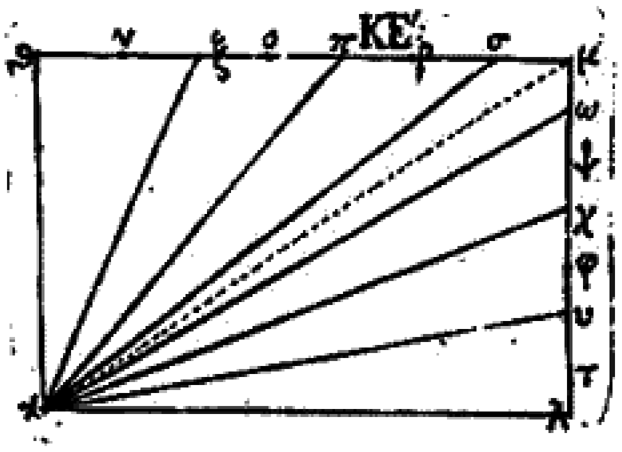
ἑκατέρῳ τῶν θηπ, θπμ, κατὰ τὴν α': τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ, δῆλον ὅτι καὶ τὸ θξλ, ἴσον ἐςὶ
τῷ θηπ, ἢ θπμ, καὶ ἑπομένως συναμφότερα τὰ θηπ, θπμ, τουτέςι τὸ θημ,
τῷ θηπ, ἢ θπμ, καὶ ἑπομένως συναμφότερα τὰ θηπ, θπμ, τουτέςι τὸ θημ,
τρίγωνον ἴσον ἐςὶ συναμφοτέροις τοῖς θμλ, θξλ, ταυτὸν δ' ἐςὶν εἰπεῖν τῷ
θμλξ, τραπεζίῳ, ἀλλὰ τὸ θημ, δέδεικται ἴσον καὶ τῷ θξκ, τὰ τρία ἄρα
θημ, θμλξ, θξκ, ἴσα ἐςίν, ὥςε τὸ δοθὲν ηθκλ, διῄρηται εἰς μέρη ἴ-
σα τρία κατὰ τὸ προςαχθέν.

## Πρότασις ΚΕ':

**Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς ὁσαδηποτοῦν διελεῖν μέρη ἀπὸ τῆς δοθείσης γωνίας.**

Ἔςω διελεῖν τὸ θκλμ, εἰς μέρη, δὸς εἰπεῖν ἑπτὰ ἴσα ἀπὸ τῆς κ, γω-
νίας. Διαιρεθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν θμ, λμ, εἰς μέρη ἑπτὰ ἴσα τὰ θν, νξ,
ξο, καὶ λοιπὰ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν ἀνὰ δύο σημεῖα αἱ κξ, κπ, κσ, κυ,
κχ, κω, καὶ ἔςαι τὸ προςαχθέν. Ἐπιζεύχθω γὰρ λευκὴ ἡ κμ, γραμμὴ, καὶ
διαιρεθήσεται τὸ θκλμ, δι' αὐτῆς εἰς δύο ἴσα τὰ θκμ, θλμ, τρίγωνα κατὰ
τὴν λδ': τοῦ α': τοῦ Στοιχ:. Ἐπεὶ δ' ἑκατέρα τῶν θμ, λμ, διῄρηται εἰς μέ-
ρη ἑπτὰ ἴσα ἀλλήλοις, δῆλον ὅτι ὃ μέρος ἐςὶ
τὸ θκξ, τρίγωνον τοῦ θκμ, τὸ αὐτὸ ἐςὶ μέ-
ρος καὶ τὸ κλυ, τοῦ κλμ, καὶ ἑπομένως ἴσον
τῷ θκξ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ κυ, κτ,
ἑκάτερον μὲν τῶν κθν, κνξ, ζ': ἔςαι μέρος
τοῦ κθμ, ἑκάτερον δὲ τῶν κλτ, κτυ, ζ': ἔ-
ςαι μέρος τοῦ κλμ, ὥσπερ δὲ τὸ ὅλον ἴσον ἐ-
ςὶ τῷ ὅλῳ, οὕτω καὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῖς αὐτοῖς
μέρεσιν ἴσα εἰσίν, ἀλλὰ τῷ μὲν κθξ, ἴσον
ἐςὶν ἑκάτερον τῶν κξπ, κπσ, τῷ δὲ κλυ, ἑ-

Geom. Lib. 8. Fig. 18.




κάτερον τῶν κυχ, κχω, ἄρα ἕκαςον τῶν κθξ, κξπ, κπσ, ἴσον ἐςὶν ἑκά-
ςῳ τῶν κλυ, κυχ, κχω. Ὅτι δὲ καὶ τὸ κσμω, τραπέζιον ἴσον ἐςὶν ἑκάςῳ
τῶν εἰρημένων, δῆλον. τὸ μὲν γὰρ κσμ, ἴσον ἐςὶ τῷ κρσ, ἥμισυ δὲ τοῦ κπσ,
τὸ δὲ κωμ, ἴσον μὲν τῷ κψω, ἥμισυ δὲ τοῦ κχω, ἀλλὰ τὸ κπσ, ἴσον δέ-
δεικται τῷ κχω, ἄρα καὶ τὸ κσμ, ἴσον ἐςὶ τῷ κωμ, καὶ ἑπομένως τὸ κσμω,
ἴσον ἐςὶ τῷ τε κπσ, καὶ κχω, χωρίς. ἑκάτερον γὰρ τῶν κπσ, κχω, δέ-
δεικται ἴσον τοῖς λοιποῖς, τὰ πάντα ἄρα θκξ, κξπ, καὶ λοιπὰ μέρη ἴσα
εἰσίν, ὥςε τὸ θκλμ, δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς μέρη ἴσα ἑπτὰ διῄρη-
ται κατὰ τὸ προςαχθέν.

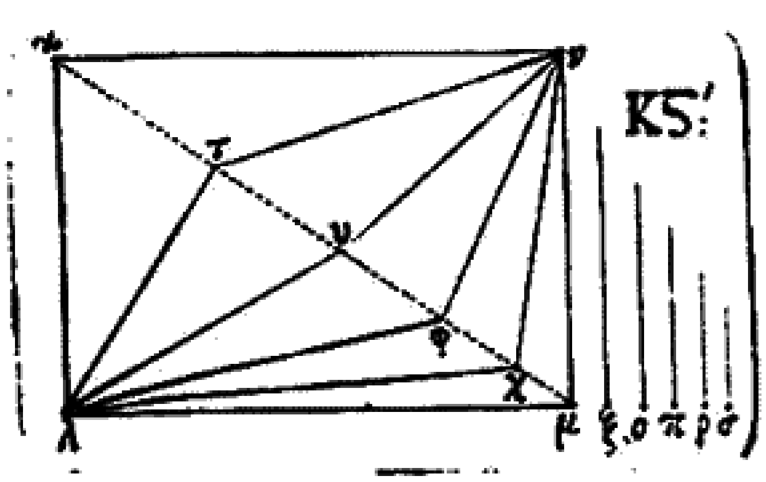
Προ-

## Πρότασις Κϛ'.

**Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ ἀναλογίᾳ ἀπὸ τῆς δοθείσης γωνίας.**

Δοθήτω παραλληλόγραμμον τὸ κλμν, καὶ ἔστω διελεῖν τοῦτο ἀπὸ τῆς λ, γωνίας εἰς μέρη φέρ' εἰπεῖν πέντε, ἔχοντα πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ξοπρσ, μεγέθη. Ἐπιζεύχθω δὴ λοιπὴ ἡ κμ, διάμετρος, καὶ διαιρεθήτω εἰς μέρη πέντε ἀνάλογα τοῖς δοθεῖσι ξοπρσ, μεγέθεσι κατὰ τὴν ϛ': τοῦ α': τοῦ παρ: τὰ κτ, τυ, υφ, φχ, χμ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ λτ, τν, λυ, υν, λφ, φν, λχ, χν, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δοθὲν κλμν, εἰς μέρη πέντε τὰ κλτν, λτνυ, λυνφ, λφνχ, λχνμ, ἔχοντα πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ξοπρσ, δοθέντα μεγέθη. κατὰ γὰρ τὴν α': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχ: τὰ λκτ, λτυ, λυφ, λφχ, λχμ, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ κτ, τυ, υφ, φχ, χμ, βάσεις. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ νκτ, ντυ, νυφ, νφχ, νχμ, ἀλλ' αἱ κτ, τυ, υφ, φχ, χμ, ἔχουσιν ὡς τὰ ξοπρσ, μεγέθη, ἄρα καὶ τὰ λκντ, λτνυ, λυνφ, λφνχ, λχνμ, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ δοθέντα ξοπρσ, μεγέθη. Τὸ δοθὲν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς.

*Geom. Lib. 8. Fig. 19.*

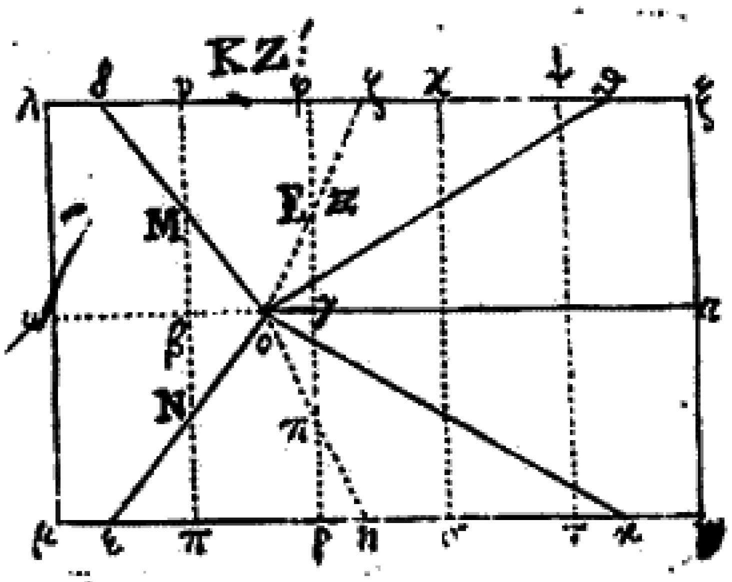



## Πρότασις ΚΖ'.

**Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν ἴσα ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐν αὐτῷ σημείου, δι' οὗ εὐθείας ἀγομένης παραλλήλως ταῖς δυσὶ ταῖν ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευρῶν, αἱ λοιπαὶ δύο αὐτοῦ πλευραὶ δίχα διαιρεθήσονται.**

Ἔστω διελεῖν τὸ λμνξ, παραλληλόγραμμον εἰς πέντε δὸς εἰπεῖν μέρη ἴσα ἀλλήλοις ἀπὸ τοῦ ο, σημείου, δι' οὗ παραλλήλως ταῖς λξ, ἡ μν, εὐθείας ἀγομένης, αἱ λμ, ξν, δίχα τμηθήσονται. Διαιρεθήτω δὴ ἡ μν, αὐτοῦ πλευρὰ εἰς πέντε ἴσα μέρη τὰ μπ, πρ, ρσ, στ, τν, καὶ ἀπὸ τῶν πρστ, σημείων ἀχθήτωσαν παραλλήλως τῇ λμ, ἡ νξ, αἱ πυ, ρφ, σχ, τψ. ἤχθω δὲ διὰ τοῦ ο, καὶ ἡ ωα παραλλήλως τῇ λξ, ἡ μν, τέμνουσα τὴν μὲν πυ, κατὰ τὸ β, τὴν δὲ

Geom. Lib. 8. Fig. 20.

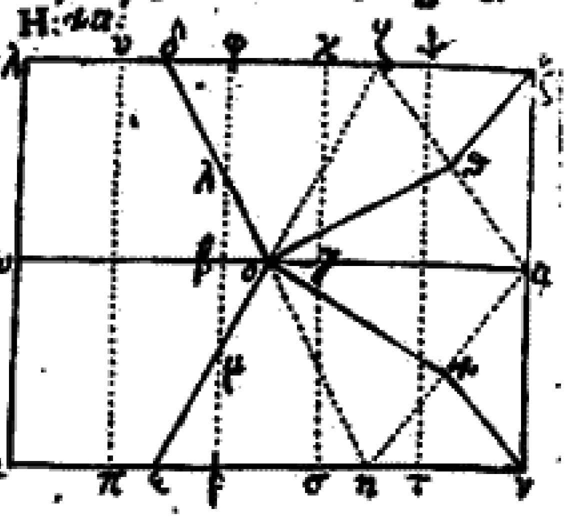



δὲ ρφ, καὶ τὸ γ, εἶτα εἰλήφθω τῇ μὲν βο, ἴση ἡ τὸ δυ, καὶ ἡ επ, τῇ δὲ ογ, ἡ τὸ φζ, καὶ ρη. Αὖθις εἰλήφθω τῇ μὲν δζ, ἴση ἡ ζθ, τῇ δὲ εη, ἡ ηκ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ οδ, οθ, οκ, οε, καὶ τμηθήσεται τὸ λμνξ, δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς πέντε μέρη ἴσα τὰ λμεοδ, δοθ, εοκ, οθξα, οκνα. Δείκνυται, τὰ οβΜ, δυΜ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν κϛʹ: τοῦ αʹ: τοῦ Στοιχ:, ὡσαύτως δὲ ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ τὰ οβΝ, επΝ, καὶ ζφΞ, ογΞ, καὶ ογπ, ηπρ, τρίγωνα. Ἐὰν οὖν τοῖς οβΜ, δυΜ, ἴσοις κοινὸν προστεθῇ τὸ λδΜβω, τραπέζιον, ἔσται τὸ οδλω, τραπέζιον ἴσον τῷ βυλω, παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ οεμω τραπέζιον ἴσον τῷ βπμω, παραλληλογράμμῳ, ὥστε τὸ οδλμε, τραπέζιον ἴσον ἐστὶ τῷ λμπυ, παραλληλογράμμῳ. ἀλλὰ τὸ λμπυ, παραλληλ: εʹ: μέρος ἐστὶ τοῦ δοθέντος λμνξ, παραλληλογράμμου, ἄρα καὶ τὸ οδλμε, τραπέζιον εʹ: μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ. Διὰ τὰ αὐτὰ ἔτι δειχθήσεται καὶ τὸ μὲν οδζ, τρίγωνον ἴσον τῷ βγφυ, παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ οεη, τῷ βγρπ, ὥστε τὰ οδζ, οεη, τρίγωνα συναμφότερα ἴσα εἰσὶ τῷ πρφυ, παραλληλογράμμῳ, ἀλλὰ τῷ μὲν οδζ, ἴσον ἐστὶ τῷ οζθ, κατὰ τὴν αʹ: τοῦ ϛʹ: τοῦ Στοιχ: τῷ δὲ οεη, ἴσον ἐστὶ τὸ οηκ, ἄρα καὶ τὸ μὲν οζθ, ἴσον ἐστὶ τῷ βγφυ, τὸ δὲ οηκ, τῷ βγρπ. ἐπεὶ δὲ τὸ βφ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ βρ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς γφ, γρ, εὐθείας, πάντως γε ἑκάτερον τῶν οδθ, οεκ, ἴσον ἐστὶ τῷ πρφυ, παραλληλογράμμῳ, ἀλλὰ τὸ πρφυ, παραλληλογρ: εʹ: μέρος ἐστὶ τοῦ δοθέντος μξ, ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν οδθ, οεκ, τριγώνων εʹ: μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ μξ, δέδεικται δὲ καὶ τὸ οδλμε, ὁμοίως εʹ: μέρος τοῦ αὐτοῦ, ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν τριῶν οδλμε, οδθ, οεκ, εʹ: μερῶν ἀπὸ τοῦ λμνξ, δοθέντος παραλληλογράμμου, ἐγκαταλείπεται τὸ οθξνκ, πολύγωνον ἴσον δυσὶ εʹ: μέρεσι τοῦ μξ, ἀλλ' ἡ οα, διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τὰ οθξα, οκνα, τραπέζια κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν αʹ: τοῦ ϛʹ: ἄρα ἑκάτερον τῶν οθξα, οκνα, ἴσον ἐστὶ τῷ εʹ: μέρει τοῦ μξ, δοθέντος παραλληλογράμμου. Τὸ δοθὲν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Εἰ δὲ τὸ δοθὲν ο, σημεῖον ἐν μέσῳ ᾖ τοῦ δοθέντος, ἢ μικρόν τι παραλλάττον ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος, διῃρημένου τοῦ μξ, δοθέντος παραλληλογράμμου εἰς πέντε μέρη ἴσα τὰ μυ, πφ, καὶ λοιπὰ παραλληλόγραμμα, ὡς ἀνωτέρω ἡρμήνευται, καὶ τῆς ωα, διὰ τοῦ δοθέντος ο, σημείου ἠγμένης, δι' ἧς τέμνεται ἡ μὲν ρφ, κατὰ τὸ β, ἡ δὲ σχ, κατὰ τὸ γ, εἰλήφθω ἑκατέρα τῶν φδ, ρε, ἴση τῇ βο, ἑκατέρα

τέρα

Geom. Lib. 8. Fig. 21.



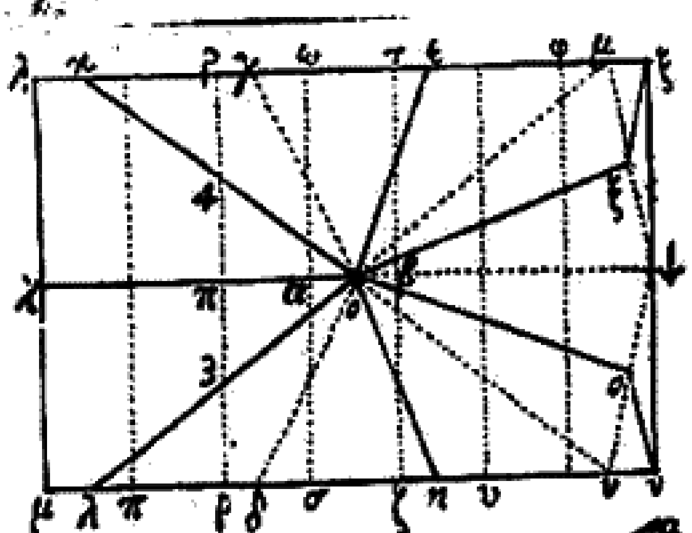

τέρα δὲ τῶν χζ, σ η, ἴση τῇ γ ο, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ο δ, ο ε, ο ζ, ο η, εἶτα ἐπιζευχθεισῶν τῶν ζ α, η α, καὶ ἑκατέρας αὐτῶν δίχα τμηθείσης τῆς μὲν κατὰ τὸ θ, τῆς δὲ κατὰ τὸ κ, ἐπιζεύχθωσαν αἱ ο θ, θ ξ, καὶ ο κ, κ ν, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δοθὲν μ ξ, παραλληλόγραμμον εἰς πέντε μέρη ἴσα τὰ ο δ λ ω, ο ε μ ω, δ ο θ ξ, ξ θ ο κ ν, ν κ ο ε, κατὰ γὰρ τὰ ἀνωτέρω τῶν ο δ ζ, ο ε η, τριγώνων τὸ μὲν ἴσον ἐστὶ τῷ β γ χ φ, τὸ δὲ τῷ β γ σ ρ, ὥστε συναμφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ ρ σ χ φ, ε: μέρει τοῦ μ ξ, δοθέντος. Ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν προειρημένην κϛ': τὰ β ο λ, δ φ λ, ἴσα εἰσί, πάντως γε ἐὰν ἴσοις τοῖς β ο λ, δ φ λ, κοινὸν προστεθῇ τὸ β λ δ λ ω, πολύγωνον, ἔσται τὸ ο δ λ ω, τραπέζιον ἴσον τῷ β φ λ ω, παραλληλογράμμῳ. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ τὸ ο ε μ ν, τραπέζιον ἴσον τῷ β ρ μ ω, παραλληλογράμμῳ. ἀλλ' ἑκάτερον τῶν β φ λ ω, β ρ μ ω, παραλληλογράμμων ε: μέρος ἐστὶ τοῦ μ ξ, τὸ γὰρ μ φ, δύο ε: περιέχει τοῦ αὐτοῦ, τὸ δὲ μ β, ἴσον ἐστὶ τῷ β λ, ἄρα καὶ τῶν ο δ λ ω, ο ε μ ω, τραπεζίων ἑκάτερον ε: ἐστὶ μέρος τοῦ μ ξ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῶν ο ζ ξ α, ο η ν α, ἑκάτερον ε: μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ, ἀλλὰ τῶν ο ζ ξ α, ο η ν α, ἑκάτερον εἰς δύο ἴσα τέμνεται τὰ ο ζ ξ θ, ο α ξ θ, καὶ ο α ν κ, ο η ν κ, ὡς δειχθήσεται, ἄρα τὸ ο θ ξ α ν κ, ε: μέρος ἐστὶ τοῦ μ ξ, περιέχει γὰρ δύο ἡμίση τοῦ ε: μέρους τοῦ αὐτοῦ, ἀφαιρουμένων οὖν τριῶν ε: μερῶν τοῦ μ ξ, δοθέντος παραλληλογράμμου τῶν ο δ λ ω, ο ε μ ω, ο θ ξ α ν κ, ἐγκαταλείπονται τὰ δ ο θ ξ, ε ο κ ν ἴσα δυσὶ ε: μέρεσι τοῦ αὐτοῦ μ ξ, εἰσὶ δὲ καὶ ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις, ἄρα ἑκάτερον τῶν δ ο θ ξ, ε ο κ ν, ε: μέρος ἐστὶ τοῦ μ ξ, δοθέντος. Ὅτι δὲ τὸ ο ζ ξ α, εἰς δύο ἴσα τέμνεται, τῶν ο θ, θ ξ, εὐθειῶν ἠγμένων, δῆλον, ἐπεὶ γὰρ ἡ ζ α, διῄρηται δίχα, πάντως γε κατὰ τὴν α: τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχ: τὰ ο ζ θ, ο θ α, καὶ ζ θ ξ, ξ θ α, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἴσα καὶ τὰ ο η κ, ο κ α, καὶ ν κ η, ν κ α.

Ἔστω ἔτι διελεῖν τὸ δοθὲν λ μ ν ξ, παραλληλόγραμμον εἰς ἴσα ἑπτά. Διαιρεθήτω δὴ α: εἰς ἑπτὰ παραλληλόγραμμα, ὡς προηρμήνευται, τὰ λ π, π ρ, ρ σ, σ τ, τ υ, υ φ, φ ν, τῆς δὲ χ ψ, εὐθείας παραλλήλως τῇ λ ξ, ἢ μ ν, διὰ τοῦ ο, ἀχθείσης, εἰλήφθω τῇ μὲν ο α, ἴση ἑκατέρα τῶν γ ω, δ σ, τῇ δὲ ο β, ἑκατέρα τῶν τ ε, ζ η, εἶτα εἰλήφθω καὶ τῇ μὲν γ ε, ἴσαι ἑκατέρωθεν αἱ γ κ, ε μ, τῇ δὲ δ η, αἱ δ λ, η ν, τῶν δὲ μ ψ, ν ψ, ἐπιζευχθεισῶν, καὶ δίχα διαιρεθεισῶν κατὰ τὰ ξ καὶ ο, ἐπιζεύχθωσαν αἱ ο κ, ο ε, ο μ, ο ξ, ο ο, ο ν, ο η, ο λ, καὶ διαιρεθήσεται πάντως τὸ δοθὲν λ μ ν ξ, εἰς μέρη ἑπτὰ ἴσα ἀλλήλοις τὰ λ χ ο κ, κ ο ε, ε ο ξ ξ, ξ ξ ο ο ν, ν ο ο η, η ο λ, λ ο χ μ. Ὅτι μὲν γὰρ τὰ ο γ ε, ο δ η, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ δῆλον, ἰσόπλευρα γάρ, ἔτι δὲ καὶ συναμφότερα ἴσα εἰσὶ

τῷ

τῷ ο γ ι, τριγώνῳ, τὸ δὲ ο λ δ, τῷ ο δ η, καὶ τὴν α΄: τοῦ ς΄: τοῦ Στοιχειώσ. πάντως γε ἑκάτερον τῶν ο κ ι, ο λ η, ἕβδομόν ἐστι μέρος τοῦ λ μ ν ξ, δοθέντος παραλληλογράμμου. Αὖθις ἐπεὶ ἑκάτερα τῶν κ ρ, λ ρ, ἴση ἐστὶ τῇ ο π, ὡς δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς, πάντως γε τὸ μὲν κ ρ 4, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ο π 4, τὸ δὲ λ ρ 3, τῷ ο π 3, ὥστε τοῖς μὲν κ ρ 4, ο π 4, ἴσοις κοινοῦ προστιθεμένου τοῦ λ χ π 4 κ, χωρίου, ἔστι καὶ τὸ ο χ λ κ, ἴσον τῷ λ χ π ρ, τοῦτο δὲ ζ΄: ἐστὶ μέρος τοῦ λ μ ν ξ, δοθέντος, ἄρα καὶ τὸ ο χ λ κ, ζ΄: ἐστὶ μέρος τοῦ αὐτοῦ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ ο χ μ λ, ὁμοίως ζ΄: μέρος τοῦ λ μ ν ξ, παραλληλογράμμου, ἀφαιρουμένων τοίνυν ἀπὸ τοῦ λ μ ν ξ, δοθέντος παραλληλογράμμου 4 ἑβδόμων μερῶν τῶν ο χ λ κ, κοι, ο χ μ λ, λ ο ι, ἐγκαταλείπεται τὸ ι ο ν ν ξ, χωρίον περιεκτικὸν τριῶν ἑβδόμων μερῶν τοῦ αὐτοῦ. Ὅτι δὲ τὸ αὐτὸ χωρίον διῄρηται εἰς τρία ἴσα τὰ ι ο ξ ξ, ο ξ ξ ν ο ο, ο ν ν ο, ἔξεστι συναγαγεῖν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, τὸν αὐτὸν γὰρ τρόπον διῄρηται εἰς τρία ἴσα καὶ τὸ θ ξ ν ι ο, χωρίον, τὰ θ ο θ ξ, ξ θ ο κ ν, ν κ ο ι. Τὸ δοθὲν ἄρα παραλληλόγραμμον καὶ τὰ ἑξῆς.

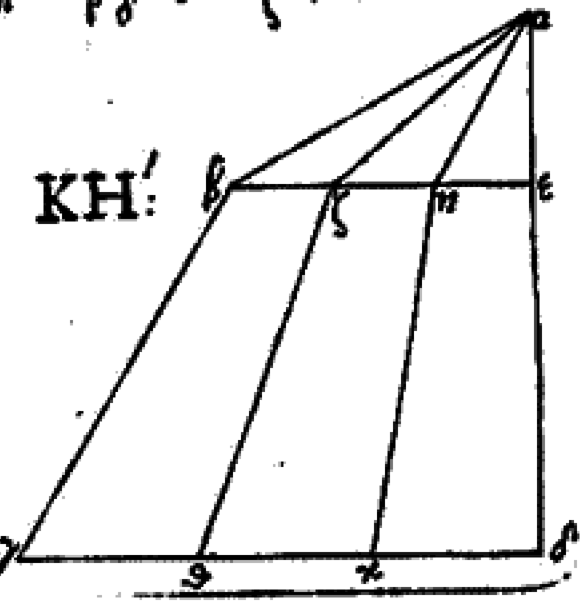
Geom. Lib. 8. Fig. 22.



## Πρότασις ΚΗ΄:

### Τὸ δοθὲν τραπέζιον εἰς ὁσαδηποτοῦν ἴσα μέρη διελεῖν.

ΚΗ΄:



Ἔστω διελεῖν τὸ α β γ δ, τραπέζιον εἰς μέρη τρία ἴσα ἀλλήλοις. Ἤχθω δὲ ἀπὸ τοῦ β, σημείου παράλληλος τῇ γ δ, ἡ β ε, καὶ διαιρεθήτω ἑκατέρα τῶν β ε, γ δ, εἰς μέρη τρία ἴσα τὰ β ζ, ζ η, η ε, γ θ, θ κ, κ δ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ θ ζ, κ η, ζ α, η α, καὶ διαιρεθήσεται τὸ α β γ δ, δοθὲν τραπέζιον εἰς τρία ἴσα μέρη, τὰ α β γ θ ζ, α ζ θ κ η, α η κ δ. Ὅτι μὲν γὰρ τὰ γ ζ, ζ ι, κ ε, ἴσα εἰσί, δείκνυται διὰ τῆς κ β΄: τοῦ παρ: ὅτι δὲ καὶ τὰ α β ζ, α ζ η, α η ε, τρίγωνα ὁμοίως ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, δείκνυται διὰ τῆς α΄: τοῦ ς΄: τοῦ Στοιχ:, ὥστε ἐὰν ἴσοις τοῖς γ ζ, ζ κ, κ ε, ἴσα προστεθῇ τὰ α β ζ, α ζ η, α η ε, γενήσονται τὰ α β γ θ ζ, α ζ θ κ η, α η κ δ, ἴσα. τὸ δοθὲν ἄρα τραπέζιον, καὶ τὰ ἑξῆς.

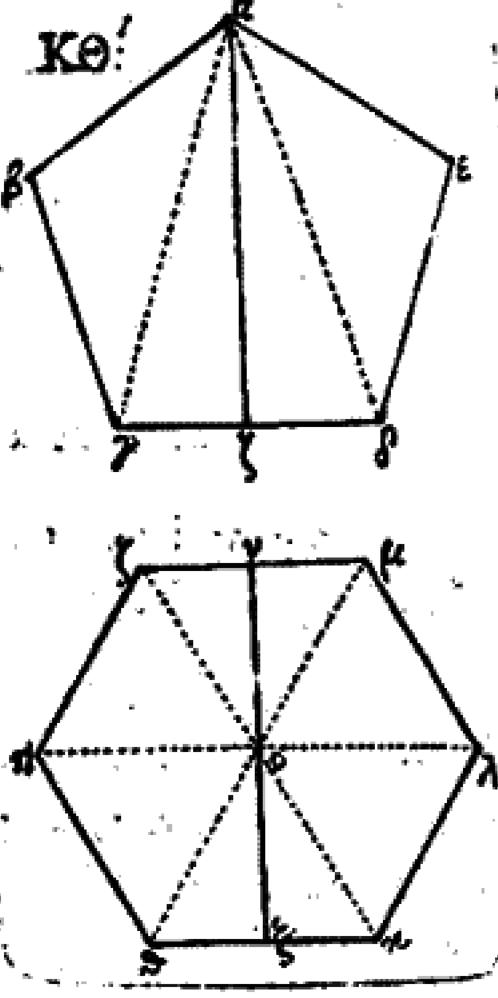
## Πρότασις ΚΘ'.

**Τὸ δοθὲν πολύπλευρον εἰς δύο ἴσα μέρη διελεῖν.**

Ἔστω α': διελεῖν τὸ α β γ δ ε, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον πολύγωνον· καὶ ἐπεὶ τοῦτο περιττόπλευρόν ἐστι, διαιρεθήτω δίχα ἡ γ δ, αὐτοῦ βάσις κατὰ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ β α ε, ἤχθω εὐθεῖα ἡ α ζ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δοθὲν α β γ δ ε, πολύγωνον εἰς δύο μέρη ἴσα τὰ α β γ ζ, α ε δ ζ. εἰ γὰρ αἱ α γ, α δ, ἐπιζευχθῶσιν, εὐχερῶς δειχθήσεται διὰ τῆς δ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τά τε α β γ, α ε δ, καὶ α γ ζ, α δ ζ, ἴσα, ὥστε ἐὰν ἴσοις τοῖς α β γ, α ε δ, ἴσα προστεθῇ τὰ α γ ζ, α δ ζ, ἔσονται καὶ τὰ ὅλα α β γ ζ, α ε δ ζ, ἴσα. Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον διαιρεθήσεται καὶ πάντα τ' ἄλλα περιττόπλευρα εἰς δύο ἴσα.

Geom. Lib. 8. Fig. 23.

ΚΘ'



Ἔστω β': διελεῖν τὸ ζ η θ κ λ μ, ἰσόπλευρον καὶ αὐτὸ καὶ ἰσογώνιον, ἀρτιόπλευρον μέντοι, εἰς δύο ὁμοίως ἴσα μέρη. Διαιρεθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευρῶν, δὺς εἰπεῖν, αἱ ζ μ, θ κ, δίχα κατὰ τὰ ν, καὶ ξ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ν ξ, καὶ τὰ ν ζ η θ ξ, ν μ λ κ ξ, χωρία ἴσα ἔσονται. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν ζ κ, η λ, θ μ, δειχθήσεται διὰ τῆς εἰρημένης τὸ μὲν ζ ο ν, τρίγωνον ἴσον τῷ μ ο ν, τὸ δὲ ζ ο η, τῷ ο λ κ, τὸ δὲ η ο θ, τῷ μ ο λ, καὶ τὸ θ ο ξ, τῷ κ ο ξ, ὥστε καὶ σύμπαντα τὰ ζ ο ν, ζ ο η, η ο θ, θ ο ξ, τρίγωνα ἴσα ἔσονται σύμπασι τοῖς μ ο ν, μ ο λ, λ ο κ, κ ο ξ. Τοῦτον δὲ τὸν τρόπον διαιρεθήσεται καὶ πᾶν ὁτιοῦν ἀρτιόπλευρον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπειδὰν δὲ ζητηθῇ διαιρεθῆναι τὸ δοθὲν πολύπλευρον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, εἴτε ἀρτιόπλευρον, εἴτ' οὖν περιττόπλευρον εἰς ἰσάριθμα μέρη ταῖς αὐτοῦ πλευραῖς, εὑρεθήτω τὸ κέντρον, ἀφ' οὗ ὁ περὶ αὐτὸ καταγράφεται κύκλος, ὡς παραδ: χάριν τοῦ ζ η θ κ λ μ, τὸ ο, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἤχθωσαν ἐφ' ἑκάστην γωνίαν γραμμαί, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος αἱ ο ζ, ο η, ο θ, ο κ, ο λ, ο μ, καὶ διαιρεθήσεται εἰς τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις, ἰσοπληθῆ ταῖς τοῦ δοθέντος πολυγώνου πλευραῖς. τὰ γὰρ ζ ο μ, μ ο λ, λ ο κ, κ ο θ, θ ο η, η ο ζ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, καὶ ἰσάριθμα ταῖς ζ η, η θ, θ κ, κ λ, λ μ, πλευραῖς.

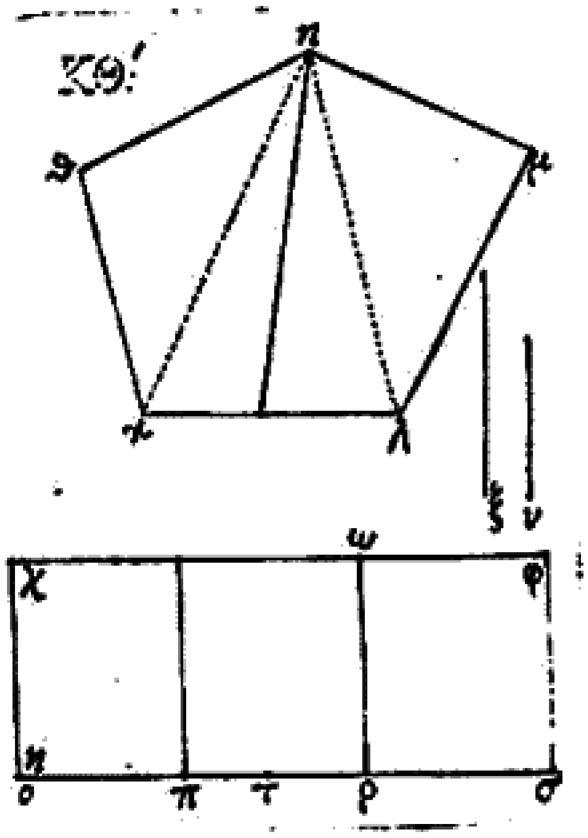
Εἰ δ' αὖθις ζητηθῇ διαιρεθῆναι εἰς μέρη διπλασίονα, ἢ τριπλασίονα, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν πολλαπλάσιον τῷ πλήθει τῶν πλευρῶν, διαιρεθήτω καὶ ἑκάστη

τῶν

τῶν αὐτῶν πλευρῶν εἰς δύο ἴσα, ἢ τρία, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν, καθ' ὃν ζητεῖται ἡ διαίρεσις γενέσθαι, καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι ἐφ' ἕκαστον σημεῖον, καὶ ἔσται τὸ προσαχθέν.

Ἔστω γ': διελεῖν τὸ τυχὸν πολύπλευρον ηθκλμ, εἰς δύο μέρη κατὰ τὸν δοθέντα λόγον τῆς ν, πρὸς τὸ ξ. Διαιρεθήτω δὴ τὸ δοθὲν ηθκλμ, πολύγωνον εἰς τὰ ἐν αὐτῷ τρίγωνα, καὶ εὑρεθήτωσαν αἱ οπ, πρ, ρσ, ἀνάλογοι τοῖς ηθκ, ηκλ, ηλμ, τριγώνοις κατὰ τὴν κα: τοῦ ϛ': τοῦ παρόντος, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, ὥστε μίαν ποιεῖν τὴν οσ, ἥτις διαιρεθήτω κατὰ τὸ τ, ὥστε ἔχειν τὴν οτ, πρὸς τὴν τσ, ὡς ἡ ν, πρὸς τὴν ξ, καὶ συσταθήτω τὸ οσφχ, παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ δοθέντι ηθκλμ, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ ϛ': τοῦ παρόντος· καὶ ἐπεὶ τὸ τ, σημεῖον πίπτει ἐπὶ τῆς πρ, ἀναλογούσης τῷ ηκλ, τριγώνῳ, διαιρεθήτω ἡ κλ, κατὰ τὸ ψ, ἀναλόγως τῇ πρ, ὥστε ἔχειν τὴν κψ, πρὸς τὴν ψλ, ὡς ἡ πτ, πρὸς τὴν τρ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηψ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δοθὲν ηθκλμ, πολύπλευρον εἰς δύο μέρη τὰ ηθκψ, ηψλμ, ἀναλόγως ταῖς νξ, δοθείσαις· ἐπεὶ γὰρ τὸ ὅλον οσφχ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ δοθέντι ηθκλμ, τὸ δὲ πω, τῷ ηκλ, τριγώνῳ. ἄρα ὡς τὸ οσφχ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ πω, ἔχει καὶ τὸ ηθκλμ, εὐθύγραμμον πρὸς τὸ ηκλ, τρίγωνον, ἀλλ' ὡς τὸ οσφχ, πρὸς τὸ πω, ἔχει καὶ ἡ οσ, πρὸς τὴν πρ, ἄρα καὶ ὡς ἡ οσ, πρὸς τὴν πρ, τὸ ηθκλμ, πρὸς τὸ ηκλ, τρίγωνον. Αὖθις ἐπεὶ ὡς ἔχει ἡ πρ, πρὸς τὴν πτ, γέγονε καὶ ἡ κλ, πρὸς τὴν κψ, ὡς δὲ ἡ κλ, πρὸς τὴν κψ, ἔχει καὶ τὸ ηκλ, τρίγωνον πρὸς τὸ ηκψ, κατὰ τὴν α': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ ὡς ἡ πρ, πρὸς τὴν πτ, ἔχει τὸ ηκλ, τρίγωνον πρὸς τὸ ηκψ, ὥστε καὶ δι' ἴσου, ὡς ἔχει ἡ οσ, πρὸς τὴν πτ, ἔχει καὶ τὸ ηθκλμ, πρὸς τὸ ηκψ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται τὸ ηθκλμ, ἔχειν καὶ πρὸς τὸ ηθκ, τρίγωνον ὡς ἡ οσ, πρὸς τὴν οπ, ὥστε ὡς ἔχει ἡ οσ, πρὸς τὴν οτ, ἔχει καὶ τὸ ηθκλμ, πρὸς τὸ ηθκψ, καὶ διαιρέσει ὡς ἡ τσ, πρὸς τὴν οτ, τὸ ηψλμ, πρὸς τὸ ηθκψ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ οτ, πρὸς τὴν τσ, τὸ ηθκψ, πρὸς τὸ ηψλμ. ἡ δὲ οτ, πρὸς τὴν τσ, γέγονεν ὡς ἡ ν, πρὸς τὴν ξ, ἄρα καὶ τὸ ηθκψ, ἔχει πρὸς τὸ ηψλμ, ὡς ἡ ν, πρὸς τὴν ξ. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον. τὰ αὐτὰ δεῖ ποιεῖν κἂν εἰς πλείω ἐπιταχθῇ διαιρεῖσθαι μέρη τὸ δοθὲν πολύγωνον.

Geom. Lib. 8. Fig. 24.




Τέλος τοῦ Ὀγδόου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου, τοῦ πρώτου μέρους.

# ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

# ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

## ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Ὅροις Α': Σῶμα ἐστὶ τὸ μῆκος, πλάτος καὶ βάθος ἔχον, τούτου δὲ εἴδη δύο, στερεὸν καὶ ῥοῶδες.

Β': Σῶμα στερεόν ἐστι τὸ δεκτικὸν καθ' αὑτὸ οἱουδήποτε σχήματος.

Γ': Σῶμα ῥοῶδες, τὸ ἀνεπίδεκτον καθ' αὑτό τινος σχήματος, ἑτέρῳ δὲ περατούμενον καὶ σχηματιζόμενον σώματι. οἷον ὕδωρ, οἶνος, καὶ τὰ παραπλήσια.

Δ': Τῶν στερεῶν σωμάτων, τὰ μὲν ἐπιπεδοειδῆ εἰσι, τὰ δὲ καμπυλοειδῆ, καὶ ἄλλα καμπυλοεπίπεδα.

Ε': Καὶ ἐπιπεδοειδῆ μέν εἰσι τὰ ὑπὸ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, ὡς κύβοι, παραλληλεπίπεδα, καὶ ἄλλα.

ϛ': Καμπυλοειδῆ δὲ τὰ ὑπὸ καμπύλων ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, ὡς σφαῖραι καὶ πάντα τὰ σφαιροειδῆ.

Ζ': Καμπυλοεπίπεδα δὲ τὰ ὑπό τε ἐπιπέδων καὶ καμπύλων ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, ὡς κῶνοι, κύλινδροι, καὶ τὰ ὅμοια.

Η': Πυραμίς ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ἀφ' ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστός.

Θ'. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

Ι': Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

ΙΑ': Παραλληλεπίπεδόν ἐστι τὸ κατά τε μῆκος, πλάτος καὶ βάθος παραλλήλοις περιεχόμενον ἐπιπέδοις.

ΙΒ': Τετράεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ τεσσάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

ΙΓ': Ὀκτάεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

ΙΔ': Δωδεκάεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

ΙΕ': Εἰκοσάεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

ιϛʹ. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ περιληφθὲν σχῆμα. ἢ τὸ ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν ἐντὸς σημείων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ΙΖʹ: Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ σημεῖον ἐκεῖνο καλεῖται.

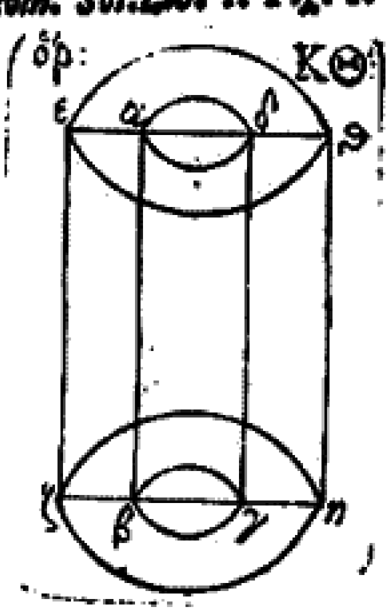
ΙΗʹ: Διάμετρος δὲ σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ΙΘʹ: Τμῆμα σφαίρας ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπό τε ἐπιπέδου καὶ κυρτῆς ἐπιφανείας περιεχόμενον, μεῖζον μὲν, οὗ τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐντὸς πίπτει, ἔλαττον δὲ, οὗ τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐκτὸς ἐναπολείπεται. ὅτε δὲ τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐν τῷ τοῦ τμήματος ἐπιπέδῳ ἐστὶ, ὃ καὶ βάσις τοῦ τμήματος λέγεται, ἡμισφαίριον καλεῖται.

Κʹ: Ἔλλειψις σφαιροειδής ἐστιν, ὅταν ἐλάττονος τμήματος κύκλου τῆς χορδῆς μενούσης, περιενεχθὲν τὸ τμῆμα, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιενεχθὲν σχῆμα.

ΚΑʹ: Κῶνος ἐστὶν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ περιληφθὲν σχῆμα, κἂν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν καὶ περιφερομένῃ, ὀρθογώνιός ἐστιν, ἐὰν δὲ ἐλάττων ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 1.




ΚΒʹ: Ἄξων δὲ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα πλευρὰ, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

ΚΓʹ: Βάσις δὲ κώνου ἐστὶν ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης γραφόμενος πλευρᾶς.

ΚΔʹ: Ὕψος δὲ κώνου ἐστὶν ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἐπίπεδον πίπτουσα κάθετος.

ΚΕʹ: Κύλινδρος ἐστὶν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

Κϛʹ: Ἄξων δὲ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

ΚΖʹ: Βάσεις δὲ αὐτοῦ οἱ κύκλοι, οἱ ἀπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

ΚΗʹ: Ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ κορυφὴν κύκλου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διὰ τοῦ ἑτέρου κύκλου πίπτουσα κάθετος.

ΚΘʹ: Σίφων δὲ κυλινδρικός ἐστι τὸ ἐναπολειπόμενον στερεὸν ἐν τῷ κυλίνδρῳ, ἀφαιρουμένου τοῦ ἐν αὐτῷ ὁμοκέντρου καὶ ἰσοϋψοῦς κυλίνδρου, οἷον ἀφαι-

φαι-

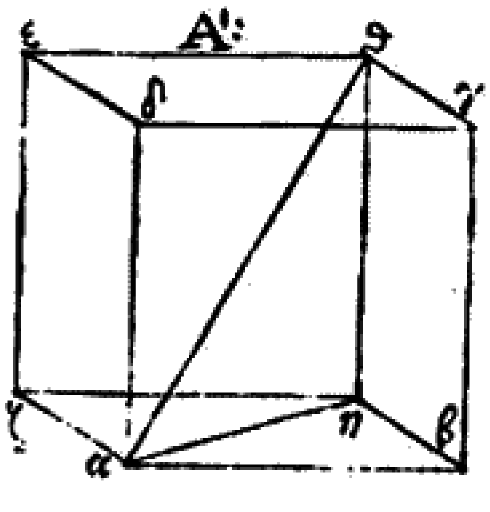
φαιρουμένου τοῦ αβγδ, κυλίνδρου ἀπὸ τοῦ εζηθ, τὸ ἐναπολειπόμενον στερεὸν εβγθ, σίφων κυλινδρικὸς λέγεται.

## Πρότασις Α':

**Τὸ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, τετράγωνον ὑποδιπλάσιον ἐστὶ τῆς τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένου κύβου ἐπιφανείας.**

Ἔστω κύβος ἐν σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένος ὁ αθ, οὗ διάμετρος ἡ αθ, εὐθεῖα, ἥτις διάμετρός ἐστι καὶ τῆς σφαίρας, ἐν ᾗ ὁ αὐτὸς ἐγγέγραπται κύβος, ὡς δειχθήσεται. Λέγω δὴ τὸ τῆς αθ, τετράγωνον ὑποδιπλάσιον εἶναι τῆς τοῦ αθ, κύβου ἐπιφανείας. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αη, καὶ ἐπεὶ ἡ θη, πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἑκατέρᾳ τῶν ζη, ηβ, εὐθειῶν, ἄρα καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ τῷ ζβ, πρὸς ὀρθὰς ὁμοίως ἐστὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τῶν στερεῶν Εὐκλείδου, ἀλλ' ἐν τῷ ζβ, ἐπιπέδῳ ἐστὶ καὶ ἡ αη, ἄρα ἡ θη, πρὸς ὀρθάς ἐστι καὶ ἐπὶ τῆς αη, εὐθείας κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ὥστε ἡ ὑπὸ αηθ, γωνία ὀρθή ἐστι, καὶ δι' αὐτὸ τοῦτο τὸ τῆς αθ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τῶν αη, ηθ, τετραγώνοις κατὰ τὴν μζ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ. τὸ δὲ τῆς αη, τετράγωνον κατὰ τὴν αὐτὴν ἴσον ἐστὶ τοῖς τῶν αβ, βη, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ αβη, ἄρα τὸ τῆς αθ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τρισὶ τετραγώνοις ἴσοις, τῷ τε δηλονότι ἀπὸ τῆς αβ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς βη, καὶ ἔτι τῷ ἀπὸ τῆς ηθ, ἀλλ' ἐπεὶ ἑκάστου κύβου ἡ ἐπιφάνεια ἐξ ἴσοις συνίσταται τετραγώνοις, τὸ τῆς αθ, δήπουθεν τετράγωνον ὑποδιπλάσιόν ἐστι τῆς τοῦ αθ, κύβου ἐπιφανείας.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 2.




Ὅτι δὲ ἡ αθ, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ἐν ᾗ ὁ αθ, ἐγγέγραπται κύβος, δῆλον. ἡ γὰρ περιέχουσα τὸν αθ, κύβον σφαῖρα ἅπτεται τοῦ αὐτοῦ κατὰ πᾶσαν γωνίαν, ἄλλως γὰρ ὁ κύβος οὐ λέγεται ἐγγεγραμμένος ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἡ αθ, ἄρα εὐθεῖα περατοῦται καθ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς περιφερείας τῆς σφαίρας. Ὅτι δὲ καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς διέρχεται, καὶ τοῦτο δῆλον. τὸ γὰρ διὰ τῆς αθ, ἐπίπεδον διαιρεῖ τὸν κύβον εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ὧν ἑκάτερον ἐν ἡμισφαιρίῳ περιέχεται, ἀλλ' ἡ οὕτως ἔχουσα ἐν σφαίρᾳ γραμμὴ διάμετρός ἐστι τῆς σφαίρας, ἡ αθ, ἄρα εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τῆς σφαίρας, ἐν ᾗ ὁ κύβος ἐγγεγραμμένος ἐστί. Τὸ τῆς διαμέτρου ἄρα τῆς σφαίρας τετράγωνον ὑποδιπλάσιον καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

## Πρότασις Β':

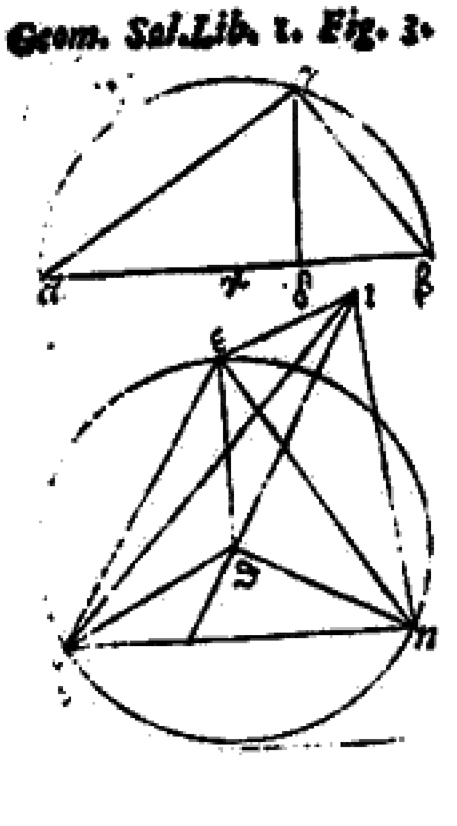
**Ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δύναται τήν τε τοῦ τετραέδρου πλευρὰν καὶ τὴν τοῦ κύβου τῶν ἐν τῇ αὐτῇ ἐγγεγραμμένων σφαίρᾳ.**

Ἔστω κύβος ὁ αθ, οὗ διάμετρος ἡ αθ, εὐθεῖα. Λέγω δὴ τὴν αθ, εὐθεῖαν δύνασθαι τήν τε τοῦ τετραέδρου πλευρὰν τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ ἐγγραφομένου σφαίρᾳ, ἐν ᾗ καὶ ὁ κύβος, καὶ τὴν τοῦ κύβου, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν, τὸ τῆς αθ, τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ τε ἀπὸ τῆς τοῦ τετραέδρου πλευρᾶς τετραγώνῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς τοῦ κύβου. καὶ γὰρ κατὰ τὴν ιγ': τοῦ γ': τῶν στερεῶν τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραέδρου τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ ἐγγραφομένου σφαίρᾳ. κατὰ δὲ τὴν ιε': τοῦ αὐτοῦ τὸ τῆς αὐτῆς διαμέτρου τετράγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ τετραγώνου τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, ἀλλ' ἡ αθ, ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἐν ᾗ ὁ αθ, κύβος ἐγγράφεται ὡς ἀνωτέρω δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αθ, τετράγωνον ἡμιόλιον μέν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραέδρου τετραγώνου, τριπλάσιον δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ὥστε οἵων μερῶν ἡ τοῦ αθ, κύβου διάμετρος δυνάμει ἐννέα, τοιούτων ἓξ ἡ τοῦ τετραέδρου, καὶ τοιούτων τριῶν ἡ τοῦ κύβου, καὶ ἑπομένως τὸ ἀπὸ τῆς αθ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς τοῦ τετραέδρου πλευρᾶς τετραγώνῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς τοῦ κύβου, τοῦτο δ' ἐστὶ τὸ δύνασθαι. Ἡ τοῦ κύβου ἄρα διάμετρος δύναται, καὶ τὰ ἑξῆς.

## Πρότασις Γ':

**Ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένης σφαίρᾳ δυνάμει ἡμιόλιός ἐστι.**

Geom. Sal. Lib. 1. Fig. 3.




Ἔστω διάμετρος σφαίρας ἡ αβ, περὶ ἣν γραφήτω ἡμικύκλιον τὸ αγβ, καὶ τμηθήτω ἡ αβ, κατὰ τὸ δ, ὥστε τὴν αδ, διπλασίονα εἶναι τῆς δβ, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἀνεστάθω κάθετος ἡ δγ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, γβ· εἶτα διαστήματι τῷ δγ, γραφήτω κύκλος ὁ εζη, ἀπὸ κέντρου τοῦ θ, καὶ ἐγγραφήτω εἰς αὐτὸν τὸ εζη, ἰσόπλευρον τρίγωνον κατὰ τὴν ιζ': τοῦ β': τοῦ α': τοῦ παρόντος. ἀπὸ δὲ τοῦ θ, ἀνεστάθω κάθετος ἡ θι, ἴση τῇ αδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ιε, ιζ, ιη, καὶ συσταθήσεται ἡ ιεζη, πυραμὶς ἐκ τεσσάρων ἴσων περιεχομένη ἰσοπλεύρων τριγώνων, τῶν εζη, εζι, ιζη,

ιει,

κει, κατὰ τὴν ιγ΄: τοῦ γ΄: τῶν στερεῶν Εὐκλ: , καὶ περιληφθήσεται σφαίρᾳ, ἧς διάμετρος ἡ αβ. Δείκνυται. Ἐπεὶ οὖν ἡ αδ, διπλασίων ἐστὶ τῆς δβ, πάντως γε ἡ ὅλη αβ, ἡμιόλιός ἐστι τῆς αδ, τριπλασία δὲ τῆς δβ, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ αβγ, αγδ, τρίγωνα ἰσογώνια, διὰ τὸ ἔχειν τάς τε ὑπὸ αγβ, αδγ, ὀρθὰς, καὶ κοινὴν τὴν ὑπὸ γαδ, κατὰ τὴν δ΄: ἄρα τοῦ ϛ΄: Εὐκλ: ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, ἔστι καὶ ἡ αγ, πρὸς τὴν αδ, κατὰ δὲ τὴν α΄: τοῦ γ΄: τοῦ α΄: μέρους τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἔχει, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αδ. ἔστι δὲ καὶ ἡ αγ, ἴση τῇ εζ, πλευρᾷ τῆς εζηι, πυραμίδος, ὡς δέδεικται ἐπὶ τῇ ῥηθείσῃ ιγ΄: προτάσει, καὶ ἡμῖν δειχθήσεται ἐν τῇ κατασκευῇ τοῦ τετραέδρου, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εζ, πλευρᾶς τῆς εζηι, πυραμίδος, ἔχει ὡς ἡ αὐτὴ αβ, πρὸς τὴν αδ, ἀλλ' ἡ αβ, ἡμιόλιός ἐστι τῆς αδ, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. τοῦτο δ' ἐστὶ τὸ δυνάμει εἶναι ἡμιόλιον τὴν αβ, τῆς εζ. Ἡ τῆς σφαίρας ἄρα διάμετρος, καὶ τὰ ἑξῆς.

## Πρότασις Δ΄:

**Ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος τετραπλασιεφημίσειά ἐστι τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ κύκλου, τοῦ περὶ τὴν βάσιν γραφομένου τῆς πυραμίδος, τῆς τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένης σφαίρᾳ.**

Ἔστω σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, πυραμὶς δὲ τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένη σφαίρᾳ ἡ εζηι, καὶ περὶ τὴν εζη, βάσιν τῆς πυραμίδος κύκλος ὁ εζη, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ εθ. Λέγω δὴ τὴν αβ, τετραπλασιεφημίσειαν εἶναι τῆς εθ. κατὰ γὰρ τὴν ι΄: τοῦ δ΄: τοῦ α΄: μέρους ἡ εζ, δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς εθ, τῆς δὲ εζ, δυνάμει ἡμιόλιός ἐστιν ἡ αβ, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται, οἵων ἄρα ἡ αβ, ἐννέα ἐστὶ δυνάμει, τοιούτων ἓξ, ἡ εζ, καὶ τοιούτων δύο ἡ εθ, ἡ αβ, ἄρα πρὸς τὴν εθ, ἔχει δυνάμει, ὡς ὁ ἐννέα πρὸς τὸν δύο, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εθ, ἔχει λόγον, ὃν καὶ ὁ ἐννέα πρὸς τὸν δύο. ἀλλ' ὁ τοῦ ἐννέα λόγος πρὸς τὸν δύο τετραπλασιεφήμισύς ἐστι, περιέχει γὰρ τὸν δύο τετράκις καὶ ἥμισυ αὐτοῦ μέρος, ἡ αβ, ἄρα διάμετρος τῆς σφαίρας τετραπλασιεφημίσειά ἐστι τῆς εθ, ἡμιδιαμέτρου τοῦ περὶ τὴν βάσιν τῆς εζηι, πυραμίδος κύκλου τῆς τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένης σφαίρᾳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

## Πρότασις Ε'.

Η' ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν τῆς πυραμίδος τῆς τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένης σφαίρᾳ, ἕκτον μέρος ἐστὶ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας.

Τμηθήτω δὴ ἡ αβ, (1) δίχα κατὰ τὸ κ, καὶ τὸ κ, ἔσται κέντρον τῆς σφαίρας, ἡ δὲ κδ, ἴση τῇ καθέτῳ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν βάσιν πιπτούσῃ τῆς ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πυραμίδος, ὡς δειχθήσεται. Λέγω οὖν τὴν κδ, ἕκτον μέρος εἶναι τῆς αβ, τουτέστι τὴν αβ, ἑξαπλάσιον τῆς κδ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ, ἡμιόλιος μέν ἐστι τῆς αδ, τριπλασία δὲ τῆς δβ, πάντως γε οἵων μερῶν ἐννέα ἐστὶν ἡ αβ, τοιούτων ἓξ ἡ αδ, καὶ τριῶν ἡ δβ, ἡ δὲ ἡμίσεια τῆς αβ, τεσσάρων μετὰ ἡμίσεως, ὥστε ἡ κβ, τεσσάρων ἐστὶ μερῶν καὶ ἡμίσεως, οἵων ἡ αβ, ἐννέα, ἀλλ' ἡ δβ, ἐστὶ τοιούτων τριῶν, ἡ κδ, ἄρα ἑνὸς καὶ ἡμίσεώς ἐστιν. ἐπεὶ δὲ ἡ αβ, δέδεικται τῆς δβ, τριπλασία πάντως γε τῆς κδ, ἡμισείας ἑξαπλάσιός ἐστιν, ὥστε ἡ κδ, ἕκτον μέρος ἐστὶ τῆς αβ, διαμέτρου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις ς'.

Η' τῆς σφαίρας διάμετρος τοῦ ὕψους τῆς ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πυραμίδος δυνάμει διπλασιεπιτέταρτός ἐστι.

Ἔστω διάμετρος σφαίρας ἡ αὐτὴ αβ, ὕψος δὲ πυραμίδος τῆς ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἡ θι. Λέγω δὴ τὴν αβ, δυνάμει διπλασιεπιτέταρτον εἶναι τῆς θι. ἐπεὶ γὰρ ἡ θι, ἴση λαμβάνεται ἐν τῇ κατασκευῇ τῆς πυραμίδος τῇ αδ, κατὰ τὴν προρρηθεῖσαν ιγ': τοῦ γ': τῶν στοιχείων Εὐκλείδου, πάντως γε ἡ αβ, ἔχει πρὸς τὴν θι, λόγον, ὃν καὶ πρὸς τὴν αδ, δέδεικται δὲ τῆς αδ, ἡμιόλιος, ἄρα καὶ τῆς θι, ἡμιόλιός ἐστιν, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς θι, ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τοῦ τῆς αβ, πρὸς τὴν θι, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον ἕξει πρὸς τὸ τῆς θι, ὡς ὁ ἐννέα πρὸς τὸν τέσσαρα, τριῶν γὰρ ἀριθμῶν κειμένων ἐν λόγῳ ἡμιολίῳ, ὡς ὁ θ': ς': δ': ὁ θ': πρὸς τὸν δ': ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ πρὸς τὸν ς': ἡ δὲ αβ, πρὸς τὴν θι, ἔχει, ὡς ὁ θ': πρὸς τὸν ς': ἡμιόλιος γὰρ ὁ θ': τοῦ ς': ὡς καὶ ἡ αβ, τῆς θι, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θι, ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἄρα ὡς ἔχει ὁ θ': πρὸς τὸν δ': ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θι. ἀλλ' ὁ θ': τοῦ δ': διπλασιεπιτέταρτός ἐστιν, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τετράγωνον διπλασιεπιτέταρτόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς θι, τοῦτο δ' ἐστὶ τὸ δυνάμει διπλασιεπιτέταρτον εἶναι τὴν αβ, τῆς θι. Η' τῆς σφαίρας ἄρα διάμετρος τοῦ ὕψους, καὶ τὰ ἑξῆς.

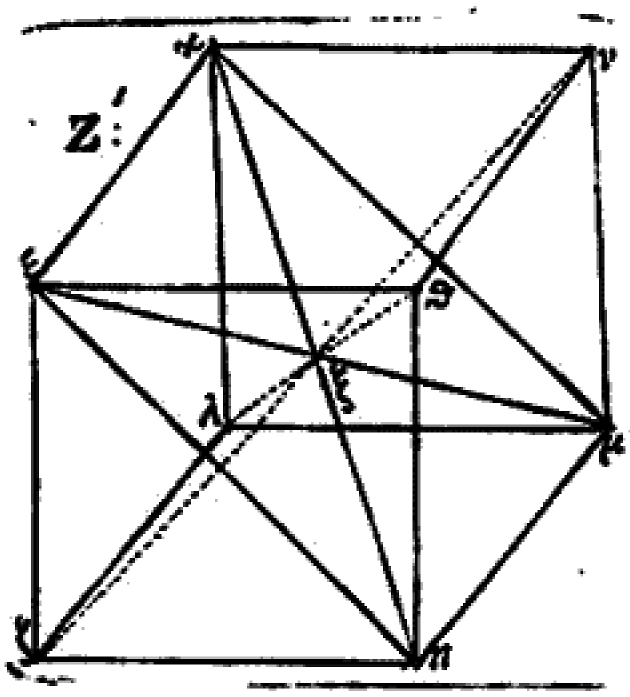
(1) Ὅρα τὸ σχῆμα τῆς ἀνωτέρω γ': προτάσεως.

## Πρότασις Ζʹ.

**Ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασιός ἐστι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένου σφαίρᾳ.**

*Ἔστω κύβος ὁ εζηθνκλμ, σφαίρᾳ τινὶ περιειλημμένος. Λέγω δὴ τὴν τῆς σφαίρας ταύτης διάμετρον δυνάμει τριπλασίονα εἶναι. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ κη, κε, καὶ καὶ ἐπεὶ ἡ εκ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ εζηθ, ἐπίπεδον, ὀρθὴ πάντως ἐστὶ καὶ πρὸς τὴν εη, κατὰ τὸν γʹ: ὅρον τοῦ αʹ: τῶν στερεῶν, ὥστε ἡ ὑπὸ κεη, γωνία ὀρθή ἐστιν. Ἐπεὶ δ' αὖθις αἱ εζ, ζη, ἴσαι εἰσί, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν εζ, ζη, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς εη, κατὰ τὴν μζʹ: τοῦ αʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς εη, τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς εζ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς εκ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι καὶ τὴν εκ, τῇ εζ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εη, διπλάσιόν ἐστι καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς εκ, συναμφότερα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν κε, εη, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ, ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν κε, εη, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς κη, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν μζʹ: ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κη, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ, ὥστε καὶ ἡ κη, δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς εκ, ἀλλ' ἡ μὲν κη, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ᾗ τινι ὁ δοθεὶς περιλαμβάνεται κύβος, ὡς δειξόμεθα, ἡ δὲ κε, τῇ τοῦ κύβου πλευρᾷ, ἡ τῆς σφαίρας ἄρα διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς τοῦ τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένου σφαίρᾳ.*

Geom. Sel. Lib. 1. Fig. 4.




*Ὅτι δὲ ἡ κη, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ὑφ' ἧς ὁ δοθεὶς περιλαμβάνεται κύβος, δῆλον. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ εμ, μκ, εὐθεῖαι, καὶ τεμεῖ πάντως ἡ εμ, τὴν κη, κατὰ τὸ ξ, ἐν τῷ αὐτῷ γάρ εἰσιν ἐπιπέδῳ, τῷ διὰ τῶν κμεη, δι' οὗ ὁ κύβος δίχα τέμνεται κατὰ τὴν κη: τοῦ αʹ: τῶν Στερεῶν. Ἐπεὶ οὖν ἡ κε, ἴση ἐστὶ τῇ μη, τοῦτο γὰρ τοῦ κύβου ἴδιον τὸ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ πάσας ἴσας ἔχειν, κοινὴ δὲ ἡ εη, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ κεη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ μηε, ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, πάντως γε κατὰ τὴν δʹ: τοῦ αʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ κη, τῇ με, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ εηκ, γωνία τῇ ὑπὸ ηεμ, ἡ δὲ ὑπὸ εκη, τῇ ὑπὸ ημε, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ κεη, τῇ ὑπὸ μηε, ἴση ὡς δέδεικται, ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν ἴσων εηκ, ηεμ, ἐναπολείπονται ἴσαι καὶ αἱ ὑπὸ κεμ, μηκ. Ὁμοίως δειχθήσονται ἴσαι καὶ*

αἱ

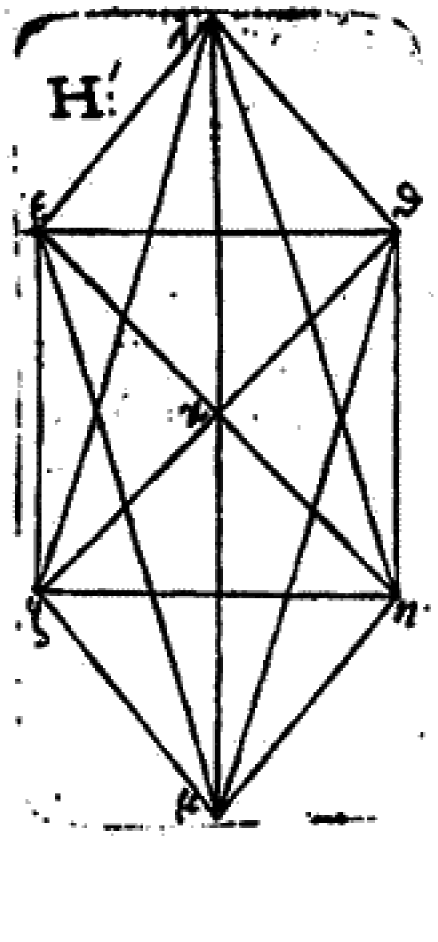
αἱ ὑπὸ η μ ε, ε κ η. Αὖθις ἐπεὶ ἡ ὑπὸ κ η ε, ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ μ ε η, τῇ δὲ ὑπὸ κ η ε, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ η κ μ, διὰ τὸ ἴσας τε καὶ παραλλήλους εἶναι τὰς κ μ, ε η, κατὰ τὴν λγ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, δῆλον, ὅτι ἡ ὑπὸ η κ μ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ μ ε η, ἀλλὰ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ μ κ ε, ὅλῃ τῇ ὑπὸ η ε κ, ἴση ἐστὶ διὰ τὸ εἶναι ἑκατέραν ὀρθήν, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ μ ε κ, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ η κ ε, ἴσαι ἄρα αἱ ε ξ, κ ξ, καὶ μ ξ, η ξ, κατὰ τὴν ϛ': τοῦ α': τῶν ἐπιπέδων τοῦ Στοιχειωτοῦ, εἰσὶ δὲ καὶ τὴν αὐτὴν ἴσαι καὶ αἱ ε ξ, η ξ, καὶ κ ξ, μ ξ, αἱ τέσσαρες ἄρα ξ ε, ξ κ, ξ μ, ξ η, ἴσαι εἰσί, διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται ἴσαι καὶ αἱ λοιπαὶ ξ θ, ξ ζ, ξ λ, ξ γ, ὥστε κατὰ τὸν α': ὅρον τοῦ Γεωγραφικοῦ φιλοπονήματος, καὶ δέκατον ἕβδομον τοῦ παρόντος τὸ ξ, σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, ἐν ᾗ ὁ δοθεὶς κύβος, ἡ δὲ κ η, εὐθεῖα διάμετρος τῆς αὐτῆς σφαίρας.

## Πρότασις Η':

**Ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένου σφαίρᾳ.**

Ἔστω ὀκτάεδρον ἐν σφαίρᾳ τὸ ε ζ η θ κ λ μ. λέγω δὴ τὴν τῆς σφαίρας διάμετρον δυνάμει διπλασίαν εἶναι τῆς ε ζ, πλευρᾶς τοῦ αὐτοῦ ὀκταέδρου. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ε η, ζ θ, λ μ, τεμνόμεναι κατὰ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ ὀκτάεδρόν ἐστι τὸ ὑπὸ ὀκτὼ ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων τριγώνων περιεχόμενον κατὰ τὸν ιγ': ὅρον τοῦ παρόντος, πάντως γέ τοι τὰ ε ζ η θ, καὶ ε λ η μ, ἰσόπλευρά ἐστι, καὶ ἴσα ὡς ὑπὸ ἴσων πλευρῶν περιεχόμενα τῶν ε ζ, ζ η, η θ, θ ε, καὶ ε λ, λ η, η μ, μ ε, ἀλλὰ τῶν τετραπλ: ἐπιπέδ: σχημάτων παραλληλόγρ: εἰσὶ τῷ ἔχειν τὰς ἀπεναντίον ἴσας. τὰ γὰρ τοιαῦτα, εἰ μὲν ὀρθογ: ᾖ, τετράγ: ἐστι, εἰ δὲ μὴ ὀρθογώνια, ῥόμβοι, τὸ δὲ παραλληλόγραμμα ἡ διάμετρος δίχα τέμνει κατὰ τὴν λδ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ε ζ η θ, καὶ ε λ η μ, δίχα τέμνονται ὑπὸ τῆς ε η, καὶ τὸ ε ζ η, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ε λ η, τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς ε ζ, ζ η, ταῖς δυσὶ ε λ, λ η, ἴσας, καὶ βάσιν τὴν ε η, κοινήν, πάντως γε καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἔχουσι τὴν μὲν ὑπὸ ε ζ η, τῇ ὑπὸ ε λ η, τὴν δὲ ὑπὸ ζ ε η, τῇ ὑπὸ λ ε η. ὥστε δύο τριγώνων τῶν ε ζ κ, ε λ κ, ἐπεὶ αἱ δύο πλευραὶ ζ ε, ε κ, δυσὶ ταῖς λ ε, ε κ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἐστὶ δὲ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ζ ε κ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ λ ε κ, ἴση, πάντως γε καὶ βάσις ἡ ζ κ, βάσει τῇ λ κ, ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν κ η, κ θ, κ ε, ἴση τῇ λ κ, ἀλλ' ἡ λ κ, ἴση ἐστὶ τῇ κ μ, ὡς δειξόμεθα, ἄρα αἱ ἀπὸ τοῦ κ, ἐξαγόμε-

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 5.



γόμεναι εὐθεῖαι πρὸς τὰ ε, ζ, η, θ, λ, μ, σημεῖα ἴσαι εἰσὶ, σφαῖρα δὲ, ὑφ' ἧς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον περιλαμβάνεται, ἅπτεται τοῦ αὐτοῦ κατὰ πάντα τὰ σημεῖα ταῦτα, τὸ κ, ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, καὶ ἑκάστη τῶν ε η, ζ θ, λ μ, διάμετρος τῆς αὐτῆς. Αὖθις ἐπεὶ αἱ ε κ, ζ κ, η κ, θ κ, ἴσαι, πάντως γε τὸ ε ζ η θ, χωρίον τετράγωνόν ἐστιν, ὥστε ἡ ὑπὸ ε ζ η, γωνία ὀρθή ἐστι καὶ κατὰ τὴν μζ΄: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ἀπὸ τῆς ε η, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ε ζ, ζ η, ἴσαι δὲ αἱ ε ζ, ζ η, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ε η, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ε ζ, καὶ ἑπομένως ἡ ε η, δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς ε ζ, ἀλλ' ἡ μὲν κ η, διάμετρός ἐστι τῆς σφαίρας, ὑφ' ἧς τὸ δοθὲν περιλαμβάνεται ὀκτάεδρον, ὡς δέδεικται, ἡ δὲ ε ζ, πλευρὰ τοῦ αὐτοῦ ὀκταέδρου, ἡ τῆς σφαίρας ἄρα διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένου σφαίρᾳ.

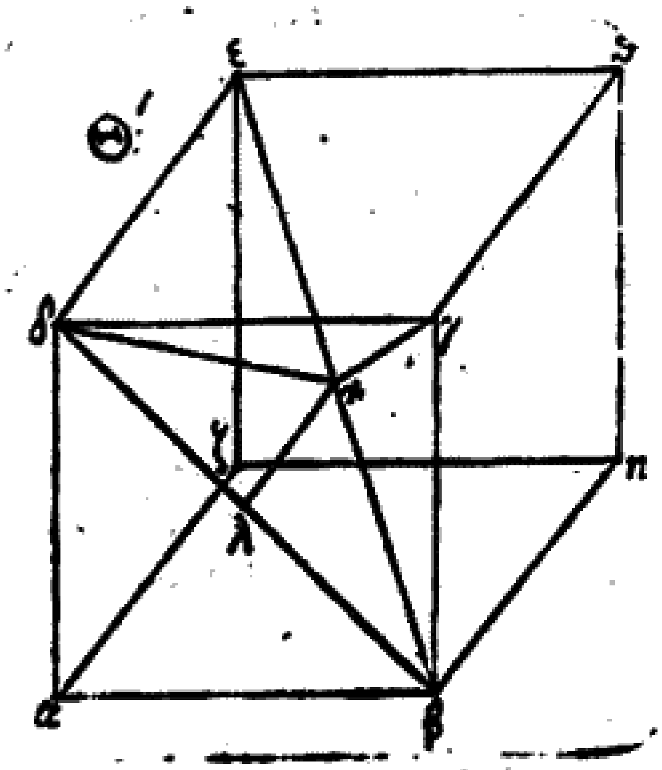
Ὅτι δὲ ἡ λ κ, ἴση ἐστὶ τῇ κ μ, δῆλον, ἰσόπλευρα γὰρ καὶ ἰσογώνιά εἰσι τὰ λ ε κ, μ ε κ, τρίγωνα.

## Πρότασις Θ΄.

**Ἡ τῆς σφαίρας ἡμιδιάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς καθέτου τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐν αὐτῇ κύβου πιπτούσης.**

Ἔστω ὁ α θ, κύβος ἐν σφαίρᾳ, ἧς διάμετρος ἡ ε β, κέντρον δὲ τὸ κ, καὶ πιπτέτω κάθετος ἀπὸ τοῦ κ, ἐπὶ τῆς α β γ δ, πλευρᾶς τοῦ αὐτοῦ κύβου ἡ κ λ, ὅτι δὲ ἡ κ λ, ἐν τῷ μεσαιτάτῳ τοῦ α β γ δ, πίπτει, δῆλον. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κ, διὰ τῶν α β γ δ, σημείων εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, ὀρθὴ συσταθήσεται πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ α β γ δ, τετράγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κ, σημεῖον, ὥστε ἡ κ λ, ὕψος ἔσται τῆς α β γ δ κ, ὀρθῆς πυραμίδος, τὸ δὲ λ, σημεῖον κέντρον τῆς α β γ δ, βάσεως. εἰ γὰρ μὴ, οὐδὲ ἡ α β γ δ κ, πυραμὶς ὀρθὴ ἂν εἴη. Ἐπιζεύχθω δὲ ἡ δ β, διαγώνιος, καὶ διελεύσεται πάντως διὰ τοῦ λ, δίχα γὰρ τέμνει τὸ α β γ δ, τετράγωνον. Λέγω δὴ τὴν β κ, ἡμιδιάμετρον τῆς σφαίρας δυνάμει τριπλασίαν εἶναι τῆς κ λ. τὰ γὰρ β ε δ, β κ λ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β ε, πρὸς τὴν ε δ, ἡ β κ, πρὸς τὴν κ λ, ἀλλ' ἡ β ε, δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ε δ,

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 6.

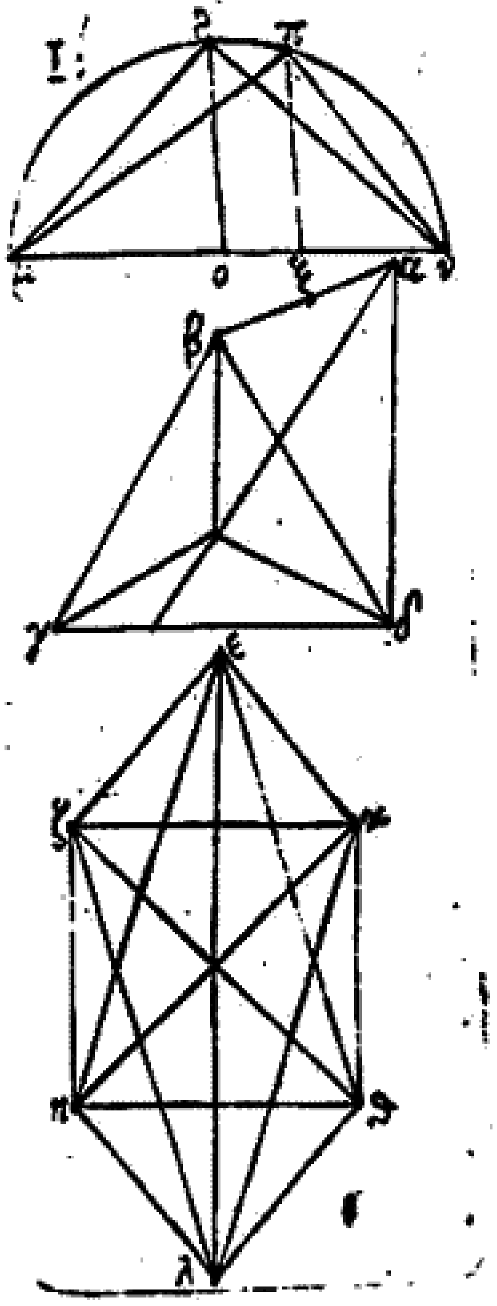


καὶ τὴν ζ΄: τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἡ β κ, δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς κ λ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις Ι΄.

Ἡ τοῦ τετραέδρου πλευρὰ δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου τοῦ τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένου σφαίρᾳ.

*Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 7.*




Ἔστω τετράεδρον μὲν τὸ α β γ δ, ὀκτάεδρον δὲ τὸ ε ζ η θ κ λ, καὶ σφαίρας διάμετρος ἡ μ ν, ὥστε τὴν σφαῖραν ἄμφω ταῦτα περιλαμβάνειν. Λέγω δὴ ὅτι ἡ β γ, τοῦ τετραέδρου πλευρὰ δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς ε ζ, πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου. Τμηθήτω ἡ μ ν, κατὰ μὲν τὸ ξ, ὥστε εἶναι τὴν μ ξ, διπλασίονα τῆς ξ ν, κατὰ δὲ τὸ ο, δίχα, καὶ ἀνεστάθωσαν ἐπ᾽ αὐτῆς αἱ ξ π, ο ρ, πρὸς ὀρθάς. Δείκνυται ἡ μ π, ἴση ἐστὶ τῇ β γ, πλευρᾷ τοῦ τετραέδρου κατὰ τὴν ιγ΄: τοῦ γ΄: τῶν Στερεῶν, ἡ δὲ μ ρ, ἴση τῇ ε ζ, πλευρᾷ τοῦ ὀκταέδρου κατὰ τὴν ιδ΄: τοῦ αὐτοῦ. ἀλλ᾽ ἡ μ ν, διάμετρος τῆς σφαίρας δυνάμει ἡμιόλιός ἐστι τῆς μ π, κατὰ τὴν γ΄: τοῦ παρόντος, τῆς δὲ μ ρ, κατὰ τὴν η΄: δυνάμει διπλασίων, ἄρα οἵων μερῶν ἓξ δυνάμει ἡ μ ν, ἐστί, τοιούτων τεσσάρων δυνάμει ἐστὶν ἡ β γ, καὶ τοιούτων τριῶν ἡ ε ζ, αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι μ ν, β γ, ε ζ, ἔχουσιν ἀναλόγως τοῖς ϛ΄. δ΄. γ΄. ἀριθμοῖς. ἐπεὶ δὲ ὁ τοῦ δ΄. λόγος πρὸς τὸν γ΄. ἐπίτριτός ἐστιν, ἔχει γὰρ ὅλον τὸν γ΄, καὶ γ΄: αὐτοῦ μέρος, ὡς δὲ ὁ δ΄, πρὸς τὸν γ΄, ἔχει ὡς δέδεικται καὶ ἡ β γ, πλευρὰ τετραέδρου πρὸς τὴν ε ζ, πλευρὰν ὀκταέδρου, ἄρα καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραέδρου δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου, τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένου σφαίρᾳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις ΙΑ΄.

**Ἐὰν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετράεδρόν τε καὶ ὀκτάεδρον περιληφθῇ, τοῦ μὲν τετραέδρου ἡ βάσις ἐπίτριτος ἔσται τῆς βάσεως τοῦ ὀκταέδρου, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου ἐπιφάνεια ἡμιόλιος τῆς ἐπιφανείας τοῦ τετραέδρου.**

Ἔστω τετράεδρον τὸ α β γ δ, (ὅρα πρ. ιζ΄.) καὶ ὀκτάεδρον τὸ ε ζ η θ κ λ, τῇ αὐτῇ περιλαμβανόμενα ἄμφω σφαίρᾳ, ἧς διάμετρος ἡ μ ν. Λέγω δὴ α΄. ὅτι ἡ β γ δ, βάσις τοῦ τετραέδρου ἐπίτριτός ἐστι τῆς ε ζ η, βάσεως τοῦ ὀκταέδρου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ β γ, δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς ε ζ, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται, πάντως γε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς β γ, τετράγωνον ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ε ζ, τετραγώνου, ἀλλ᾽ ὡς τὰ τετράγωνα ταῦτα πρὸς ἄλληλα ἔχουσιν, οὕτω καὶ τὰ τρίγωνα β γ δ, ε ζ η, πρὸς ἄλληλα ἔχουσι κατὰ τὴν α΄. τοῦ ς΄. τοῦ Στοιχ. ἰσοϋψῆ γάρ, ἄρα τὸ β γ δ, τρίγωνον βάσις τετραέδρου ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ε ζ η, τριγώνου βάσεως τοῦ ὀκταέδρου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

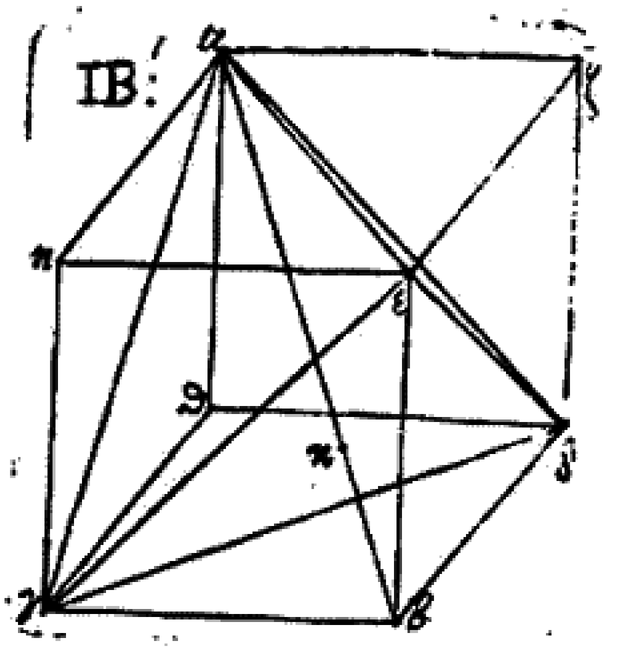
Λέγω β΄. τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀκταέδρου ἡμιόλιον εἶναι τῆς ἐπιφανείας τοῦ τετραέδρου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ βάσις τοῦ τετραέδρου ἐπίτριτός ἐστι τῆς βάσεως τοῦ ὀκταέδρου, ὡς ἤδη δέδεικται, πάντως γε οἵων μερῶν τεσσάρων ἐστὶν ἡ τοῦ τετραέδρου βάσις, τοιούτων τριῶν ἡ τοῦ ὀκταέδρου, καὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὡς ὁ δ΄. πρὸς τὸν γ΄. ἀλλ᾽ ἡ μὲν τοῦ τετραέδρου ἐπιφάνεια τετραπλασίων ἐστὶ τῆς αὐτοῦ βάσεως, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου ὀκταπλάσιος, καθ᾽ ἃ καὶ τοὔνομα ἑκατέρου δηλοῖ. ἐὰν δὲ ὁ δ΄. τετραπλασιασθῇ, γενήσεται ὁ ις΄. τοῦ δὲ γ΄. ὀκταπλασιασθέντος γίγνεται ὁ κδ΄. ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ τετραέδρου ἔσται μερῶν ις΄. τοιούτων, οἵων ἡ τοῦ ὀκταέδρου ἐπιφάνεια τεσσάρων ἐστὶ πρὸς τοῖς εἴκοσι, καὶ ἕξει ἡ τοῦ ὀκταέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ τετραέδρου, ὡς ὁ κδ΄. πρὸς τὸν ις΄. ἀλλ᾽ ὁ κδ΄. τοῦ ις΄. ἡμιόλιός ἐστιν, ἔχει γὰρ ὅλον τὸν ις΄. καὶ τὸ τούτου ἥμισυ, ἄρα καὶ ἡ τοῦ ὀκταέδρου ἐπιφάνεια ἡμιόλιός ἐστι τῆς τοῦ τετραέδρου ἐπιφανείας. Ἐὰν ἄρα τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετράεδρόν τε καὶ ὀκτάεδρον, καὶ τὰ ἑξῆς.

## Πρότασις ΙΒ΄.

**Ἐὰν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετράεδρόν τε καὶ κύβος περιληφθῶσι, τὸ τοῦ κύβου στερεὸν τριπλάσιόν ἐστι τοῦ στερεοῦ τοῦ τετραέδρου.**

Ἔστω ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, ἧς διάμετρος ἡ α β, τετράεδρον μὲν τὸ α γ δ ε, ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων περιεχόμενον τῶν α γ δ, α δ ε, α ε γ, γ δ ε, κύβος

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 8.




διὰ ὁ γζ, οὗ βάσις μὲν ἡ γβεη ὕψος δὲ τὸ γθ. Λέγω δὴ τὸν γζ, κύβον τριπλασίονα εἶναι τοῦ αγδε, τετραέδρου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ γβεη βάσις διαιρεῖται εἰς δύο τρίγωνα ἴσα ὑπὸ τῆς γε, διαγωνίου κατὰ τὴν λδ: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὰ γβε, γηε, τρίγωνα, πάντως γε αἱ αηγε, αγβε, πυραμίδες ἰσοϋψεῖς οὖσαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν ε: τοῦ ιβ: τοῦ Στοιχειωτοῦ. αἱ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσίν, ὡς αἱ βάσεις, ἀλλ' αἱ γηε, γβε, βάσεις τῶν αηγε, αγβε, πυραμίδων τῶν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὐσῶν τὸ αη ἴσαι εἰσίν, ἴσαι ἄρα καὶ αἱ πυραμίδες εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ αγδθ, αγβδ, καὶ αδεζ, αδβε, πυραμίδες ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἀλλ' αἱ αηγε, αγδθ, αδεζ, ἴσαι εἰσὶ διὰ τὸ τὰς αὐτῶν βάσεις τε καὶ πλευρὰς ἴσας εἶναι, ἄρα ὁ γζ, κύβος διαιρεῖται εἰς πυραμίδας ἓξ ἴσας ἀλλήλαις, τὰς αηγε, αγδθ, αδεζ, αγβε, αγβδ, αδβε, ὥστε αἱ τρεῖς αηγε, αγδθ, αδεζ, σύμπασαι ἴσαι εἰσὶ συμπάσαις ταῖς λοιπαῖς τρισὶ αγβε, αγβδ, αδβε, ταῖς δὲ τρισὶ ταύταις αγβε, αγβδ, αδβε, ἴσον ἐστὶ τὸ αγδε, τετράεδρον, καὶ βγδε, πυραμίς, αἱ τρεῖς ἄρα πρῶται πυραμίδες αηγε, αγδθ, αδεζ, ἴσαι εἰσὶ τῷ τε αγδε, τετραέδρῳ, καὶ βγδε, πυραμίδι. Αὖθις ἐπεὶ ἡ αβ, διάμετρος τῆς σφαίρας ἡμιόλιός ἐστι τοῦ ὕψους τοῦ ἐν αὐτῇ αγδε, τετραέδρου κατὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἁπλῶς τετραέδρου τὴν ἐν τῇ ιγ': τοῦ ιγ': τοῦ Στοιχ:, πάντως γε ἡ αὐτὴ αβ διάμετρος τῆς σφαίρας τριπλάσιός ἐστι τοῦ ὕψους τῆς βγδε, πυραμίδος, τὸ δὲ ακ, ὕψος τοῦ αγδε, τετραέδρου διπλάσιόν ἐστι τοῦ βκ, ὕψους τῆς βγδε, πυραμίδος. ἀλλ' αἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν ὡς τὰ ὕψη, ὡς ὀψόμεθα ἐν τῷ περὶ στερεομετρίας, ἄρα τὸ αγδε, τετράεδρον διπλάσιόν ἐστι τῆς βγδε, πυραμίδος, τὸ δὲ ἐκ συναμφοτέρων τοῦ τε αγδε, τετραέδρου, καὶ βγδε, πυραμίδος μόνου τοῦ αγδε τετραέδρου ἡμιόλιόν ἐστιν, ὥστε καὶ αἱ τρεῖς πρῶται πυραμίδες αηγε, αγδθ, αδεζ, τοῦ αγδε, τετραέδρου ἡμιόλιοί εἰσι, προστιθεμένης δὲ ταῖς αὐταῖς τῆς βγδε, πυραμίδος, σύμπασαι αἱ τέσσαρες περὶ τὸ τετράεδρον πυραμίδες αἱ αηγε, αγδθ, αδεζ, βγδε, διπλάσιοί εἰσι τοῦ αγδε, τετραέδρου, ὥστε τὸ αγδε, τετράεδρον γ': μέρος ἐστὶ τοῦ γζ, κύβου, οὗτος γὰρ σύγκειται ἔκ τε τῶν εἰρημένων τεττάρων πυραμίδων, καὶ τοῦ τετραέδρου, τῶν δὲ τεττάρων πυραμίδων αἱ τρεῖς μόναι, ὡς ἐν

λαμ-

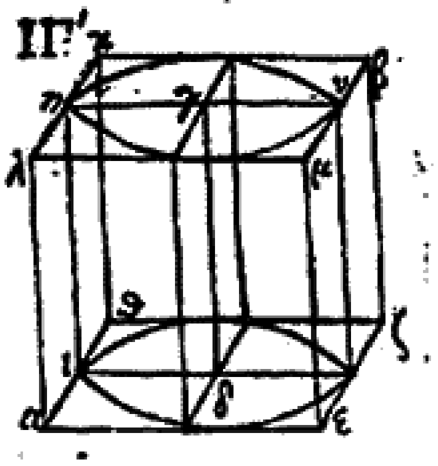
λαμβανόμεναι ἡμιολίῳ λόγον ἔχουσι πρὸς τὸ α γ δ ε, τετράεδρον, περιέχον αὐτὸ ἅπαξ μετὰ τοῦ ἡμίσεως, προσλαβοῦσαι δὲ καὶ τὴν β γ δ ε, πυραμίδα ἡμίσειαν οὖσαν τοῦ αὐτοῦ α γ δ ε, τετραέδρου περιέχουσι τοῦτο δίς. Ἐὰν ἄρα τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετράεδρόν τε καὶ κύβος περιληφθῶσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

## Πρότασις ΙΓ'.

**Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς πρίσματος περὶ ὀρθὸν περιγραφομένου κυλίνδρου, ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου περιγραφομένῳ ὀρθογωνίῳ.**

Ἔστω πρίσμα τὸ α β, οὗ βάσις ἡ α ζ, περὶ ὀρθὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον τὸν ι ν. Λέγω ὅτι ἡ τοῦ α β, πρίσματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τῆς αὐτοῦ α ζ, βάσεως, καὶ γ δ, ὕψους περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ βάσις τοῦ α β, πρίσματος τετράπλευρός ἐστι, πάντως γε τὸ αὐτὸ πρίσμα ὑπὸ τεσσάρων περιέχεται παραλληλογράμμων τῶν α κ, θ β, β ε, α μ, ἀλλὰ τὸ μὲν α κ, περιέχεται ὑπό τε τῆς θ κ, καὶ α θ, τὸ δὲ θ β, ὑπό τε τῆς θ κ, καὶ θ ζ, τὸ δὲ β ε, ὑπό τε τῆς β ζ, καὶ ζ ε, καὶ τὸ α μ ὑπό τε τῆς λ α, καὶ α ε, αἱ δὲ κ θ, β ζ, λ α, ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις, ἄρα τὸ ὑπό τε τῆς κ θ, καὶ τῆς περιμέτρου τῆς α ζ, βάσεως περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς α κ, θ β, β ε, α μ, παραλληλογράμμοις, ἀλλ' ἡ μὲν θ κ, ἴση ἐστὶ τῷ ὕψει τοῦ ι ν, κυλίνδρου, τὰ δὲ α κ, θ β, β ε, α μ, παραλληλόγραμμα ἴσα τῇ τοῦ α β, πρίσματος ἐπιφανείᾳ, ἄρα ἡ τοῦ α β, πρίσματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τοῦ ὕψους τοῦ ι ν, κυλίνδρου, καὶ τῆς περιμέτρου τῆς α ζ, βάσεως, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 9.




## Πρότασις ΙΔ'.

**Ἡ τοῦ πρίσματος ἐπιφάνεια τοῦ εἰς ὀρθὸν ἐγγεγραμμένου κυλίνδρου ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος.**

Ἔστω πρίσμα τὸ α β, οὗ βάσις ἡ α κ, ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν α κ β ε, κύλινδρον. Λέγω ὅτι ἡ τοῦ α β, πρίσματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τοῦ γ δ, ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς περιμέτρου τῆς α κ, βάσεως τοῦ αὐτοῦ πρίσματος. ἐπεὶ γὰρ τοῦ α β, πρίσματος ἡ α κ, βάσις τετράπλευρός ἐστι, πάντως γε ἡ ἐπιφάνεια