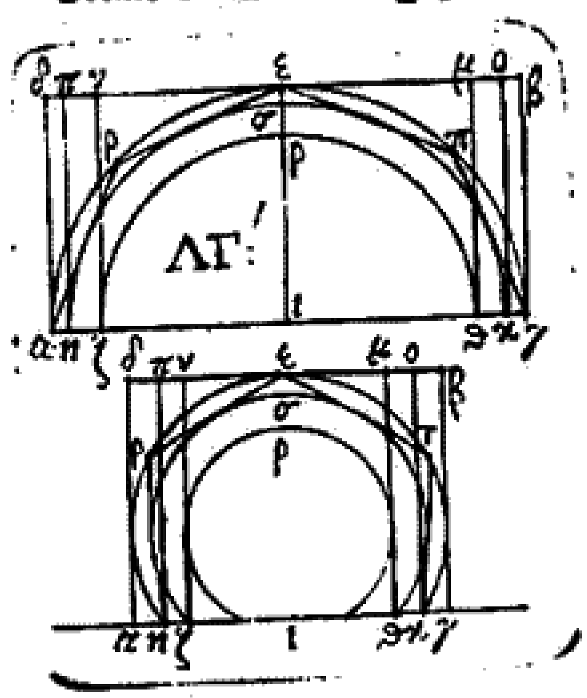
ἐπιφάνειαι τοῦ π ε ρ τ, καὶ ρ α γ τ, ἴσαι εἰσὶ τῇ τοῦ περὶ τὸ κ ο, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, ἡ δὲ τοῦ περὶ τὸ κ π, κυλίνδρου ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ περὶ τὸ ζ μ, κυλίνδρου ἐπιφανείας, ἄρα αἱ κωνικαὶ αὗται ἐπιφάνειαι μείζονές εἰσι καὶ τῆς τοῦ α ε γ, ἡμισφαιρίου ἐπιφανείας, ὅπερ ἄτοπον. ἐγγεγραμμένοι γάρ εἰσιν. οἱ κῶνοι εἰς τὸ α γ ε, ἡμισφαίριον.

Geom. Sol Lib. 1. Fig. 30.



Ἔστω δὲ μείζων ἡ τοῦ ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια τῆς τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφανείας. Γενέσθω οὖν ὡς ἡ τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνειαν, ἡ ζ θ, πρὸς τὴν η κ, ἤγουν ἡ ζ ι πρὸς τὴν η ι, ὡς γὰρ ἡμιδιάμετρος πρὸς ἡμιδιάμετρον, ἔχει καὶ διάμετρος πρὸς διάμετρον, τὰ δὲ λοιπὰ γενέσθω ὡς προειρημένα ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ ζ θ, πρὸς τὴν η κ, ἢ ἡ ι ζ, πρὸς τὴν ι η, ἔχει τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ η ο, ὀρθογώνιον κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν α: ὡς δὲ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ η ο, ἔχει καὶ ἡ τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ὁμοίως ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ η ο· ἄρα ἡ τοῦ π ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια, καὶ ἡ τοῦ περὶ τὸ η ο, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ὁμοίως ἐπιφάνεια τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, ὥστε ἡ τοῦ ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ περὶ τὸ η ο, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, ἀλλὰ τῇ τοῦ περὶ τὸ η ο, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ π ε ρ τ, καὶ ρ α γ τ, κώνου, ἄρα αἱ κωνικαὶ αὗται ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶ καὶ τῇ τοῦ ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφανείᾳ, ὅπερ ἄτοπον. οὐ γὰρ ἅπτονται αὐτοῦ αἱ τῶν κώνων πλευραὶ περὶ αὐτὸ ὄντων, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

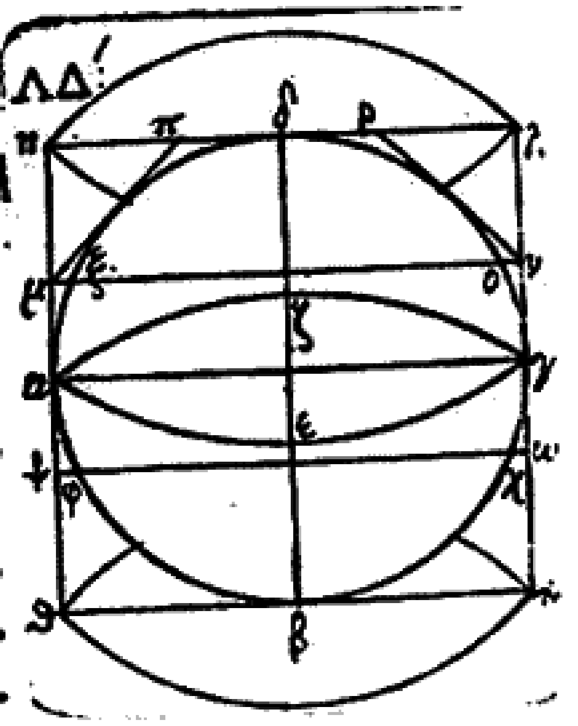
Ὅρα καὶ τὰ παραλειπόμενα τῆς παρ: λγ': παρακατιών.

:Πρότασις ΛΔ':

Ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασιός ἐστι τοῦ ἐν αὐτῇ μεγίστου κύκλου.

Ἔστω σφαῖρα ἡ α β γ δ, καὶ μέγιστος ἐν αὐτῇ κύκλος ὁ α ε γ ζ. Λέγω τὴν τῆς α β γ δ, σφαίρας ἐπιφάνειαν τετραπλασίονα εἶναι τοῦ α ε γ ζ, κύκλου. Ἐγγραφήτω δὴ περὶ τὴν α β γ δ, σφαῖραν κύλινδρος ὁ η θ κ λ· καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ τοῦ α δ γ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ α λ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, ἡ δὲ τοῦ α β γ, ἡμισφαιρίου τῇ τοῦ α κ, κυλίνδρου, πάντως γε ἡ τῆς α β γ δ, σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ θ λ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. ἀλλ' ἡ τοῦ θ λ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ κύκλῳ, ὗ ἡ ἡμιδιάμ: μέση ἐςὶν ἀνάλογος τῶν η θ, θ κ, καὶ τὴν ις': τῦ παρ: ἄρα καὶ ἡ τῆς α β γ δ, σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμ: μέση ἐςὶν ἀνάλογος τῶν η θ, θ κ, τυτέςιν ἴση τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ἡ δὲ διάμετρος τῦ αὐτῦ κύκλυ, διπλασιόςέςι τῆς διαμέτρυ τῆς αὐτῆς σφαίρας, καὶ οἱ κύκλοι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων, ὡς καὶ τὰ ὅμοια ἐπίπεδα χήματα, ἄρα ὁ κύκλος, οὗ ἡ διάμετρος διπλασιόςέςι τῆς διαμέτρυ τῆς α β γ δ, σφαίρας ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐςὶ τῦ μεγίςου τῆς αὐτῆς κύκλυ, ταὐτὸν δ' ἐςὶν εἰπεῖν τετραπλάσιος κατὰ τὴν β': τῦ γ': τῦ ά: μέρυς. δέδεικται δὲ καὶ ἡ τῆς α β γ δ, σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση κύκλῳ, ὗ ἡ διάμετρος διπλασία τῆς διαμέτρου τῦ μεγίςυ ἐν αὐτῇ κύκλυ, ἄρα ἡ τῆς α β γ δ, σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασιόςέςι τῦ ἐν αὐτῇ α ε γ ζ, μεγίςυ κύκλυ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 31.



Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Α': Ε'κτε τῶν ἀνωτέρω καὶ τῆς παρύσης δυνάμεθα συναγαγεῖν τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι κυλίνδρῳ, ὗ τό, τε ὕψος καὶ ἡ τῆς βάσεως διάμετρος ἴση τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Β': Ε'τι ἡ τῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια, ὗ τό, τε ὕψος καὶ ἡ τῆς βάσεως διάμετρος ἴσα εἰσὶ τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ταὐτὸν δ' ἐςὶν εἰπεῖν τοῦ περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένυ μετὰ τῶν βάσεων αὐτῦ, ἡμιόλιός ἐςι τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. ἡ γὰρ τῦ τοιύτυ κυλίνδρυ ἐπιφάνεια τετραπλάσιος μεθέςι τῆς αὐτοῦ βάσεως, ἴση δὲ τῇ τῆς σφαίρας, περὶ ἣν ὁ κύλινδρος περιγεγραμμένος ἐςίν. Ε'ὰν ὖν ἡ τῦ κυλίνδρυ τύτυ ἐπιφάνεια εἰς τέσσαρα διαιρεθῇ, εἰς τέσσαρα πάντως ἴσα διαιρεθήσεται, καὶ ἡ τῆς ἐν αὐτῷ σφαίρας ἐπιφάνεια. προστιθεμένων δὲ τῶν δύο βάσεων τῦ κυλίνδρυ τῇ αὐτῦ ἐπιφανείᾳ, γενήσεται τὸ ὅλον περιεκτικὸν ἓξ τοιύτων μερῶν, οἵων ἡ σφαῖρα τεσσάρων, ὥςε καὶ ἡμιόλιος.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Γ': Ε'τι δυνάμεθα συναγαγεῖν τὴν τῆς ζώνης τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι τῇ τῦ κυλίνδρυ ἐπιφανείᾳ, ὗ ὕψος τὸ αὐτὸ, βάσις δὲ ἴση τῷ μεγίςῳ τῆς σφαίρας κύκλῳ, ὅς καὶ τῆς ζώνης ἐςὶ βάσις. οἷον ἡ τῆς α γ ο ξ, ζώνης ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῇ τῦ α ν, κυλίνδρυ ἐπιφανείᾳ. ἐπεὶ γὰρ ἡ τῦ α δ γ, ἡμισφαιρίυ ἐπιφάνεια ἴσηέςι τῇ τῦ α λ, κυλίνδρυ ἐπιφανείᾳ, ἡ δὲ τῦ μ δ ν, τμήματος τῇ τοῦ μ λ, πάντως γε ἐὰν ἐκ τῶν ἴσων τῦτε α δ γ, ἡμισφαιρίυ καὶ α λ, κυλίνδρου ἴσα

ἴσα ἀφαιρεθῇ, τό, τε μ δ ν, τμῆμα, καὶ μ λ, κύλινδρος, ἐναπολειφθήσεται ἡ τῆς α γ ο ξ, ζώνης ἐπιφάνεια ἴση τῇ τοῦ α ν, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ.

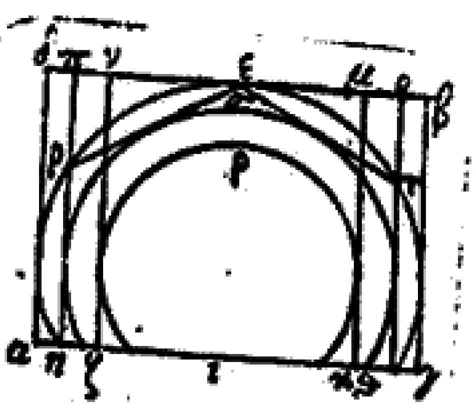
ΠΟΡΙΣΜΑ.

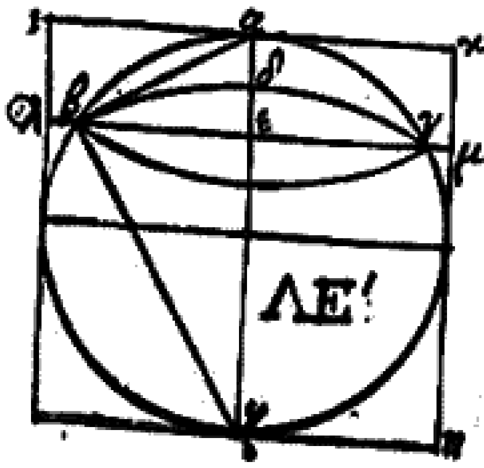
Δ': Ἔτι τὰς ἐπιφανείας τῶν τῆς σφαίρας ζωνῶν πρὸς ἀλλήλας ἔχειν ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη. οἷον ἡ α γ ο ξ, ζώνη ἔχει πρὸς τὴν α γ χ φ, ὡς τὸ α μ, ὕψος πρὸς τὸ α ψ, τὰ γὰρ α μ, α ψ, ὕψη εἰσὶ τῶν α ν, α ω, κυλίνδρων, οἱ δὲ κύλινδροι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη κατὰ τὴν ιδ': τοῦ ιβ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ αἱ ζῶναι αἱ ἴσαι τοῖς κυλίνδροις, ἔχουσιν ὁμοίως ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη, ὥστε πολλαπλασιαζομένου τοῦ ὕψους τῆς ζώνης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίστου κύκλου, τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῇ τῆς ζώνης ἐπιφανείᾳ.

Τὰ παραλειπόμενα τῆς ἀνωτέρω λ γ': Προτάσεως εἰς δεῖξιν τοῦ β': αὐτῆς μέρους.

Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸ α ε γ, τμῆμα ἴσον τῷ α ο, κυλίνδρῳ. εἰ γὰρ μή, ἀλλ' ἔλαττον φέρ' εἰπεῖν ὑποτεθῇ, δειχθήσεται κατὰ τὰ προειρημένα ὁ ζ μ, κύλινδρος ἴσος τῷ α ε γ, τμήματι. ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ η ο, κυλίνδρου ἐπιφάνεια μείζων μέν ἐστι τῆς τοῦ ζ μ, ἴση δὲ ταῖς τῶν ε ρ τ, ρ η κ τ, κώνων ἐπιφανείας, συναχθήσεται πάντως καὶ τὰς τῶν αὐτῶν κώνων ἐπιφανείας μείζους εἶναι τοῦ ζ μ, κυλίνδρου, καὶ ἑπομένως τοῦ α ε γ, τμήματος, ἐν ᾧ εἰσιν ἐγγεγραμμένοι οἱ αὐτοὶ κῶνοι, ὅπερ ἄτοπον.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 32.





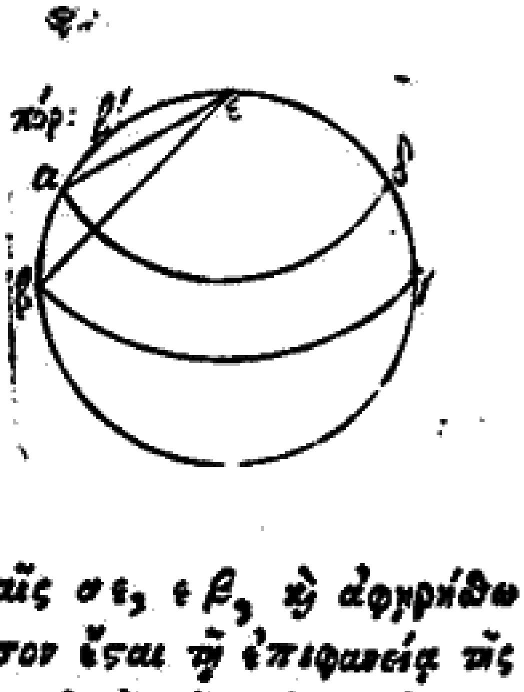
Πρότασις ΛΕ':

Ἡ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ πόλου τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς αὐτοῦ ἀγομένη βάσεως.

Ἔστω τμῆμα σφαίρας τὸ α β γ, οὗ πόλος τὸ α, βάσις δὲ ὁ β γ δ, κύκλος, καὶ διάμετρος τῆς βάσεως ἡ β γ. ἔστω δὲ καὶ ἡ α β, ἡ ἀπὸ τοῦ πόλου τοῦ αὐτοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἀγομένη. Λέγω δὴ τὴν τοῦ α β γ, τμήματος ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι τῷ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ α β. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α, πόλου διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἡ α ζ, αζ, τέμνουσα τὴν βγ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βζ, συνεστάθω δὲ καὶ ὁ λκ, ἰσοϋψὴς κύλινδρος τῷ αβγ, τμήματι. καὶ ἐπεὶ ἡ αζ, πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὴν βγ, κατὰ τὴν γ' τοῦ γ': τῶν Στοιχ: ὅτι καὶ δίχα, πάντως γε τὰ αβζ, αβε, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν, ὥστε ὡς ἡ αζ, πρὸς τὴν αβ, ἡ αβ, πρὸς τὴν αε, κατὰ τὴν δ': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ. ἡ αβ, ἄρα μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αζ, αε, ἀλλ' ἡ μὲν αζ, ἴση ἐστὶ τῇ λμ, διαμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ λκ, κυλίνδρου, ἡ δὲ αε, τῇ ιλ, ἄρα ἡ αβ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν λμ, ιλ, κατὰ τὴν ις': ἄρα τοῦ παρόντος ἡ τοῦ λκ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ αβ, ἀλλ' ἡ τοῦ λκ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ αβγ, τμήματος ἐπιφανείᾳ κατὰ τὴν λγ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ ἡ τοῦ αβγ, τμήματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ αβ, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ τοῦ βζγ, τμήματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ βζ. Ἡ τοῦ τμήματος ἄρα ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ ἀπὸ τοῦ πόλου τοῦ τμήματος ἐπὶ τὸ πέρας τῆς αὐτοῦ ἀγομένῃ βάσεως. Geom: Sol. lib. 1. Fig. 33.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α':

Ἐκ τῶν εἰρημένων δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὴν αὐτὴν ἐγγεγραμμένου σφαῖραν.



ΠΟΡΙΣΜΑ Β':

Ἔτι δυνάμεθα εὑρίσκειν τὴν τῆς τυχούσης ζώνης ἐπιφάνειαν. οἷον ζητείσθω ἡ τῆς αβγδ, ζώνης ἐπιφάνεια, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ἀπὸ τοῦ πόλου αε, εβ, εἶτα γραφήτωσαν δύο κύκλοι ἴσοι ἡμιδιαμέτροις ταῖς αε, εβ, καὶ ἀφῃρήσθω ὁ ἐλάττων ἀπὸ τοῦ μείζονος, καὶ τὸ ἐναπολειπόμενον ἴσον ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς αβγδ, ζώνης. ἀφαιρουμένου γὰρ καὶ τοῦ εαδ, τμήματος ἀπὸ τοῦ εβγ, ἡ αβγδ, ἐγκαταλείπεται ζώνη.

Πρότασις Λς'

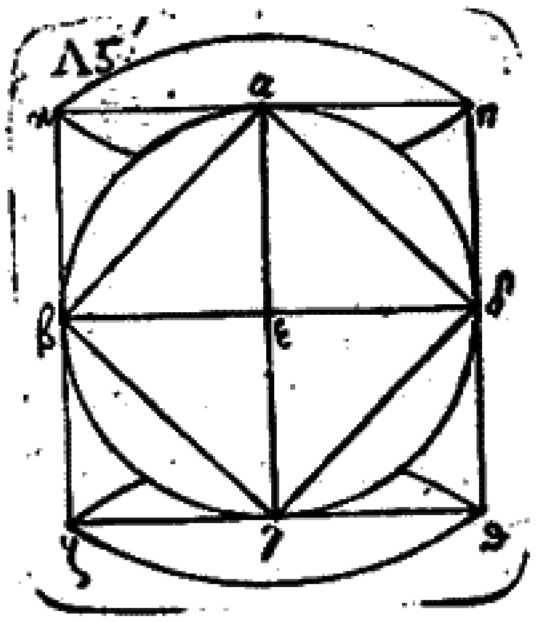
Ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένου τετραγωνικοῦ κυλίνδρου.

Ἔστω εἰς σφαῖραν τὴν αβγδ, ἐγγεγραμμένος κύλινδρος τετραγωνικὸς ὁ αβγδ. Λέγω δὴ τὴν τῆς αβγδ, σφαίρας ἐπιφάνειαν διπλασίονα εἶναι τῆς τοῦ αβγδ, τετραγωνικοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. Περιγραφήτω γὰρ περὶ τὴν αὐτὴν σφαῖραν ὁ ζθηκ, κύλινδρος. καὶ ἐπεὶ αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἔχουσι πρὸς

ἀλ-

ἀλλήλας ὡς τὰ διὰ τῶν ἀξόνων αὐτῶν ὀρθογώνια, καὶ τὴν ιη': τοῦ παρόντος, πάντως ἡ τοῦ ζηθκ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ αβγδ, ἐπιφάνειαν ἔχει, ὡς τὸ ζη, τετράγωνον, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ βδ, τετράγωνον τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ αβγδ, κυλίνδρου ὀρθογώνιον, ἀλλὰ τὸ ζη, τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ βδ, καὶ τὴν ιγ': τοῦ δ': τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἡ τοῦ ζθηκ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια διπλασιός ἐστι τῆς ἐπιφανείας τοῦ αβγδ, κυλίνδρου, ἡ δὲ τοῦ ζθηκ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ καὶ τὴν λγ': τοῦ παρόντος,

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 34.



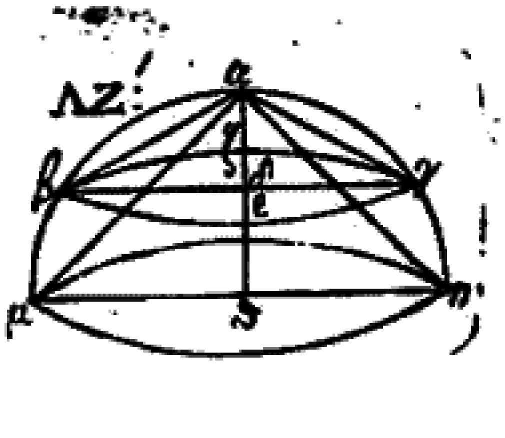
ἄρα καὶ ἡ τῆς αβγδ, σφαίρας ἐπιφάνεια διπλάσιός ἐστι τῆς ἐπιφανείας τοῦ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένου τετραγωνικοῦ κυλίνδρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΖ':

Ἡ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν τοῦ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὡς ἡ τοῦ κώνου πλευρὰ πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον τῆς βάσεως.

Ἔστω τμῆμα σφαίρας τὸ βαγ, καὶ κῶνος ὁ αβγ, καὶ ἀμφότερα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἔστωσαν βάσεως βεγζ, καὶ τὸ αὐτὸ ἐχέτωσαν ὕψος αδ. Λέγω ὅτι ἡ τοῦ βαγ, τμήματος ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ. Ἐὰν γὰρ τῶν αβ, βδ, μέση ἀνάλογος εὑρεθῇ, πάντως γε ἡ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἔσται τῷ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος, ἡ εὑρεθεῖσα μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αβ, βδ, καὶ τὴν κε': τοῦ παρόντος, καὶ δὲ τὴν λε': τοῦ αὐτοῦ ἡ τοῦ βαγ, τμήματος ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ αβ, ὥστε ἡ τοῦ βαγ, τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει, ὡς ὁ τῆς αβ, ἡμιδιαμέτρου κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ μέση ἀνάλογος τῶν αβ, βδ. Ἐπεὶ δὲ οἱ κύκλοι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων, ἄρα ἡ τοῦ βαγ, τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνειαν ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ ἡ αβ, πρὸς τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν αβ, βδ, ἀλλὰ καὶ ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ πρὸς τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν αβ, βδ. ἄρα ἡ τοῦ

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 35.



βαγ,

β α γ, τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ α β γ, κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει ὡς ἡ α β, πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν β δ, ἡμιδιάμετρον τῆς βάσεως. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

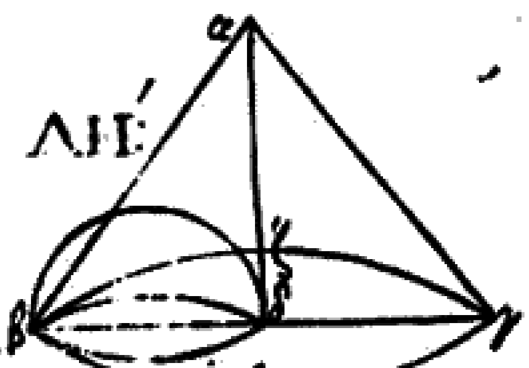
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν, οὗ ἥτε βάσις καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ, ἔχει ὡς τοῦ τετραγώνου διάμετρος πρὸς τὴν αὐτοῦ πλευράν. τοῦ γὰρ μ α η, ἡμισφαιρίου ἡ ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν τοῦ α μ η, κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ α μ, εὐθεῖα πρὸς τὴν μ θ. ὅτι δὲ ἡ α μ, διάμετρός ἐστι τετραγώνου, ἡ δὲ μ θ, πλευρὰ, δῆλον. ἴση γὰρ ἡ μ θ, τῇ θ α, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν μ θ, θ α, περιεχόμενον τετράγωνόν ἐστιν, οὗ διάμετρος ἡ α μ, καὶ πλευρὰ ἡ μ θ.

Πρότασις ΛΗ΄:

Ἡ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια, οὗ βάσις μὲν κύκλος τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ἔχει πρὸς τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος πρὸς τὴν αὐτοῦ πλευράν.

Ἔστω κῶνος ὁ α β γ, καὶ ἐχέτω βάσιν μὲν τὸν β ε γ ζ, κύκλον τετραπλάσιον ὄντα τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ β δ. (ὅτι γὰρ ἡ διάμετρος τῆς διαμέτρου διπλασιός ἐστιν, ὁ κύκλος πάντως τοῦ κύκλου τετραπλάσιος ἔσται) ὕψος δὲ τὴν δ α, ἴσην τῇ β δ, διαμέτρῳ τῆς σφαίρας. Λέγω δὴ τὴν τοῦ α β γ, κώνου ἐπιφάνειαν ἔχειν πρὸς τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν, ἧς ἡ διάμετρος ἴση τῷ τοῦ κώνου ὕψει, ὡς ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος πρὸς τὴν αὐτοῦ πλευράν. Ἡ μὲν γὰρ τοῦ α β γ, κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν α β, β δ, κατὰ τὴν κε΄: τοῦ παρόν: ἡ δὲ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, ἧς διάμετρος ἡ β δ, ἢ δ α, ἴση ἐστὶ τῷ β ε γ ζ, κύκλῳ κατὰ τὴν λ δ΄: τοῦ παρ: ἀλλ᾽ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν α β, β δ, ἔχει πρὸς τὸν β ε γ ζ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος ἡ β δ, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β δ, ἡ α: δηλ: πρὸς τὴν γ΄: κατὰ τὴν α: τοῦ γ΄: τοῦ α: μέρους, ἄρα καὶ ἡ τοῦ α β γ, κώνου ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν, ἧς διάμετρος ἡ β δ, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β δ, ἡ δὲ α β, διάμετρός ἐστι τετραγώνου, καὶ ἡ β δ, πλευρὰ, τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν β δ, δ α, τετράγωνόν ἐστιν. ἄρα ἡ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια, οὗ βάσις μὲν κύκλος τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 36.



τῇ

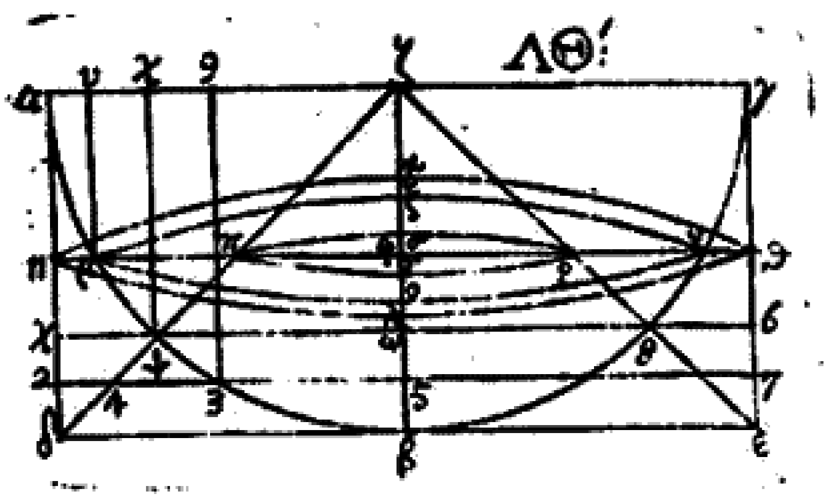
τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ ἔχει πρὸς τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν ὡς ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος πρὸς τὴν αὐτοῦ πλευράν.

Πρότασις ΛΘʹ.

Ἐὰν περὶ ἡμισφαίριον κύλινδρός τε καὶ κῶνος περιγεγραμμένοι ὦσι, βάσιν καὶ ὕψος τὰ αὐτὰ τῷ ἡμισφαιρίῳ ἔχοντες, καὶ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει παραλλήλῳ τμηθῶσι, κύκλος ὁ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τε κώνου καὶ ἐπιπέδου γενόμενος, ἴσος ἐστὶ τῇ ζώνῃ τῇ ὑπό τε τῶν κοινῶν τομῶν τοῦ τε ἡμισφαιρίου καὶ ἐπιπέδου, καὶ τοῦ κυλίνδρου τε καὶ ἐπιπέδου.

Ἔστω ἡμισφαίριον τὸ αβγ, καὶ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένος κύλινδρος μὲν ὁ αδεγ, κῶνος δὲ ὁ δεζ, τὴν αὐτὴν ἔχοντες βάσιν τῷ ἡμισφαιρίῳ τὴν δε, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ βζ, καὶ τμηθήτωσαν τῷ ηθ, ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ δε, τέμνοντι τὸν μὲν κύλινδρον κατὰ τὰ η, καὶ θ, σημεῖα, καὶ κοινὴν τομὴν μετ' αὐτοῦ ποιοῦντι τὸν ηλθκ, κύκλον, τὸ δὲ ἡμισφαίριον κατὰ τὰ μ ν, καὶ κοινὴν τομὴν ποιοῦντι μετ' αὐτοῦ τὸν μονξ, καὶ τὸν δζε, κῶνον κατὰ τὰ π, καὶ ρ, σημεῖα, καὶ ποιοῦντι μετ' αὐτοῦ κοινὴν τομὴν τὸν πσρτ, κύκλον. Λέγω τὸν πσρτ, κύκλον ἴσον εἶναι τῇ ηκθλομξν, ζώνῃ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ μ, παράλληλος τῇ ηα, καὶ κάθετος ἐπὶ τῆς αγ, ἡ μυ, καὶ ἐπεὶ ἡ μυ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αυ, υγ, ἤτοι τῶν ημ, μθ, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς μυ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ημ, μθ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ἀλλὰ τῇ μυ, ἴση ἐστὶν ἡ ζφ, τῇ δὲ ζφ, ἡ φπ, ὡς δειχθήσεται, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς πφ, ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ημ, μθ,

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 37.



περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ημ, μθ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πφ, τετράγωνον, ἔχει καὶ ἡ ηκθλομξν, ζώνη πρὸς τὸν πσρτ, κύκλον κατὰ τὴν ιθʹ: τοῦ δʹ: τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἡ ηκθλομξν, ζώνη ἴση ἐστὶ τῷ πσρτ, κύκλῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ τῆς χψ, διαστάσεως ζώνη ἴση εἶναι τῷ τῆς ψω, ἡμιδιαμέτρου κύκλῳ, καὶ ἡ τῆς 23, τῷ τῆς 45, ἡμιδιαμέτρου κύκλῳ. Ὅτι δὲ ἡ ζφ, τῇ φπ, ἴση, δῆλον. ἡ γὰρ πφ, παράλληλός ἐστι τῇ βδ, πλευρᾷ τοῦ δβζ, τριγώνου, ὥστε κατὰ τὴν βʹ: τοῦ ςʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ βζ, πρὸς τὴν βδ, ἡ ζφ, πρὸς τὴν φπ. ἀλλὰ ἡ ζβ, ἴση ἐστὶ τῇ βδ, ἑκατέρα γὰρ ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ αβγ, ἡμισφαιρίου, ἄρα καὶ ἡ ζφ, ἴση ἐστὶ τῇ φπ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ χψ, ζώνη ἴση τῷ τῆς ψω, ἡμιδιαμέτρου κύκλῳ, καὶ οἱ 2, 3, τῷ τῆς 4, 5, κύκλῳ, ὥσπερ δέδεικται καὶ ἡ μ η, ἴση τῷ τῆς π φ, ἡμιδιαμέτρου κύκλου, λαμβάνεται γὰρ ἡ διάστασις ἀντὶ τῆς ζώνης.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι τὸ ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ ἔχοντος τῷ ἡμισφαιρίῳ. ἐὰν γὰρ δι' ἑκάστου σημείου τῶν α γ δ ε, ἐννοηθῶσιν ἐπίπεδα παραλλήλως ἀγόμενα τοῖς διὰ τῶν α γ δ ε, συσταθήσονται ζῶναι μεταξὺ τῆς τοῦ κυλίνδρου κοίλης περιφερείας καὶ τῆς κυρτῆς τοῦ ἡμισφαιρίου, καὶ ἐν τῷ κώνῳ κύκλοι ἰσοπληθεῖς, ὥστε συμπάσας τὰς ζώνας σύμπασι τοῖς κύκλοις ἴσας εἶναι. ὥσπερ γὰρ τριῶν ἐπιπέδων ἠγμένων τῶν διὰ τῶν η θ, χ 6, 2, 7, συνεστάθησαν τρεῖς ζῶναι αἱ η μ, χ ψ, 2, 3, καὶ τοσοῦτοι κύκλοι, ὧν ἡμιδιάμετροι αἱ π φ, ψ ω, 4 5, οὕτω δὴ καὶ πλειόνων ἠγμένων, ζῶναί τε καὶ κύκλοι πλείονες συσταθήσονται ἰσοπληθεῖς, ἀλλ' αἱ μὲν ζῶναι πληροῦσι τὴν α δ β ε γ β α, σκάφην (ἀφαιρουμένου γὰρ τοῦ α β γ, ἡμισφαιρίου ἀπὸ τοῦ α δ ε γ, κυλίνδρου τὸ ἐναπολειπόμενον παραπλήσιόν πως ἐστὶ σκάφῃ.) οἱ δὲ κύκλοι ὁμοίως τὸν ζ δ ε, πληροῦσι κῶνον, ἄρα ἡ α δ β ε γ β α, σκάφη ἴση ἐστὶ τῷ ζ δ ε, κώνῳ. ἀφαιρουμένου δὲ ἀπό τε τῆς σκάφης καὶ τοῦ κώνου, τοῦ δ β ε 8 β ψ, μικτοῦ σχήματος, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν τοῦ ἡμίσεως τῆς τε σκάφης καὶ τοῦ κώνου, ἐγκαταλείπεται ὁ ζ ψ β 8, σφαιρικὸς τομεὺς ἴσος τοῖς α δ ψ, γ ε 8, ἅτινα παριστῶσι τὸ ἐναπολειπόμενον κυρτοεπίπεδον σχῆμα τοῦ κυλίνδρου, ἐὰν ἀπ' αὐτοῦ ὅ, τε ζ δ ε, κῶνος, καὶ τὸ α β γ, ἡμισφαίριον ἀφαιρεθῶσι. Προστιθεμένης δὲ τῆς ψ α ζ γ 8, χώνης τοῦ ἐναπολειπομένου δηλ: μέρους τοῦ α β γ, ἡμισφαιρίου, ἐπειδὰν ὁ ζ δ ε, ἀφαιρεθῇ κῶνος, τοῖς τε α δ ψ, γ ε 8, καὶ τῷ ζ ψ β 8, τομεῖ, πληρωθήσεται ἥ τε δ α ζ γ ε, χώνη, καὶ τὸ α β γ, ἡμισφαίριον, καὶ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται κατὰ τὸ β': ἀξίωμα τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλ' ὁ α δ ε γ, κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ ζ δ ε, κώνου κατὰ τὴν ι: τοῦ ιβ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἀφαιρουμένου τοῦ κώνου, ἡ ἐναπολειπομένη χώνη διπλασία ἐστὶ τοῦ ζ δ ε, κώνου. Τῇ δὲ δ α ζ γ ε, ἐναπολειπομένῃ χώνῃ ἴσον ἐστὶ τὸ α β γ, ἡμισφαίριον ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ α β γ, ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ζ δ ε, κώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Μ':

Ἐὰν ἡμισφαιρίῳ κῶνος ἐγγραφῇ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον ἔχων τῷ ἡμισφαιρίῳ, διπλάσιον ἔσται τοῦ κώνου τὸ ἡμισφαίριον.

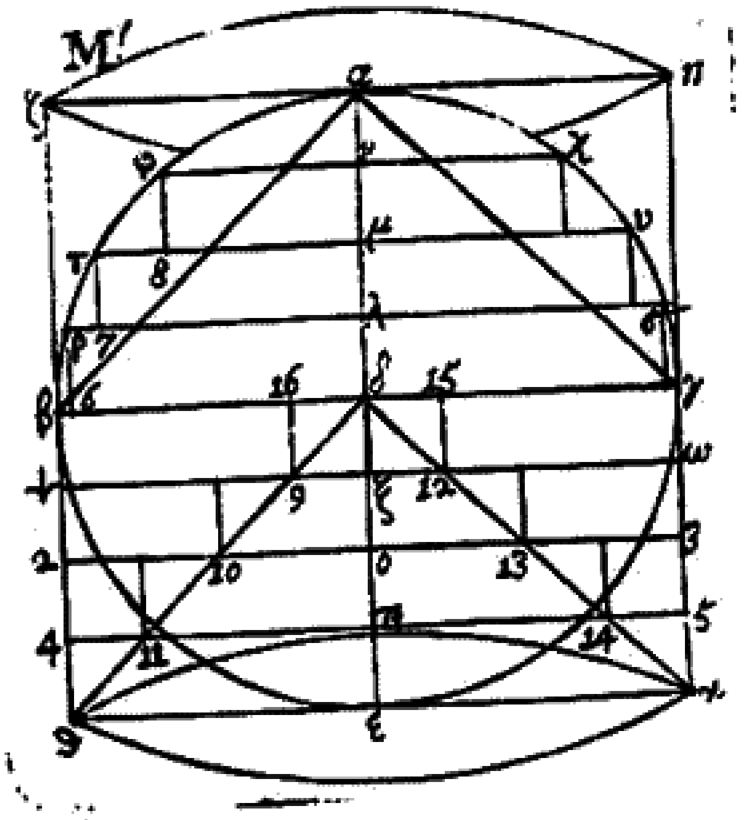
Ἔστω ἐγγεγραμμένος κῶνος ὁ α β γ, εἰς ἡμισφαίριον τὸ β α γ, ἔχων βάσιν τὴν β γ, ἣν καὶ τὸ ἡμισφαίριον, καὶ ὕψος τὸ δ α, ὅπερ ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμισφαιρίου. Λέγω δὴ τὸ β α γ, ἡμισφαίριον διπλάσιον εἶναι τοῦ α β γ, κώνου. Ἀποπεπληρώσθω γὰρ ἡ α β ε γ, σφαῖρα, καὶ ἐξαχθήτω ἡ α δ, ἀπὸ τοῦ δ, ἐπὶ τὸ ε, καὶ τῇ μὲν β γ, ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ ζ η, θ κ, ἀπτόμεναι τῆς σφαίρας κατὰ τὰ α, καὶ

ε, τῇ

ε, τῇ δὲ αε, ἀχθήτωσαν παράλληλοι αἱ ζθ, ηκ, ἀπτόμεναι καὶ αὗται τῆς σφαίρας κατὰ τὰ β, καὶ γ, καὶ ἀποπληρωθήσεται ὁ ζθκη, περιγεγραμμένος κύλινδρος περὶ τὴν αβγε, σφαῖραν. Ἐπιζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ δθ, δκ, καὶ συσταθήσεται ὁ δθκ, κῶνος. καὶ ἐπεὶ τοῦ δθκ, κώνου διπλασία ἐστὶν ἡ θβδγκ, χώνη. ὁ γὰρ βθκγ, κύλινδρος κατὰ τὴν ι: τοῦ ιβ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τριπλάσιός ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου, ἡ δὲ θβδγκ, χώνη ἴση ἐστὶ τῷ βαγ, ἡμισφαιρίῳ, ὡς δειξόμεθα, ἄρα καὶ τὸ βαγ, ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι τοῦ δθκ, κώνου, ἀλλ' ὁ δθκ, κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ αβγ, ἐγγεγραμμένῳ κώνῳ, ἰσοϋψεῖς γάρ εἰσι, καὶ ἐπὶ ἴσων βάσεων, ὡς δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἄρα τὸ βαγ, ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αβγ, κώνου, ὅπερ ἦν τὸ προτεθέν.

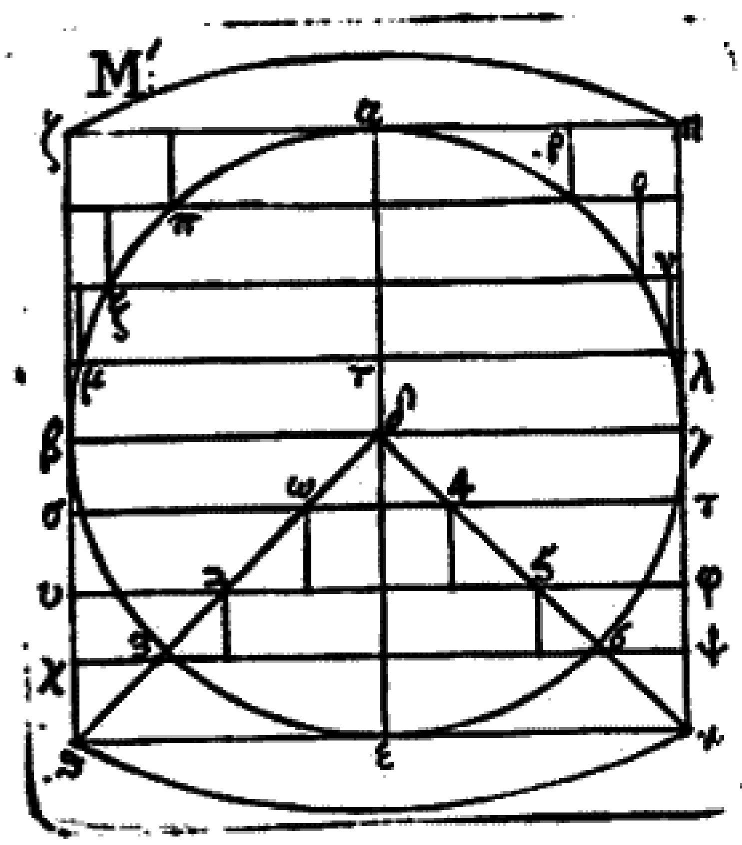
Ὅτι δὲ ἡ θβδγκ, χώνη ἴση ἐστὶ τῷ βαγ, ἡμισφαιρίῳ, οὐ χαλεπὸν δεῖξαι. εἰ γὰρ μή, ἢ μείζων ἔσται, ἢ ἐλάττων.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 38.



Ἔστω δὴ α: ἡ θβδγκ, χώνη ἐλάττων τοῦ βαγ, ἡμισφαιρίου, δυνατὸν ἄρα κατὰ τὸ γ': πόρισ: τῆς κα: τοῦ παρ: ἐγγραφῆναι εἰς τὸ ἡμισφαίριον κυλίνδρους ἰσοϋψεῖς μείζονας τῆς θδβγκ, χώνης, ἔστωσαν ἤτοι οἱ 6σ, τυ, 8χ, καὶ διαιρεθήτω ἑκατέρα τῶν δα, δε, εἰς ἴσα τε καὶ ἰσοπληθῆ μέρη, τὰ δλ, λμ, μν, να, καὶ δξ, ξο, οπ, πε, καὶ δι' ἑκάστου σημείου τῶν τομῶν διήχθωσαν παράλληλοι τῇ βγ, αἱ ρσ, τυ, φχ, καὶ ψω, 23, 45, καὶ ἀναπεπληρώσθωσαν οἵ τε ἐν τῷ βαγ, ἡμισφαιρίῳ ἐγγεγραμμένοι κύλινδροι 6σ, τυ, 8χ, καὶ οἱ ἐν τῇ θβδγκ, χώνῃ οἱ 69, ψ10, 2π, 12γ, 13ω, 14, 3, καὶ ἐπεὶ τῶν ελ, λα, μέση ἀνάλογός ἐστιν ἡ λσ, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς λσ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ελ, λα, ἀλλ' ἡ μὲν ελ, ἴση ἐστὶ τῇ β15, ἡ δὲ λα, τῇ 15γ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς εα, βγ, καὶ δλ, δ15, ὡς δῆλον τῷ καὶ μικρὸν ἐπιστήσαντι, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς λσ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β15, 15γ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ἔστι δὲ ἡ μὲν λσ, ἡμιδιάμετρος τοῦ 6σ, κυλίνδρου, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν β15, 15γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον τὸ τῆς ζώνης ἐστὶν ὀρθογώνιον τῆς ὑπό τε τῆς βάσεως τοῦ 6σ, κυλίνδρου, καὶ 69, 12γ, κυλινδρικοῦ σίφωνος, τῶν ἴσον ἐχόντων ὕψος, περιεχομένης. ἄρα κατὰ τὴν ιθ': τοῦ παρόντος, ὁ 6σ, κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τῷ 69, 12γ, κυλινδρικῷ σίφωνι. ἐπεὶ δ' αὖθις καὶ ἡ μυ, μέση ἀνάλογός ἐστι τῶν εμ, μα, ἤτοι τῶν 2,13, 13, 3, δειχθήσεται διὰ τὰ αὐτὰ ὁ 7 υ, κύλινδρος ἴσος τῷ ↓ 10, 13 ω, κυλινδρικῷ σίφωνι. Ἐπεὶ δὲ πλάτταιον καὶ ἡ ν χ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν ε ν, ν α, ἤτοι τῶν 4, 14, 14, 5, δειχθήσεται ὁμοίως ὁ 8 χ, κύλινδρος ἴσος τῷ 2, 11, 14, 3, κυλινδρικῷ σίφωνι, ἀλλ' οἱ 6 σ, 7 υ, 8 χ, ἐγγεγραμμένοι κύλινδροι εἰς τὸ β α γ, ἡμισφαίριον, μείζονές εἰσι τῆς θ β δ γ κ, χώνης κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ οἱ 6 9, 12 γ, ↓ 10, 13 ω, 2, 11, 14, 3, ἐγγεγραμμένοι κύλινδροι εἰς τὴν θ β δ γ κ, χώνην μείζονές εἰσι τῆς αὐτῆς χώνης, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἐλάττων ἐστὶν ἡ θ β δ γ κ, χώνη τοῦ β α γ, ἡμισφαιρίου. Ἀλλὰ δὴ ἔστω μείζων ἡ θ β δ γ κ, χώνη τοῦ β α γ, ἡμισφαιρίου. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸ γ': πόρισμα, τῆς ῥηθείσης κ ά: δύνανται περιγραφῆναι κύλινδροι ἰσοϋψεῖς περὶ τὸ β α γ, ἡμισφαίριον, ὥστε τὸ ἐξ ἁπάντων μεῖζον εἶναι τῆς θ β δ γ κ, χώνης. ἔστωσαν οὗτοι οἱ β λ, μ ν, ξ ο, π ρ· διαιρεθείσης δὲ καὶ τῆς δ ε, ἡμιδιαμέτρου εἰς ὅσα καὶ ἡ δ α, καὶ διὰ ἑκάστου σημείου τῶν τομῶν παραλλήλων ἀχθεισῶν ἀγομένων τῶν σ τ, υ φ, χ ↓, συμπεπληρώθωσαν οἱ περὶ τὴν θ β δ γ κ, χώνην περιγεγραμμένοι κύλινδροι οἱ σ γ, υ ω, 4 φ, χ 2, 5 ↓, θ 3, 6 κ. Δείκνυται.

Geom: Sol. lib. 1. Fig. 39.



Ὁ β λ, κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τῷ β τ, ὁ δὲ μ ν, τῷ υ ω, 4 φ, σίφωνι, ὁ δὲ ξ ο, τῷ χ 2, 5 ↓, καὶ ὁ π ρ, τῷ θ 3, 6 κ, ὡς δειξόμεθα. ἀλλ' οἱ β λ, μ ν, ξ ο, π ρ, κύλινδροι ἐλάττονές εἰσι τῆς θ β δ γ κ, χώνης κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ οἱ υ ω, 4 φ, χ 2, 5 ↓, θ 3, 6 κ, κυλινδρικοὶ σίφωνες μετὰ τοῦ σ γ, κυλίνδρου ἐλάττονές εἰσι τῆς θ β δ γ κ, χώνης, ἀλλὰ καὶ περιγεγραμμένοι, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα μείζων ἡ θ β δ γ κ, χώνη τοῦ β α γ, ἡμισφαιρίου. δέδεικται δὲ οὐδ' ἐλάττων, ἄρα ἴση. Ὅτι δὲ οἱ ῥηθέντες κυλινδρικοὶ σίφωνες μετὰ τοῦ σ γ, κυλίνδρου ἴσοι εἰσὶ τοῖς περὶ τὸ β α γ, περιγεγραμμένοις κυλίνδροις, δῆλον. οἱ μὲν γὰρ β λ, σ γ, ἔχοντες τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. Ἐπεὶ δὲ οἱ τ μ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν ε τ, τ α, καὶ ἡ μὲν ε τ, ἴση ἐστὶ τῇ τ ω, ἡ δὲ τ α, τῇ ω σ, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς τ μ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τ ω, ω σ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ἀλλ' ἡ μὲν τ μ, ἡμιδιάμετρός ἐστι τοῦ μ ν, κυλίνδρου, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν τ ω, ω σ, ἐστὶ τὸ τῆς ζώνης τοῦ υ ω, 4 φ, κυλινδρικοῦ σίφωνος ὀρθογώνιον, ἄρα κατὰ τὴν ι θ': τοῦ παρ: ὁ μ ν, κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τῷ υ ω, 4 φ, σίφωνι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ὁ ξ ο, κύλινδ. ἴσος τῷ χ 2, 5 ↓, καὶ ὁ π ρ, τῷ θ 3, 6 κ.

ΠΟ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον τῆς σφαίρας κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ αὐτῆς ἡμιδιαμέτρῳ τὸ μὲν ἡμισφαίριον τῆς αὐτῆς σφαίρας διπλάσιόν ἐστιν, ἡ δὲ σφαῖρα τετραπλάσιος.

Πρότασις ΜΑʹ.

Κύλινδρος περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένος ἡμιόλιός ἐστι τῆς αὐτῆς σφαίρας.

Ἔστω κύλινδρος ὁ ζθκη, περὶ σφαῖραν τὴν αβεγ, περιγεγραμμένος. Λέγω δὴ τὸν ζθκη, κύλινδρον ἡμιολίου λόγον ἔχειν πρὸς τὴν αβεγ, σφαῖραν. τοῦ γὰρ δθκ, κώνου ὁ βθκγ, κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι κατὰ τὴν ι: τοῦ ιβʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τῷ δὲ βθκγ, κυλίνδρῳ ἴσος ἐστὶν ὁ ζβγη, ὅλος ἄρα ὁ ζθκη, κύλινδρος ἑξαπλάσιός ἐστι τοῦ δθκ, κώνου, ἀλλ' ἡ αβεγ, σφαῖρα τετραπλάσιός ἐστι τοῦ αὐτοῦ δθκ, κώνου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, ἄρα ὁ ζθκη, κύλινδρος πρὸς τὴν αβεγ, σφαῖραν ἔχει, ὡς ὁ 6, πρὸς τὸν 4, ἀλλ' ὁ τοῦ 6, πρὸς τὸν 4, λόγος ἡμιόλιός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ τοῦ ζθκη, κυλίνδρου λόγος πρὸς τὴν αβγε, σφαῖραν ἡμιλιός ἐστι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Αʹ.

Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις τετραπλασιός ἐστι τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς αὐτῆς. Ἐπεὶ γὰρ οἱ ἰσοϋψεῖς κῶνοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν ὡς αἱ βάσεις κατὰ τὴν ιαʹ: τοῦ ιβʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε ὁ τετραπλασίονα βάσιν ἔχων τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας, κύκλου, τετραπλάσιος ἔσται τοῦ ἔχοντος βάσιν ἴσην τῷ μεγίστῳ τῆς αὐτῆς σφαίρας κύκλῳ, ἀλλὰ καὶ ἡ σφαῖρα τετραπλάσιός ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου κατὰ τὸ πόρ: τῆς μʹ: τοῦ παρόντος, ἄρα ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις τετραπλασιός ἐστι τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς αὐτῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Βʹ.

Ἔτι ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις ὁ μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος, καὶ ὕψος δύο τρίτα τῆς διαμέτρου τῆς αὐτῆς σφαίρας. ἐπεὶ γὰρ ὁ κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην τῷ μεγίστῳ τῆς σφαίρας κύκλῳ, ὕψος δὲ ὁμοίως ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς αὐτῆς, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν περιγεγραμμένος περὶ τὴν σφαῖραν ἔχει λόγον ἡμιολίου πρὸς τὴν αὐτὴν σφαῖραν, ἄρα ὁ δύο τρίτα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ἔχων ὕψος, ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ.

ΠΟ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἔτι ὁ πινακίσκος, ὅς καὶ σάφη λέγεται, τὸ ἐναπολειπόμενον δηλ: τοῦ κυλίνδρου μέρος τῇ τοῦ ἡμισφαιρίου ἀφαιρέσει, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ μέγιστος τῆς αὐτῆς σφαίρας κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ἡμιδιάμετρος. Ἐπεὶ γὰρ ὁ μὲν βθκγ, κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ δκθ, κώνου, τὸ δὲ βιγ, ἡμισφαίριον διπλοῦν. πάντως γε ἀφαιρεθέντος τοῦ βιγ, ἡμισφαιρίου ἀπὸ τοῦ βθκγ, κυλίνδρου, ἐναπολείπεται ὁ βθκγι, πινακίσκος ἴσος τῷ δθκ, κώνῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

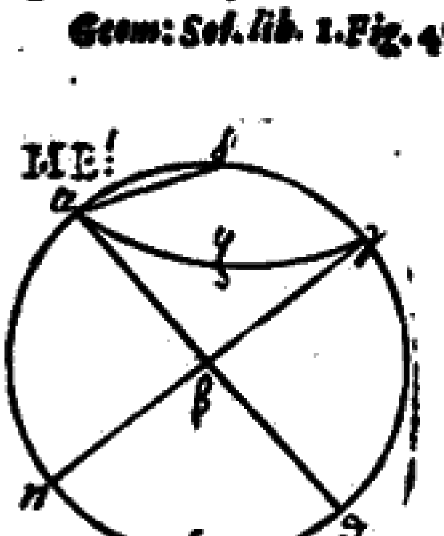
Ἔτι τὸ τῇ περιστροφῇ τοῦ βθι, μικτοῦ τριγώνου συνιστάμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ τῇ περιστροφῇ τοῦ διι, τομέως συνισταμένῳ. Ἐπεὶ γὰρ ὅλος ὁ βθκγι, πινακίσκος ἴσος ἐστὶν ὅλῳ τῷ δθκ, κώνῳ, πάντως γε τὸ βθιι, ἥμισυ τοῦ βθκγι, πινακίσκου, ἴσον ἐστὶ τῷ δθι, ἡμίσει τοῦ δθκ, κώνου. κοινοῦ δ' ἀφαιρεθέντος τοῦ θιι, ἐναπολείπεται ἴσον τὸ βθι, τῷ διι.

Πρότασις ΜΒ'.

Τομεὺς πρὸς τὴν σφαῖραν, ἧς ἐστι τομεύς, ἔχει ὡς ἡ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆς αὐτῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν.

Ἔστω τομεὺς ὁ αβγδ, σφαίρας τῆς αεγδ. Λέγω δὴ τὸν αβγδ, τομέα ἔχειν πρὸς τὴν αεγδ, σφαῖραν, ὡς ἡ τῆς αζγδ, βάσεως αὐτοῦ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆς αεγδ, σφαίρας ἐπιφάνειαν. Συναθροίσθωσαν ἐν τῇ αεγδ, σφαίρᾳ κῶνοι δὶς εἰπεῖν ἕξ, ὥστε τοὺς τῶν βάσεων αὐτῶν κύκλους ἀλλήλων ἅπτεσθαι, ὧν ὁ μὲν βαγ, πρὸς τὰ ἔμπροσθεν τῆς σφαίρας μέρη τὴν βάσιν ἐχέτω, ὁ δὲ βηθ, πρὸς τὰ ὄπισθεν, ὁ δὲ βγθ, πρὸς τὰ δεξιά, καὶ ὁ βαη, πρὸς τὰ ἀριστερά, τῶν δὲ λοιπῶν δύο ὁ μὲν πρὸς τὰ ἄνω, ὁ δὲ αβη, πρὸς τὰ κάτω. καὶ ἐπεὶ μεταξὺ τῶν βάσεων τῶν αὐτῶν κώνου ἐναπολείπονται σφαιρικὰ τρίγωνα ὀκτώ, καὶ τούτων ἕκαστον βάσις ἐστὶν ἁπλοῦς τομέως, ἢ κρεῖττον εἰπεῖν τριγωνοειδοῦς τῆς αὐτῆς σφαίρας, δῆλον ὅτι ἡ μὲν σφαῖρα διαιρεῖται εἰς τομεῖς τέσσαρας καὶ δέκα, τοὺς ἓξ μὲν κωνοειδεῖς, τοὺς δ' ὀκτὼ τριγωνοειδεῖς, καὶ πάντας ἰσοϋψεῖς, ἡ δ' ἐπιφάνεια τῆς αὐτῆς σφαίρας διαιρεῖται ὁμοίως εἰς τεσσαρεσκαίδεκα μέρη, τὰ ἓξ μὲν κυκλοφερῆ, τὰ δὲ λοιπὰ τριγωνοειδῆ.

Geom: Sel. lib. 1. Fig. 40.



ἀλλὰ καὶ τὴν λβ': τοῦ ια': τῶν Στοιχείων τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, ὡς δὲ τὰ τοιαῦτα παραλληλεπίπεδα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ἔχουσι δήπουθεν καὶ τὰ ἑτέρου εἴδους ὅμοια στερεά, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὄντα ὕψος. ὁ αὐτὸς γὰρ λόγος παντὶ

εἴδει

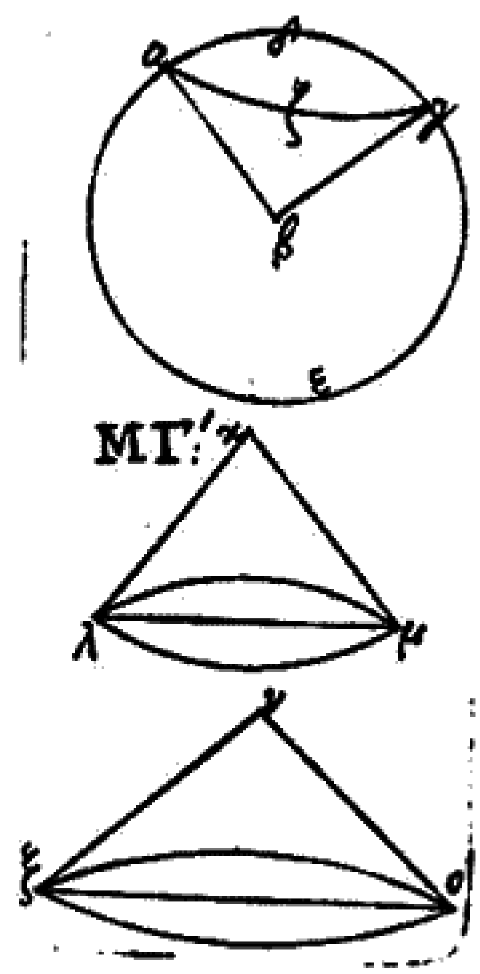
εἴδει στερεῦ, ἄρα οἵ τε ἓξ κωνικοὶ τομεῖς ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς ἔχουσι καὶ αἱ ἓξ κυκλοφερεῖς αὐτῶν βάσεις, καὶ οἱ ὀκτὼ τριγωνοειδεῖς τομεῖς ὡς αἱ ὀκτὼ αὐτῶν τριγωνοειδεῖς βάσεις. ὥστε ἐπεὶ ἰσοπληθεῖς εἰσιν οἱ τεσσαρεσκαίδεκα τομεῖς ταῖς αὐτῶν βάσεσιν, ἔσται πάντως ὡς εἷς τομεὺς πρὸς μίαν τὴν αὐτῦ βάσιν, οὕτω καὶ πάντες οἱ τομεῖς, ἤτοι ὅλη ἡ σφαῖρα, πρὸς πάσας τὰς αὐτῶν βάσεις, πρὸς τὴν ὅλην δηλ: τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν κατὰ τὴν ιβ': τῦ ε': τῦ αὐτῦ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς εἷς τομεὺς πρὸς πάντας τὰς τομεῖς, ἤγουν τὴν ὅλην σφαῖραν, ἡ αὐτῦ βάσις πρὸς πάσας τὰς βάσεις δηλ: τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΜΓ':

Τομεὺς σφαίρας ἴσος ἐστὶ κώνῳ, ἧ ὕψος μὲν ἴσον τῇ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἡμιδιαμέτρῳ, βάσις δὲ ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς τῦ τομέως βάσεως.

Ἔστω τομεὺς ὁ β α δ γ, σφαίρας τῆς α ε γ δ. Λέγω τὸν β α δ γ, τομέα ἴσον εἶναι τῷ κ λ μ, κώνῳ, ἧ ὕψος ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς α ε γ δ, σφαίρας, καὶ βάσις ἴση τῇ τῦ α δ γ ζ, τμήματος ἐπιφανείᾳ. Ἔστω γὰρ καὶ ἕτερος κῶνος ὁ ν ξ ο, ἧ ὕψος ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ, βάσις δὲ τετραπλάσιος τῦ μεγίστου τῆς αὐτῆς σφαίρας κύκλου. καὶ ἐπεὶ ὁ ν ξ ο, κῶνος ἔχει ὕψος ἴσον τῷ κ λ μ, κώνῳ, πάντως γε κατὰ τὴν λβ': τῦ ιά: τῦ Στοιχειωτῦ. (ὁ γὰρ τῶν παραλληλεπιπέδων πρὸς τὰς αὐτῶν βάσεις λόγος ὁ αὐτός ἐστι καὶ τῶν ὁμοίων στερεῶν παντὸς εἴδους πρὸς τὰς αὐτῶν βάσεις) ὁ κ λ μ, κῶνος ἔχει πρὸς τὸν μ ξ ο, ὡς ἡ λ μ, βάσις πρὸς τὴν ξ ο, βάσιν, ἀλλ' ὁ β α δ γ, τομεὺς ἔχει πρὸς τὴν α ε γ δ, σφαῖραν, ὡς ἡ τῦ α ζ γ δ, τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆς α ε γ δ, σφαίρας ἐπιφάνειαν κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἡ δὲ α ε γ δ, σφαῖρα ἴση ἐστὶ τῷ ν ξ ο, κώνῳ κατὰ τὸ ά: πόρισμα τῆς μά: τῦ παρ:, καὶ ἡ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τῇ ξ ο, βάσει κατὰ τὴν λδ': τῦ αὐτῦ, ἄρα καὶ ὁ κ λ μ, κῶνος ἔχει πρὸς τὴν α ε γ δ, σφαῖραν, ὡς ἡ λ μ, αὐτοῦ βάσις πρὸς τὴν τῆς αὐτῆς σφαί-

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 41.

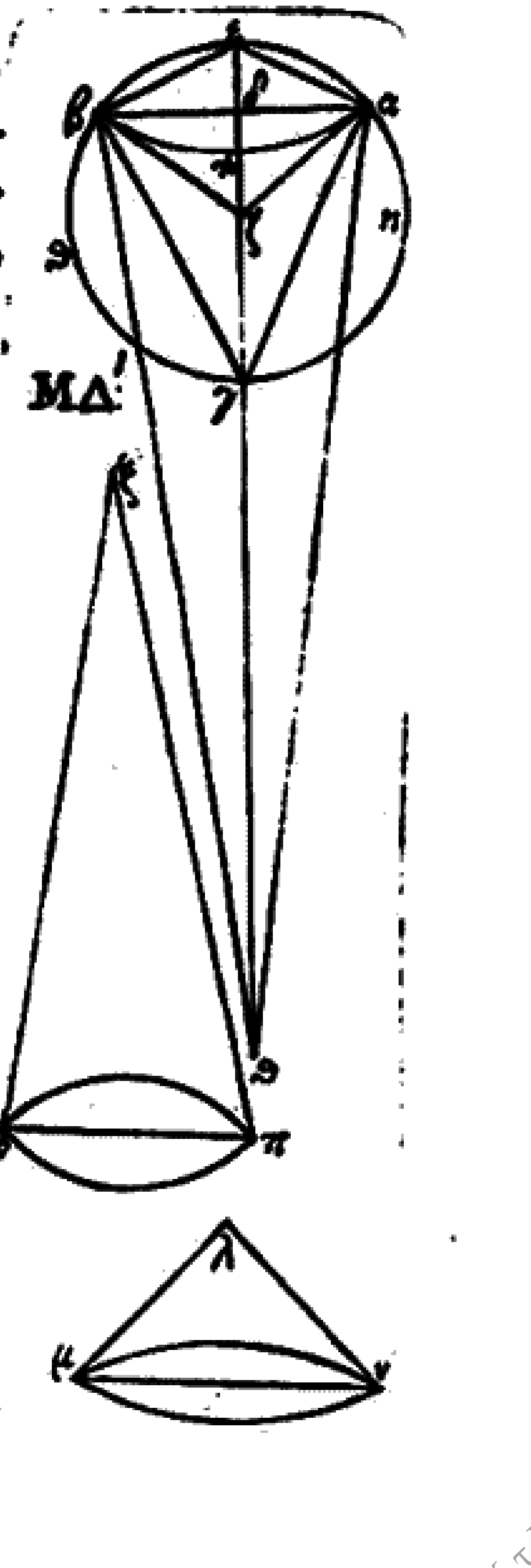


ρας ἐπιφάνειαν, ἀλλ' ἡ λ μ, βάσις ἴση ἐςὶ τῇ τοῦ α ζ γ δ, κύκλου ἐπιφανείᾳ, ἄρα καὶ κῶνος ὁ κ λ μ, ἴσος ἐςὶ τῷ β α δ γ, τομεῖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΜΔ'.

Τμῆμα οἱονδήποτε σφαίρας ἴσον ἐςὶ κώνῳ, οὗ βάσις ἡ αὐτὴ, ἥτις καὶ τοῦ τμήματός ἐςι βάσις, καὶ ὕψος τὸ συγκείμενον ἔκτε τοῦ ὕψους τοῦ τμήματος, καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγου τῶν ὑψωμάτων ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων τῆς σφαίρας, τοῦ τε λαμβανομένου, καὶ τοῦ ἐναπολειπομένου, καὶ ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτῆς σφαίρας.

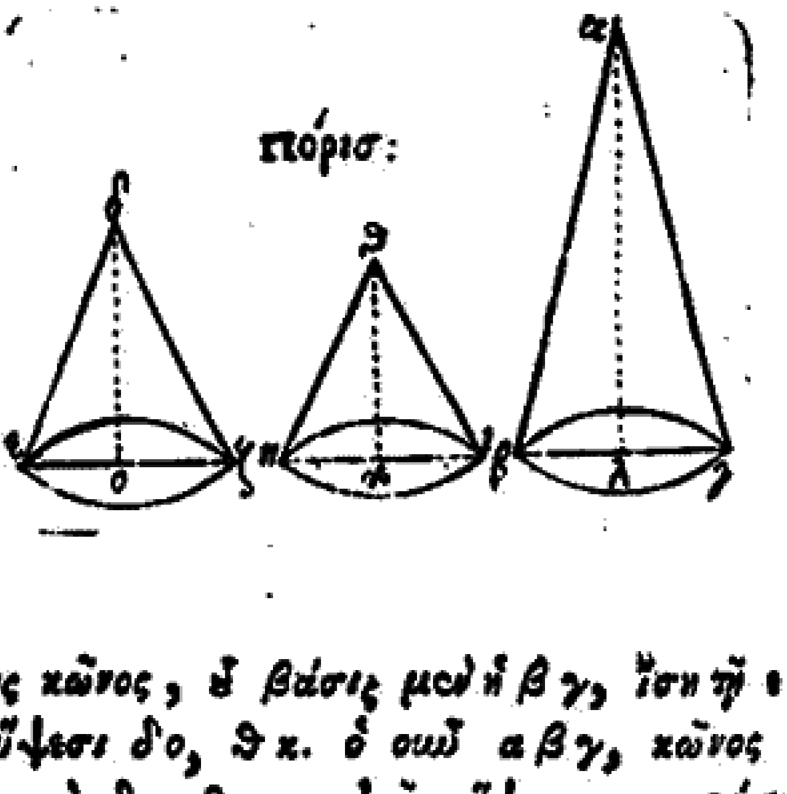
Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 42.



ΜΔ'

Ἔςω σφαίρας τμῆμα τὸ α γ β, καὶ κῶνος ὁ α θ β, οὗ βάσις ὁ α ε β κ, κύκλος, ὅς ἐςι βάσις καὶ τοῦ α γ β, τμήματος, ὕψος δὲ ἡ δ θ, συγκειμένη ἔκτε τοῦ δ γ, ὕψους τοῦ α γ β, τμήματος, καὶ γ θ, τετάρτης ἀναλόγου τῶν ε δ, δ γ, ζ γ, ὧν ἡ μὲν ε δ, ὕψος τοῦ α ε β, ἐναπολειπομένου τμήματος, ἡ δὲ δ γ, τοῦ α γ β, λαμβανομένου, καὶ ἡ γ ζ, ἡμιδιάμετρος τῆς ε η θ, σφαίρας. Λέγω ὅτι τὸ α γ β, τμῆμα ἴσον ἐςὶ τῷ α θ β, κώνῳ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ α γ, γ β, α ζ, ζ β· καὶ ἐπεὶ τὰ γ α ε, γ δ α, α δ ε, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι κατὰ τὴν η': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ. πάντως γε ὡς ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε α, ἡ ε α, πρὸς τὴν ε δ, αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι γ ε, ε α, ε δ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὥςε ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε δ, ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐςὶν, ἤπερ πρὸς τὴν ε α, ἀλλ' ὡς ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε α, ἔςι καὶ ἡ γ α, πρὸς τὴν α δ, ἄρα ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε δ, ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐςὶν, ἤπερ ἡ γ α, πρὸς τὴν α δ. Λαμβανομένων δὲ τῶν γ α, α δ, ἀντὶ ἡμιδιαμέτρων, ἔςι καὶ ὁ τῆς γ α, κύκλος πρὸς τὸν τῆς α δ, κύκλον ἐνδιπλασίονι λόγῳ τῆς γ α, πρὸς τὴν α δ, κατὰ τὴν β': τοῦ ι β': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ὁ τῆς γ α, κύκλος πρὸς τὸν τῆς α δ, ἔχει ὡς ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε δ, ἀλλ' ὁ τῆς γ α, κύκλος ἴσος ἐςὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α γ β, τμήματος κατὰ τὴν λ ε: τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἡ τοῦ α γ β, τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν τῆς α δ, κύκλον, τὸν α ε β κ, ἔχει ὡς ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε δ. Ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὡς ἡ ε δ, πρὸς τὴν δ γ, ἔςι καὶ ἡ ζγ, πρὸς τὴν γθ, τετάρτην ἀνάλογον, πάντως γε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ γδ, πρὸς τὴν δε, ἡ θγ, πρὸς τὴν γζ, καὶ συνθέσει, ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν εδ, ἡ θζ, πρὸς τὴν γζ· ὡς δὲ ἡ γε, πρὸς τὴν εδ, ἔχει καὶ ἡ τοῦ αγβ, τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν αεβκ, κύκλον, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ θζ, πρὸς τὴν ζγ, ἔχει ὡς ἡ τοῦ αγβ, τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν αεβκ, κύκλον. Ἐὰν οὖν συςαθῶσι δύο κῶνοι, δὸς εἰπεῖν, οἱ λμν, ξοπ, ὥστε τὸν μὲν ἔχειν βάσιν τὸν μν, κύκλον, ἴσον τῇ τοῦ αβγ, τμήματος ἐπιφανείᾳ, τοῦ ἐςι τὸν τῆς γα, ὕψος δὲ τὴν ζγ, τὸν δὲ ἕτερον ἔχειν βάσιν μὲν τὸν οπ, ἴσον τῷ αεβκ, κύκλῳ, καὶ ὕψος ἴσον τῇ ζθ, ἔσονται δήπουθεν ἴσοι κατὰ τὴν ιέ: τοῦ ιβ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἀλλ' ὁ μὲν λμν, ἴσος ἐςὶ τῷ αγβζ, τομεῖ κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἄρα καὶ ὁ ξοπ, ἴσος ἐςὶ τῷ αὐτῷ αγβζ, τομεῖ, κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ αβζ, κώνου τῷ τε αγβζ, τομεῖ, καὶ τῷ ξοπ, κώνῳ, ἔςαι τὸ αγβ, τμῆμα ἴσον δυσὶ κώνοις τοῖς ξοπ, αζβ. Ἐπεὶ δὲ οἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως κῶνοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη κατὰ τὴν ιδ': τοῦ αὐτοῦ, συςαθήτωσαν τρεῖς κῶνοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, ἤτοι τοῦ αεβκ, κύκλου ὧν ὁ μὲν ἐχέτω ὕψος τὴν δζ, ὁ δὲ τὴν ζθ, καὶ ὁ γ': τὴν δθ, καὶ πάντως γε ὁ γ': οὗτος κῶνος, οὗ ὕψος ἡ δθ, ἴσος ἔςαι τοῖς λοιποῖς δυσὶν, ὅτι καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ δθ, ἴσον ἐςὶ τοῖς ἐκείνων ὕψεσι δζ, ζθ; ἀλλ' οἱ δύο ξοπ, αζβ, ἴσοι εἰσὶ τῷ αγβ, τμήματι, ὡς δέδεικται, ἄρα τὸ αγβ, τμῆμα ἴσον ἐςὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ὁ αεβκ, κύκλος, ὅς ἐςι βάσις καὶ τοῦ αγβ, τμήματος, ὕψος δὲ ἡ δθ, συγκειμένη ἔκτε τοῦ δγ, ὕψους τοῦ αγβ, τμήματος, καὶ τῆς γθ, τετάρτης ἀναλόγου τῶν δε, δγ, ὑψῶν τῶν τμημάτων τῆς δοθείσης σφαίρας καὶ ζγ, ἡμιδιαμέτρου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι, Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 43.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

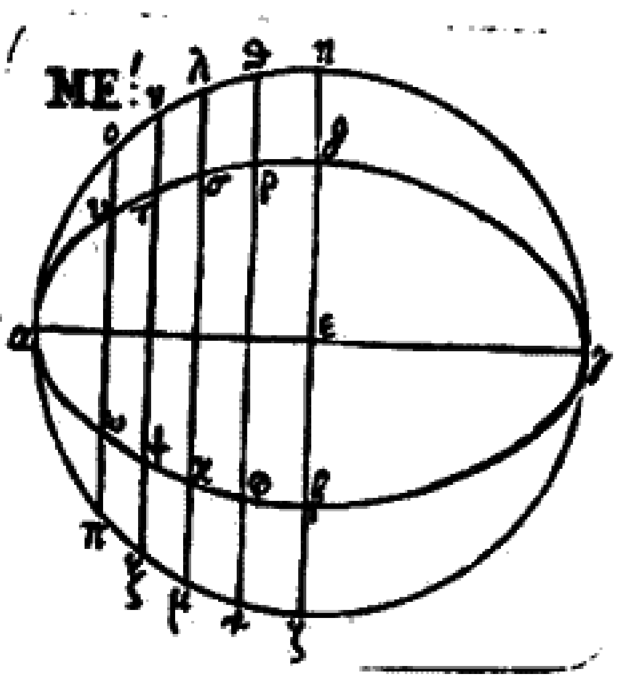


Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἐὰν ὦσιν ὁσοιδήποτουν κῶνοι ἐπὶ ἴσων βάσεων διαφέροντες τοῖς ὕψεσιν, ᾖ δὲ καὶ ἄλλος τὶς κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἴση τῇ τοῦ ἑνὸς βάσει, ὕψος δὲ ἴσον τοῖς ὕψεσιν ἁπάντων τῶν προϋποτεθέντων, πάντως γε ὁ κῶνος οὗτος ἴσος ἔςαι τοῖς προϋποτεθεῖσιν ἐκείνοις κώνοις. Ἔςωσαν γὰρ κῶνοι οἱ δεζ, θηι, ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν εζ, ηι, ἔχοντες ὕψη τὰ δο, θκ, διάφορα. Ἔςω δὲ καὶ ἕτερος κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἡ βγ, ἴση τῇ εζ, ἢ ηι, ὕψος δὲ τὸ αλ, ἴσον τοῖς δυσὶν ὕψεσι δο, θκ. ὁ οὖν αβγ, κῶνος ἴσος ἐςὶ τοῖς δεζ, θηι, ὡς γὰρ ἔχουσι τὰ δο, θκ, αὐτῶν ὕψη συναμφότερα πρὸς τὸ αλ, ὕψος, ἔχουσι δήπουθεν καὶ συναμφότεροι οἱ δεζ, θηι, κῶνοι πρὸς τὸν α β η γ, κῶνον καὶ τὸν ῥηθέντα κ.δ.ζ, ἀλλὰ συναμφότεροι τε δ ο, θ π, ὅθεν ἴσοι εἰσὶ τῷ α λ, πάντως γε καὶ συναμφότεροι οἱ δ ε ζ, θ η ι, κῶνοι ἴσοι εἰσὶ τῷ α β γ, κώνῳ.

Πρότασις ΜΕ'.

Ἔλλειψις σφαιροειδὴς πρὸς μὲν τὴν τῆς μείζονος διαμέτρου σφαῖραν ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τοῦ τῆς ἐλάττονος διαμέτρου πρὸς τὴν μείζονα, πρὸς δὲ τὴν τῆς ἐλάττονος διαμέτρου σφαῖραν ἐν διπλασίονι λόγῳ τοῦ τῆς μείζονος διαμέτρου πρὸς τὴν ἐλάττονα.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 44.



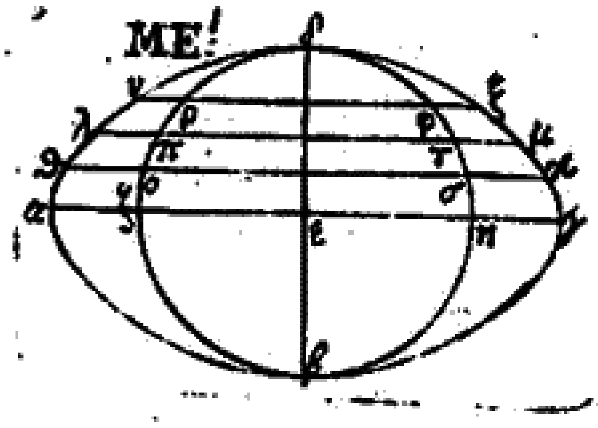
Ἔστω δὴ α' ἔλλειψις σφαιροειδὴς ἡ α β γ δ, ἧς κέντρον τὸ ε, καὶ μείζων μὲν διάμετρος ἡ α γ, ἐλάττων δὲ ἡ δ β, ἔστω δὲ καὶ σφαῖρα περὶ τὴν α γ, μείζονα αὐτῆς διάμετρον ἡ α ζ γ η. Λέγω ὅτι ἡ α β γ δ, σφαιροειδὴς ἔλλειψις πρὸς τὴν α ζ γ η, σφαῖραν ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τοῦ τῆς δ β, πρὸς τὴν α γ, λόγου. Ἤχθωσαν γὰρ παράλληλοι τῇ δ β, αἱ θ κ, λ μ, ν ξ, ο π, καὶ ἐπεὶ ἑκάστη τῶν θ κ, λ μ, καὶ λοιπῶν τέμνονται ὑπὸ τῆς α β γ δ, ἐλλείψεως κατὰ τὸν λόγον τοῦ δ β, ἐλάττονος διαμέτρου τῆς αὐτῆς ἐλλείψεως πρὸς τὴν α γ, μείζονα κατὰ τὴν λ β': τοῦ ζ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, οἱ δὲ κύκλοι τῶν ρ φ, σ χ, τ ψ, υ ω, διαμέτρων πρὸς τοὺς κύκλους τῶν θ κ, λ μ, ν ξ, ο π, ἐνδιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων κατὰ τὴν α': τοῦ γ': τοῦ α': τμήματος, πάντως γε ἕκαστος κύκλος τῶν ρ φ, σ χ, καὶ λοιπῶν καταλλήλως παραβαλλόμενος ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς δ β, ἐλάττονος διαμέτρου πρὸς τὴν α γ, μείζονα, ἀλλ' ὡς εἷς τῶν περὶ τὰς ρ φ, σ χ, καὶ λοιπὰς διαμέτρους κύκλων πρὸς ἕνα τῶν περὶ τὰς θ κ, λ μ, καὶ λοιπὰς, ἔχουσι πάντως καὶ οἱ κύκλοι πρὸς πάντας κατὰ τὴν ι β': τοῦ ε': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα σύμπαντες οἱ κύκλοι αἱ περὶ τὰς ρ φ, σ χ, καὶ λοιπὰς διαμέτρους πρὸς σύμπαντας τοὺς περὶ τὰς θ κ, λ μ, καὶ λοιπὰς, κύκλους ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῆς δ β, πρὸς τὴν α γ. Ἐὰν δὲ ἐννοηθῶσι διὰ ἑκάστου σημείου τῆς α γ, ἐπίπεδα διέρχεσθαι παραλλήλως τῷ διὰ τῆς δ β, πάντως γε οἱ μὲν ὑπὸ τῆς ἐλλείψεως περιεχόμενοι τὸ τῆς αὐτῆς ἐλλείψεως ἀναπληροῦσι στερεὸν, οἱ δὲ ὑπὸ τῆς α ζ γ η, σφαίρας τὸ τῆς αὐτῆς σφαίρας ὁμοίως στερεὸν ἀναπληροῦσι, καὶ ἑπομένως ἡ α β γ δ, σφαιρικὴ ἔλλειψις πρὸς τὴν α ζ γ η, σφαῖραν ἐνδι-

πλα-

πλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῷ τῆς ἐλάττονος δβ, διαμέτρου πρὸς τὴν αγ, μείζονα, ὅπερ ἔδ. τὸ α΄:

Ἔστω β΄: ἔλλειψις μὲν σφαιροειδὴς ἡ αβγδ, περὶ δὲ τὴν ἐλάττονα αὐτῆς δβ, διάμετρον σφαῖρα ἡ δζβη, καὶ ἀχθήτωσαν αἱ θκ, λμ, νξ, παράλληλοι τῇ αγ, μείζονι αὐτῆς διαμέτρῳ. Εἰ τοίνυν δ᾽ ὅπως ὑποτεθέντων τε καὶ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἑκάστη τῶν θκ, λμ, νξ, τέμνεται ὑπὸ τοῦ δζβη, κύκλου κατὰ τὸν λόγον τῆς αγ, μείζονος διαμέτρου τῆς αβγδ, ἐλλείψεως πρὸς τὴν δβ, ἐλάττονα τῆς αὐτῆς διαμέτρου, ὡς δέδεικται πρότασει λγ΄: τοῦ ζ΄: τοῦ α΄: τμήματος, εὐχερῶς δειχθήσεται κατὰ τὰ προειρημένα τὴν αβγδ, σφαιροειδῆ ἔλλειψιν πρὸς τὴν δζβη, σφαῖραν ἐνδιπλασίονι εἶναι λόγῳ τῆς αγ, μείζονος διαμέτρου τῆς αβγδ, ἐλλείψεως πρὸς τὴν δβ, ἐλάττονα τῆς αὐτῆς διαμέτρου. ὅπερ ἔδ. τὸ β΄: Ἔλλειψις ἄρα σφαιροειδὴς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Sol. Lib. 2. Sib. 45.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι τὸ οἱονδήποτε τῆς σφαιροειδοῦς ἐλλείψεως τμῆμα πρὸς μὲν τὸ κατάλληλον τμῆμα τῆς περὶ τὴν μείζονα τῆς αὐτῆς ἐλλείψεως διάμετρον σφαίρας ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς ἐλάττονος διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὴν μείζονα τῆς αὐτῆς διάμετρον, πρὸς δὲ τὸ τμῆμα τῆς περὶ τὴν ἐλάττονα διάμετρον τῆς ἐλλείψεως, σφαίρας ἐνδιπλασίονι λόγῳ τῆς μείζονος τῆς ἐλλείψεως διαμέτρου πρὸς τὴν ἐλάττονα τῆς αὐτῆς διάμετρον. εἰ μὲν γὰρ ζητηθῇ ὁ λόγος τοῦ βαδ, τμήματος ἐπὶ τοῦ α΄: διαγράμματος πρὸς τὸ ζαη, ἢ ὁ τοῦ χασ, πρὸς τὸ μαλ, τῇ αὐτῇ δείξει χρώμενοι, συνάξομεν τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ ἐπὶ τοῦ ὅλου πρὸς τὸ ὅλον. εἰ δέ γε ζητηθῇ ὁ τοῦ αδγ, λόγος, ἐπὶ τοῦ β΄: διαγράμματος, πρὸς τὸ ζδη, ἢ ὁ τοῦ θδκ, πρὸς τὸ οδσ, συναχθήσεται παντως, ὅπερ καὶ ἐπὶ τοῦ ὅλου αβγδ, πρὸς ὅλον τὸ δζβη.

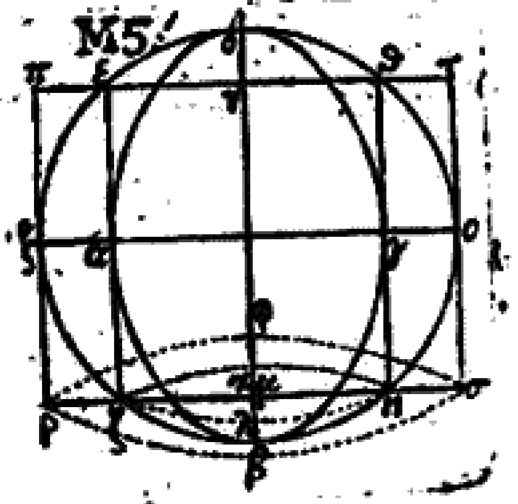
Πρότασις Μϛ΄:

Τὸ τῆς σφαιροειδοῦς ἐλλείψεως στερεὸν ἴσον ἐστὶ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ αὐτὴ τῇ τῆς ἐλλείψεως, ὕψος δὲ δύο τρίτα τοῦ τῆς ἐλλείψεως ὕψους.

Ἔστω α΄: ἔλλειψις σφαιροειδὴς ἡ αβγδ, ἧς ὕψος ἡ μείζων αὐτῆς διάμετρος δβ, ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος περὶ αὐτὴν ὁ εζηθ, οὗ βάσις μὲν ὁ ζλιηκ, κύκλος

ἴσος,

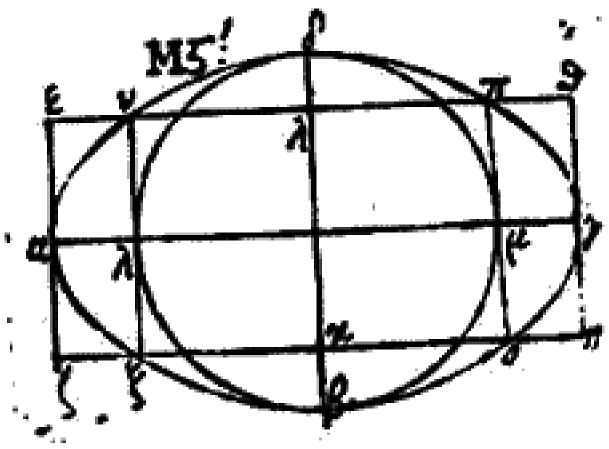
Geom. Sol. Lib. 2. Fig. 46.



ἴσος τῷ περὶ τὴν αγ, κύκλῳ (ἴση γὰρ ἡ αβ, τῇ ζη,) ὅς καὶ βάσις ἐνταῦθα τῆς ἐλλείψεως λαμβάνεται, ὕψος δὲ τὸ μν, δύο τρίτα τοῦ βδ, τῆς ἐλλείψεως ὕψους περιέχον. Λέγω ὅτι ἡ αβγδ, ἔλλειψις ἴση ἐςὶ τῷ ζθ, κυλίνδρῳ· γραφήτω γὰρ περὶ τὴν δξβο, σφαῖραν κύλινδρος ὁ πρστ, οὗ βάσις μὲν ἴση τῷ μεγίςῳ τῆς αὐτῆς σφαίρας κύκλῳ ὁ ρφσβ, δηλονότι κύκλος, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ, ὅ καὶ τοῦ ζθ· καὶ ἐπεὶ ἡ δξβο, σφαῖρα πρὸς τὴν αβγδ, ἔλλειψιν ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐςὶ τῆς δβ, μείζονος πρὸς τὴν αγ, ἐλάττονα κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τουτὸν δ' ἐςὶν εἰπεῖν τὴν ρσ, πρὸς τὴν ζη, ἔςι δὲ καὶ ὁ ρφσβ, κύκλος πρὸς τὸν ζκηλ, κύκλον ἐνδιπλασίονι λόγῳ τῆς ρσ, πρὸς τὴν ζη, κατὰ τὴν α: τοῦ γ': τοῦ α: τοῦ παρόντος, πάντως γε ὡς ἡ δξβο, σφαῖρα πρὸς τὴν αβγδ, σφαιροειδῆ ἔλλειψιν, ὁ ρφσβ, κύκλος πρὸς τὸν ζκηλ, κύκλον, ὡς δὲ ὁ ρφσβ, κύκλος πρὸς τὸν ζκηλ, κύκλον, ἔςι καὶ ὁ ρτ, κύλινδρος πρὸς τὸν ζθ, κύλινδρον κατὰ τὴν ια: τοῦ ιβ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ ὡς ὁ ρτ, κύλινδρος πρὸς τὸν ζθ, ἡ δξβο, σφαῖρα πρὸς τὴν αβγδ, ἔλλειψιν. ἀλλ' ἡ δξβο, σφαῖρα ἴση ἐςὶ τῷ ρτ, κυλίνδρῳ, κατὰ τὸ β': τῆς μ α': τοῦ παρόντος πόρισ: ἴση ἄρα καὶ ἡ αβγδ, ἔλλειψις τῷ ζθ, κυλίνδρῳ.

Ἔςω β': ἔλλειψις ἡ αβγδ, καὶ γραφήτω περὶ αὐτὴν κύλινδρος ὁ εζηθ, οὗ βάσις μὲν ἴση τῷ περὶ τὴν μείζονα τῆς ἐλλείψεως διάμετρον κύκλῳ, ὁ περὶ τὴν ζη, δηλον: κύκλος, ὕψος δὲ ἡ κλ, δύο τρίτα καὶ αὐτὴ περιέχουσα τῆς δβ, ἐλάττονος τῆς ἐλλείψεως διαμέτρου. ὅτι δὲ ἡ αβγδ, ἔλλειψις ἴση ἐςὶ τῷ ζθ, κυλίνδρῳ, δῆλον. Περιγραφήτω γὰρ καὶ περὶ τὴν δλβμ, σφαῖραν ὁ νξοπ, κύλινδρος ἰσοϋψὴς τῷ ζθ, ἔχων δὲ βάσιν ἴσην τῷ μεγίςῳ τῆς δλβμ, σφαίρας κύκλῳ· καὶ ἐπεὶ ἡ δλβμ, σφαῖρα πρὸς τὴν αβγδ, ἔλλειψιν ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐςὶ τῆς δβ, ἐλάττονος τῆς ἐλλείψεως διαμέτρου πρὸς τὴν αγ, μείζονα, τουτέςι τῆς ξο, πρὸς τὴν ζη, ἀλλὰ καὶ ὁ περὶ τὴν ξο, κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὴν ζη, κύκλον ὁμοίως ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐςὶ τῆς ξο, πρὸς τὴν ζη. ὡς ἄρα ὁ περὶ τὴν ξο, κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὴν ζη, κύκλον, ἡ δλβμ, σφαῖρα πρὸς τὴν αβγδ, ἔλλειψιν, ἀλλ' ὡς ὁ περὶ τὴν ξο, κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὴν ζη, κύκλον, ἔςι καὶ ὁ ξπ, κύλινδρος πρὸς τὸν ζθ, κύλινδρον, ἄρα καὶ ὡς ὁ ξπ,

Geom: Sol. lib. 2. Fig. 47.



κύλιν-

κύλινδρος πρὸς τὸν ζ θ, κύλινδρον ἡ δ λ β μ, σφαῖρα πρὸς τὴν α β γ δ, ἔλλειψιν, ἡ δὲ δ λ β μ, σφαῖρα ἴση ἐςὶ τῷ ξ ο, κυλίνδρῳ, ἄρα καὶ ἡ α β γ δ, ἔλλειψις ἴση ἐςὶ τῷ ζ θ, κυλίνδρῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΜΖ'.

Τὸ οἱονδήποτε τῆς σφαιροειδοῦς ἐλλείψεως τμῆμα ἔχει πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἐπὶ τῆς αὐτῆς αὐτῷ ὄντι βάσεως καὶ τὸ αὐτὸ ἔχοντι ὕψος, ὡς τὸ κατάλληλον τμῆμα τῆς περί τινα τῶν αὐτῆς διαμέτρων σφαίρας πρὸς τὸν κῶνον, τὸν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὄντα βάσεως τῷ τῆς σφαίρας τμήματι, καὶ τὸ αὐτὸ ἔχοντα ὕψος.

Ἔςω τμῆμα μὲν σφαιροειδοῦς ἐλλείψεως τὸ α β γ, οὗ βάσις ὁ α γ, κύκλος, κῶνος δὲ ὁ β α γ, βάσιν ἔχων τὸν αὐτὸν α γ, κύκλον, καὶ ὕψος τὸ ζ β, ὅ καὶ τοῦ α β γ, τμήματος. Ἔςω δὴ καὶ τμῆμα τῆς περὶ τὴν μείζονα διάμετρον τῆς ἐλλείψεως σφαίρας τὸ δ β ε, καὶ κῶνος ὁ δ β ε, οὗ βάσις ὁ δ ε κύκλος, ὅ καὶ τοῦ τμήματος βάσις ὤν, καὶ ὕψος τὸ ζ β. Λέγω ὅτι ὡς τὸ δ β ε, τῆς σφαίας τμῆμα πρὸς τὸν δ β ε, κῶνον, ἔχει καὶ τὸ α β γ, τῆς σφαιρικῆς ἐλλείψεως τμῆμα πρὸς τὸν β α γ, κῶνον. κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς με': τοῦ παρ: τὸ α β γ, τμῆμα πρὸς τὸ δ β ε, ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐςὶ τῆς ἐλάττονος διαμέτρου πρὸς τὴν μείζονα. ἀλλ' ὡς ἡ ἐλάττων διάμετρος πρὸς τὴν μείζονα, ἔχει καὶ ἡ α γ, διάμετρος τῆς βάσεως τοῦ α β γ, τμήματος πρὸς τὴν δ ε, διάμετρον τῆς βάσεως τοῦ δ β ε, τμήματος κατὰ τὴν λ β': τοῦ ζ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, ἄρα τὸ α β γ, τμῆμα πρὸς τὸ δ β ε, ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐςὶ τῆς α γ, πρὸς τὴν δ ε. Ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ α γ, κύκλος πρὸς τὸν δ ε, κύκλον ἐνδιπλασίονί ἐςι λόγῳ τῆς α γ, πρὸς τὴν δ ε, πάντως γε τὸ α β γ, τμῆμα πρὸς τὸ δ β ε, ἔχει ὡς ὁ α γ, κύκλος πρὸς τὸν δ ε, κύκλον. ἀλλ' ὡς ὁ α γ, κύκλος πρὸς τὸν δ ε, ἔχει καὶ ὁ β α γ, κῶνος πρὸς τὸν β δ ε, κῶνον κατὰ τὴν ια': τοῦ ιβ': τοῦ ςοιχ: ἄρα ὡς τὸ α β γ, τμῆμα πρὸς τὸ δ β ε, ὁ β α γ, κῶνος πρὸς τὸν β δ ε, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ α β γ, τμῆμα πρὸς τὸν β α γ, κῶνον, τὸ δ β ε τμῆμα πρὸς τὸν β δ ε, κῶνον. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται τὸ αὐτὸ, κἂν κατὰ πλάτος τῆς ἐλλείψεως τὸ τμῆμα ληφθῇ, καὶ πρὸς τὸ τμῆμα τῆς περὶ τὴν ἐλάττονα διάμετρον τῆς σφαίρας παραβληθῇ.

Geom. Sol Lib. 1. Fig. 48.

Πρό-

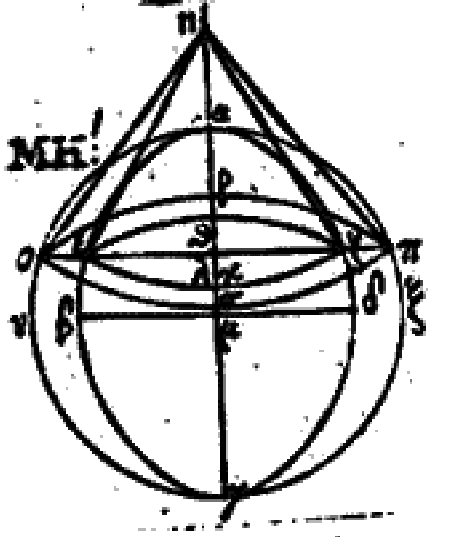
Πρότασις ΜΗ':

Τὸ οἱονδήποτε τῆς σφαιροειδοῦς ἐλλείψεως τμῆμα ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις ἡ αὐτή, ἥτις καὶ τοῦ τμήματος, καὶ ὕψος τὸ συγκείμενον ἔκ τε τοῦ ὕψους τοῦ τμήματος καὶ τῆς δ': ἀναλόγου τῶν ὑψωμάτων τῶν δύο τῆς αὐτῆς ἐλλείψεως τμημάτων, τοῦτε ἀπολειπομένου δηλ: καὶ λαμβανομένου καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς ἐλλείψεως, καθ' ἣν τὸ τμῆμα λαμβάνεται.

Ἔστω τμῆμα μεν ἐλλείψεως σφαιροειδοῦς τῆς α β γ δ, κατὰ μῆκος, ἀφαιρούμενον τὸ ε α ζ, κῶνος δὲ ὁ η ε ζ, οὗ βάσις ὁ ε θ ζ κ, κύκλος, ὕψος δὲ τὸ λ η, συγκείμενον ἔκ τε τοῦ λ α, ὕψους τοῦ ε α ζ, τμήματος, καὶ τῆς α η, δ': ἀναλόγου τῶν γ λ, λ α, γ μ. Λέγω, ὅτι τὸ ε α ζ, τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ η ε ζ, κώνῳ. Γραφήτω δὲ περὶ τὴν α γ, μείζονα διάμετρον τῆς ἐλλείψεως, ἡ α ν γ ξ, σφαῖρα, καὶ ἤχθω ἐφ' ἑκάτερα ἡ ε ζ, ὥστε ἀφαιρεθῆναι ἀπὸ τῆς α ν γ ξ, σφαίρας τὸ ο α π, κατάλληλον τμῆμα τῷ ε α ζ, τῆς ἐλλείψεως τμήματι· καὶ συμπεπληρώσθω ὁ η ο π, κῶνος ἰσοϋψὴς τῷ η ε ζ, κώνῳ, οὗ βάσις ὁ ο ρ π σ, κύκλος. Δείκνυται τὸ ε α ζ, τμῆμα πρὸς τὸ ο α π, ἔχει ὡς ὁ ε θ ζ κ, κύκλος πρὸς τὸν ο ρ π σ, κύκλον κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἀλλ' ὡς ὁ ε θ ζ κ, κύκλος πρὸς τὸν ο ρ π σ, κύκλον, ἔχει καὶ ὁ η ε ζ, κῶνος πρὸς τὸν η ο π, κῶνον κατὰ τὴν ια: τοῦ ιβ': τοῦ στοιχ: ἄρα ὡς ὁ η ε ζ, κῶνος πρὸς τὸν η ο π, κῶνον, ἔχει καὶ τὸ ε α ζ, τμῆμα πρὸς τὸ ο η π, τμῆμα, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ὁ η ε ζ, κῶνος πρὸς τὸ ε α ζ, τμῆμα, ὁ η ο π, κῶνος πρὸς τὸ ο α π, τμῆμα, ἀλλὰ τὸ ο α π, τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ η ο π, κώνῳ κατὰ τὴν μδ': τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ τὸ ε α ζ, τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ η ε ζ, κώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom: Sol. lib. Fig. 48

ΜΗ'



Τέλος τοῦ πρώτου βιβλίου τοῦ β': μέρους.