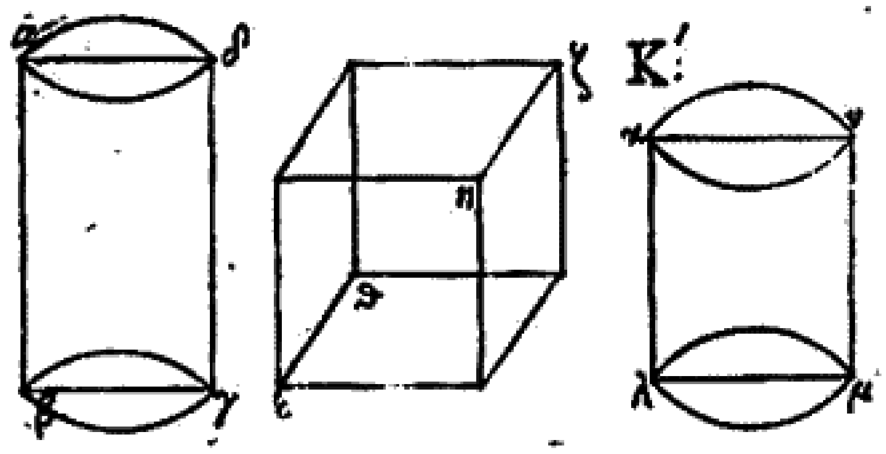
α: μέρους, ἄρα κατὰ τὴν ια: τοῦ ε: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὁ εζνκ, κύλινδρος ἔχει πρὸς τὸν εηθκ, κυλινδρικὸν σίφωνα, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ζι, τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ζη, ην, περιεχόμενον ὀρθογώνιον· ἀλλ᾽ ὡς ὁ αβγδ, κύλινδρος πρὸς τὸν εζνκ, ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς βξ, ἡμιδιαμέτρου τῆς τοῦ αβγδ, βάσεως τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζι, ἄρα καὶ δι᾽ ἴσου ἀτάκτως ὡς ὁ αβγδ, κύλινδρος πρὸς τὸν εηθκ, κυλινδρικὸν σίφωνα, τὸ ἀπὸ τῆς βξ, τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ζη, ην, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, τουτέστι τὸ τῆς ζώνης. Τὸ τοῦ κυλίνδρου ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ τοῦ κυλινδρικοῦ σίφωνος στερεὸν τοῦ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος τῷ κυλίνδρῳ ἔχει ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου βάσεως τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς ζώνης ὀρθογώνιον, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Κ'.

Ἐὰν κύλινδρος τῷ τυχόντι πρίσματι ἴσος ᾖ, αἱ τούτων βάσεις ἀντιπεπόνθασι τοῖς ὕψεσι, καὶ ἐὰν κυλίνδρου καὶ πρίσματός τινος αἱ βάσεις ἀντιπεπόνθασι τοῖς ὕψεσιν, ὁ κύλινδρος ἴσος ἔσται τῷ πρίσματι.

Ἔστω κύλινδρος ὁ αβγδ, ἴσος τῷ τυχόντι πρίσματι εζ, οὗ βάσις ἡ εη, καὶ ὕψος τὸ εθ. Λέγω ὅτι αἱ βάσεις τοῦ τε αβγδ, κυλίνδρου, καὶ εζ, πρίσματος ἀντιπεπόνθασι τοῖς αὐτῶν ὕψεσιν, τουτέστιν ὡς ἡ βγ, βάσις τοῦ αβγδ, κυλίνδρου πρὸς τὴν εη, βάσιν τοῦ εζ, πρίσματος, οὕτω καὶ τὸ εθ, ὕψος τοῦ εζ, πρίσματος πρὸς τὸ αβ, ὕψος τοῦ αβγδ, κυλίνδρου. Ἔστω δὴ ἕτερος κύλινδρος ὁ κλμν, ἔχων τήν τε βάσιν λμ, ἴσην τῇ εη, βάσει τοῦ εζ, πρίσματος, καὶ τὸ λκ, ὕψος τῷ εθ, ὕψει. καὶ ἑπομένως ὁ κλμν, κύλινδρος ἴσος ἔσται τῷ εζ, πρίσματι. (ἑκατέρου γὰρ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, ἑκατέρου δὲ αἵ τε βάσεις καὶ τὰ ὕψη ἴσα.) ἀλλὰ τῷ εζ, πρίσματι ἴσος ὑπετέθη καὶ ὁ αβγδ, κύλινδρος, ὁ αὐτὸς ἄρα ἴσος ἐστὶ καὶ τῷ κλμν, κυλίνδρῳ κατὰ τὸ α: ἀξίωμα τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, κατὰ δὲ τὴν ιε: τοῦ ιβ': τοῦ αὐτοῦ, αἱ βάσεις τῶν αβγδ, κλμν, κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς τῶν αὐτῶν ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν λμ, τὸ λκ, πρὸς τὸ βα, ἀλλ᾽ ἡ λμ, βάσις ἴση ἐστὶ τῇ εη, καὶ τὸ λκ, ὕψος τῷ εθ, ἄρα ὡς ἡ βγ, βάσις πρὸς

Geom.Sol. Lib. 1. Fig. 26.



τὴν

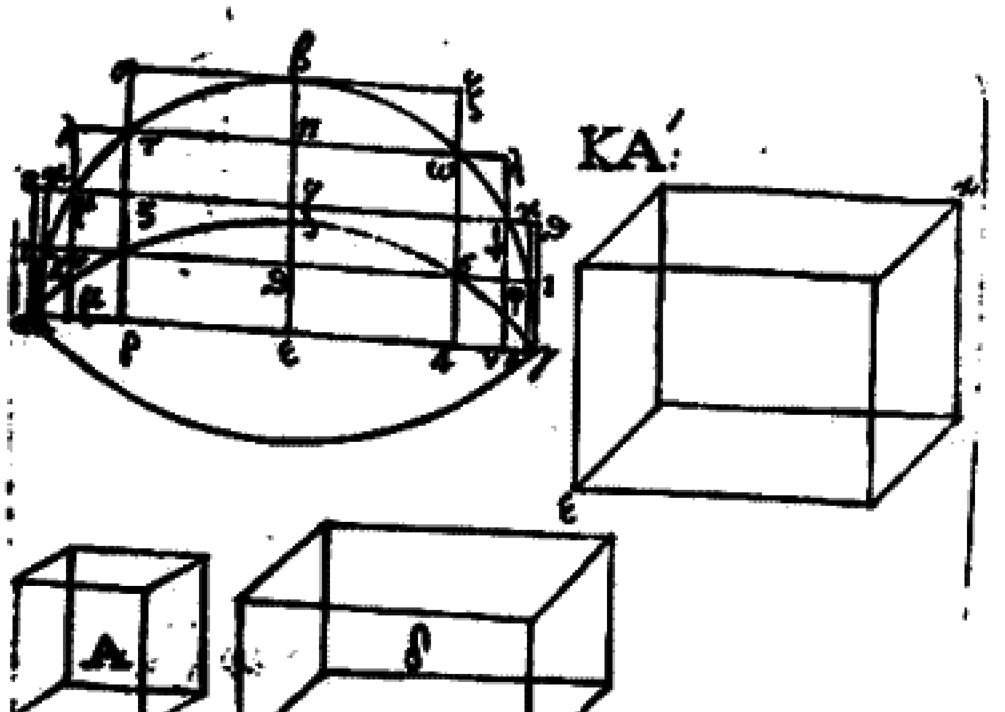
τὴν ε η, ἔσαι καὶ τὸ ε θ, ὕψος πρὸς τὸ β α. Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθείτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔσω ὡς ἡ β γ, βάσις πρὸς τὴν ε η, βάσιν, τὸ ε θ, ὕψος πρὸς τὸ β α. τῶν αὐτῶν γὰρ ὑποτιθεμένων, ἐπεὶ ὁ κ λ μ ν, κύλινδρος, ἴσος ἐσὶ τῷ ε ζ, πρίσματι, ὡς δέδεικται, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ἰσ: ὧν κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσοι εἰσὶν, ἴσοι ἄρα οἱ α β γ δ, κ λ μ ν. ἀλλ' ὁ κ λ μ ν, ἴσος ἐσὶ καὶ τῷ ε ζ, πρίσματι κατὰ τὴν κατασκευήν. ἄρα κατὰ τὸ ῥηθὲν ἀξίωμα, τῷ ε ζ, πρίσματι ἴσος ἐσὶ καὶ ὁ α β γ δ, κύλινδρος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΑ':

Ἡμισφαιρίου δοθέντος δυνατὸν ἐν αὐτῷ καὶ περὶ αὐτὸ κυλίνδρους ἰσοϋψεῖς συςαθῆναι, τοὺς μὲν ἐγγεγραμμένους, τοὺς δὲ περιγεγραμμένους, καὶ τὴν τῶν περιγεγραμμένων ὑπεροχὴν πρὸς τοὺς ἐγγεγραμμένους ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος ςερεοῦ πρίσματος, ἐλάττονος ὄντος τοῦ ἡμισφαιρίου.

Ἔςω ἡμισφαίριον τὸ α β γ, καὶ ςερεὸν τὸ δ, ἔλαττον τοῦ α β γ. Λέγω ὅτι δυνατὸν συςαθῆναι κυλίνδρους ἰσοϋψεῖς, τοὺς μὲν περιγεγραμμένους περὶ τὸ α β γ, ἡμισφαίριον, τοὺς δὲ ἐγγεγραμμένους εἰς τὸ αὐτὸ, ὥςε τὴν τῶν περιγεγραμμένων ὑπεροχὴν πρὸς τοὺς ἐγγεγραμμένους ἐλάττονα εἶναι τοῦ δ, δοθέντος ςερεοῦ. Τμηθήτω δὴ ἡ α γ, δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἀνεςάθω κάθετος ἡ ε β. εἶτα γινέσθω ὡς ἡ α γ, βάσις τοῦ ἡμισφαιρίου, τουτέςιν ὁ μέγιςος ἐν αὐτῷ κύκλος πρὸς τὴν τοῦ δ, ςερεοῦ βάσιν, οὕτω τὸ ὕψος τοῦ αὐτοῦ δ, ςερεοῦ πρὸς ἄλλο τι, τούτου δὲ εὑρεθέντος, διαιρεθήτω ἡ β ε, δίχα κατὰ τὸ ζ, κἂν μὲν ἡ ε ζ, ἐλάττων ᾖ τῆς εὑρεθείσης, διήχθω διὰ τοῦ ζ, παραλλήλως τῇ α γ, ἡ η θ, καὶ ἀποπεπληρώσθω ὁ α θ, περιγεγραμμένος κύλινδρος. ἀπὸ δὲ τῶν μ, καὶ ψ, κοινῶν τομῶν τῆς τε η θ, καὶ α β γ, ἡμικυκλίου πιπτέτωσαν κάθετοι αἱ μ μ, ψ ν, καὶ ἀποπεπληρώσθω ὁ μ ψ, ἐγγεγραμμένος κύλινδρος. Ὅτι μὲν οὖν ἡ τοῦ α θ,

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 17.



περιγεγραμμένου κυλίνδρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν μ ψ, ἐγγεγραμμένον ἐλάττων ἐστὶ τοῦ δ, στερεοῦ, δῆλον. εἰ γὰρ αἱ βάσεις τοῦ τε α θ, κυλίνδρου, καὶ δ, πρίσματος ἀντιπεπόνθασι τοῖς ὕψεσι, πάντως γε ὁ α θ, κύλινδρος ἴσος ἂν εἴη τῷ δ, πρίσματι κατὰ τὴν ἀνωτέρω. Ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ α θ, κυλίνδρου βάσις ἡ α γ, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν τοῦ δ, πρίσματος βάσιν, ἤπερ τὸ τοῦ δ, πρίσματος ὕψος πρὸς τοῦ α θ, κυλίνδρου ὕψος τὸ ε ζ, φανερὸν, ὅτι ὁ α θ, κύλινδρος ἐλάττων ἐστὶ τοῦ δ, πρίσματος. Εἰ δὲ ὁ α θ, περιγεγραμμένος κύλινδρος ἐλάττων ἐστὶ τοῦ δ, πρίσματος, πολλῷ δήπουθεν ἐλάττων ἔσται ἡ τοῦ α θ, ὑπεροχὴ πρὸς τὸ μ ψ. Ἐὰν δὲ ἡ ε ζ, μὴ εἴη ἐλάττων τῆς εὑρεθείσης, διαιρεθήτω ἑκατέρα τῶν ε ζ, ζ β, δίχα κατὰ τὰ η, καὶ θ, ὥστε διαιρεθῆναι τὴν ὅλην ε β, εἰς τέσσαρα ἴσα, καὶ ἔστω ἡ ε θ, τὸ τέταρτον δηλ: τῆς ε β, ἐλάττων τῆς εὑρεθείσης, καὶ διὰ τῶν θ η ζ, καὶ β, διήχθωσαν παράλληλοι αἱ ι ι, κ κ, λ λ, σ ξ, καὶ διὰ μὲν τῶν φ, καὶ χ, κοινῶν τομῶν τῆς τε ι ι, καὶ α β γ, ἡμισφαιρίου διήχθωσαν παραλλήλως τῇ ε β, αἱ κ ο, κ ϙ, διὰ δὲ τῶν μ, καὶ ψ, κοινῶν τομῶν τῆς τε κ κ, καὶ α β γ, ἡμισφαιρίου διήχθωσαν αἱ λ μ, λ ν, διὰ δὲ τῶν τ ω, κοινῶν τομῶν τῆς τε λ λ, καὶ α β γ, ἡμισφαιρίου διήχθωσαν ὁμοίως παράλληλοι αἱ σ ρ, ξ ϙ, καὶ ἀναπεπληρώσθωσαν οἵ τε α ι, φ κ, μ λ, τ ξ, περιγεγραμμένοι κύλινδροι, καὶ οἱ ο χ, ν ψ, ς ω, ἐγγεγραμμένοι. καὶ ἐπεὶ ὁ α ι, κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τῇ διαφορᾷ τῶν α ι, φ κ, μ λ, τ ξ, περιγεγραμμένων κυλίνδρων πρὸς τοὺς ο χ, ν ψ, ς ω, ἐγγεγραμμένους ὡς δείξομεν, ὁ δ' αὐτὸς α ι, κύλινδρος ἐλάττων ἐστὶ τοῦ δ, στερεοῦ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ τοῦ α ι, κυλίνδρου βάσις μείζονα ἔχει λόγον πρὸς τὴν τοῦ δ, πρίσματος βάσιν, ἤπερ τὸ τοῦ δ, στερεοῦ πρίσματος ὕψος πρὸς τὸ τοῦ α ι, κυλίνδρου ὕψος, ἄρα καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν περὶ τὸ α β γ, ἡμισφαίριον περιγεγραμμένων κυλίνδρων πρὸς τοὺς εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένους ἐλάττων ἐστὶ τοῦ δ, δοθέντος στερεοῦ. Ἐὰν δὲ πάλιν καὶ τὸ τέταρτον τῆς ε β, μὴ ἔλαττον ᾖ τῆς εὑρεθείσης, διαιρεθήτω δίχα καὶ ἕκαστον τῶν τῆς ε β, μερῶν, καὶ τοῦτο πάλιν καὶ πάλιν γενέσθω, ἕως ἂν γένηται τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως ἔλαττον τῆς εὑρεθείσης, καὶ τὰ λοιπὰ, ὡς προείρηται. καὶ ἔσται ἡ δεῖξις ἡ αὐτή. Ὅτι δὲ ὁ α ι, κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τῇ διαφορᾷ τῶν α ι, φ κ, μ λ, τ ξ, περιγεγραμμένων κυλίνδρων πρὸς τοὺς ο χ, ν ψ, ς ω, ἐγγεγραμμένους, δῆλον. τῷ γὰρ τ ξ, κυλίνδρῳ ἴσον ἐστὶ τὸ τοῦ α ι, μέρος ρ ϭ, τῇ δὲ τοῦ μ λ, πρὸς τὸν ς ω, διαφορᾷ, τουτέστι τῷ λ ς ω ψ, κυλινδρικῷ σίφωνι ἴσος ἐστὶν ὁ ρ ν, ϭ ν, κυλινδρικὸς σίφων, τῷ δὲ κ ν ψ φ, σίφωνι ὁ φ ν χ μ, κυλινδρικὸς σίφων. Ἡμισφαιρίου ἄρα δοθέντος δυνατὸν ἐν αὐτῷ καὶ περὶ αὐτὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Α'.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν ἡμισφαιρίῳ δυνατὸν ἐγγραφῆναι κυλίνδρους ἰσοϋψεῖς, ὥστε τὴν τοῦ ἡμισφαιρίου πρὸς τοὺς ἐγγεγραμμένους κυλίνδρους διαφορὰν, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν καὶ ὑπεροχὴν, ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος πρίσματος, ἐλάττονος ὄννος τοῦ ἡμισφαιρίου. εἰ γὰρ ἡ τῶν περιγεγραμμένων κυλίνδρων διαφορὰ πρὸς τοὺς ἐγγεγραμμένους ἐλάττων ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ στερεοῦ ὡς δέδεικται, πάντως γε πολλῷ ἐλάττων ἔσται ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου διαφορά.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ἔτι δυνατὸν περὶ τὸ δοθὲν ἡμισφαίριον περιγραφῆναι καὶ ἐγγραφῆναι εἰς αὐτὸ κυλίνδρους ἰσοϋψεῖς, ὥστε ἕκαστον ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος στερεοῦ, μείζονος ὄντος τοῦ δοθέντος ἡμισφαιρίου. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, εἰ ὁ α ι, δέδεικται ἐλάττων τοῦ δ, πολλῷ ἐλάττων δειχθήσεται ἕκαστος τῶν φ κ, μ λ, τ ξ, εἰ δὲ ὁ ο χ, ἐλάττων τοῦ αὐτοῦ, πολλῷ ἐλάττων ἔσται ἕκαστος τῶν υ ψ, σ ω.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἔτι δυνατὸν εἰς τὸ αὐτὸ ἡμισφαίριον ἐγγραφῆναι κυλίνδρους ἰσοϋψεῖς, ὥστε τὸ ἐξ ἁπάντων μεῖζον εἶναι τοῦ δοθέντος στερεοῦ, ἐλάττονος ὄντος τοῦ ἡμισφαιρίου· καὶ πάλιν περιγραφῆναι ἔξωθεν περὶ αὐτὸ ὁμοίως κυλίνδρους ἰσοϋψεῖς, ὥστε τὸ ἐξ ἁπάντων ἔλαττον εἶναι τοῦ δοθέντος στερεοῦ, μείζονος ὄντος τοῦ ἡμισφαιρίου. Ἔστω γὰρ α: τὸ δ, στερεὸν ἔλαττον τοῦ α β γ, ἡμισφαιρίου, καὶ τούτου διαφορὰ ἡ Λ. ὥστε τὸ δ, μετὰ τοῦ Λ, ἴσον εἶναι τῷ ἡμισφαιρίῳ. Ἐὰν οὖν συσταθῶσι κατὰ τὰ προειρημένα οἵ τε περιγεγραμμένοι καὶ ἐγγεγραμμένοι κύλινδροι, ὥστε τὴν τῶν περιγεγραμμένων πρὸς τοὺς ἐγγεγραμμένους διαφορὰν ἐλάττονα εἶναι τῆς Λ, ὑπεροχῆς, οἱ ἐγγεγραμμένοι μείζονες ἔσονται τοῦ δ, εἰ γὰρ ἡ τῶν περιγεγραμμένων πρὸς τοὺς ἐγγεγραμμένους ὑπεροχὴ ἐλάττων, πολλῷ ἐλάττων ἐστὶν ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου πρὸς αὐτοὺς ὑπεροχή, ἀλλὰ τὰ δ, καὶ Λ, στερεὰ ἴσα εἰσὶ τοῖς ἐγγεγραμμένοις κυλίνδροις καὶ τῇ τοῦ ἡμισφαιρίου πρὸς αὐτοὺς διαφορᾷ, αὕτη δὲ ἡ διαφορὰ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐλάττων ἐστὶ τῆς Λ, οἱ ἐγγεγραμμένοι ἄρα μείζονές εἰσι τοῦ δ. Αὖθις ἔστω τὸ ε κ, στερεὸν μεῖζον τοῦ α β γ, ἡμισφαιρίου, καὶ διαιρεθήτω εἰς τὸ δ, καὶ Λ. ὥστε τὸ δ, ἴσον εἶναι τῷ ἡμισφαιρίῳ, τὸ δὲ Λ, τὴν ὑπεροχήν. Ἐὰν οὖν γένηται τὰ αὐτά, περιγραφῶσι δηλ: καὶ ἐγγραφῶσι κύλινδροι εἰς τὸ α β γ, ἡμισφαίριον, ὥστε τὴν τῶν περιγεγραμμένων διαφορὰν ἐλάττονα εἶναι τῆς Λ, πάντως γε οἱ περιγεγραμμένοι κύλινδροι ἐλάττονες ἔσονται τοῦ ε κ. εἰ γὰρ αἱ τῶν περιγεγραμμένων διαφοραὶ πρὸς τοὺς ἐγγεγραμμένους ἐλάττους εἰσὶ τῆς Λ, δῆλον, ὅτι αἱ τῶν αὐτῶν διαφοραὶ πρὸς τὸ ἡμισφαίριον πολλῷ ἐλάττους εἰσὶ τῆς Λ, τὸ δὲ ἡμισφαίριον ἴσον ἐστὶ τῷ δ, καὶ οἱ περιγεγραμμένοι κύλινδροι ἴσοι εἰσὶ τῷ τε ἡμισφαιρίῳ, καὶ ταῖς αὐτῶν πρὸς τὸ ἡμισφαίριον διαφοραῖς, ἄρα οἱ περιγεγραμμένοι κύλινδροι ἐλάττονές εἰσι συναμφοτέρων τῶν δ, καὶ Λ, ταῦτα δὲ ἴσα τῷ ε κ, ἐλάττονες ἄρα εἰσὶ καὶ τοῦ ε κ, μείζονος ὄντος τοῦ ἡμισφαιρίου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

Ἔτι δῆλον, ὅτι τὸ αὐτὸ θεώρημα καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου σφαιροειδοῦς ἐπεκτείνεται εἴδους, ἐλλείψεως δηλ: καὶ τῶν ὁμοίων.

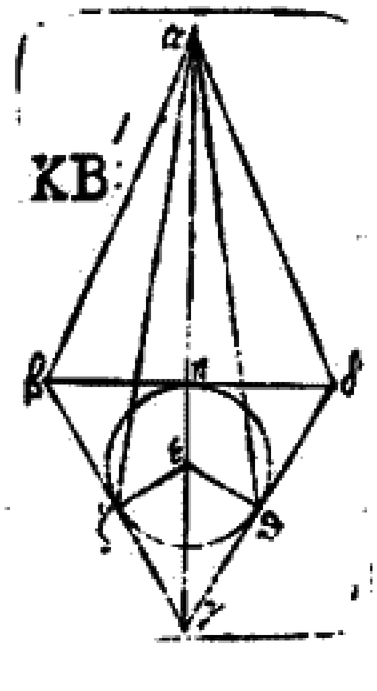
Πρό-

Πρότασις ΚΒʹ:

Η' τῆς πυραμίδος ἐπιφάνεια τῆς περὶ ὀρθὸν περιγεγραμμένης κώνου ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου καὶ ἡμιπεριμέτρου τῆς αὐτῆς βάσεως περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἔστω πυραμὶς ἡ α β γ δ, ἧς βάσις τὸ β γ δ, τρίγωνον, περὶ ὀρθὸν γεγραμμένη κῶνον τὸν α ζ η θ, οὗ βάσις μὲν ὁ ζ θ η, κύκλος, ὕψος δὲ ἡ α ε, εὐθεῖα. Λέγω ὅτι ἡ τῆς α β γ δ, πυραμίδος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ α ζ η θ, κώνου καὶ ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 18.

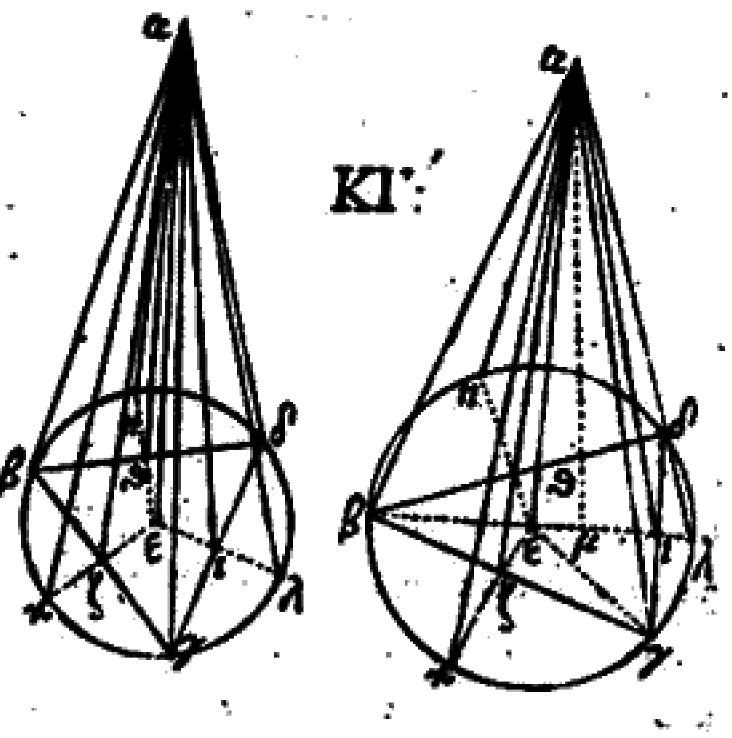


βάσεως περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ α θ, α ζ, α η, ε ζ, ε θ, ε η, καὶ ἐπεὶ τὸ β γ δ, τρίγωνον ἅπτεται τοῦ ζ η θ, κύκλου, πάντως γε ἑκάστη α ζ, α θ, α η, εὐθειῶν πλευρά ἐστι τοῦ α ζ θ η, κώνου. Ὅτι δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἐφίστανται ἐπὶ τῶν β γ, γ δ, δ β, πλευρῶν τοῦ β γ δ, τριγώνου, βάσεως δηλ: τῆς α β γ δ, πυραμίδος, καὶ προσέτι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, οὐ χαλεπὸν ἀποδεῖξαι. ἡ γὰρ α ε, τὸ τοῦ α ζ θ η, κώνου ὕψος ὀρθὴ δύναται ἐστι πρὸς τὸ τοῦ θ ζ η, κύκλου ἐπίπεδον, ὥστε τὸ τοῦ α ε ζ, τριγώνου ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ τοῦ β γ δ, ἐπίπεδον, καὶ ἑπομένως ἡ β γ, πρὸς ὀρθάς ἐστι πρός τε τὸ τοῦ α ζ ε, ἐπίπεδον, καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν α ζ, ζ ε, ἁπτομένων αὐτῆς. ἡ α ζ β, ἄρα γωνία ὀρθή ἐστι, καὶ τοῦ α β γ, τριγώνου ἀληθὲς ὕψος ἡ α ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται ἡ μὲν α θ, ὕψος ἀληθὲς τοῦ α γ δ, τριγώνου, ἡ δὲ α η, τοῦ α β δ, ἀλλὰ τῶν α ε ζ, α ε θ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ α ε, ε ζ, δυσὶ ταῖς α ε, ε θ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α ε ζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ α ε θ, ὁμοίως ἴση, ἄρα καὶ βάσις ἡ α ζ, βάσει τῇ α θ, ἴση ἐστὶν, ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἡ α η, ἴση ἑκατέρᾳ τῶν α ζ, α θ. ἅπαν δὲ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τοῦ ὕψους καὶ τῆς ἡμισείας τῆς αὐτοῦ βάσεως περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ κατὰ τὴν ιβʹ: τοῦ γʹ: τοῦ αʹ: μέρους ἄρα ἐὰν ἡ α ζ, ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς β γ, πολλαπλασιασθῇ, γενήσεται πάντως τὸ α β γ, τρίγωνον, ἐὰν δὲ ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς γ δ, γενήσεται τὸ α γ δ, καὶ ἐὰν ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς δ β, ὁμοίως πολλαπλασιασθῇ, γενήσεται τὸ α β δ, τρίγωνον. Δῆλον ἄρα, ὅτι τῆς α ζ, πλευρᾶς τοῦ α ζ θ η, κώνου πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ β γ δ, τριγώνου, τὸ γενόμενον ἴσον ἐστὶ τοῖς α β γ, α γ δ, α δ β, τρισὶ τριγώνοις. ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἴσα ἐστὶ τῇ τῆς πυραμίδος α βγ δ, ἐπιφανείᾳ, ἄρα καὶ τὸ γενόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς α ζ, πλευρᾶς τοῦ κώνου ἐπὶ τὴν ἡμιπερίμετρον τῆς βάσεως τῆς α β γ δ, πυραμίδος πολλαπλασιαζομένης ἴσον ἐστὶ τῇ δοθείσῃ α β γ δ, πυραμίδι. Ἡ τῆς πυραμίδος ἄρα ἐπιφάνεια τῆς περὶ ὀρθὸν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΓ':

Ἡ τῆς πυραμίδος ἐπιφάνεια τῆς εἰς ὀρθὸν ἐγγεγραμμένης κῶνον ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου καὶ ἐλάττονος εὐθείας τῆς τοῦ κώνου πλευρᾶς.

Ἔστω πυραμὶς ἡ α β γ δ, ἧς βάσις τὸ β γ δ, τρίγωνον, εἰς κῶνον ἐγγεγραμμένη τὸν α β κ γ λ δ η, οὗ ἄξων ἡ α ε, πλευρὰ δὲ ἡ α κ. Λέγω τὴν ἐπιφάνειαν τῆς α β γ δ, πυραμίδος ἴσην εἶναι τῷ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ β γ δ, τριγώνου, καὶ εὐθείας ἐλάττονος τῆς α κ. Τμηθήτω δὴ ἑκάστη τῶν β γ, γ δ, δ β, πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς δοθείσης πυραμίδος δίχα κατὰ τὰ ζ ι θ, καὶ ἀχθήτωσαν ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου αἱ ε ζ, ε ι, ε θ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α ζ, α ι, α θ· ἐξαγομένων δὲ τῶν ε ζ, ε ι, ε θ, ἐπὶ τὰ κ λ η, ἐπιζεύχθωσαν καὶ αἱ α β, α κ, α γ, α λ, α δ, α η. ἔστω δὲ καὶ τὸ β γ δ, τρίγωνον ἰσόπλευρον.



Δείκνυται. ἡ ε ζ, πάντως κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς β γ, κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχ: ἔστι δὲ καὶ ἡ α ε, κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β γ δ, τριγώνου, ἄρα καὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ α ε ζ, τριγώνου ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β γ δ, καὶ ἐπομένως ἡ ζ γ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν α ζ, ὥστε τοῦ α β γ, τριγώνου ἀληθὲς ὕψος ἐστὶν ἡ α ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὴν μὲν α ι, ὕψος εἶναι τοῦ α γ δ, τριγώνου, τὴν δὲ α θ, τοῦ α δ β. Αὖθις ἡ ζ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ι γ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν β γ, τῇ γ δ, καὶ δίχα τέμνεσθαι ἑκατέραν κατὰ τὰ ζ, καὶ ι, ὡς δέδεικται. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς α γ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν α ζ, ζ γ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α ι, ι γ, κατὰ τὴν μζ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α ζ, ζ γ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α ι, ι γ, ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν ζ γ, ι γ, ἴσων, ἐναπολείπονται ἴσα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α ζ, α ι. ἴση ἄρα ἡ α ζ, τῇ α ι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ α θ, ἴση ἐστὶ τῇ α ι, ἡ α ζ. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ μὲν τῶν α ζ, ζ γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ, τριγώνῳ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιβ': τοῦ γ': τοῦ α': μέρους, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν α ι, ι γ, τῷ α γ δ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αθ, θδ, τῷ αδβ, τὰ δὲ αβγ, αγδ, αδβ, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς αβγδ, πυραμίδος, πάντως γε ἐὰν ἡ τοῦ βγδ, τριγώνου ἡμιπερίμετρος ἐπὶ μίαν τῶν αζ, ἢ αι, ἢ αθ, εὐθειῶν πολλαπλασιασθῇ, τὸ γενόμενον ἴσον ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς αβγδ, δοθείσης πυραμίδος. Ὅτι δὲ ἑκάστη τῶν αζ, αι, αθ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς τοῦ κώνου πλευρᾶς, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ αιζ, γωνία ὀρθή ἐστι, πάντως γε ἡ ὑπὸ αζι, ὀξεῖα, ἡ δὲ ὑπὸ αζκ, ἀμβλεῖα, ὥστε ἡ ακ, πλευρὰ τοῦ αβκγλδη, κώνου μείζων ἐστὶ τῆς αζ. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἡ αλ, μείζων τῆς αι, καὶ ἡ αη, τῆς αθ. ἐὰν δὲ τὸ βγδ, τρίγωνον, ὃ βάσις ἐστὶ τῆς αβγδ, πυραμίδος μὴ ᾖ ἰσόπλευρον, ὡς ἐπὶ τοῦ β΄ σχήματος, τῶν αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δειχθήσεται ἑκάστη τῶν αζ, αι, αθ, ὕψος εἶναι τῶν αβγ, αγδ, αδβ, τριγώνων, καὶ ἐλάττων τῆς ακ, πλευρᾶς τοῦ κώνου, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω. Ἐπεὶ δὲ αἱ αζ, αι, αθ, ἄνισοί εἰσι, πάντως γε ἐὰν ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ βγδ, τριγώνου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν πολλαπλασιασθῇ, ἐλάττονα μὲν τῆς αι, μείζονα δὲ τῆς αζ, τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς αβγδ, πυραμίδος. ἐὰν γὰρ ἐπὶ τὴν αι, πολλαπλασιασθῇ μείζονα οὖσαν τῆς αζ, τὸ γενόμενον μεῖζον ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος. ἐὰν δὲ ἐπὶ τὴν αζ, ἔλαττον. Ὅτι δὲ ἡ αζ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς αι, δῆλον. ἐὰν γὰρ ἡ ιμ, ἴση ληφθῇ τῇ ιζ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ αμ, ἴση ἔσται ἡ αζ, τῇ αμ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς αι, ιζ, ταῖς αι, ιμ, καὶ ἑκατέραν τῶν αιζ, αιμ, γωνιῶν ὀρθήν, ἡ δὲ αμ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς αι, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αμι, μείζων ἐστὶ γωνίας τῆς ὑπὸ αιμ, ἄρα καὶ ἡ αζ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς αι, ἀλλ' ἡ αι, ἐλάττων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου, ὡς δέδεικται, πολλῷ ἄρα ἐλάττων ἔσται καὶ ἡ ταύτης ἐλάττων, ἐφ' ἣν ὤφειλεν ἡ τοῦ βγδ, τριγώνου πολλαπλασιασθῆναι ἡμιπερίμετρος. Ἡ τῆς πυραμίδος ἄρα ἐπιφάνεια τῆς εἰς ὀρθὸν ἐγγεγραμμένης κῶνον ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου καὶ ἐλάττονος εὐθείας τῆς τοῦ κώνου πλευρᾶς, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

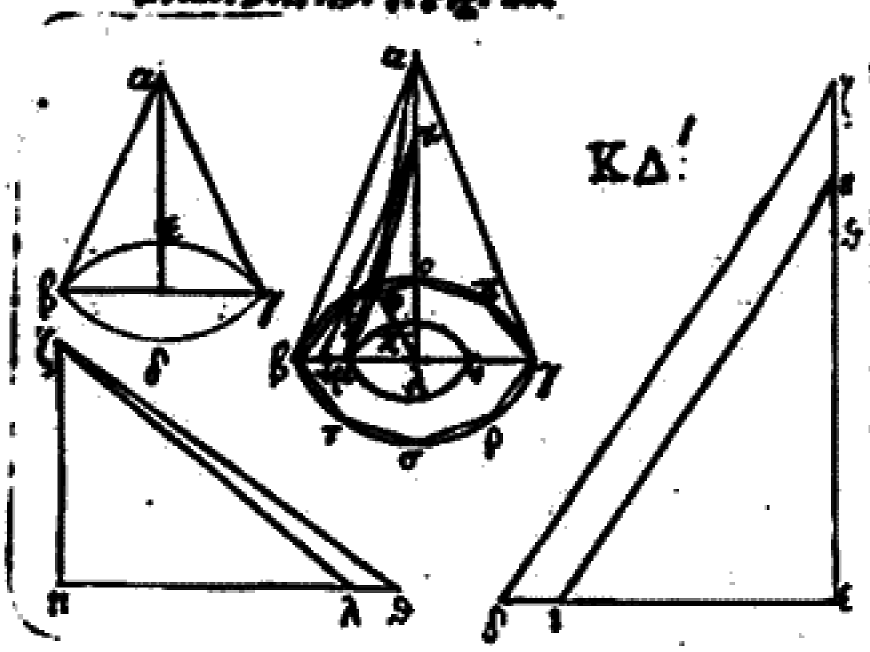
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἡ τῆς πυραμίδος ἐπιφάνεια τῆς περὶ κῶνον μὲν περιγεγραμμένης ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ πλευρᾷ τοῦ κώνου. τὸ γὰρ τοιοῦτον τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, καὶ τῆς τοῦ κώνου πλευρᾶς περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ γ΄: τοῦ α΄: μέρους. τῆς δὲ εἰς κῶνον ἐγγεγραμμένης πυραμίδος ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ ὅλῃ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, ἡ δ' ἑτέρα ἐλάττων τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου. ὁ λόγος ὁ αὐτός.

Πρότασις ΚΔ'.

Ἡ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τῆς τοῦ κώνου βάσεως, ἡ δ' ἑτέρα τῇ τοῦ κώνου πλευρᾷ.

Ἔστω κῶνος ὁ αβγ, οὗ βάσις μὲν ὁ βδγε, κύκλος, πλευρὰ δὲ ἡ αβ. Λέγω δὲ τὴν τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ γωνίαν πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ βδγε, κύκλου, ἡ δ' ἑτέρα τῇ αβ. Εἰ γὰρ μή, ἔσται πάντως ἡ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνεια μείζων τοῦ τριγώνου ἐκείνου, ἢ γοῦν ἐλάττων. Ἔστω δὲ α: μείζων, καὶ συσταθήτω τρίγωνον ἴσον τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ τὸ ζηθ, οὗ ἡ μὲν ζη, ἴση ἔστω τῇ αβ, πλευρᾷ τοῦ αβγ, κώνου, ἡ δὲ ηθ, μείζων τῆς τοῦ βδγε, κύκλου περιφερείας, καὶ εἰλήφθω ἡ ηλ, ἴση τῇ τοῦ βδγε, κύκλου περιφερείᾳ τῆς βάσεως δηλ: τοῦ αβγ, κώνου. καὶ ἐπεὶ ἡ ηθ, μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ βδγε, κύκλου περιφερείας, πάντως γε κατὰ τὴν ιζ: τοῦ δ': τοῦ α: μέρους δυνατὸν περιγραφῆναι περὶ τὸν βδγε, κύκλον πολύγωνον, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττων ἔσται τῆς ηθ. ἐὰν δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ αβγ, κώνου, ἤτοι τοῦ α, εὐθεῖαι ἐφ' ἑκάστην γωνίαν τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου ἀχθῶσι, συσταθήσεται πυραμίς, ἥτις ἴση ἔσται ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν τῇ περιφερείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττων ἐστὶ τῆς ηθ, ἤτοι ἴση τῇ ηλ, ἀλλὰ τὸ ζηλ, τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι τοῦ ζηθ, ἴσου ὄντος τῇ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφανείᾳ, ἄρα καὶ ἡ τῆς πυραμίδος ἐπιφάνεια, ἧς βάσις τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον περὶ τὸν αβγ, κῶνον, οὗ ἡ περίμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ηλ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφανείας, ἀλλὰ καὶ μείζων ὡς περιέχουσα τὸν κῶνον· ἄτοπον ἄρα.

Geom: Sol. lib. 1. Fig. 20.



Ἔστω δὲ β': ἡ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνεια ἐλάττων τοῦ δεζ, τριγώνου, οὗ ἡ μὲν δε, πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ αβ, πλευρᾷ τοῦ κώνου, ἡ δὲ εζ, τῇ περιφερείᾳ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἤτοι τοῦ βγ, κύκλου, καὶ γενέσθω ὡς τὸ δεζ, τρίγωνον πρὸς τὴν τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνειαν, ἡ εζ, πρὸς τὴν εθ. τῶν δὲ εζ, εθ, εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος ἡ εη, καὶ ἤχθω παράλληλος τῇ ζδ, ἀπὸ τοῦ η, σημείου ἡ ηι, ἥτις τεμεῖ τὴν εδ, ἐκβαλλομένην κατὰ τὸ ι. Γενέσθω δ' ἔτι ὡς ἡ εζ, πρὸς τὴν εη,

ἡ λβ,

ἡ λβ, ἡμιδιάμετρος τοῦ αβγ, κώνου πρὸς τὴν λμ, καὶ γραφέσθω περὶ τὴν λμ, ἡμιδιάμετρον ὁ μν, κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ μ, ἤχθω παράλληλος τῇ βα, ἡ μκ. ἔπειτ' ἐγγραφέσθω εἰς τὸν βγ, κύκλον τὸ βξοπγρστ, πολύγωνον μὴ ἁπτόμενον τοῦ μν, κύκλου, καὶ τμηθέσθω μία τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἡ ξο, δίχα κατὰ τὸ φ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ κφ, αφ, μφ. Δείκνυται. Ἐπεὶ οὖν γέγονεν ὡς τὸ δεζ, τρίγωνον πρὸς τὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν, ἡ εζ, πρὸς τὴν εθ, τῶν δὲ εζ, εθ, εὕρηται μέση ἀνάλογος ἡ εη, πάντως γε τὸ ιεη, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. ὡς γὰρ ἡ εζ, πρὸς τὴν εθ, ἔχει τὸ δεζ, τρίγωνον πρὸς τὸ ιεη, κατὰ τὸν α': τοῦ γ': τοῦ α': μέρους, ὡς δὲ ἡ εζ, πρὸς τὴν εθ, ἔχει τὸ δεζ, τρίγωνον καὶ πρὸς τὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν, ἄρα κατὰ τὸν θ': τοῦ ε': τοῦ Στοιχειωτ: τὸ ιεη, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφανείᾳ, μεῖζον δὲ τὸ δεζ, τρίγωνον τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ αὐτὸ καὶ τοῦ ιεη, τριγώνου, ἀλλ' ἡ εζ, ἴση ὑπετέθη τῇ τοῦ βγ, κύκλου περιφερείᾳ, ἡ δὲ εδ, τῇ αβ, αὐτοῦ πλευρᾷ, ἄρα ἡ μὲν εη, ἐλάττων ἐστὶ τῆς τοῦ βγ, κύκλου περιφερ: ἡ δὲ ει, ἀθεῖα τῆς αβ. Αὖθις ἐπεὶ ἡ ηι, παράλληλος ἤχθη τῇ ζδ, πάντως γε κατὰ τὸν β': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ εζ, πρὸς τὴν εη, ἡ εδ, πρὸς τὴν ει, ὡς δὲ ἡ εζ, πρὸς τὴν εη, γέγονε καὶ ἡ λβ, πρὸς τὴν λμ, καὶ ὡς ἡ λβ, πρὸς τὴν λμ, ἔχει ἡ αβ, πρὸς τὴν κμ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν β': ἄρα ὡς ἡ εδ, πρὸς τὴν ει, ἡ αβ, πρὸς τὴν κμ, ἀλλ' ἡ εδ, ἴση ὑπετέθη τῇ αβ, ἄρα καὶ ἡ ει, ἴση ἐστὶ τῇ κμ. Ἐπεὶ δὲ πάλιν, ἡ κφ, μείζων ἐστὶ τῆς κμ, ὡς ὀψόμεθα, τῆς δὲ κφ, μείζων ἐστὶν ἡ αφ, ἄρα ἡ αφ, πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς κμ, ἤτοι τῆς ει, ἀλλ' ὡς ἡ λβ, πρὸς τὴν λμ, ἔχει ἡ τοῦ βγ, κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ μν, περιφέρειαν, ὡς δὲ ἡ λβ, πρὸς τὴν λμ, γέγονε καὶ ἡ εζ, πρὸς τὴν εη, ἄρα ὡς ἡ τοῦ βγ, κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ μν, περιφέρειαν, ἡ εζ, πρὸς τὴν εη. ἡ δὲ εζ, ἴση ὑπετέθη τῇ τοῦ βγ, περιφερ: καὶ ἡ εη, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ μν, περιφερείᾳ, τῆς δὲ μν, περιφερείας μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ πολυγώνου περίμετρος, αὕτη ἄρα μείζων ἐστὶ καὶ τῆς εη. Συνεστάθω δὲ πυραμὶς ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν αβγ, κῶνον, ἧς βάσις τὸ βξοπγρστ, πολύγωνον. καὶ ἐπεὶ ἡ ταύτης ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν αὐτοῦ πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ βξοπγρστ, πολυγώνου περιφερείᾳ, ἡ δ' ἑτέρα τῇ αφ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, τὸ δὲ τρίγωνον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι τοῦ ιεη, διὰ τὸ ὑπὸ μειζόνων περιέχεσθαι πλευρῶν, ἄρα καὶ ἡ τῆς πυραμίδος ἐπιφάνεια, ἧς βάσις τὸ βξοπγρστ, πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ιεη, τριγώνου, τοῦτο δὲ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ, ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδος εἰς τὸν αβγ, κῶνον ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφανείας, ὅπερ ἄτοπον. Ὅτι δὲ ἡ κφ, μείζων ἐστὶ τῆς κμ, δῆλον. ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ λφ, καὶ ἐπεὶ ἡ λχ, ἴση ἐστὶ τῇ λμ, τῆς δὲ λχ, μείζων ἡ λφ, εἰλήφθω ἡ λψ, ἴση τῇ λφ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ κψ, ἔστι δὲ κοινὴ ἡ λκ, αἱ δύο ἄρα λψ, λκ, εἰσὶν ἴσαι

δυσὶ

δυσὶ ταῖς λφ, λκ, ἔστι δὲ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ κλψ, ἴση τῇ ὑπὸ κλφ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα αἱ κψ, κφ, ἴσαι εἰσίν, ἀλλ' ἡ κψ, μείζων ἐστὶ τῆς κμ, ἄρα καὶ ἡ κφ, μείζων ἐστὶ τῆς αὐτῆς κμ. Ἡ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἄρα ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν αὐτοῦ πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τῆς τοῦ κώνου βάσεως, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ τοῦ κώνου πλευρᾷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Α': Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι αἱ τῶν κώνων ἐπιφάνειαι τῶν τὰς πλευρὰς ἴσας ἐχόντων ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ τῶν βάσεων αὐτῶν περιφέρειαι. εἰ γὰρ ἐκ τε τῶν περιφερειῶν τῶν αὐτῶν βάσεων καὶ τῶν πλευρῶν τρίγωνα συσταθῶσιν ὀρθογώνια, ἰσοϋψῆ ἔσονται, οἷς τισιν οἱ κῶνοι ἴσοι εἰσί, τὰ δὲ τοιαῦτα πρὸς ἄλληλα ἔχουσιν, ὡς αἱ βάσεις. Ἐπεὶ δὲ ὡς αἱ περιφέρειαι τῶν βάσεων, ἔχουσι καὶ αἱ διάμετροι αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας, ἄρα αἱ τῶν τοιούτων κώνων ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν ὡς αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ ἀνάπαλιν αἱ τῶν κώνων ἐπιφάνειαι τῶν τὰς βάσεις ἴσας ἐχόντων πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν, ὡς αἱ πλευραὶ αὐτῶν.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Β': Ἔτι τῶν ἴσων κώνων αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασι ταῖς τῶν βάσεων αὐτῶν περιφερείαις, ἢ διαμέτροις, ὅτι καὶ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, οἷς αἱ τῶν κώνων ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσίν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Γ': Ἔτι αἱ τῶν ὀρθῶν καὶ ὁμοίων κώνων ἐπιφάνειαι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν πλευρῶν, τῶν ὕψεων, τῶν διαμέτρων, καὶ τῶν περιφερειῶν. καὶ γὰρ καὶ τὰ ὀρθογώνια ὅμοια τρίγωνα, οἷς αἱ τῶν αὐτῶν κώνων ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσίν, ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Δ': Ἔτι ἡ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς αὐτοῦ πλευρᾶς καὶ ἡμιπεριφερείας τῆς βάσεως περιεχομένῳ παραλληλογράμμῳ ὀρθογωνίῳ. τὸ γὰρ τοιοῦτον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν αὐτοῦ πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ κώνου πλευρᾷ, ἡ δ' ἑτέρα τῇ τῆς βάσεως αὐτοῦ περιφερείᾳ κατὰ τὴν ιβ': τοῦ γ': τοῦ α'. μέρους.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Ε': Ἔτι ἡ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐτοῦ βάσεως ἔχει, ὡς ἡ τοῦ κώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τῆς βάσεως αὐτοῦ ἡμιδιάμετρον. κατὰ γὰρ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα ἡ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς καὶ ἡμιπεριφερείας τῆς αὐτοῦ βάσεως, κατὰ δὲ τὴν κα': τοῦ δ': τοῦ α': μέρους ὁ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου καὶ ἡμιπεριφερείας. ἄρα ἐὰν ἡ τῆς βάσεως τοῦ ὀρθοῦ κώνου περιφέρεια ἀντὶ ὕψους ληφθῇ, ἀντὶ δὲ βάσεως ἡ τοῦ κώνου πλευρὰ καὶ ἡ

τῆς

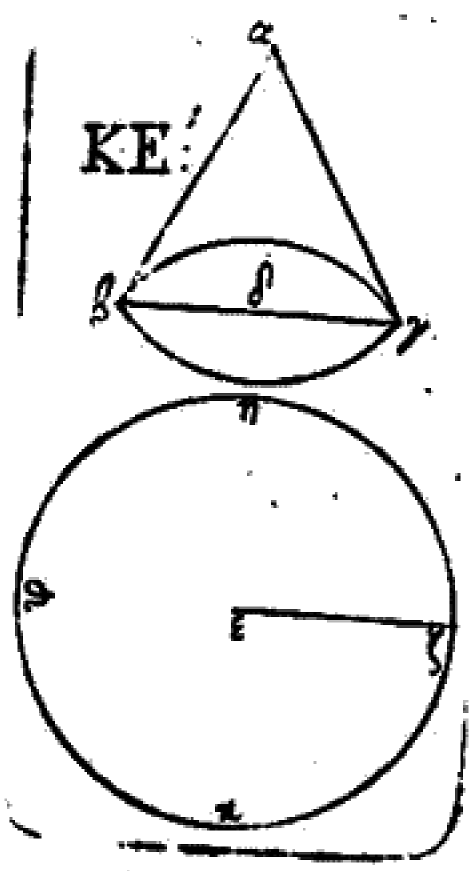
τῆς βάσεως αὐτῦ, συςαθήσονται δήπυθεν δύο τρίγωνα ἔχοντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις, ὧν τὸ μὲν ἴσον ἐςὶ τῇ τῦ κώνυ ἐπιφανείᾳ, τὸ δὲ τῷ τῆς βάσεως αὐτῦ ἐμβαδῷ. Καὶ ἀνάπαλιν τὸ τῆς βάσεως τῦ ὀρθῦ κώνυ ἐμβαδὸν ἔχει πρὸς τὴν τοῦ κώνυ ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν τοῦ κώνου πλευράν.

Πρότασις ΚΕ':

Η῾ τῦ ὀρθῦ κώνυ ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ κύκλῳ, ὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐςὶν ἀνάλογος τῆς τε ἡμιδιαμέτρου τῆς τῦ κώνυ βάσεως ϗ τῆς αὐτῦ πλευρᾶς.

Ε῎ςω κῶνος ὀρθὸς ὁ α β γ, ὗ βάσις μὲν ὁ β γ, κύκλος, πλευρὰ δὲ ἡ α β. Εὑρεθήτω δὴ μέση ἀνάλογος τῆς β δ, ἡμιδιαμέτρυ τῦ β γ, κύκλυ, ϗ α β, πλευρᾶς τῦ κώνυ ἡ ε ζ, ϗ γραφήτω ὁ ζ η θ κ, κύκλος. Λέγω ὅτι ὁ ζ η θ κ, κύκλος ἴσος ἐςὶ τῇ τοῦ α β γ, κώνυ ἐπιφανείᾳ. Ε᾿πεὶ γὰρ κατὰ τὸ ε: πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, ὁ β γ, κύκλος ἔχει πρὸς τὴν τῦ α β γ, κώνυ ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ β δ, ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν α β, πλευρὰν, ὡς δὲ ἡ β δ, ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν α β, ἔχει ὁ αὐτὸς β γ, κύκλος πρὸς τὸν ζ η θ κ, κύκλον. αἱ γὰρ β δ, ε ζ, α β, εὐθεῖαι ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, ϗ οἱ κύκλοι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων, πάντως γε ὁ β γ, κύκλος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὴν τῦ α β γ, κώνυ ἐπιφάνειαν, ϗ τὸν ζ η θ κ, κύκλον, ὥςε ἡ τῦ α β γ, κώνυ ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ ζ η θ κ, κύκλῳ. Η῾ τῦ ὀρθῦ ἄρα κώνυ ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ κύκλῳ, ὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐςὶν ἀνάλογος, ϗ τὰ ἑξῆς.

Geom: Sol. lib. 1. Fig. 21.

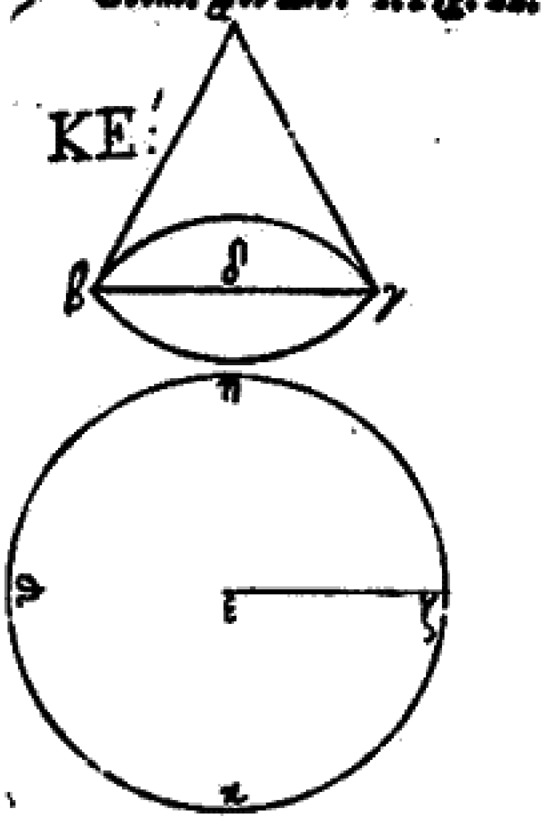


Πρότασις Κϛ':

Η῾ τῦ ὀρθῦ κώνυ ἐπιφάνεια πρὸς τὸν τυχόντα κύκλον ἔχει, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς τῦ κώνυ πλευρᾶς, ϗ ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτῦ βάσεως περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρυ τῦ τυχόντος κύκλυ τετράγωνον.

Ε῎ςω κῶνος ὀρθὸς ὁ α β γ, τυχὼν δὲ κύκλος ὁ ζ η θ κ. Λέγω ὅτι ἡ τοῦ α β γ, κώνυ ἐπιφάνεια πρὸς τὸν ζ η θ κ, κύκλον ἔχει, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς β δ, ἡμιδιαμέτρου τῦ β γ, κύκλυ, ϗ τῆς α β, πλευρᾶς τῦ κώνυ περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τῆς εζ, ἡμιδιαμέτρου τοῦ ζηθκ, κύκλου τετράγωνον, κατὰ γὰρ τὸ ε: πόρισμα τῆς κδ': τοῦ παρόντος, ἡ τοῦ αβ, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν βγ, κύκλον ἔχει, ὡς ἡ αβ, αὐτοῦ πλευρὰ πρὸς τὴν βδ, τοῦ βγ, κύκλου ἡμιδιάμετρον, ὥστε ἐὰν αἱ αβ, βδ, ἐπ' εὐθείας ὦσιν ἔχουσαι κοινὸν ὕψος τὴν αὐτὴν βδ, καὶ συσταθῶσι δύο ὀρθογώνια τετράπλευρα, τὸ μὲν ἑτερόμηκες, τὸ δὲ τετράγωνον, πάντως γε καὶ τὸ ὀρθογώνιον ἑτερόμηκες πρὸς τὸ τετράγωνον ἕξει, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, κατὰ τὴν α: τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἑτερόμηκες ὀρθογώνιον περιέχεται ὑπό τε τῆς βδ, ἡμιδιαμέτρου τοῦ βγ, κύκλου, καὶ τῆς αβ, πλευρᾶς τοῦ κώνου, τὸ δὲ τετράγωνον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βδ, ἄρα ἡ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν βγ, κύκλον ἔχει, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς βδ, καὶ αβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετράγωνον. Ἐπεὶ δὲ ὁ βγ, κύκλος πρὸς τὸν τυχόντα ζηθκ, ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εζ, τετράγωνον. ὥσπερ γὰρ οἱ κύκλοι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων ἡμιδιαμέτρων, οὕτω καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων τῶν αὐτῶν κύκλων τετράγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν πλευρῶν, πάντως γε καὶ δι' ἴσου ἡ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν ζηθκ, τυχόντα κύκλον ἔχει, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς βδ, καὶ αβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εζ, τετράγωνον. Ἡ τοῦ ὀρθοῦ ἄρα κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν τυχόντα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Sol Lib. 1. Fig. 22.



Πρότασις ΚΖ'.

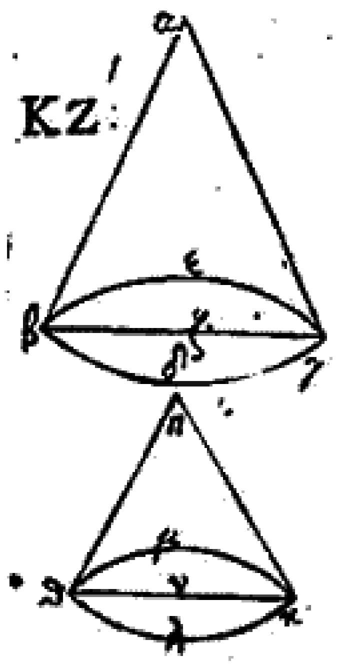
Αἱ τῶν ὀρθῶν κώνων ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν, ὡς τὰ ὑπό τε τῶν πλευρῶν τῶν κώνων καὶ ἡμιδιαμέτρων τῶν αὐτῶν βάσεων περιεχόμενα ὀρθογώνια.

Ἔστωσαν κῶνοι ὅ, τε αβγ, οὗ βάσις ὁ βδγε, κύκλος, καὶ κέντρον τῆς αὐτοῦ βάσεως τὸ ζ, καὶ ὁ ηθκ, οὗ βάσις ὁ θλκμ, καὶ κέντρον τῆς βάσεως τὸ ν. Λέγω δὴ τὴν τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνειαν ἔχειν πρὸς τὴν τοῦ ηθκ, κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς αβ, καὶ βζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς ηθ, καὶ θν. κατὰ γὰρ τὴν ἀνωτέρω, ἡ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὸν βδγε, κύκλον, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς αβ, καὶ βζ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ, τετράγωνον, ἀλλ' ὡς ὁ βδγε, κύκλος πρὸς τὸν θλκμ, κύκλον ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θν, τετράγωνον. ὡς δὲ ὁ θλκμ, κύ-

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 23.

κύκλος πρὸς τὴν τοῦ η θ κ, κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς θ ν, τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς θ η, καὶ θ ν, περιεχόμενον ὀρθογώνιον κατὰ τὴν αὐτὴν, ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ τοῦ α β γ, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ η θ κ, κώνου ἐπιφάνειαν, οὕτω καὶ τὸ ὑπό τε τῆς α β καὶ β ζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς η θ, καὶ θ ν. Τέσσαρα γὰρ μεγέθη, ἡ τοῦ α β γ, κώνου ἐπιφάνεια, οἱ β δ γ ε, θ λ κ μ, κύκλοι, καὶ ἡ τοῦ η θ κ, κώνου ἐπιφάνεια, καὶ ἄλλα τοσαῦτα τὸ ὑπό τε τῆς α β, καὶ β ζ, ὀρθογώνιον, τὰ ἀπὸ τῶν β ζ, θ ν, τετράγωνα, καὶ τὸ ὑπό τε τῆς η θ, καὶ θ ν, ὀρθογώνιον ἐν τῷ αὐτῷ εἰσι λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμενα, ὥστε καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Αἱ τῶν ὀρθῶν κώνων ἄρα ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας ἔχουσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

KZ'

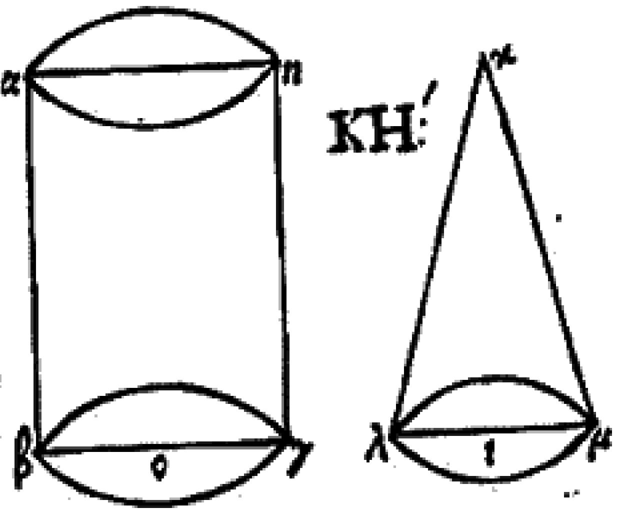


Πρότασις ΚΗ'.

Ἡ τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει, ὡς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου, καὶ ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ βάσεως ὀρθογώνιον, καὶ ἀνάπαλιν.

Ἔστω κύλινδρος μὲν ὀρθὸς ὁ α β γ η, κῶνος δὲ ὁ κ λ μ. Λέγω δὴ τὴν τοῦ α β γ η, κυλίνδρου ἐπιφάνειαν ἔχειν πρὸς τὴν τοῦ κ λ μ, κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς τὸ α γ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς κ λ, καὶ λ ι, περιεχόμενον ὀρθογώνιον. κατὰ γὰρ τὴν ιζ' τοῦ παρόντος ἡ τοῦ α β γ η, κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν β γ, κύκλον ἔχει, ὡς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ αὐτοῦ κυλίνδρου ὀρθογώνιον τὸ α γ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β ο, τετράγωνον. ἀλλ' ὡς ὁ β γ, κύκλος πρὸς τὸν λ μ, κύκλον, ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς β ο, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λ ι, ὡς δὲ ὁ λ μ, κύκλος πρὸς τὴν τοῦ κ λ μ, κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς λ ι, τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς κ λ, λ ι, ὀρθογ': ἄρα καὶ δι' ἴσου ὡς ἡ τοῦ α β γ η, κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ κ λ μ, κώνου ἐπιφάνειαν, ἔχει τὸ α γ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς κ λ, καὶ λ ι, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ὁ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ ἀνωτέρω. Ἡ τοῦ ὀρθοῦ ἄρα κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει ὡς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς πλευ-

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 24.



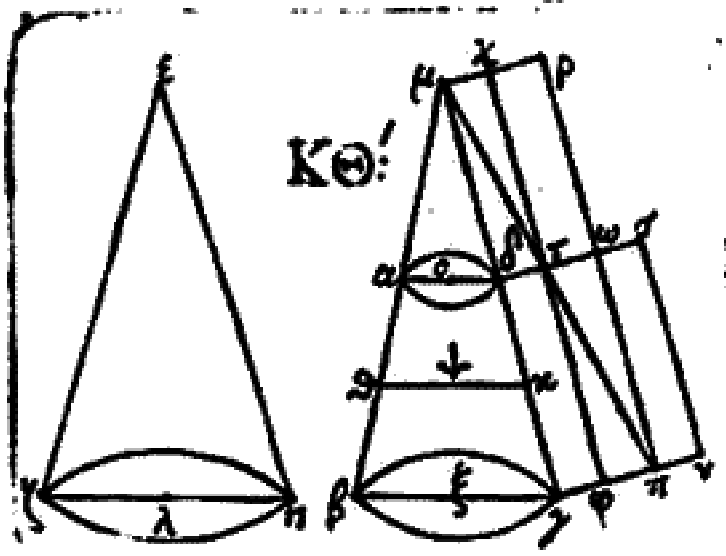
πλευρᾶς τοῦ κώνου καὶ ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ βάσεως ὀρθογώνιον, καὶ ἀνάπαλιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΘʹ.

Ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ὁλοκλήρου κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ κολοβοῦ κώνου καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ἐν μέσῳ αὐτοῦ κύκλου περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ ὁλοκλήρου κώνου καὶ ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ περιεχόμενον βάσεως.

Ἔστω κῶνος κολοβὸς μὲν ὁ α β γ δ, ὁλόκληρος δὲ ὁ ε ζ η, καὶ διάμετρος κύκλου τοῦ ἐν μέσῳ τοῦ κολοβοῦ κώνου ἡ θ κ. Λέγω δὴ τὴν τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνειαν ἔχειν πρὸς τὴν τοῦ ε ζ η, ὁλοκλήρου κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς α β, καὶ θ κ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς ε ζ, καὶ ζ λ. Ἤχθω γὰρ ἑκατέρα τῶν β α, γ δ, πλευρῶν τοῦ κολοβοῦ κώνου ἐπ' εὐθείας, καὶ ἀναπεπληρώσθω ὁ μ β γ, κῶνος. πρὸς δὲ τῷ γ, σημείῳ συνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς μ γ, ἡ γ ν, ὥστε τὸ μὲν γ π, αὐτῆς μέρος ἴσον εἶναι τῇ γ ξ, ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ β γ, κύκλου, τὸ δὲ π ν, τῇ δ ο, ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ α δ, κύκλου, καὶ ἀναπεπληρώσθωσαν τὰ γ ρ, γ σ, ὀρθογώνια. εἶτα ἐπιζεύχθω ἡ μ π, διαγώνιος διάμετρος τοῦ γ ρ, παραλληλογράμμου, τέμνουσα τὴν δ σ, κατὰ τὸ τ, καὶ διὰ τοῦ τ, διήχθω παράλληλος τῇ γ μ, ἡ φ χ.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 25.



Δείκνυται. Ἐπεὶ γὰρ αἱ γ κ, κ δ, εἰσὶν ἴσαι, πάντως γε αἱ μ δ, μ κ, μ γ, ἀριθμητικῶς εἰσιν ἀνάλογοι. ἀλλ' ὡς ἡ μ δ, πρὸς τὴν δ α, ἔχει ἥτε μ κ, πρὸς τὴν κ θ, καὶ ἡ μ γ, πρὸς τὴν γ β, ἄρα καὶ αἱ δ α, κ θ, γ β, ἀριθμητικῶς εἰσιν ἀνάλογοι, ὅτι δὲ τρία μεγέθη ἀριθμητικῶς εἰσιν ἀνάλογα, τὸ ἐκ τῶν ἄκρων συμποσούμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ μέσου δὶς λαμβανομένῳ, ἄρα τὸ μὲν ἐκ τῶν δ α, γ β, συμποσούμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ κ θ, δὶς λαμβανομένῳ, τὸ δὲ ἐκ τῶν δ ο, γ ξ, τῷ ἐκ τοῦ κ ψ, ὁμοίως δὶς λαμβανομένῳ, ἤτοι τῷ κ θ. Αὖθις ἐπεὶ ἡ μ γ, πρὸς τὴν γ ξ, ἔχει, ὡς ἡ μ δ, πρὸς τὴν δ ο, κατὰ τὴν βʹ: τοῦ ϛʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς δὲ ἡ μ γ, πρὸς τὴν γ π, ἡ τὴν ἴσην ταύτῃ γ ξ, ἔχει καὶ ἡ μ δ, πρὸς τὴν δ τ, πάντως γε ἡ μ δ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὴν δ ο, καὶ δ τ, ὥστε αἱ δ ο, δ τ, ἴσαι εἰσίν, ἀλλ' ἡ δ ο, ἴση ἐστὶ καὶ τῇ π ν, ἡ δὲ γ ξ, τῇ γ π, τὸ ἐκ τῶν δ ο ἄρα γ ξ, συμποσούμενον

ἴσον

ἴσον ἐστὶ τῇ γ ν, τὸ δὲ ἐκ τῶν δ ο, γ ξ, ἐστὶν ἴσον καὶ τῇ κ θ, ὡς δέδεικται, ἡ γ ν, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ κ θ, καὶ τὸ γ σ, ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ ὑπό τε τῆς α β, πλευρᾶς τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου, καὶ κ θ, διαμέτρου τοῦ ἐν μέσῳ αὐτοῦ κύκλου. ἀλλ' ἡ μὲν γ π, ἴση ἐστὶ τῇ γ ξ, ἡ δὲ δ π, τῇ δ ο, ὡς δέδεικται. ἄρα τὸ μὲν γ ρ, παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ ὑπό τε τῆς μ γ, πλευρᾶς τοῦ μ β γ, ὁλοκλήρου κώνου, καὶ γ ξ, ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ βάσεως, τὸ δὲ δ χ, τὸ ὑπό τε τῆς μ δ, πλευρᾶς τοῦ μ α δ, κώνου καὶ δ ο, ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ βάσεως. ἔχει δὲ ἡ τοῦ μ β γ, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ μ α δ, ἐπιφάνειαν, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς μ γ, καὶ γ ξ, πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς μ δ, δ ο, περιεχόμενον ὀρθογώνιον κατὰ τὴν κ ζ': τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ τὸ γ ρ, πρὸς τὸ δ χ, ἔχει, ὡς ἡ τοῦ μ β γ, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ μ α δ, ἐπιφάνειαν, καὶ διαιρέσει ἄρα, ὡς ἡ τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ μ α δ, ἐπιφάνειαν, ἔχει καὶ ὁ δ γ π ρ χ τ, γνώμων πρὸς τὸ δ χ, ὀρθογώνιον, ἀλλὰ τὸ γ σ, ἴσον ἐστὶ τῷ δ γ π ρ χ τ, γνώμονι, ἄρα καὶ ὡς ἡ τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ μ α δ, ἐπιφάνειαν, ἔχει ὡς τὸ γ σ, πρὸς τὸ δ χ, ὀρθογώνιον, ὡς δὲ ἡ τοῦ μ α δ, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ε ζ η, ἐπιφάνειαν, ἔχει τὸ ὑπό τε τῆς μ δ, καὶ δ ο, ἤτοι τὸ δ χ, πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς ε ζ, καὶ ζ λ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ε ζ η, ἔχει τὸ γ σ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ε ζ, ζ λ, ἀλλὰ τὸ γ σ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν α β, θ κ, ὡς δέδεικται, ἡ τοῦ κολοβοῦ ἄρα κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ὁλοκλήρου κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει ὡς τὸ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ κολοβοῦ κώνου καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ ἐν μέσῳ αὐτοῦ κύκλου περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ ὁλοκλήρου κώνου καὶ ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ βάσεως περιεχόμενον.

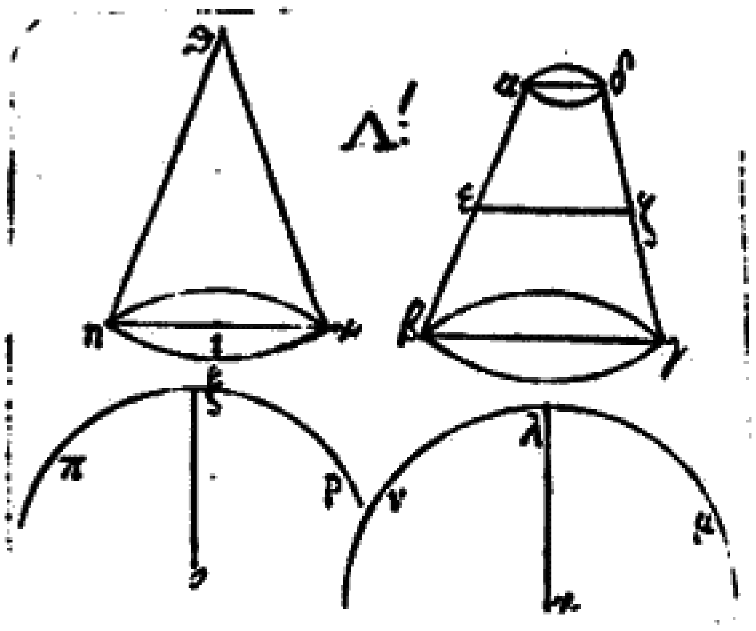
Ὅτι δὲ ὁ δ γ π ρ χ τ, γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ γ σ, παραλληλογράμμῳ, δῆλον. τὸ γὰρ τ ρ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ γ τ, τούτῳ δὲ τὸ π σ, ὥστε τὸ π σ, ἴσον ἐστὶ τῷ τ ρ, κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ γ ω, ἔσται τὸ γ σ, ἴσον τῷ δ γ π ρ χ τ, γνώμονι.

Πρότασις Λ'.

Ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῆς τε τοῦ κώνου πλευρᾶς καὶ διαμέτρου τοῦ ἐν μέσῳ αὐτοῦ κύκλου.

Ἔστω κῶνος κολοβὸς ὁ α β γ δ, οὗ πλευρὰ μὲν ἡ α β, διάμετρος δὲ τοῦ ἐν μέσῳ αὐτοῦ κύκλου ἡ ε ζ· ἔστω δὲ καὶ ἡ κ λ, μέση ἀνάλογος τῶν α β, ε ζ, ἡμιδιάμετρος δὲ τοῦ μ λ ν, κύκλου. Λέγω δὴ τὴν τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι τῷ μ λ ν, κύκλῳ. Συσταθήτω γὰρ κῶνος ὁλόκληρος ὡς ἔτυχεν, ὁ θ η κ, οὗ βάσις ὁ η κ, κύκλος, ἡμιδιάμετρος δὲ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἡ η ι, ἡ η ι, καὶ εὑρέθήτω μέση ἀνάλογος τῶν θ η, η ι, ἡ ο ξ. διαστήματι δὲ τῷ ο ξ, γραφήτω ὁ π ξ ρ, κύκλος. καὶ ἐπεὶ ἡ τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν τοῦ θ η κ, ὁλοκλήρου κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς τὸ ὑπὸ τῶν α β, ε ζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θ η, η ι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν α β, ε ζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς κ λ, τετράγωνον, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν θ η, η ι, τὸ ἀπὸ τῆς ο ξ, πάντως γε ἡ τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν τοῦ θ η κ, ὁλοκλήρου κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς κ λ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ο ξ, τετράγωνον, ἀλλ᾽ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν κ λ, ο ξ, ἡμιδιαμέτρων, ἔχουσι καὶ οἱ μ λ ν, π ξ ρ, κύκλοι, ἄρα ἡ τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ θ η κ, ἐπιφάνειαν ἔχει, ὡς ὁ μ λ ν, κύκλος πρὸς τὸν π ξ ρ, ἔστι δὲ ἡ τοῦ θ η κ, κώνου ἐπιφάνεια ἴση τῷ π ξ ρ, κύκλῳ κατὰ τὴν κ΄: τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἡ τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ μ λ ν, κύκλῳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 26.



Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι αἱ τῶν κολοβῶν κώνων ἐπιφάνειαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς ἑκατέρου καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ἐν μέσῳ αὐτῶν κύκλου περιεχόμενα ὀρθογώνια.

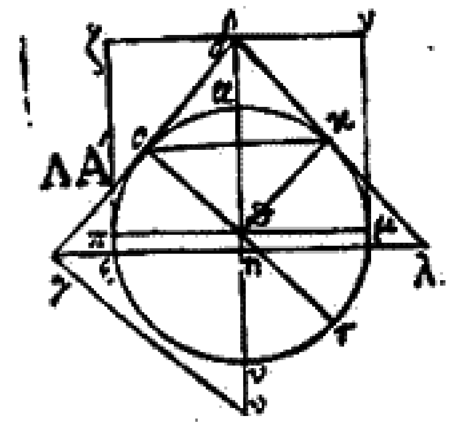
Πρότασις ΛΑ΄.

Ἡ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια, οὗ ἑκατέρα τῶν πλευρῶν ἅπτομένη τοῦ κύκλου, δίχα διαιρεῖται κατὰ τὴν ἁφὴν, ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, οὗ ὕψος τὸ αὐτὸ τῷ τοῦ κώνου, καὶ διάμετρος τῆς βάσεως ἴση τῇ τοῦ κύκλου διαμέτρῳ.

Ἔστω α΄: κῶνος ὁλόκληρος ὁ δ γ λ, οὗ ἑκατέρα τῶν δ γ, δ λ, πλευρῶν ἁπτέσθω τοῦ α π υ μ, κύκλου (οὗ ἡ διάμετρος π μ, ἔστω παράλληλος τῇ γ λ, διαμέτρῳ τῆς τοῦ δ γ λ, κώνου βάσεως) ἡ μὲν κατὰ τὸ ο, ἡ δὲ κατὰ τὸ κ, ὥστε τὰς δ ο, ο γ, καὶ δ κ, κ λ, ἴσας εἶναι. Λέγω δὴ τὴν τοῦ δ γ λ, κώνου ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι τῇ κυλίνδρου, οὗ ὕψος μὲν ἴσον τῷ η δ, ὕψει τοῦ δ γ λ, κώνου, διάμετρος δὲ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἴση τῇ π μ, διαμέτρῳ τοῦ α π υ μ, κύκλου. Σταυρούσθωσαν γὰρ κάθετοι ἐπὶ τῆς π μ, διαμέτρου πρὸς τοῖς π, καὶ μ, πέρασιν αὐτῆς αἱ π ζ, μ ν, καὶ

καὶ διὰ τοῦ δ, σημείου διήχθω παράλληλος τῇ π μ, ἡ ζ ν, ἀπὸ δὲ τοῦ ο, διήχθω διὰ τοῦ θ, κέντρου τοῦ κύκλου ἡ ο τ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἤχθω ἡ γ υ, συμπίπτουσα τῇ δ θ, ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ υ. καὶ ἐπεὶ ἡ ο τ, διὰ τοῦ θ, κέντρου τοῦ κύκλου διέρχεται καὶ τῆς ἀφῆς, πάντως γε καθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς γ δ, ταύτῃ δὲ παράλληλος ἤχθη ἡ γ υ, ἄρα καὶ ἡ γ υ, καθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς γ δ, ὥστε ἡ ὑπὸ δ γ υ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ γ η δ, ὁμοίως ὀρθή ἐστιν, ὡς ὀψόμεθα, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ γ δ υ, κοινή, τὰ ἄρα δ γ υ, γ η δ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν, ὥστε ἡ ὑπὸ δ γ η, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ υ δ, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ γ η υ, γ η δ, εἰσὶν ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ η γ υ, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ η δ γ,

Geom: Sol. lib. 1. Fig. 27.



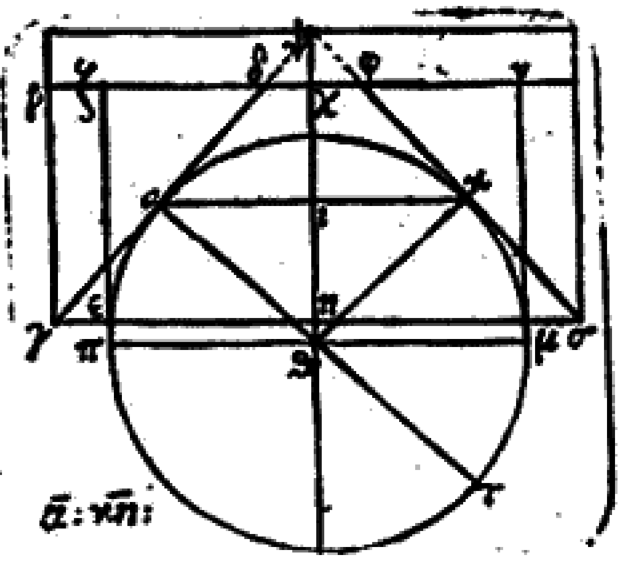
ἰσογώνια ἄρα τὰ γ η υ, γ η δ, τρίγωνα, καὶ ἑπομένως ὡς ἡ γ υ, πρὸς τὴν γ η, ἡ γ δ, πρὸς τὴν δ η, ἀλλ᾽ ἡ γ υ, ἴση ἐστὶ τῇ π μ, (κατὰ γὰρ τὴν β΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ δ ο, πρὸς τὴν δ γ, ἡ ο θ, πρὸς τὴν γ υ, ἡ δὲ δ γ, διπλασία ἐστὶ τῆς δ ο, διπλασία ἄρα καὶ ἡ γ υ, τῆς ο θ. ἔστι δὲ ἡ ο θ, ἡμιδιάμ: ἴση τῇ π θ, ἡμιδιαμέτρῳ, ἡ γ υ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ π μ,) ταύτῃ δὲ ἴση ἡ ζ ν, ἄρα ὡς ἡ ζ ν, πρὸς τὴν γ η, ἡ γ δ, πρὸς τὴν δ η, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ζ ν, δ η, ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ δ, γ η, μέσων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γ δ, γ η, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ τοῦ κώνου ὀρθογώνιον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ζ ν, δ η, τὸ τοῦ κυλίνδρου, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν δ γ, γ η, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ζ ν, δ η, ἔχει ἡ τοῦ δ γ λ, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ε ν, κυλίνδρου ἐπιφάνειαν κατὰ τὴν κη΄: τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἡ τοῦ δ γ λ, κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ε ν, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ.

Ὅτι δὲ ἡ ὑπὸ γ η δ, ὀρθή ἐστι, δῆλον. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς θ κ, ἐπεὶ τῶν δ ο θ, δ κ θ, τριγώνων αἱ δύο δ ο, ο θ, δυσὶ ταῖς δ κ, κ θ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, κοινὴ δὲ ἡ δ θ, πάντως γε ἡ ὑπὸ ο δ θ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κ δ θ, ἀλλὰ τῶν γ η δ, λ η δ, τριγώνων αἱ δύο γ δ, δ η, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς λ δ, δ η, καὶ βάσις ἄρα ἡ γ η, βάσει τῇ λ η, ἴση ἐστί, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἄρα ἡ ὑπὸ γ η δ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ λ η δ, καὶ ἑπομένως ὀρθὴ ἑκατέρα κατὰ τὴν ιγ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Ἔστω β΄: κῶνος κολοβὸς ὁ δ γ σ φ, ὥστε ἑκατέραν καὶ τῶν τούτου πλευρῶν δ γ, σ φ

ἀππἅπτεσθαί τε τοῦ ο τ κ, κύκλου, τὴν μὲν κατὰ τὸ ο, τὴν δὲ κατὰ τὸ κ, καὶ δίχα κατὰ τὰς ἀφὰς τέμνεσθαι. Ἤχθω δὴ ἡ π μ, διάμετρος τοῦ κύκλου παραλλήλως τῇ γ σ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω τῆς κατασκευῆς ὡς προειρημένα ἐστί. Λέγω τὴν τοῦ δ γ σ φ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ ε ζ, ἴση τῷ η χ, ὕψει τοῦ δ γ σ φ, κολοβοῦ κώνου, διάμετρος δὲ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἡ ζ ν, ἴση τῇ διαμέτρῳ τοῦ ο τ κ, κύκλου. Ἐπεὶ γὰρ αἱ θ ο, θ κ, ἴσαι εἰσὶν ὡς ἡμιδιάμετροι, πάντως γε αἱ ὑπὸ θ ο ι, θ κ ι, γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ θ ο δ, θ κ φ, ἴσαι ὁμοίως εἰσίν. ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ις': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἀφαιρεθεισῶν ἄρα τῶν θ ο ι, θ κ ι, ἴσων, ἐναπολείπονται καὶ αἱ λοιπαὶ ι ο δ, ι κ φ, ἴσαι. ὥστε πληρωθέντος τοῦ ψ γ σ, ὁλοκλήρου κώνου, ἔσται τὸ ψ ο κ, τρίγωνον ἰσοσκελές, καὶ ἡ ο ψ, ἴση ἔσται τῇ κ ψ, ἀλλὰ τῶν ψ ο θ, ψ κ θ, τριγώνων αἱ δύο ο θ, θ ψ, πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς δυσὶ κ θ, θ ψ, ἄρα κατὰ τὴν η': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, αἱ ὑπὸ ο θ ψ, κ θ ψ, γωνίαι ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ο θ, θ ι, ἴσαι ταῖς κ θ, θ ι, ἄρα καὶ βάσις ἡ ο ι, βάσει τῇ κ ι, ἴση ἐστίν, ὥστε κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, αἱ ὑπὸ θ ι ο, θ ι κ, ἴσαι εἰσίν. ἡ γὰρ ο κ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς θ ι, διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένης, ἔστι δὲ ἡ θ ι, ὀρθὴ καὶ ἐπὶ τῆς γ σ, βάσεως τοῦ δ γ σ φ, κώνου ὡς ὕψος τοῦ αὐτοῦ, ἡ γ σ, ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ ο κ, τῇ δὲ γ σ, παράλληλός ἐστι καὶ ἡ ζ ν, ἡ ζ ν, ἄρα παράλληλός ἐστι, καὶ τῇ ο κ, ὥστε αἱ ὑπὸ ζ δ ο, δ ο ι, ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι εἰσίν. Αὖθις ἡ ὑπὸ δ ο θ, ἐστὶν ὀρθὴ κατὰ τὸ ῥηθὲν πόρισμα, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ι ο θ, ι θ ο, ἴσαι μιᾷ ὀρθῇ, ἄρα ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ ι ο θ, κοινῆς, ἐναπολείπεται ἴση ἡ ὑπὸ ι ο δ, τῇ ὑπὸ ο θ ι, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ι ο δ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ο δ ρ, ἐναλλὰξ, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ο δ ρ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ο θ ι, ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ο ι θ, δ ρ γ, ὀρθὴ, τὰ ἄρα ο ι θ, δ ρ γ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, καὶ ἑπομένως ὡς ἡ ρ γ, ἤτοι ε ζ, πρὸς τὴν γ δ, ἡ ο ι, πρὸς τὴν ο θ, ὡς δὲ ἡ ι ο, πρὸς τὴν ο θ, ἔστι καὶ ἡ ο κ, διπλῆ τῆς ο ι, πρὸς τὴν ο τ, διπλῆν τῆς ο θ, ἄρα ὡς ἡ ε ζ, πρὸς τὴν γ δ, ἡ ο κ, πρὸς τὴν ο τ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ε ζ, ο τ, ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ δ, ο κ, μέσων, ἀλλ' ἡ ο τ, ἴση ἐστὶ τῇ ζ ν, ἡ δὲ ο κ, διάμετρος τοῦ ἐν μέσῳ κύκλου τοῦ δ γ σ φ, κολοβοῦ κώνου, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ε ζ, ζ ν, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ δ, ο κ, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ε ζ, ζ ν, ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου ὀρθογώνιον, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γ δ, ο κ, τὸ τοῦ κώνου, καὶ ὡς ἔχουσι ταῦτα πρὸς ἄλληλα,

Geom. Sol Lib. 1. Fig. 28.



λα, ἔχουσι καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ τε κώνου καὶ κυλίνδρου ὡς προείρηται, πάντως γε καὶ ἡ τοῦ θγσφ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, οὗ ὕψος μὲν ἴσον τῷ τοῦ αὐτοῦ κώνου ὕψει, διάμετρος δὲ τῆς βάσεως ἴση τῇ τοῦ κύκλου διαμέτρῳ, οὗ αἱ τοῦ κώνου πλευραὶ ἅπτονται, δίχα κατὰ τὰς ἁφὰς διαιρούμεναι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

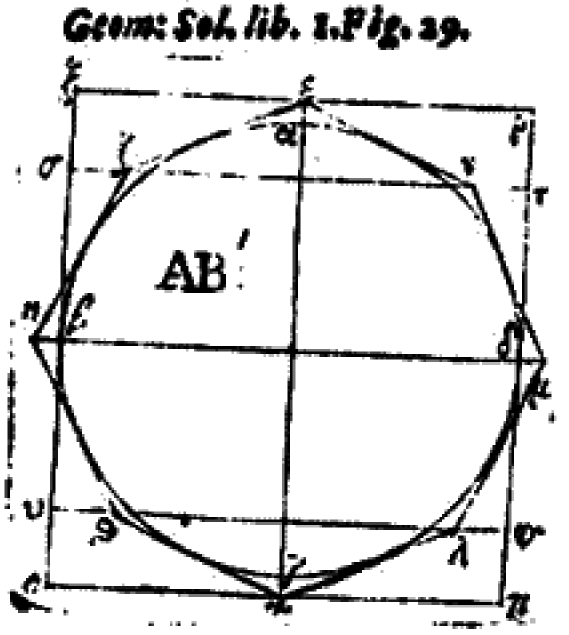
Ὅτι δὲ ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν ἔχει ὡς τὸ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ κολοβοῦ κώνου καὶ διαμέτρου τοῦ ἐν μέσῳ αὐτοῦ κύκλου περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου ὀρθογώνιον, δῆλον· ὡς γὰρ ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ὀρθοῦ ἐπιφάνειαν, ἔχει καὶ τὸ τοῦ κολοβοῦ κώνου ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τοῦ ὀρθοῦ κατὰ τὴν κθ′: τοῦ παρόντος· ἀλλ᾽ ὡς ἡ τοῦ ὁλοκλήρου κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου, ἔχει καὶ τὸ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου ὀρθογώνιον κατὰ τὴν κη′: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου, ὡς τὸ τοῦ κολοβοῦ κώνου ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου.

Πρότασις ΛΒ′:

Ἐὰν περὶ κύκλον πρός τι ἐπίπεδον ὀρθὸν ὄντα πολύγωνον ἀρτιόπλευρον ἢ περιττόπλευρον περιγεγραμμένον ᾖ, ἅπτηται δὲ τοῦ κύκλου εὐθεῖα παράλληλος μὲν τῇ τοῦ κύκλου διαμέτρῳ, τῇ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ὀρθῇ, ἴση δὲ τῷ τοῦ πολυγ. ὕψει, καὶ τοῦ κύκλου περιενεχθέντος, σφαῖρα συσταθῇ, ὥστε περὶ αὐτὴν κώνους εἶναι περιγεγραμμένους ὁλοκλήρους τε καὶ κολοβούς, ἔτι δὲ καὶ κύλινδρον, αἱ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἴσαι ἔσονται τῇ κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ ἐκτὸς τῶν βάσεων.

Ἔστω κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸ κείμενον ἐπίπεδον ὁ αβγδ, καὶ περὶ αὐτὸν πολύγωνον περιγεγραμμένον ἀρτιόπλευρον τὸ εζηθκλμν. ἁπτέσθω δὲ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἡ ξο, κατὰ τὸ β, ἴση οὖσα τῇ εκ, καὶ παράλληλος τῇ αγ, καὶ ἐννοείσθω περιφέρεσθαι τὸν αβγδ, κύκλον περὶ τὴν αγ, ὀρθὴν οὖσαν πρὸς τὸ κείμενον ἐπίπεδον. τούτων γὰρ οὕτω κειμένων ἅμα καὶ γενομένων, συσταθήσεταί τις σφαῖρα, καὶ περὶ αὐτὴν κῶνοι τέσσαρες, οἱ δύο μὲν ὁλόκληροι ὁ εζν, καὶ κθλ, οἱ δύο δὲ κολοβοὶ ὁ ζημν, καὶ θημλ, ἔτι

Geom: Sol. lib. 1. Fig. 29.



δὲ ὁ κύλινδρος, ὁ ο ρ, οὗ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθογώνιον ἐςὶ τὸ ο ξ ρ π. Λέγω δὴ τὰς τῶ ε ζ ν, ζ η μ ν, κ θ λ, θ η μ λ, κώνων ἐπιφανείας ἴσας εἶναι τῇ τοῦ ζ π, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. Διήχθωσαν οὖν διὰ τῶ ζ ν, καὶ θ λ, αἱ σ τ, υ φ, εὐθεῖαι. καὶ ἐπεὶ τοῦ ε ζ ν, κώνου, καὶ ζ η μ ν, αἱ πλευραὶ ἅπτονται τοῦ α β γ δ, κύκλου, δίχα καὶ τὰς ἁφὰς διαιρούμεναι, δῆλον, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μὲν ε ζ ν, κώνου ἴση ἐςὶ τῇ τοῦ σ ρ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἡ δὲ τοῦ ζ η μ ν, τῇ τοῦ β τ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν τοῦ κ θ λ, κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῇ τοῦ ο φ, ἡ δὲ τοῦ θ η μ λ, τῇ τοῦ υ δ. ὥςε αἱ τέσσαρες κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶ σύμπασαι τῇ τοῦ ξ π, ἐπιφανείᾳ. Τὸ αὐτὸ δειχθήσεται καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κἂν καὶ τὸ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον πλειονόπλευρον εἴη. συςαθήσονται γὰρ περὶ τὴν σφαῖραν κῶνοι, ὧν εἷς μὲν ἔςαι ὁλόκληρος, οἱ δὲ λοιποὶ κολοβοί, καὶ τούτων ἑκάςου αἱ πλευραὶ ἁπτόμεναι ἔσονται τοῦ κύκλου.

Πρότασις ΛΓ'.

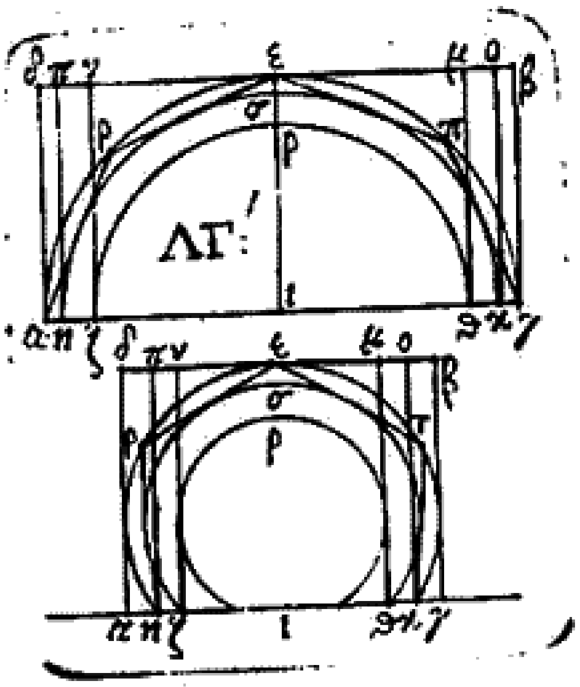
Η' τοῦ ἡμισφαιρίου, ἢ ἡ τοῦ τυχόντος τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ τοῦ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος, καὶ βάσιν ἴσην τῷ μεγίςῳ τῆς σφαίρας κύκλῳ.

Ε'ςω ἡμισφαίριον τὸ α ε γ, καὶ κύλινδρος περὶ αὐτὸ ὁ δ α γ β, οὗ βάσις ἡ α γ, καὶ ὕψος τὸ α δ, ὃ καὶ τοῦ ἡμισφαιρίου. Λέγω δὴ τὴν τοῦ α ε γ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι τῇ τοῦ α β, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, εἰ γὰρ μή, ἢ μείζων ἔςαι, ἢ ἐλάττων. Ε'ςω γοῦν α': ἐλάττων καὶ γενέσθω ὡς ἡ τοῦ περὶ τὸ δ α γ β, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ α ε γ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνειαν, ἡ α γ, πρὸς τὴν ζ θ, εἶτα ἐγγραφέσθω εἰς τὸ α ε γ, ἡμικύκλιον τὸ α ρ ε τ γ, πολύγωνον μὴ ἁπτόμενον τοῦ ζ ρ θ. καὶ ἐγγραφέσθω εἰς τὸ αὐτὸ πολύγωνον τὸ η σ κ, ἡμικύκλιον, καὶ ἀπὸ τῶν η ζ θ κ, ἀνεςάθωσαν κάθετοι αἱ η π, ζ ν, θ μ, κ ο, καὶ ἐπεὶ αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ διὰ τῶν ἀξόνων αὐτῶν ὀρθογώνια κατὰ τὴν ιη': τοῦ παρόντος, πάντως καὶ ἡ τοῦ περὶ τὸ α β, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ἔχει ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον, ἀλλὰ τὸ α β, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ζ μ, ἔχει, ὡς ἡ α γ, βάσις πρὸς τὴν ζ θ, κατὰ τὴν α': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ ἡ τοῦ περὶ τὸ α β, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ἔχει ὡς ἡ α γ, πρὸς τὴν ζ θ, ἡ δὲ α γ, πρὸς τὴν ζ θ, ἔχει ὡς ἡ τοῦ περὶ τὸ δ α γ β, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὸ α ε γ, ἡμισφαίριον, ἄρα ἡ τοῦ περὶ τὸ δ α γ β, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρός τε τὴν τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, καὶ πρὸς τὸ α ε γ, ἡμισφαίριον, ὥςε ἡ τοῦ α ε γ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῇ τοῦ περὶ τὸ ζ μ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. Ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν ἀνωτέρω αἱ κωνικαὶ

ἐπι-

ἐπιφάνειαι τοῦ π ε ρ τ, καὶ ρ α γ τ, ἴσαι εἰσὶ τῇ τοῦ περὶ τὸ η ο, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, ἡ δὲ τοῦ περὶ τὸ κ π, κυλίνδρου ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ περὶ τὸ ζ μ, κυλίνδρου ἐπιφανείας, ἄρα αἱ κωνικαὶ αὗται ἐπιφάνειαι μείζονές εἰσι καὶ τῆς τοῦ α ε γ, ἡμισφαιρίου ἐπιφανείας, ὅπερ ἄτοπον. ἐγγεγραμμένοι γάρ εἰσιν. οἱ κῶνοι εἰς τὸ α γ ε, ἡμισφαίριον.

Geom. Sol Lib. 1. Fig. 30.



Ἔστω δὲ μείζων ἡ τοῦ ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια τῆς τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφανείας. Γενέσθω οὖν ὡς ἡ τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνειαν, ἡ ζ θ, πρὸς τὴν η κ, ἤγουν ἡ ζ ι πρὸς τὴν η ι, ὡς γὰρ ἡμιδιάμετρος πρὸς ἡμιδιάμετρον, ἔχει καὶ διάμετρος πρὸς διάμετρον, τὰ δὲ λοιπὰ γινέσθω ὡς προειρημένα. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ ζ θ, πρὸς τὴν η κ, ἢ ἡ ι ζ, πρὸς τὴν ι η, ἔχει τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ η ο, ὀρθογώνιον κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν α: ὡς δὲ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ η ο, ἔχει καὶ ἡ τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ὁμοίως ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ η ο· ἄρα ἡ τοῦ ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια, καὶ ἡ τοῦ περὶ τὸ η ο, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ὁμοίως ἐπιφάνεια τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, ὥστε ἡ τοῦ ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ περὶ τὸ η ο, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, ἀλλὰ τῇ τοῦ περὶ τὸ η ο, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ π ε ρ τ, καὶ ρ α γ τ, κώνου, ἄρα αἱ κωνικαὶ αὗται ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶ καὶ τῇ τοῦ ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφανείᾳ, ὅπερ ἄτοπον. οὐ γὰρ ἅπτονται αὐτοῦ αἱ τῶν κώνων πλευραὶ περὶ αὐτὸ ὄντων, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅρα καὶ τὰ παραλειπόμενα τῆς παρ: λγ': παρακατιών.

:Πρότασις ΛΔ':

Ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασιός ἐστι τοῦ ἐν αὐτῇ μεγίστου κύκλου.

Ἔστω σφαῖρα ἡ α β γ δ, καὶ μέγιστος ἐν αὐτῇ κύκλος ὁ α ε γ ζ. Λέγω τὴν τῆς α β γ δ, σφαίρας ἐπιφάνειαν τετραπλασίονα εἶναι τοῦ α ε γ ζ, κύκλου. Ἐγγραφήτω δὴ περὶ τὴν α β γ δ, σφαῖραν κύλινδρος ὁ η θ κ λ· καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ τοῦ α δ γ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ α λ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, ἡ δὲ τοῦ α β γ, ἡμισφαιρίου τῇ τοῦ α κ, κυλίνδρου, πάντως γε ἡ τῆς α β γ δ, σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ θ λ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. ἀλλ' ἡ τοῦ θ λ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια