνωτέρω, εἶτα ζητηθήτω ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων, ἀποτεμνομένων τε καὶ τεμνουσῶν ἡ τέμνουσα μοίρας 30, καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς δοθείσης ἡμιδιαμέτρου τῆς σφαίρας, τοῦ δὲ ἐναπολειφθέντος εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ ταύτης ληφθήτω τὸ γ': μέρος, καὶ ἐπὶ τοῦτο πολλαπλασιασθήτω ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια, καὶ τὸ γενόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἔστω γὰρ πλευρὰ εἰκοσαέδρου ἡ αβ, καὶ συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ αβγ, οὗ κέντρον τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, βε, γε, καὶ ἀνεστάθω κάθετος ἐπὶ τοῦ αβγ, πρὸς τῷ ε, σημείῳ ἡ εζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βζ, ἴση οὖσα τῇ δοθείσῃ τῆς σφαίρας ἡμιδιαμέτρῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ζε, ὀρθή ἐστι

πρὸς

πρὸς τὸ τοῦ α β γ, τριγώνου ἐπίπεδον, ὀρθὴ πάντως ἐστὶ καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ β ε ζ, γωνία. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ζ β, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ἀπὸ τῶν β ε, ε ζ, τετραγώνοις κατὰ τὴν μζ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Αὖθις ἐπεὶ τὸ α β γ, ἰσόπλευρόν ἐστι, πάντως γε καὶ ἰσογώνιον· ὥστε ἑκάστη τῶν αὐτοῦ γωνιῶν μοιρ: 60: αἱ τρεῖς γὰρ ὁμοῦ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἡ ὑπὸ α β γ, ἄρα γωνία μοιρ: ἐστι ξ':, τέμνεται δὲ δίχα τῇ β ε, εὐθείᾳ, ὡς δείξομεθα, ἄρα ἡ ὑπὸ δ β ε, μοιρ: ἐστι 30. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ γ ε, ἐκβαλλομένη πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἐπὶ τῆς α β, διὰ τὸ δίχα αὐτὴν τέμνειν, δῆλον, ὅτι τοῦ δ β ε, τριγώνου ἡ μὲν β δ, πλευρὰ ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον, ἡ δὲ δ ε, ἁπτομένη, καὶ ἡ β ε, τέμνουσα, εὑρεθήσεται ἄρα ἡ β ε, ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων, ἁπτομένων, καὶ τεμνουσῶν, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς β ζ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν β ε, ε ζ, ὡς δέδεικται, ἄρα ἐὰν τὸ ἀπὸ τῆς β ε, τετράγωνον ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς β ζ, ἐγκαταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ τῆς ε ζ, τετράγωνον. τούτου δὲ τῆς τετραγώνου εὑρεθείσης ῥίζης, γνωσθήσεται ἡ ε ζ. Ἐπεὶ δὲ τὸ εἰκοσάεδρον διαιρεῖται εἰς πυραμίδας ἴσας εἴκοσι, ὧν κοινὴ κορυφὴ τὸ τῆς σφαίρας κέντρον, ἡ ε ζ, δήπουθεν ὕψος κοινόν ἐστι τῶν αὐτῶν πυραμίδων, ἀλλ' ἑκάστης πυραμίδος τὸ στερεὸν εὑρίσκεται, ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς ἐπὶ τὸ γ': μέρος τοῦ ὕψους πολλαπλασιασθῇ κατὰ τὸ εἰρημένον γ': λῆμμα τῆς παρούσης, πολλαπλασιαζομένης ἄρα ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπὶ τὸ γ': τῆς ε ζ, εὑρεθήσεται τὸ αὐτοῦ στερεόν.

Ὅτι δὲ ἡ α γ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς β ε, ἐκβαλλομένης, ὥσπερ καὶ ἡ α β, ὑπὸ τῆς γ ε, δῆλον. τὸ γὰρ ε, κέντρον τοῦ α β γ, ἰσοπλεύρου τριγώνου, κέντρον ἐστὶ καὶ τοῦ περὶ αὐτὸ κύκλου. ὥστε αἱ ε α, ε β, ε γ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ ἴσαι ἔτι καὶ αἱ α β, β γ, γ α, ἄρα τὰ α ε β, β ε γ, γ ε α, τρίγωνα ἰσόπλευρά ἐστι καὶ ἰσογώνια, ἀλλὰ καὶ ἰσοσκελῆ, αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ε α β, ε β α, ε β γ, ε γ β, ε γ α, ε α γ, ἴσαι εἰσίν. ἐξαγομένων ἄρα τῶν α ε, β ε, γ ε, διαιρεθήσονται αἱ α β, β γ, γ α, δίχα. καὶ ἐπεὶ ἑκάστη τῶν α ε, β ε, διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ ἡ α β, πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς γ ε, ἐκβαλλομένης, ὥσπερ καὶ αἱ λοιπαὶ δύο ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο.

Ἰστέον δ' ὅτι ἡ β ζ, ἡμιδιάμετρος ὀφείλει εἶναι δεδομένη κατὰ τὴν τῶν ἡμιτόνων, ἁπτομένων καὶ τεμνουσῶν διαίρεσιν, τουτέστι περιεκτικὴν εἶναι τοσούτων μορίων, οἵων αἱ β ε, ἀντὶ ἡμιδιαμέτρου λαμβανομένη. ἔσται γὰρ οὕτως ἡ μὲν α β, ἁπτομένη τῆς ὑπὸ ε β ζ, γωνίας, ἡ δὲ β ζ, τέμνουσα.

Ζητείσθω ς': τὸ τοῦ δωδεκαέδρου στερεόν. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου στερεόν. εἶτα γενέσθω ὡς ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ

κύ-

κύβου, ὅπω τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου στερεὸν πρὸς ἄλλο τι. καὶ τοῦτο ἔσται τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου κατὰ τὴν δ': τοῦ ιδ': τοῦ Στοιχειωτοῦ.

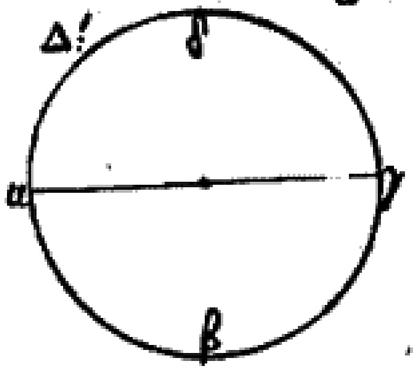
Πρότασις Δ':

Διαμέτρου σφαίρας δοθείσης τὸ στερεὸν αὐτῆς εὑρεῖν.

Ε'στω τυχοῦσα σφαῖρα ἡ αβγδ, ἧς διάμετρος ἡ αγ, δεδομένη, καὶ ζητηθήτω τὸ ταύτης στερεόν. Εὑρεθήτω διὰ α': τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου αὐτῆς κύκλου, καὶ πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ τὴν διάμετρον τῆς αὐτῆς σφαίρας, τοῦ δὲ γενομένου ἀφῃρήσθω τὸ ἐν τρίτον, καὶ τὸ ἐναπολειπόμενον ἴσον ἔσται τῷ τῆς δοθείσης σφαίρας στερεῷ. τὸ γὰρ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου ἐπὶ τὴν αὐτῆς διάμετρον ἴσον ἐστὶ τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὴν σφαῖραν κυλίνδρῳ, ὁ δὲ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένος κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας κατὰ τὴν μα: τοῦ α: τοῦ παρόντος, ἄρα ἐὰν τὸ γ': ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, ἐναπολείπεται τὸ τῆς σφαίρας στερεόν.

Geom.Sol. Lib. 2. Fig.5.

Δ'



Α'λλως. Πολλαπλασιαθήτω ὁ μέγιστος τῆς δοθείσης σφαίρας κύκλος ἐπὶ τὰ δύο τρίτα τῆς διαμέτρου αὐτῆς, καὶ τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῷ τῆς σφαίρας στερεῷ. κατὰ γὰρ τὸ β': πόρισμα τῆς αὐτῆς προτάσεως, ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις ὁ μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος, καὶ ὕψος δύο τρίτα τῆς διαμέτρου τῆς αὐτῆς σφαίρας.

Α'λλως. Τετραπλασιασθήτω ὁ μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος, καὶ τὸ γενόμενον πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ γ': τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτῆς σφαίρας, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὸ α': πόρισμα τῆς ῥηθείσης προτάσεως ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν κύκλος τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου, ὕψος δὲ ἡ τῆς σφαίρας ἡμιδιάμετρος, τὸ δὲ τοῦ κώνου στερεὸν εὑρίσκεται, ἐὰν ἡ αὐτοῦ βάσις ἐπὶ τὸ γ': μέρος πολλαπλασιασθῇ τοῦ ἰδίου ὕψους, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς εἰρήσεται.

Τέλος τοῦ δευτέρου τῶν στερεῶν τῆς Γεωμετρίας.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΠΕΡΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

ΟΡΟΙ.

Α΄: Πρᾶξις Γεωμετρικὴ, ἐστὶ μέθοδος ἀποδεικτικὴ πρὸς εὕρεσιν μήκους, πλάτους, καὶ βάθους δι᾽ ὀργάνων Γεωμετρικῶν συμβάλλουσα.

Β΄: Τὰ τῆς Γεωμετρικῆς πράξεως μέρη ἕξ εἰσι, Μηκομετρία, Ἐπιπεδομετρία, Γεωδαισία, Εἰκονογραφία, Στερεομετρία, καὶ Κοιλομετρία.

Γ΄: Μηκομετρία ἐστὶν εὕρεσις τοῦ δοθέντος ὡρισμένου μήκους, ἢ γεωμετρικῷ τινι ἁπλῷ μέτρῳ μετρητὸν γίνεται. ταύτης δὲ δύο τὰ μέρη Μηκομετρία, καὶ ὑψομετρία, ἐν ᾗ καὶ ἡ τοῦ βάθους διαμέτρησις.

Δ΄: Ἐπιπεδομετρία ἐστὶν εὕρεσις ἐμβαδῶν τῶν ἐπιπέδων σχημάτων, ἢ καὶ ταῦτα Γεωμετρικῷ τινι συνθέτῳ μέτρῳ μετρητὰ γίνεται.

Ε΄: Γεωδαισία ἐστὶ διανομὴ ἐπιπέδων κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.

ς΄: Εἰκονογραφία, καταγραφή ἐστιν ἐπὶ χάρτου, ἢ ἄλλου τινὸς εὐκατεργάστου σώματος, τῶν ἐπιπέδων. ταύτης δὲ δύο τὰ μέρη, Ἰχνογραφία, καὶ Χωρογραφία. Χωρογραφία δὲ, ἥτις καὶ Τοπογραφία λέγεται, Καταγραφή ἐστι χωρίων ἐν διαφόροις τόποις κειμένων, λειμῶνος φέρ᾽ εἰπεῖν, κήπου, ἄστεος, καὶ ἄλλων ὁμοίων.

Ζ΄: Στερεομετρία ἐστὶν εὕρεσις τῶν στερεῶν σωμάτων, ἢ γεωμετρικῷ τινὶ καταλλήλῳ μέτρῳ μετρητὰ γίνεται.

Η΄: Κοιλομετρία ἐστὶν εὕρεσις τῆς κοιλότητος τῶν καμπυλοειδῶν, καὶ καμπυλεπιπέδων στερεῶν σωμάτων, ἢ χωρητικά εἰσιν ὑγρῶν, καὶ ἄλλων τινῶν σωμάτων.

Θ΄: Μέτρον Γεωμετρικὸν ἐστὶ συνεχὴς ποσότης ὡρισμένη, ᾗτινι γραμμαὶ, ἐπιφάνειαι καὶ σώματα καταμετρεῖται. ἢ μέγεθος ὡρισμένον, δι᾽ οὗ ἐγνωσμένου, τὸ ἄγνωστον θηρεύεται.

Ι΄: Τὰ Γεωμετρικὰ μέτρα πολλά εἰσι καὶ διάφορα ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος ἐπὶ τὸ

μεῖ-

μεῖζον χωροῦντα, ἐν χρήσει δὲ μᾶλλον ταῦτα, Δάκτυλος, Παλαιστὴς, πούς, Βῆμα, Στάδιον, Μίλιον, καὶ Λεύκη ἢ Λέγα. παρὰ ταῦτα δέ εἰσιν, ἡ Οὐγγία, ἡ Διχὰς, ἡ Σπιθαμὴ, ὁ Πῆχυς, ἡ Ὀργυιὰ, ὁ Κάλαμος καὶ ἄλλα.

ΙΑ': Δάκτυλος ἐστὶ τὸ ἐκ τεσσάρων κόκκων κριθῆς συγκείμενον, κατὰ πλάτος παρατιθεμένων.

ΙΒ': Παλαιστὴς δὲ τὸ ἐκ τεσσάρων μὲν Δακτύλων συγκείμενον, κόκκων δὲ κριθῆς ἑκκαίδεκα.

ΙΓ': Πούς δὲ τὸ ἐκ τεσσάρων μὲν παλαιστῶν, ἑκκαίδεκα δὲ δακτύλων συγκείμενον.

ΙΔ': Βῆμα δὲ τὸ ἐκ ποδῶν μὲν πέντε συγκείμενον, παλαιστῶν δὲ εἴκοσι, καὶ δακτύλων ὀγδοήκοντα.

ΙΕ': Στάδιον δὲ τὸ ἐκ βημάτων μὲν πέντε καὶ εἴκοσι πρὸς τοῖς ἑκατὸν συγκείμενον, ποδῶν δὲ πέντε καὶ εἴκοσι πρὸς τοῖς ἑξακοσίοις, παλαιστῶν δὲ πεντακοσίων καὶ δύο χιλιάδων, καὶ δακτύλων δέκα χιλιάδων.

ΙϚ': Μίλιον δὲ τὸ ὀκτὼ μὲν περιέχον στάδια, διὸ καὶ ὀκτωστάδιον ἤκουσε, βήματα δὲ χίλια, πόδας δὲ πεντακοσίους, παλαιστὰς δὲ χιλιάδας εἴκοσι, καὶ δακτύλους χιλιάδας ὀγδοήκοντα.

ΙΖ': Λεύκη δὲ, ἢ καὶ Λέγα λέγεται, τὸ περιέχον μίλια μὲν τέσσαρα, στάδια δὲ δύο καὶ τριάκοντα, βήματα δὲ χιλιάδας τέσσαρας. πόδας δὲ χιλιάδας εἴκοσι, παλαιστὰς δὲ χιλιάδας ὀγδοήκοντα, καὶ δακτύλους χιλιάδας εἴκοσι πρὸς τοῖς τριακοσίοις. κατ' ἄλλους δὲ ἡ μὲν κοινὴ Λεύκη περιέχει μίλια τρία, ἡ δὲ Βιλγικὴ δύο.

ΙΗ': Οὐγγία ἐστὶ τὸ περιέχον δακτύλους τρεῖς.

ΙΘ': Διχὰς δὲ τὸ περιέχον παλαιστὰς μὲν τρεῖς, δακτύλους δὲ δώδεκα.

Κ': Σπιθαμὴ δὲ τὸ περιέχον παλαιστὰς μὲν τρεῖς, δακτύλους δὲ δώδεκα.

ΚΑ': Πῆχυς τὸ περιέχον πόδα μὲν ἕνα μετὰ ἡμίσεως, παλαιστὰς δὲ ἕξ, καὶ δακτύλους τέσσαρας καὶ εἴκοσι.

ΚΒ': Ὀργυιὰ δὲ τὸ περιέχον πόδας μὲν ἕξ, παλαιστὰς δὲ τέσσαρας καὶ εἴκοσι, καὶ δακτύλους ἕξ καὶ ἐνενήκοντα.

ΚΓ': Κάλαμος δὲ τὸ περιέχον πόδας μὲν δέκα, παλαιστὰς δὲ τεσσαράκοντα καὶ δακτύλους ἑξήκοντα πρὸς τοῖς ἑκατόν.

ΚΔ': Τὰ Γεωμετρικὰ μέτρα, ἢ ἁπλᾶ εἰσιν, ἢ μικτά.

ΚΕ': Ἁπλᾶ μέν εἰσι τὰ κατὰ μῆκος μόνον θεωρούμενα, καὶ οἷς μόνα τὰ μήκη καταμετροῦνται.

ΚϚ': Μικτὰ δὲ τὰ κατά τε μῆκος καὶ πλάτος θεωρούμενα, οἷά εἰσι τὰ Τετράγωνα, οἷς αἱ ἐπιφάνειαι καταμετροῦνται. καὶ τὰ κατὰ τὰς τρεῖς διαστάσεις λαμβανόμενα, οἷά εἰσιν οἱ Κύβοι, δι' ὧν τὰ στερεὰ γινώσκεται.

προσαγορεύεται δὲ τά τε ἁπλᾶ καὶ μικτὰ τοῖς αὐτοῖς ὀνόμασι κατὰ τὸ ὡρισμένον μέτρον. Πούς γὰρ καὶ τὸ κατὰ μῆκος θεωρούμενον λέγεται, ἡνίκα τὸ τοῦ ποδὸς φέρει μέγεθος. Πούς δ' ἔτι καὶ τὸ κατὰ τὰς δύο, ἢ καὶ τὰς τρεῖς λαμβανόμενον διαστάσεις, πλὴν ἐκεῖνο μὲν ἁπλῶς, ταῦτα δὲ μετὰ προσθήκης. οἷον Πούς τετράγωνος, ἢ Πούς κυβικός. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

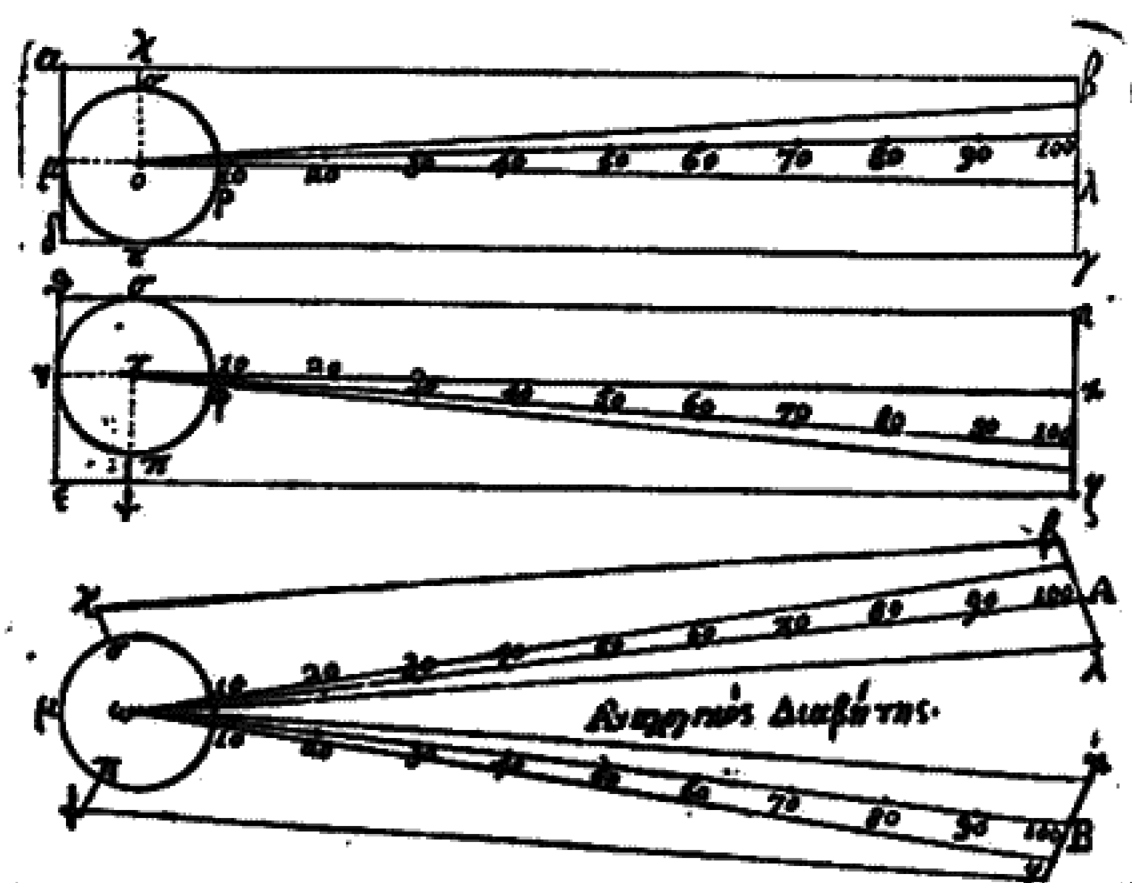
ΚΖ': Ὄργανον Γεωμετρικὸν ἐστὶ διάγραμμα ἐπί τινος στερεοῦ σώματος, ξύλου φημὶ, ὀρειχάλκου, ἢ ἄλλης τινὸς ὕλης εὐκατεργάστου, κατά τινα ἀναλογίαν εὐφυῶς κατεσκευασμένον, ᾧ τινι οἱ τῶν Γεωμετρῶν παῖδες τὰς διαστάσεις, τὴν αὐτῶν ποσότητα γεωμετρικῷ τινι παρισταμένην μέτρῳ ἀναλόγως τοῖς ἐν τῷ ὀργάνῳ διδομένοις μέρεσι θηρεύονται.

ΚΗ': Τὰ Γεωμετρικὰ ὄργανα πολυειδῆ τέ εἰσι καὶ δυσχερῆ τὴν αὐτῶν κατασκευὴν ἔχουσιν, εὐχρηστότερα δὲ ταῦτα, ὁ Ἀναλογικὸς Διαβήτης, ὃς καὶ ὄργανον τῶν μερῶν λέγεται, ἡ Κλίμαξ, Τὸ Τεταρτημόριον τῶν ἀναλογιῶν, τὸ Ἡμικύκλιον, ὁ Γνώμων, ὁ Γεωμετρικὸς Σταυρὸς, ἡ Μαγνητικὴ Πυξὶς, τὸ Γεωμετρικὸν Τετράγωνον, καὶ ἄλλα. γνωσθήσεται δ' ἕκαστον ὁποῖον μέν ἐστιν ἐν τῇ ἑρμηνείᾳ τῆς αὐτοῦ κατασκευῆς, τίσι δὲ χρησιμεύει, ἐν τῇ τῆς χρήσεως διδασκαλίᾳ.

Πρότασις Α':

Τοῦ μήκους δοθέντος στερεοῦ τινος σώματος, Ἀναλογικὸν κατασκευάσαι Διαβήτην.

Geom. Pr. Lib. 3. Fig. 1.



Θαυμασιώτατόν ἐστι τὸ ὄργανον τοῦτο, καὶ πολλοῖς ἐς τὰ μάλιστα χρησιμεῦον, διὸ καὶ ἡ κατασκευὴ αὐτοῦ δυσχερεστάτη τε ἅμα, καὶ πολυειδὴς, καὶ ἢν Θεὸς διδῷ ἐν τῇ ἑρμηνείᾳ τῆς περὶ αὐτοῦ καθ' αὑτὸ πραγματείας ἀκριβέστερον τὰ πρὸς κατασκευὴν αὐτοῦ καὶ χρῆσιν ἀνήκοντα ῥηθήσεται, ἐνταῦθα δὲ μόνον καθὸ πρὸς Γεωμετρικὰς συμβάλλεται πράξεις, ἢ περὶ τῆς

αὐτοῦ

αὐτοῦ κατασκευῆς, ἔτι δὲ καὶ χρήσεως γενήσεται ἑρμηνεία. Παρασκευασθήτωσαν δὲ ἐξ ὀρειχάλκου, ἢ ξύλου, ἢ ἄλλης τινὸς ὕλης στερεᾶς καὶ εὐκατεργάστου δύο κανόνες ἐπιμήκεις, ἴσοι τε καὶ ἰσοπαχεῖς, κατὰ τὸ δοθὲν μῆκος, σχῆμα φέροντες ἑκάτερος παραλληλογράμμου ἑτερομήκους, οἷοι οἱ α β γ δ, ε ζ η θ· εἶτα ληφθήτωσαν τὰ β λ, ζ κ, διαστήματι ἴσα, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ τοῦ ὀργάνου πλάτος. διὸ ἔξεστί σοι ὅσον περ αὖ σοι ἀρεστὸν, τοσοῦτον ποιῆσαι. καὶ διὰ μὲν τοῦ λ, παραλλήλως τῇ α β, ἤχθω ἡ λ μ, διὰ δὲ τοῦ κ, παραλλήλως τῇ ε ζ, ἤχθω ἡ κ ν· καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ α β γ δ, κανόνος κέντρῳ μὲν τῷ ο, διαστήματι δὲ τῷ ο μ, γραφήτω κύκλος ὁ μ π ρ σ, ἐπὶ δὲ τοῦ ε ζ η θ, κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ τ ν, ἴσῳ τῷ ο μ, γραφήτω κύκλος ὁ ν σ φ π· καὶ διὰ μὲν τοῦ ο, ἤχθω παράλληλος τῇ α μ, ἡ ο χ, διὰ δὲ τοῦ τ, παράλληλος τῇ ν ε, ἡ τ ψ. τούτων κατεσκευασμένων, ἀπὸ μὲν τοῦ α β γ δ, κανόνος ἀφαιρεθήτωσαν ἀκριβῶς τὰ α μ σ χ, μ δ π, π ρ λ γ, μέρη, καὶ ἀποβαλλέσθωσαν δίκην ἀχρήστων. Ἐναπολειφθήτω δὲ μόνον τὸ χ σ μ π ρ λ β, σχῆμα, ἀπὸ δὲ τοῦ ε ζ η θ, ἀφαιρεθήτωσαν ὁμοίως τὰ ε ν π ψ, ν θ σ, σ φ κ η, καὶ ἐναπολειφθήτω μόνον τὸ ψ π ν φ σ κ ζ. εἶτα συντεθήτωσαν ταῦτα ἀλλήλοις ἥλῳ τινὶ στρογγύλῳ, ὥστε περὶ αὐτὸν ὁμαλῶς ὡς περὶ ἴδιον ἄμφω συγκινεῖσθαι ἄξονα, ἐκτεινόμενα καὶ συστελλόμενα, ὡς ἂν ἡ χρεία ἀπαιτῇ. Δεῖ δὲ εὐφυῶς οὕτω, καὶ ἐπιδεξίως κατασκευάζεσθαι, ὥστε τὸν κύκλον τοῦ ἑτέρου μὲν τῶν δύο τούτων μερῶν τοῦ ὀργάνου, δὸς εἰπεῖν τοῦ χ σ μ π ρ λ β, διπλοῦν εἶναι, κατὰ μέσον δηλ: τῆς αὐτοῦ σχιζόμενον παχύτητος, τοῦ δὲ ἑτέρου μονομερῆ ἑκατέρωθεν ἐπίσης ἐξεσμένον καὶ κατὰ τὴν αὐτοῦ ἐλαττούμενον παχύτητα, ἵνα ἐν τῇ διὰ τοῦ ἥλου συναφῇ τὸν τοῦ μονομεροῦς κύκλου εἰσβαλλόμενον ἐν τῷ τοῦ διμεροῦς, πάντη ἐφαρμόττεσθαι, καὶ ὡς οὕτως εἰπεῖν ἕνα ἀποτελεῖσθαι κύκλον. Κἀπειδάν τις χρεία τῷ ὀργάνῳ ἀντὶ κανόνος χρῆσθαι, δύνασθαι οὕτω τὰ κ, καὶ λ, πόρρω ἀλλήλων ἀφίστασθαι, ὥστε τὰς σ χ, καὶ π ψ, γραμμὰς ἀλλήλαις συμπίπτειν, καὶ τὴν μὲν χ β, ἐπ' εὐθείας εἶναι, ἀκριβέστατα τῇ ψ ζ, τὴν δὲ μ λ, τῇ ν κ συμπιπτόντων δηλ: ἀλλήλοις τῶν λ κ, σημείων, συμπίπτειν ἀλλήλοις καὶ τὰς μ λ, ν κ, ὥστε μίαν ἀποτελεῖν εὐθεῖαν, κατὰ μέσον δὲ τοῦ ἥλου, τοῦ συνδέοντος τὰ τοῦ ὀργάνου μέρη ὀφείλει εἶναι τὸ κέντρον, ὡς τὸ ω, σημεῖον, ἀφ' οὗ ἐξαχθήτωσαν ἐν ταῖς ἐπιφανείαις τῶν τοῦ ὀργάνου μερῶν δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ὡς αἱ ω Α, ω Β, ἐξίσου ἀφιστάμεναι, ἡ μὲν τοῦ λ, ἡ δὲ τοῦ κ, καὶ διαιρεθήτω ἑκατέρα εἰς ὅσα βούλει μέρη ἴσα ἀλλήλοις, φέρ' εἰπεῖν ἑκατὸν, ἢ διακόσια ἢ καὶ πλείω. Καὶ τοιαύτη μὲν ἡ τοῦ ὀργάνου τούτου κατασκευὴ, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος. Ἡ χρῆσις δὲ αὐτοῦ ἐν τοῖς ἑξῆς δηλωθήσεται. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῶν τριῶν σημείων Α, Θ, ω, πηγμάτια, εἴτουν διόπτραι στηριχθῶσι, πολυχρηστότερόν σοι ἔσται τὸ ὄργανον.

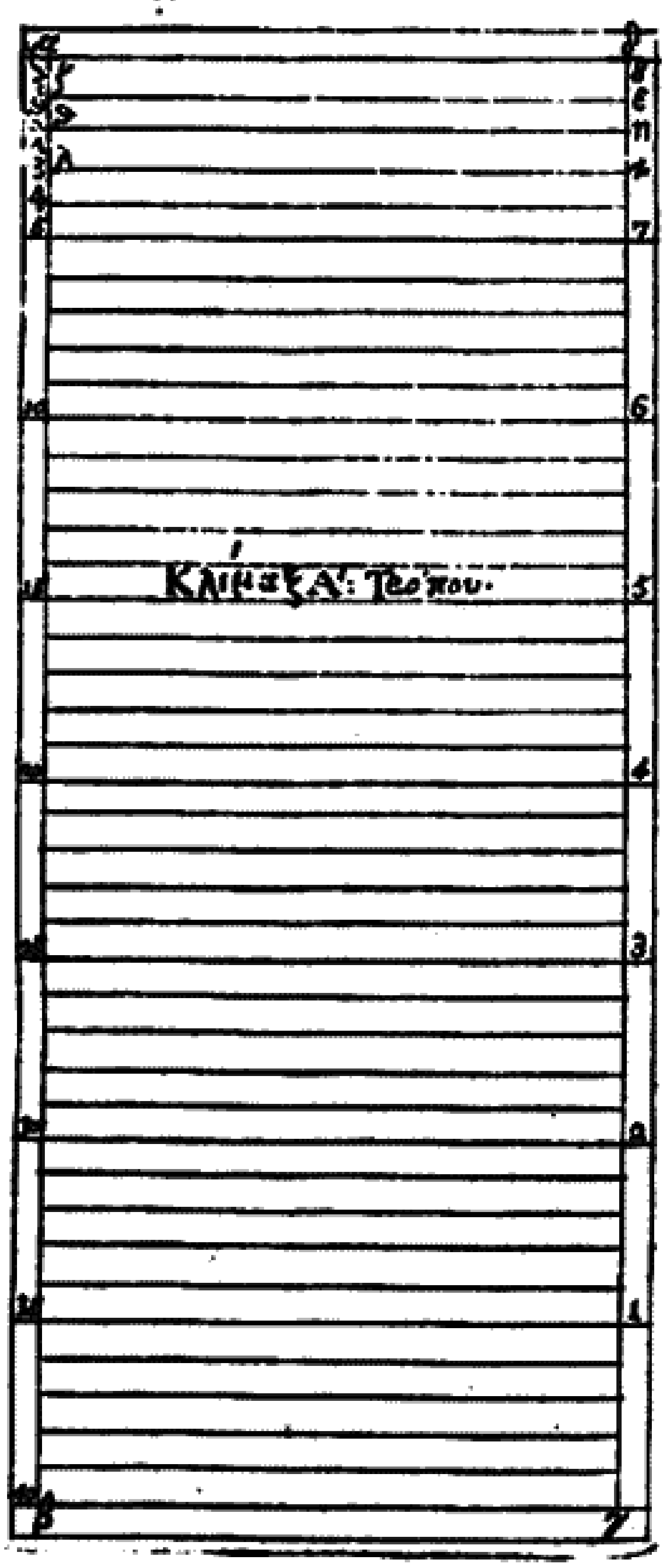
Πρό-

Πρότασις Β':

Μήκους καὶ πλάτους δοθέντος, Κλίμακα κατασκευάσαι.

Α': Τρόπος. Ἔστω μῆκος ἡ αβ, γραμμὴ, πλάτος δὲ ἡ αδ, καὶ ζητείσθω κατασκευασθῆναι ὄργανον Γεωμετρικὸν, ὃ καλεῖται Κλίμαξ. Ἐπί τινος ποίας σανίδος εὖ πάνυ ἐξειργασμένης, ὥστε τὴν αὐτῆς ἐπιφάνειαν ἀκριβῶς ἐπίπεδον εἶναι· ἢ γοῦν ἐπὶ πετάλου τινὸς ὁμοίως παρεσκευασμένου ἐξ ὀρειχάλκου ἢ ἄλλης τινὸς ὕλης στερεᾶς, γραφήτω ἡ αβ, εὐθεῖα ἴση τῷ δοθέντι μήκει, πρὸς δὲ τῷ α, αὐτῆς σημείῳ συσταθήτω κάθετος ἡ αδ, ἴση τῷ δοθέντι πλάτει, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ αγ, παραλληλόγραμμον. ὅσῳ δ' αὖ μᾶλλον ἐπιμηκέστεραι ὦσιν αἱ αβ, δγ, εὐθεῖαι, καὶ ὅσῳ μᾶλλον ἀλλήλων ἀφίστανται, τοσούτῳ καὶ τὸ ἔργανον εὐχρηστότερόν σοι ἔσται. Διαιρεθείσης δὲ ἑκατέρας τῶν αβ, δγ, εἰς ἴσα μέρη μοναδικὰ ἢ δεκαδικὰ, δὸς εἰπεῖν δέκα, ἢ εἴκοσι, ἢ τριάκοντα, ἢ ὅσα αὖ σοι ἀρεστὸν, ἀχθήτωσαν διὰ τῶν καταλλήλων σημείων τῶν τομῶν εὐθεῖαι παράλληλοι, ὡς εζ, ηθ, κλ, καὶ λοιπαὶ, καὶ κατασκευασθήσεταί σοι ὄργανον τὸ καλούμενον Παραλληλόγραμμον, ἢ Κλίμαξ, πρὸς διαίρεσιν εὐθειῶν, ὡς ὀψόμεθα, συμβάλλουσα τὴν εἰς ἴσα γενομένην. ἄλλως.

Geom. Pr. Lib. 3. Fig. 2.

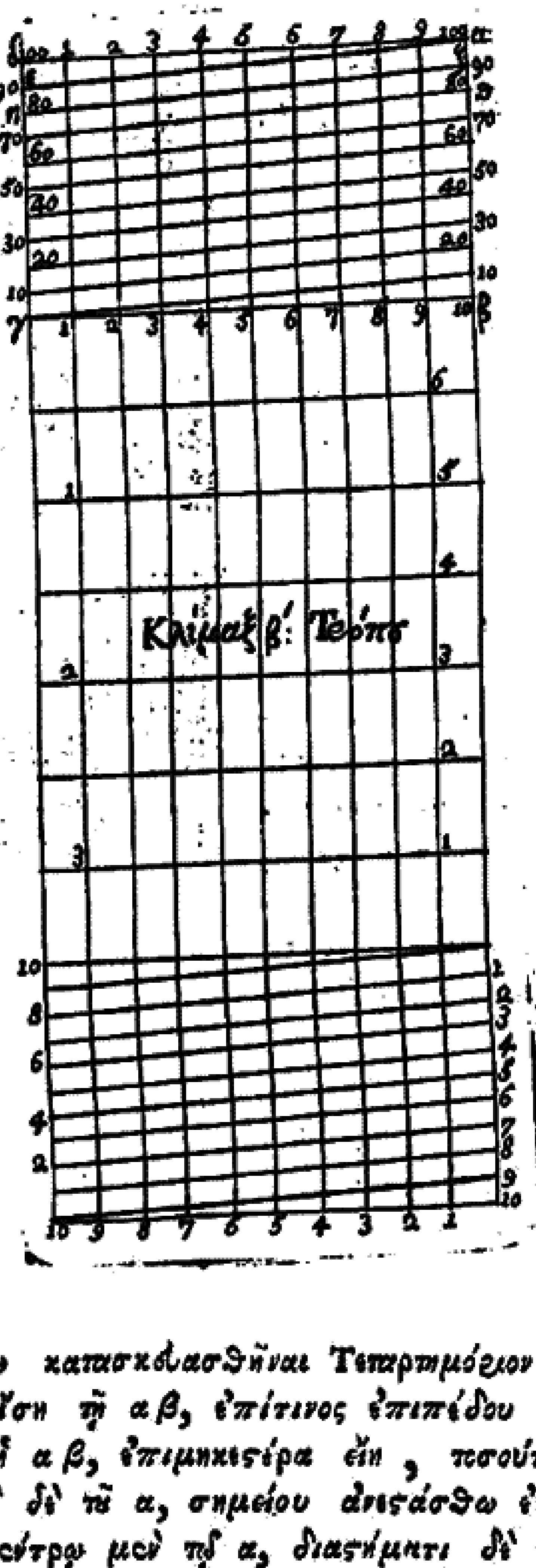


Β': τρόπος. Γραφήτωσαν δὴ ὡς προειρημένως αἱ αβ, δγ, παράλληλοι εὐθεῖαι, καὶ διαιρεθήτωσαν εἰς ἴσα μέρη δεκαδικὰ, φέρ' εἰπεῖν δέκα, ὥστε ἑκατέραν εἶναι δυνάμει διῃρημένην εἰς

μέρη

μέρη ἑκατὸν, ἢ γοῦν μοναδικὰ, ὥστε καὶ ἐνεργείᾳ εἰς δέκα εἶναι ἄμφω διῃρημένας μέρη. Εἶτα ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, β γ, εὐθεῖαι συνδέουσαι τὰς α β, γ δ, καὶ συμπληροῦσαι τὸ α γ, παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον· διαιρεθεισῶν δὲ ὁμοίως εἰς μέρη ἴσα δέκα, καὶ τῶν α δ, β γ, ἀχθήτωσαν διὰ τῶν καταλλήλων σημείων τῶν τομῶν εὐθεῖαι, καὶ ἔσονται πάντως παράλληλοι ἀλλήλαις τε καὶ ταῖς α β, γ δ· εἶτα παρωραμένου ἐπὶ μὲν τῆς α β, τοῦ α: μέρους, ἐπὶ δὲ τῆς γ δ, τοῦ ἑκάτου τῶν κατὰ διάμετρον διαγωνίως ἀντικειμένων, ἀχθήτωσαν διὰ τῶν λοιπῶν σημείων εὐθεῖαι ἀλλήλαις μόνον παράλληλοι, ὡς αἱ α ε, ζ η, θ κ, καὶ λοιπαί, καὶ κατασκευασθήσεταί σοι καὶ οὕτω Κλίμαξ θαυμάσιος πρὸς λῆψιν οἱουδήποτε μέρους, ὡς καὶ τοῦτο ἐν τοῖς ἑξῆς δηλωθήσεται. Εἰ δὲ τὰς α β, γ δ, διπλασιάσῃς, ἢ τριπλασιάσῃς, ἢ κατ᾽ ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν αὐξήσῃς, πολυχρηστότερόν σοι ἔσται τὸ ὄργανον.

Geom: Pr. lib. 3. Fig. 3.



Πρότασις Γ΄:

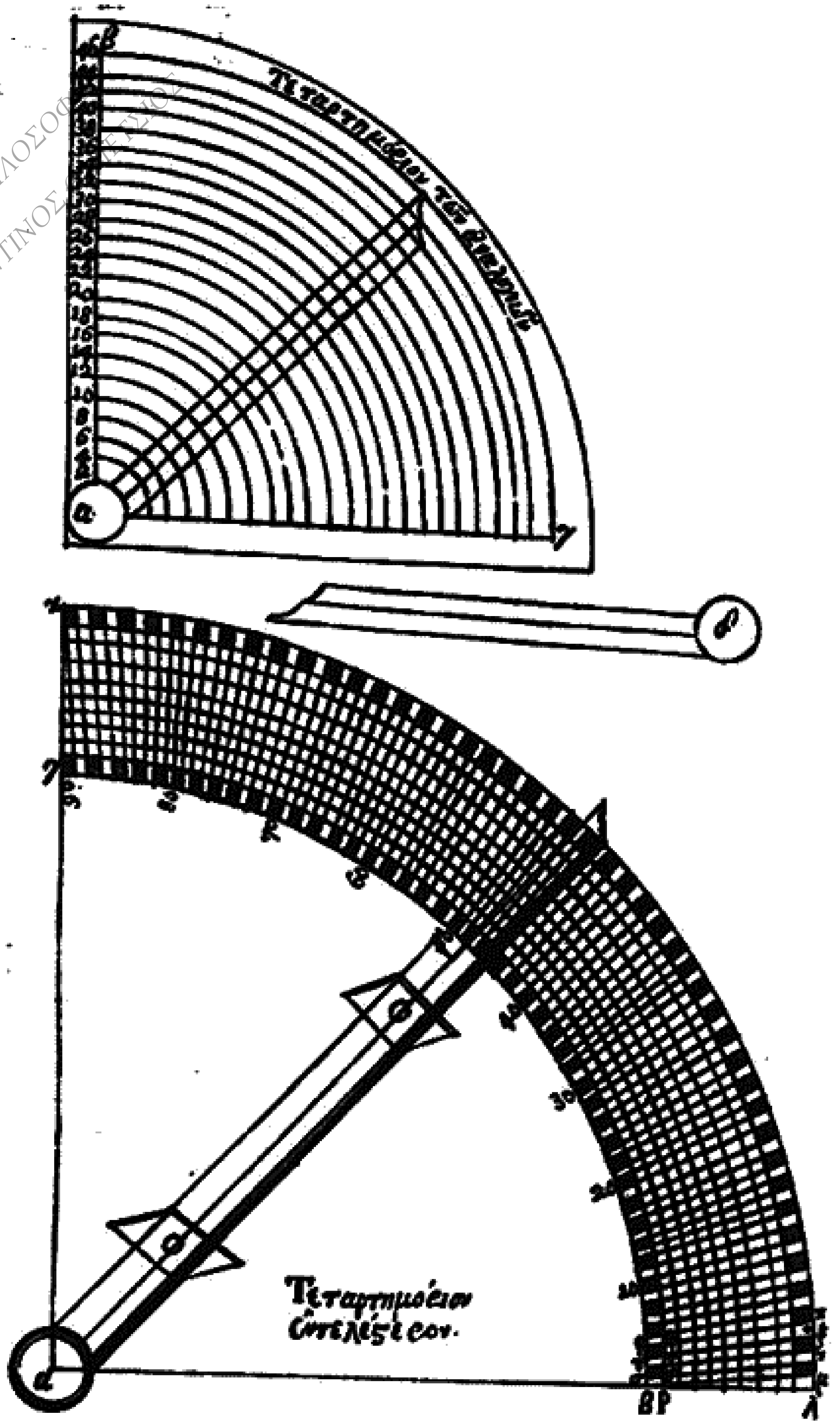
Ἡμιδιαμέτρου δοθείσης, Τεταρτημόριον κατασκευάσαι.

Ἔστω ἡμιδιάμετρος ἡ α β, καὶ ζητηθήτω κατασκευασθῆναι Τεταρτημόριον. Γραφήτω δὴ ἡ α β, ἢ ἄλλη τις γραμμὴ ἴση τῇ α β, ἐπί τινος ἐπιπέδου ὕλης στερεᾶς καὶ εὐκατεργάστου. ὅσῳ δ᾽ αὖ ἡ α β, ἐπιμηκεστέρα εἴη, τοσούτῳ δὴ καὶ τὸ ὄργανον ἐντελέστερον ἔσται. ἀπὸ δὲ τοῦ α, σημείου ἀνεστάσθω ἐπ᾽ αὐτῆς κάθετος ἡ α γ, ἴση τῇ α β· εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ α β, ἢ α γ, γραφήτω τὸ β γ, τεταρτημόριον, καὶ διαιρεθήτω ἡ α β, εἰς ὅσα βούλει ἴσα ἀλλήλοις μέρη, φέρ᾽ εἰπεῖν ρ̄, σ̄, φ̄. δι᾽ ἑκάστου δὲ σημείου ἀπὸ

τοῦ

τοῦ α, κέντρῳ γραφήτωσαν τόξα, τοσαῦτα δ' ἐστὶν εἰπεῖν τεταρτημόρια ἰσοπληθῆ τοῖς τῆς αβ, μέρεσι. παρασκευαζέσθω δὲ καὶ κανών, ἤτοι δρομεὺς ἴσος τῇ αβ, ὁ δε, καὶ συνδεθήτω τὸ δ, αὐτοῦ πέρας πρὸς τὸ α, κέντρῳ ἥλῳ τινί, ὥστε τὴν δε, συμπίπτειν τῇ αβ, πλευρᾷ τοῦ αβγ, τεταρτημορίου, καὶ δύνασθαι τὸν δε, δρομέα ὁμαλῶς φέρεσθαι ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὸ γ, περὶ τὸ δ, κινούμενος κέντρον, καὶ συμπίπτειν αὖθις τὴν δε, τῇ αγ. καὶ οὕτω κατεσκευασθήσεταί σοι τὸ καλούμενον Ὄργανον τῶν ἀναλογιῶν, χρησιμεῦον πρὸς διαίρεσιν εὐθειῶν, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς ὀψόμεθα.

Geom: Pr. lib. 3. Fig. 4.



Ἄλλως. Γεγραμμένου τοῦ αβγ, τεταρτημορίου, ὡς προειρημένον ἐστί, διαιρεθήτω τὸ βγ, τόξον εἰς μοίρας ἐνενήκοντα κατὰ τὸ πόρ: τῆς δ': τοῦ β': βιβλίου τοῦ πρώτου μέρους, καὶ ἀπὸ τοῦ α, κέντρου ἐφ' ἑκάστην μοῖραν ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι, καὶ κατασκευασθήσεται ὄργανον πρὸς κατασκευὴν καὶ εὕρεσιν τῶν δοθεισῶν γωνιῶν.

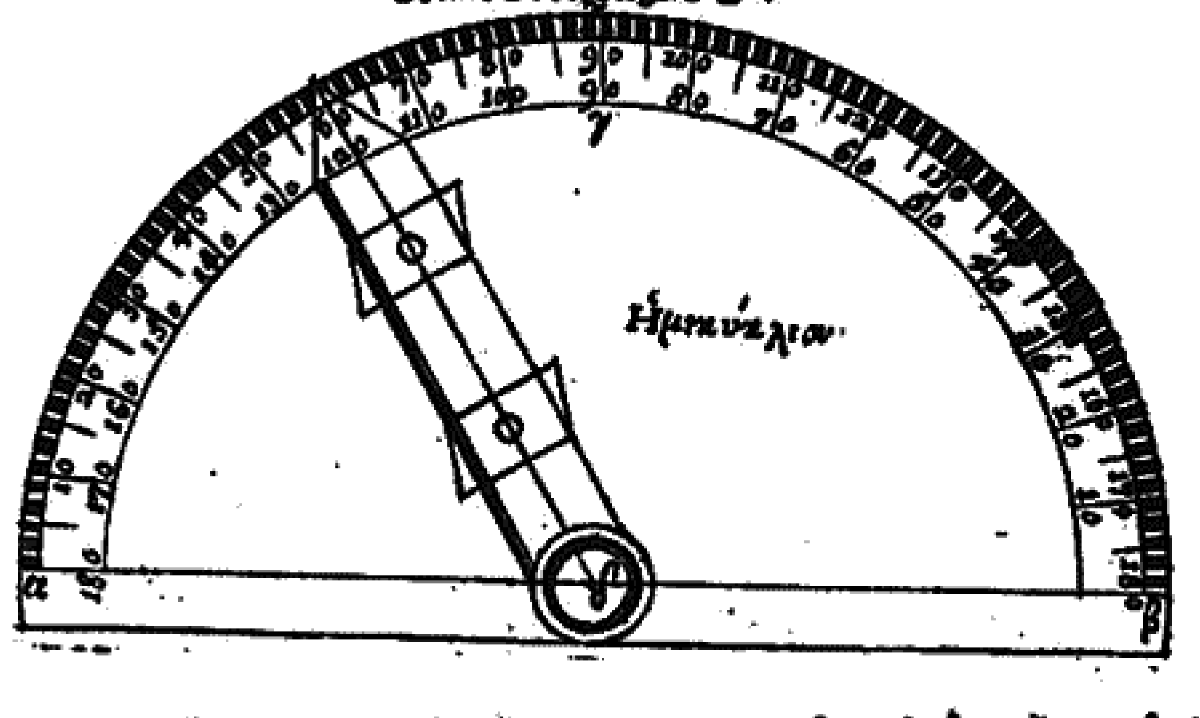
Ἄλ-

Ἄλλως. Τοῦ α β γ, τεταρτημορίου ἀκριβῶς κατεσκευασμένου, καὶ τοῦ β γ, τόξου εἰς μοίρας ἐννενήκοντα διῃρημένου, τοῦ δὲ κανόνος, ὡς προηρμήνευται, ἐφαρμοττομένου, παρασκευασθήτωσαν διόπτραι δύο ἴσαι τε καὶ ὅμοιαι ἀλλήλαις, αἵτινες ὀφείλουσιν ἐπὶ τοῦ κανόνος ἐφίστασθαι κατ' εὐθεῖαν, ὥστε τοῦ ὀφθαλμοῦ ἐπὶ τῆς ὀπῆς τῆς μιᾶς διόπτρας τιθεμένου κατὰ χρείαν διοπτείας, διέρχεσθαι τὴν ὀπτικὴν ἀκτῖνα καὶ διὰ τῆς ὀπῆς τῆς ἑτέρας, καὶ τοῦτο δὴ τὸ ὄργανον χρησιμεύσει ἐπὶ τῶν Γεωμετρικῶν Πράξεων, ὡς καὶ τοῦτο ἐν τοῖς ἑξῆς πιστωθήσεται. Ἕτεροι δὲ ἐπὶ τῆς μιᾶς τοῦ ὀργάνου πλευρᾶς τὰς διόπτρας ἐπιστηρίζουσι, καὶ τότε δὴ τὸ ὄργανον καὶ ἄνευ τοῦ κανόνος τὴν αὐτὴν πληρώσει χρείαν. Εἰ δέ σοι βουλητὸν ἐντελέστερον ἔχειν τὸ ὄργανον, γράψον μείζονι διαστήματι ἀπὸ τοῦ α, κέντρου τὸ κ λ, τόξον, καὶ δίελε αὐτὸ ὡς καὶ τὸ β γ, εἰς μοίρας ἐννενήκοντα, τὰς μ ν ξ ο π, καὶ λοιπάς. εἶτα ἔξαγε διαγωνίως τὰς ρ μ, σ ν, τ ξ, καὶ λοιπὰς εὐθείας, καὶ δίελε ἕκαστον τούτων εἰς μέρη ἴσα δέκα· τούτων γὰρ οὕτω διῃρημένων, ἕξεις οὐ μόνον τὰς μοίρας τῶν γωνιῶν, ἀλλά γε καὶ τὸ δέκατον ἑκάστης μοίρας, ἔτι δὲ καὶ δύο δέκατα, καὶ τρία δέκατα καὶ τὰ λοιπά. ὁ γὰρ δρομεὺς διερχόμενος διὰ τοῦ δεκάτου μέρους φέρ' εἰπεῖν τῆς σ ν, εὐθείας, δώσει σοι καὶ τὸ δέκατον τῆς σ τ, μοίρας, διερχόμενος δὲ διὰ τοῦ δεκάτου μέρους τῆς τ ξ, δώσει σοι τὸ δέκατον καὶ τῆς τ φ, ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

Πρότασις Δ'.

Διαμέτρου δοθείσης, Ἡμικύκλιον κατασκευάσαι.

Geom. Tr. lib. 3. Fig. 5.



Δοθήτω διάμετρος ἡ α β, καὶ ἔστω κατασκευάσαι Ὄργανον Γεωμετρικὸν τὸ καλούμενον Ἡμικύκλιον. Γραφήτω δὴ ἐπί τινος ἐπιπέδου ἀκριβῶς κατειργασμένου, ὡς καὶ ἐν τοῖς πρότερον εἴρηται, ἐκ ξύλου, ἢ ἄλλης τινὸς ὕλης στερεᾶς, ἡ α β, δοθεῖσα διάμετρος, ἢ ἄλλη τις ἴση τῇ α β, περὶ ἣν δίχα τμηθεῖσαν γραφήτω τὸ α γ β, ἡμικύκλιον, καὶ διαιρεθήτω εἰς μοίρας ρπ': κατὰ τὴν προῤῥηθεῖσαν δ': πρότασιν τοῦ β': βιβλίου τοῦ α': μέρους. Εἶτα τεθήτω καὶ ἐν αὐτῷ κανὼν συνεχόμενος