ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

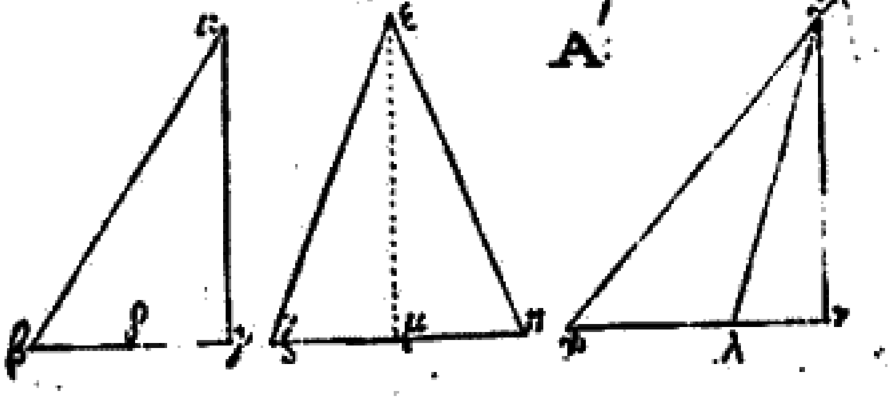
ΒΙΒΛΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Πρότασις Α΄.

Τριγώνου οἱουδήποτε δοθέντος τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου ἐμβαδόν. Εἰ μὲν οὖν τὸ αβγ, δοθὲν τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστι, διαιρεθήτω ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ γωνίαν πλευρῶν, ὡς ἐν τούτῳ ἡ βγ, δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἡ δγ, ἐπὶ τὴν αγ, καὶ ἀνάπαλιν, καὶ ὁ γενόμενος ἀριθμὸς τὸ τοῦ αβγ, τριγώνου ἐμβαδὸν παραστήσει. Οἷον ἔστω ἡ μὲν αγ, ποδῶν φέρ᾽ εἰπεῖν ἕξ, ἡ δὲ βγ, ὀκτὼ, ἡ δγ, πάντως ἔσται τεσσάρων. πολλαπλασιαζομένου δὲ τοῦ ἓξ ἐπὶ τὸν 4, ἢ τοῦ 4, ἐπὶ τὸν 6, γενήσεται ὁ 24. Λέγω δὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, δοθέντος τριγώνου περιέχειν πόδας 24. κατὰ γὰρ τὴν ιβ΄: τοῦ γ΄: τοῦ παρ: τὸ αβγ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμισείας τῆς αὐτοῦ βάσεως, τουτέστι τῆς δγ, καὶ τοῦ ὕψους δηλ: τῆς αγ, ἀλλὰ καὶ ὁ 24. ἀριθμὸς γέγονεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αγ, ἐπὶ τὴν δγ, τοῦ ἄρα αβγ, δοθέντος ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ἐμβαδὸν ποδῶν ἐστιν εἰκοσιτεσσάρων.

Geom. Lib. 8. Fig. 1.



Εἰ δὲ τὸ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον ᾖ, ἢ ὀξυγώνιον, εἴτε ἰσοσκελὲς, εἴτε σκαληνὸν, ὡς τὰ εζη, θκλ. Πιπτέτω κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου ἐπὶ τῆς αὐτοῦ βάσεως, ὡς αἱ εμ, θν, εἴτε τμηθήτω ἡ τοῦ τριγώνου βάσις δίχα, καὶ πολλαπλασιασθήτω τὸ τοῦ τριγώνου ὕψος ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς βάσεως, καὶ ὁ γενόμενος ἀριθμὸς παραστατικὸς ἔσται τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου. ἐὰν γὰρ ἡ εμ, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ζη, ἢ ἡ θν, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς κλ, γνωσθήσεται τὸ τοῦ εζη, ἢ θκλ, τριγώνου ἐμβαδὸν, ὁ λόγος ὁ αὐτός.

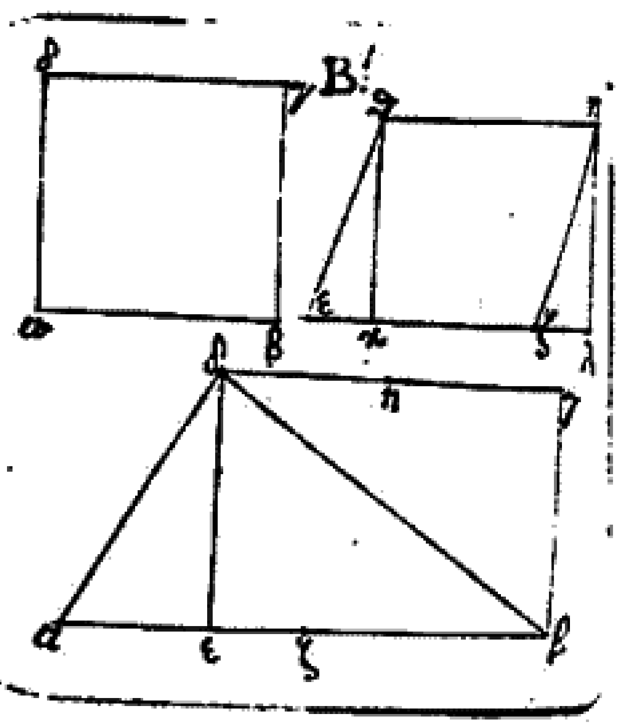
Πρότασις Β':

Παραλληλογράμμου οἱουδήποτε δοθέντος τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔσω α': παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ α β γ δ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου ἐμβαδόν. Πολλαπλασιασθήτω δὴ ἡ δ α, ἐπὶ τὴν α β, καὶ ὁ γινόμενος παραστατικὸς ἔσαι τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου, ἅπαν γὰρ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον κατὰ τὸν λ ή: ὅρον τοῦ παρ: ὑπὸ δύο εὐθειῶν περιέχεται τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν.

Ἔσω β': παραλληλόγραμμον ῥομβοειδὲς τὸ ε ζ η θ. Εἰς εὕρεσιν δὲ τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου, ἐξαχθήτω ἡ ε ζ, βάσις κατὰ τὸ συνεχὲς, καὶ πιπτέτωσαν κάθετοι ἐπ' αὐτῆς αἱ θ κ, η λ, καὶ συσαθήσεται πάντως τὸ θ κ λ η, ὀρθογώνιον. Εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ θ η, ἐπὶ τὴν θ κ, καὶ γνωσθήσεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ θ κ λ η, ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα. ἀλλὰ τὸ θ κ λ η, ἴσον ἐσὶ τῷ θ ε ζ η, κατὰ τὴν λ ε': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πολλαπλασιαζομένης ἄρα τῆς θ η, ἐπὶ τὴν θ κ, γνωσθήσεται καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ θ ε ζ η, δοθέντος παραλληλογράμμου.

Geom. Lib. 8. Fig. 2.



Πρότασις Γ':

Τραπεζίου δοθέντος, οὗ αἱ δύο πλευραὶ τῶν ἀπεναντίον παράλληλοί εἰσι, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔσω τραπέζιον τὸ α β γ δ, ἔχον παραλλήλους τὰς α β, δ γ, πλευρὰς, καὶ ζητηθήτω τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Πιπτέτω δὴ κάθετος ἀπὸ τοῦ δ, ἐπὶ τῆς α β, ἡ δ ε, καὶ τμηθήτω δίχα ἡ μὲν α β, κατὰ τὸ ζ, ἡ δὲ δ γ, κατὰ τὸ η. Εἶτα συναφθήτωσαν αἱ α ζ, δ η, καὶ τὸ γενόμενον ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὴν δ ε, καὶ ἔσαι τὸ ζητούμενον. Ἐὰν γὰρ ἡ α ζ, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν δ ε, τὸ γενόμενον παραστατικὸν ἔσαι τοῦ α β δ, τριγώνου κατὰ τὴν α': τοῦ παρόντος, πολλαπλασιαζομένης δὲ τῆς δ η, ἐπὶ τὴν αὐτὴν δ ε, τὸ γενόμενον παρέξει τὸ τοῦ δ β γ, τριγώνου ἐμβαδόν. ἀλλ' ἐάν τε χωρὶς αἱ α ζ, δ η, ἐπὶ τὴν δ ε, πολλαπλασιασθῶσιν, ἐάν τε καὶ ὡς μία, τὸ αὐτὸ γίγνεται, πάντως γε τὸ γιγνόμενον ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν α ζ, δ η, ὡς μιᾶς ἐπὶ τὴν δ ε, παρίσησι τὸ ἐμβαδὸν τῶν α β γ, δ β γ, τριγώνων. τοῖς δὲ α β γ, δ β γ, τριγώνοις ἴσον ἐσὶ τὸ α β γ δ, τραπέζιον, ἄ-

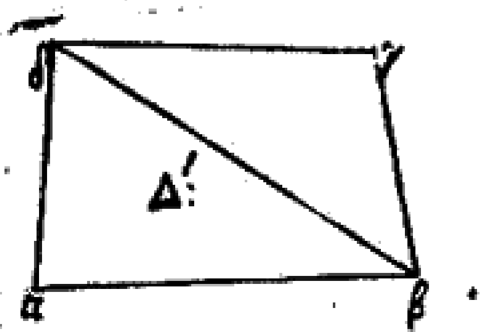
ρα

ρα συναπτομένων τῶν αζ, δη, καὶ τοῦ γινομένου ἐπὶ τὴν δε, πολλαπλασιαζομένου, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγδ, δοθέντος τραπεζίου δηλοῦται.

Πρότασις Δʹ:

Τραπεζίου οἱουδήποτε δοθέντος, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

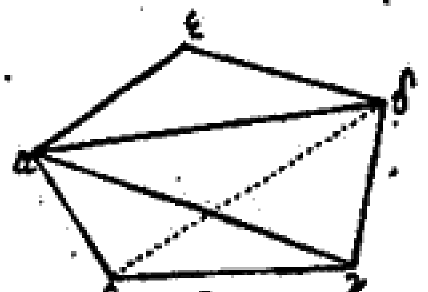
Δοθήτω τραπέζιον τὸ αβγδ, καὶ ζητηθήτω τὸ αὐτοῦ ἐμβαδόν. Διαιρεθήτω δὴ ὑπὸ τῆς δβ, διαγωνίου διαμέτρου εἰς δύο τρίγωνα τὰ αβδ, δβγ, καὶ εὑρεθήτω διὰ τῆς αʹ: τοῦ παρόντος τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τε αβδ, καὶ τοῦ δβγ, τριγώνου, καὶ τὸ γινόμενον ἐξ ἀμφοῖν συναπτομένων ἔσται ἴσον τῷ ἐμβαδῷ τοῦ αβγδ, δοθέντος τραπεζίου. Ἴσον γάρ ἐστι τὸ αὐτὸ τραπέζιον τοῖς αβδ, δβγ, τριγώνοις. Geom. Lib. 8. Fig. 3.



Πρότασις Εʹ:

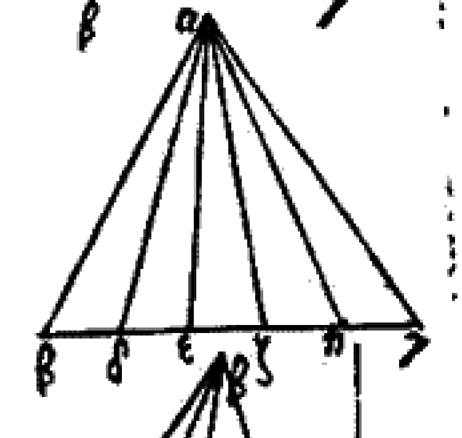
Πολυγώνου οἱουδήποτε δοθέντος τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

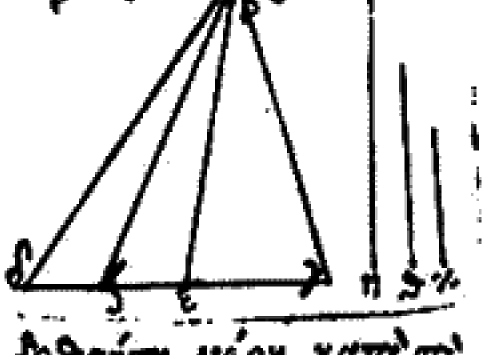
Δοθήτω πολύγωνον τὸ αβγδε, καὶ ζητηθήτω τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Διαιρεθήτω δὴ τὸ δοθὲν αβγδε, πολύγωνον εἰς τρίγωνα τὰ βγδ, δβα, αδε, καὶ εὑρεθήτω διὰ τῆς αʹ: τοῦ παρ: τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν βγδ, δβα, αδε, τριγώνου, καὶ τὰ εὑρεθέντα συναφθήτωσαν εἰς ἕν, καὶ τὸ γινόμενον ἴσον ἔσται τῷ δοθέντι αβγδε, πολυγώνῳ. Ἴσον γάρ ἐστι τοῦτο τοῖς βγδ, δβα, αδε, τριγώνοις.



Πρότασις ϛʹ:

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον ἀπὸ τῆς δοθείσης αὐτοῦ γωνίας τῶν διαιρετικῶν ἀγομένων γραμμῶν.



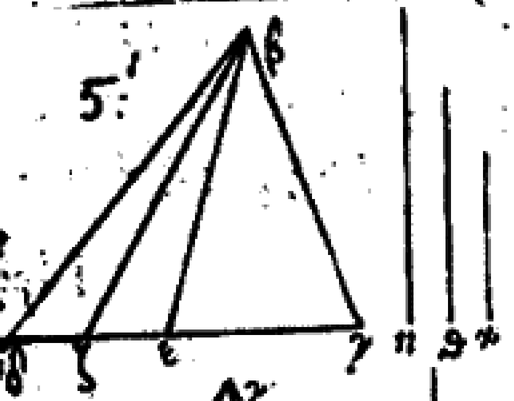


Δοθήτω αʹ: τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἔστω τοῦτο διελεῖν εἰς μέρη ἴσα πέντε ἀπὸ τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας τῶν διαιρετικῶν ἀγομένων γραμμῶν. Διαιρεθήτω δὴ ἡ βγ, εἰς τὰ δοθέντα μέρη κατὰ τὰ δ, ε, ζ, η, διὰ τῆς ϛʹ: τοῦ αʹ: τοῦ παρόντος, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, αε, αζ, αη, καὶ διαιρεθήσεται τὸ αβγ, δοθὲν τρίγωνον εἰς τὰ δοθέντα μέρη, κατὰ γὰρ τὴν αʹ: τοῦ ϛʹ: τοῦ Στοιχ: τὰ αβδ, αδε, αεζ, αζη, καὶ αηγ, τρίγωνα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις. βδ, δε, εζ, ζη, ηγ, ἀλλ' αἱ βδ, δε, καὶ λοιπαὶ βάσεις ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις κατὰ τὴν κατασκευήν, ἄρα καὶ τὰ αβδ, αδε,

αδε, καὶ λοιπὰ τρίγωνα ἴσα ἔσαι ἀλλήλοις, καὶ ἑπομένως τὸ αὐτὸ τρίγωνον διῄρηται εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις τρία κατὰ τὸ προσαχθέν.

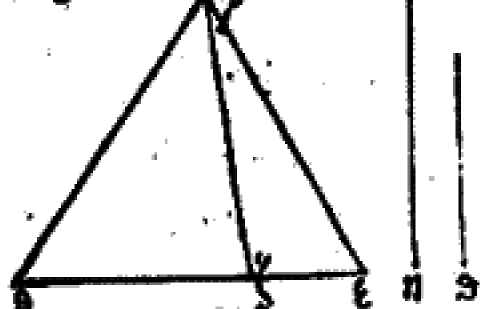
Δοθήτω β′: τὸ βγδ, τρίγωνον, καὶ ἔςω διελεῖν τοῦτο εἰς μέρη τρία ἔχοντα λόγον, ὃν 6, 3, 1. ἢ τὸ η, πρὸς τὸ θ, καὶ τὸ θ, πρὸς τὸ κ. Διαιρεθήτω δὴ ἡ γδ, εἰς τὰ δοθέντα μέρη διὰ τῆς προειρημένης ϛ′: τὰ γε, εζ, ζδ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ βε, βζ, καὶ ἔςαι τὸ ἐπιταχθέν. κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν α′: τὰ βγε, βεζ, βζδ, τρίγωνα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ γε, εζ, ζδ, αὐτῶν βάσεις, ἀλλ᾽ αἱ γε, εζ, ζδ, ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὡς ὁ 6, 3, 1. ἢ αἱ ηθκ, ἄρα τὸ βγδ, τρίγωνον διῄρηται εἰς μέρη τρία κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.

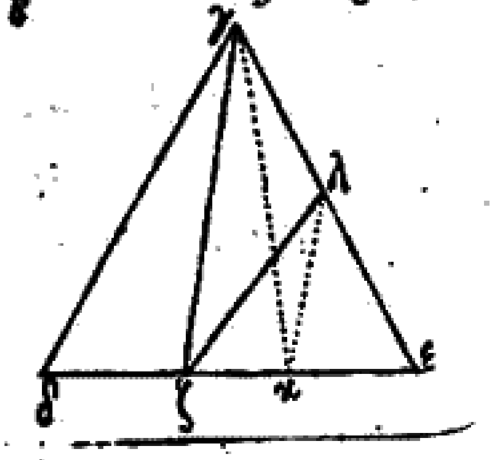
Geom. Lib. 8. Fig. 9.



Πρότασις Ζ′:

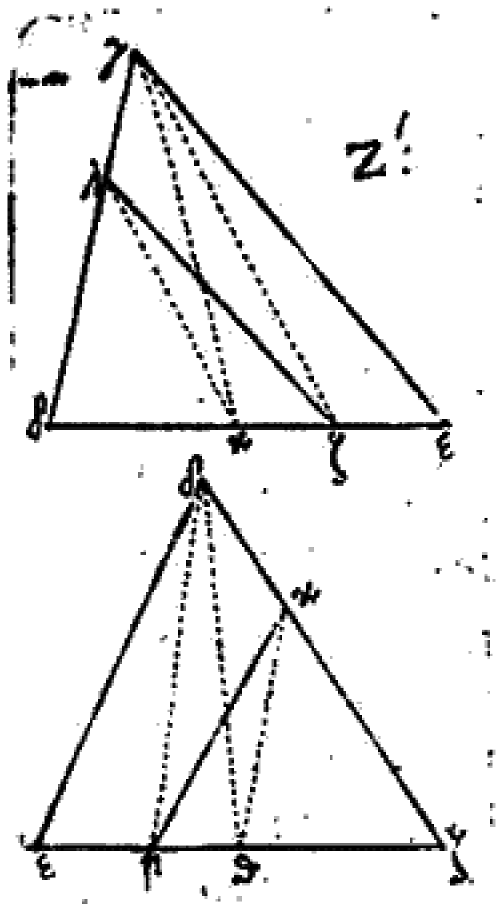
Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο μέρη διελεῖν ἔχοντα τὸν δοθέντα λόγον, ἀγομένης τῆς διαιρετικῆς ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ἐπὶ μιᾶς τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν.





Δοθήτω τὸ γδε, τρίγωνον, σημεῖον δὲ ἐπὶ τῆς δε, πλευρᾶς τὸ ζ, καὶ ἔςω διελεῖν τοῦτο τὸ γδε, τρίγ: ἀπὸ τοῦ ζ, σημείου εἰς δύο μέρη, ὥςε ἔχειν πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ η, θ, εὐθεῖαι. Τμηθήτω δὴ ἡ δε, εἰς μέρη δύο ἀνάλογα ταῖς η, θ. Ἐπεὶ δὲ τοῦτο τριχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι. ἢ γὰρ τὸ τῆς διαιρέσεως σημεῖον συμπεσεῖται τῷ ζ, ἢ πεσεῖται μεταξὺ τοῦ ζ, καὶ ε, ἢ γοῦν μεταξὺ τῶν δ, καὶ ζ. Συμπιπτέτω α: τῷ ζ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ γζ, καὶ γενήσεται τὸ προσαχθέν. Τὸ γὰρ δζγ, ἕξει πρὸς τὸ ζγε, τρίγωνον ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ, κατὰ γὰρ τὴν α: τοῦ ϛ′: τοῦ Στοιχ: τὰ δγζ, ζγε, τρίγωνα ἔχουσιν ὡς αἱ δζ, ζε, βάσεις, αὗται δὲ ὡς αἱ η, θ. Πιπτέτω β′: τὸ τῆς διαιρέσεως σημεῖον μεταξὺ τῶν ζ, καὶ ε, ὡς τὸ κ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ γζ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἤχθω ἡ κλ. εἶτα ἐπιζεύχθω ἡ ζλ, καὶ τμηθήσεται τὸ γδε, τρίγ: εἰς τὰ δζγ, ζλγ, καὶ ζελ, μέρη ἔχοντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ η, θ. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς γκ, τὰ δκγ, κγε, τρίγ: ἔχουσιν, ὡς αἱ δκ, κε, βάσεις κατὰ τὴν εἰρημένην α: τοῦ ϛ′: τοῦ αὐτοῦ. κατὰ δὲ τὴν λζ′: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, τὰ κλγ, λκζ, τρίγωνα ἴσα εἰσίν. ἔχουσι γὰρ τὴν αὐτὴν βάσιν κλ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς κλ, ζγ, κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ κελ, ἴσα εἰσὶ καὶ τὰ ζελ, κεγ, τρίγωνα, ὥςε τὸ ὅλον δεγ, τρίγ: τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἑκαἑκάτερον τῶν ζ ε λ, κ ε γ, τριγώνων, καὶ διαιρέσει τὸ δ ζ λ γ, τραπέζιον ἔχει πρὸς τὸ ζ ε λ, τρίγωνον, ὡς τὸ δ κ γ, τρίγ: πρὸς τὸ κ ε γ, ἀλλὰ τὸ δ κ γ, πρὸς τὸ κ ε γ, ἔχει τὸν δοθέντα λόγον, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ δ ζ λ γ, τραπέζιον τὸν δοθέντα ἔχει λόγον πρὸς τὸ ζ ε λ, τρίγ: Πιπτέτω γʹ: τὸ κ, σημεῖον μεταξὺ τῶν δ, καὶ ζ. Ἐπιζεύχθω δὴ ἡ ζ γ, καὶ ταύτῃ ἤχθω παράλληλος ἡ κ λ, εἶτα ἐπιζεύχθω καὶ ἡ ζ λ, καὶ τὸ δ ζ λ, τρίγωνον ἕξει πρὸς τὸ ζ ε γ λ, τραπέζιον ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς γ κ, ἔσται τὸ δ κ γ, πρὸς τὸ κ ε γ, ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ, κατὰ τὴν αʹ: τοῦ εἰρημένου ϛʹ: κατὰ δὲ τὴν ῥηθεῖσαν λζʹ: τὰ κ λ γ, λ κ ζ, τρίγωνα ἴσα ἐστί. κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ δ κ λ, ἴσα ἐστὶν ἔτι καὶ τὰ δ κ γ, δ ζ λ, καὶ ἑπομένως τὸ γ δ ε, ὅλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἑκάτερον τῶν δ κ γ, δ ζ λ, τριγώνων κατὰ τὴν θʹ: τοῦ εʹ: Εὐκλ:, ὥστε καὶ διαιρέσει τὸ δ κ γ, ἔχει πρὸς τὸ κ ε γ, τρίγωνον ὡς τὸ δ ζ λ, πρὸς τὸ ζ ε γ λ, τραπέζιον. ἀλλὰ τὸ δ κ γ, ἔχει τὸν δοθέντα λόγον, ὡς δέδεικται, πρὸς τὸ κ ε γ, ἄρα καὶ τὸ δ ζ λ, τρίγ: τὸν δοθέντα ἔχει λόγον πρὸς τὸ ζ ε λ γ, τραπέζιον. Τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 8. Fig. 5.



Πρότασις Ηʹ.

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο ἴσα διελεῖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν σημείου.

Δοθήτω τὸ δ ε ζ, τρίγωνον, ὃ δεῖ δίχα διελεῖν. σημεῖον δὲ τὸ η, ἐπὶ τῆς ε ζ, αὐτοῦ πλευρᾶς. Τμηθήτω δὴ ἡ ε ζ, δίχα κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ δ θ, δ η, παράλληλος δὲ τῇ δ η, ἤχθω ἡ θ κ. Εἶτα ἐπιζεύχθω ἡ η κ, καὶ τὸ δ ε η κ, τραπέζιον ἴσον ἔσται τῷ κ η ζ, τριγώνῳ: τὰ γὰρ θ κ δ, κ θ η, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λζʹ: κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ θ ζ κ, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ θ ζ δ, κ ζ η, τρίγωνα. ὥστε τὸ ὅλον δ ε ζ, τὸν αὐτὸν ἔχει πρὸς ἑκάτερον λόγον, καὶ διαιρέσει, ὡς τὸ ε θ δ, πρὸς τὸ θ ζ δ, ἔχει καὶ τὸ ε η κ δ, τραπέζιον πρὸς τὸ η ζ κ, τρίγωνον, ἀλλὰ τὸ ε θ δ, ἴσον ἐστὶ τῷ θ ζ δ, τριγ: ἄρα καὶ τὸ ε η κ δ, τραπέζιον ἴσον ἐστὶ τῷ η κ ζ, τριγώνῳ, ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

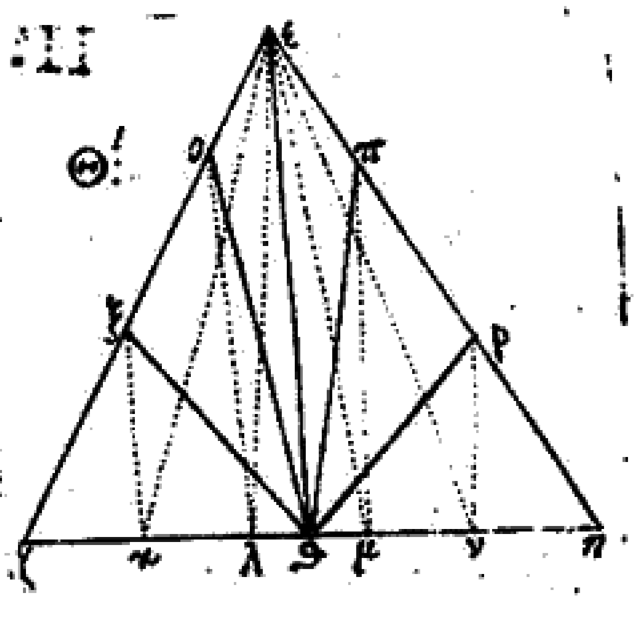
Πρότασις Θ΄:

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν.

Δοθήτω τὸ εζη, τρίγωνον, καὶ ἔστω διελεῖν τοῦτο εἰς μέρη ἴσα πέντε ἀπὸ τοῦ θ, σημείου. Διαιρεθήτω δὴ ἡ ζη, εἰς πέντε ἴσα μέρη τὰ ζκ, κλ, λμ, μν, νη, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ εθ, ἀπὸ δὲ τῶν κλμν, σημείων ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ θε, αἱ κξ, λο, μπ, νρ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ θξ, θο, θπ, θρ. Λέγω οὖν τὰ θζξ, ξθο, θοπ, πθρ, ρθη, ἴσα εἶναι ἀλλήλοις· ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ εκ, ελ, εμ, εν.

Δείκνυται· τὸ εζκ, πέμπτον ἐστὶ μέρος τοῦ εζη, ἔχει γὰρ πρὸς αὐτὸ ὡς ἡ ζκ, πρὸς τὴν ζη, κατὰ τὴν α΄: τοῦ ς΄: τοῦ Στοιχ: ἀλλὰ τῷ εζκ, ἴσον ἐστὶ τὸ ζθξ, ἄρα καὶ τὸ ζθξ, ε΄: ἐστὶ μέρος τοῦ εζη. ὅτι δὲ τὸ ζθξ, ἴσον ἐστὶ τῷ εζκ, δῆλον. κατὰ γὰρ τὴν λζ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ, τὰ ξκε, ξκθ, τρίγωνα ἴσα ἐστί. κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ ξζκ, ἴσα εἰσὶ καὶ τὰ εζκ, ζθξ. Αὖθις ἐπεὶ τριγώνου τοῦ οζλ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ολ, ἤχθη παράλληλος ἡ ξκ, δῆλον, ὅτι ἡ οξ, πρὸς τὴν ζξ, ἔχει ὡς ἡ κλ, πρὸς τὴν κζ, κατὰ τὴν β΄: τοῦ ς΄: αὐτοῦ, ἴση δὲ ἡ κλ, τῇ κζ, ἄρα καὶ ἡ οξ, ἴση ἐστὶ τῇ ξζ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ οξ, πρὸς τὴν ξζ, ἔχει καὶ τὸ θοξ, πρὸς τὸ θξζ, κατὰ τὴν α΄: τοῦ ς΄: τοῦ αὐτοῦ ἄρα τὰ θοξ, θξζ, τρίγωνα ἴσα ἐστί, τὸ δὲ θξζ, ε΄: ἐστὶ μέρος τοῦ ὅλου εζη, τριγ: ὡς δέδεικται, ε΄. ἄρα μέρος ἐστὶ καὶ τὸ θοξ, τοῦ αὐτοῦ εζη. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὰ θρη, θπρ, ἴσα, καὶ τούτων ἑκάτερον ε΄: εἶναι μέρος τοῦ εζη, ὅλου. Ὅτι δὲ καὶ τὸ θοεπ, τραπέζιον ε΄: ἐστὶ μέρος τοῦ αὐτοῦ εζη, τριγώνου, δῆλον καὶ τοῦτο, κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν λζ΄: τὸ θοε, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ελθ, καὶ τὸ θπε τῷ εμθ, ὥστε ὅλον τὸ θοεπ, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ελμ, ἀλλὰ τὸ ελμ, ε΄: ἐστὶ μέρος τοῦ εζη, ἄρα καὶ θοεπ, ε΄: ἐστὶ μέρος τοῦ αὐτοῦ εζη, δέδεικται δὲ καὶ ἕκαστον τοῦ ξζθ, θξο, θπρ, θρη, ε΄: εἶναι μέρος τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τὸ εζη, τρίγωνον διῄρηται εἰς μέρη πέντε ἴσα.

Geom. Lib. 8. Fig. 6.



Τοῦτον τὸν τρόπον ἔξεστι διελεῖν τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ εἰς πλείω, ἢ καὶ ἐλάττω μέρη.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἀπὸ τοῦ δοθέντος τριγώνου δυνατὸν ἀφελεῖν τὸ προσαχθὲν οἱονδήποτε μέρος. Κείσθω γὰρ ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ εζη, δοθέντος τριγώνου

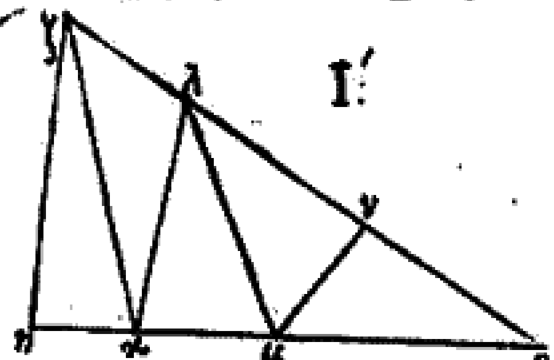
γώνου μέρος ε΄: Εἰλήφθω δὴ τῆς αὐτοῦ βάσεως μέρος ε΄: τὸ ζκ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, ἤχθω παράλληλος τῇ ιθ, ἡ κξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θξ, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν.

Πρότασις Ι΄:

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη ἴσα ἀλλήλοις διελεῖν ἀπὸ διαφόρων σημείων τῶν εὐθειῶν ἀγομένων.

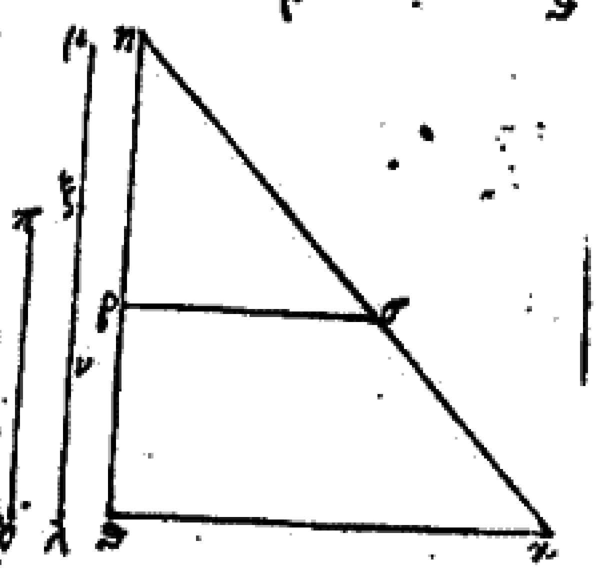
Ἔστω γοῦν διελεῖν τὸ ζηθ, τρίγωνον εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις πέντε. Ληφθήτω α΄: τὸ ηκ, ε΄: μέρος τῆς ηθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζκ. εἶτα εἰλήφθω ἡ ζλ, δ΄: μέρος τῆς ζθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κλ, λαμβανομένης δὲ καὶ τῆς κμ, αὐτῆς γ΄: μέρους τῆς κθ, ἐπεζεύχθω ἡ λμ. εἶτα εἰλήφθω καὶ τῆς λθ, τὸ ἥμισυ ἡ λν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μν, καὶ διαιρεθήσεται τὸ ζηθ, δοθὲν τρίγωνον εἰς πέντε ἴσα μέρη κατὰ τὸ προσταχθέν. κατὰ γὰρ τὴν α΄: τοῦ ς΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ζηκ, ἔχει πρὸς τὸ ζηθ, ὡς ἡ ηκ, πρὸς τὴν ηθ, ἀλλ᾽ ἡ ηκ, ε΄: ἐστὶ μέρος τῆς ηθ, ἄρα καὶ τὸ ζηκ, ε΄: ἐστὶ μέρος τοῦ ζηθ. διὰ τῆς αὐτῆς δείκνυται καὶ τὸ μὲν ζκλ, δ΄: μέρος εἶναι τοῦ ζκθ, τὸ δὲ κλμ, γ΄: τοῦ λκθ, καὶ τὸ λμν, ἥμισυ τοῦ λμθ, ὥστε τὸ ζηθ, δοθὲν τρίγωνον διῄρηται εἰς μέρη πέντε. Ὅτι δὲ καὶ ἴσα, δῆλον. ἀφαιρουμένου γὰρ ἀπὸ τοῦ ὅλου ζηθ, τὸ ε΄: μέρος ζηκ, τὸ λοιπὸν ζκθ, περιέχει τοιαῦτα μέρη, οἷον τὸ ζηκ, τέσσαρα. διὸ καὶ εἰς τέσσαρα διαιρεῖται. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δυνατὸν διελεῖν τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ εἰς πλείω, ἢ ἐλάττω μέρη τῶν δοθέντων, ἴσα ἀλλήλοις.

Geom. Lib. 8. Fig. 7.



Πρότασις ΙΑ΄:

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο μέρη διελεῖν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον, ἀγομένης τῆς γραμμῆς παραλλήλως μιᾷ τῶν αὐτοῦ πλευρῶν.



Ἔστω διελεῖν τὸ ηθκ, τρίγωνον εἰς μέρη δύο, ὥστε τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος εἶναι διπλάσιον, ἀγομένης τῆς γραμμῆς παραλλήλως τῇ θκ. Εἰλήφθω δὴ ἡ λμ, τυχοῦσα γραμμή, καὶ τμηθήτω εἰς μέρη τρία ἴσα, τὰ λν, νξ, ξμ, καὶ εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος τῶν λμ, λν, ἡ οπ, διὰ τῆς θ΄: τοῦ ς΄: τοῦ παρόντος. Εἶτα γενέσθω ὡς ἡ λμ, πρὸς τὴν οπ, ἡ θη, πρὸς τὴν ηρ, ἀπὸ δὲ τοῦ ρ, ἤχθω παράλληλος τῇ θκ, ἡ ρσ, καὶ τὸ θρσκ, τραπέζιον διπλάσιον ἔσται τοῦ ηρσ, τριγώνου, κατὰ γὰρ τὴν δ΄:

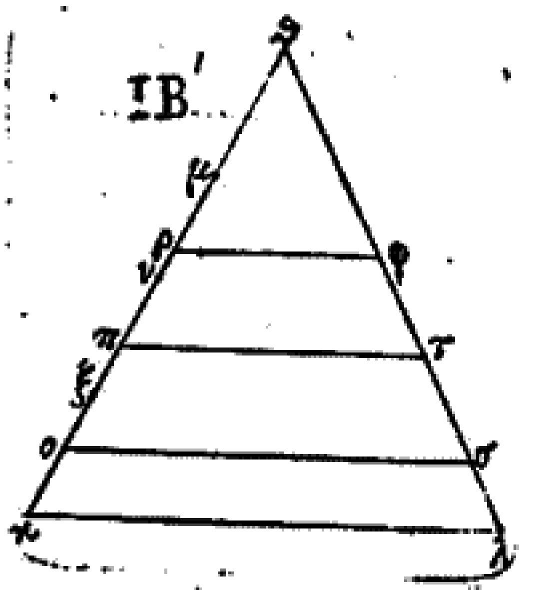
τῆς ς': τῆς Στοιχειώσεως, τὰ κρσ, κθχ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ὅτι καὶ ἰσογώνια· ὥστε τὸ κθχ, πρὸς τὸ κρσ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ ἡ θκ, πρὸς τὴν κρ. ὡς δὲ ἡ θκ, πρὸς τὴν κρ, ἔστι καὶ ἡ λμ, πρὸς τὴν οπ. ἄρα τὸ κθχ, τρίγωνον ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν πρὸς τὸ κρσ, ἤπερ ἡ λμ, πρὸς τὴν οπ, ἔστι δὲ καὶ ἡ λμ, πρὸς τὴν λν, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἤπερ πρὸς τὴν οπ, ἄρα ὡς ἡ λμ, πρὸς τὴν λν, τὸ κθχ, πρὸς τὸ κρσ. ἐπεὶ δὲ ἡ λμ, διπλασία ἐστὶ τῆς λν, κατὰ τὴν διαίρεσιν, πάντωςγε καὶ τὸ κθχ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ κρσ, καὶ ἑπομένως τὸ ρθχσ, διπλάσιον τοῦ αὐτοῦ κρσ, τριγώνου. Τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΒ':

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν τῶν διαιρετικῶν ἀγομένων εὐθειῶν παραλλήλως μιᾷ τινι τῶν αὐτοῦ πλευρῶν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ θκλ, καὶ κείσθω τοῦτο διελεῖν εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις τέσσαρα. Διαιρεθήτω δὴ ἡ θκ, αὐτοῦ πλευρὰ εἰς μέρη ἴσα τέσσαρα τὰ θμ, μν, νξ, ξκ. Εἶτα εὑρεθήτω κατὰ τὴν θ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, μέση ἀνάλογος τῶν μὲν θκ, θξ, ἡ θο, τῶν δὲ θκ, θν, ἡ θπ, τῶν δὲ θκ, θμ, ἡ θρ, καὶ ἀπὸ τῶν οπρ, σημείων ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι παράλληλοι τῇ κλ, αἱ οσ, πτ, ρφ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δοθὲν θκλ, τρίγωνον εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις τέσσαρα, τὰ οκλσ, ποστ, ρπτφ, θρφ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι θκ, θο, θξ, ἀνάλογόν εἰσι, πάντωςγε κατὰ τὴν α': τοῦ γ': τοῦ παρόντος, τὸ ἐπὶ τῆς α': τουτέστι τὸ θκλ, πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς β': τὸ θοσ, ἔχει ὡς ἡ θκ, α': πρὸς τὴν θξ, γ': ἤτοι ὡς 4, πρὸς 3. Αὖθις ἐπεὶ αἱ θκ, θπ, θν, ἀνάλογόν εἰσι, πάντωςγε τὸ θκλ, κατὰ τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ θπτ, ἔχει, ὡς ἡ θκ, πρὸς τὴν θν, τουτέστιν ὡς 4, πρὸς 2. Ἐπεὶ δὲ τελευταῖον ἀνάλογόν εἰσιν αἱ θκ, θρ, θμ, τὸ θκλ, πάντως ἔχει πρὸς τὸ θρφ, ὡς ἡ θκ, πρὸς τὴν θμ, ἤτοι ὡς 4, πρὸς 1, ἀλλ' ἡ θκ, διῄρηται εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις 4, ἄρα καὶ τὸ θκλ, τρίγωνον διῃρημένον ἐστὶν εἰς μέρη 4, ἴσα ἀλλήλοις. ὅπερ ἦν τὸ προσαχθέν.

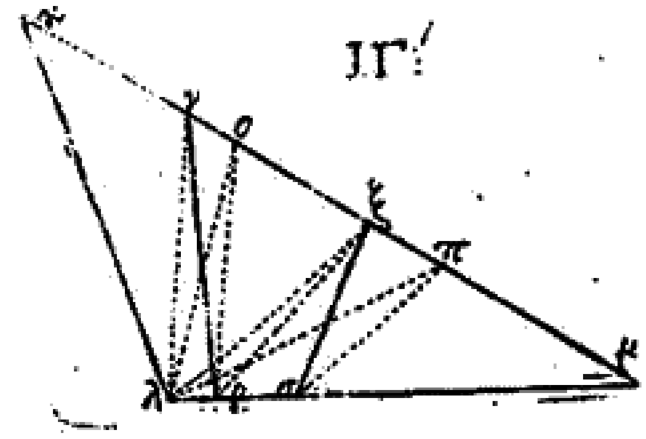
in. Lib. 2. Fig. 8.



Πρότασις ΙΓ′:

Τὸ δοθὲν τρίγωνον ἀπὸ τῶν δοθέντων ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν σημείων εἰς ὁσαδήποτουν μέρη ἴσα διελεῖν.

Δοθήτω τρίγωνον τὸ κ λ μ, σημεῖα δὲ τὰ ν ξ, καὶ ἔστω τοῦτο διελεῖν ἀπὸ τῶν ν, καὶ ξ, σημείων εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις τρία. Τμηθήτω δὴ ἡ κ μ, ἐφ' ἧς τὰ δοθέντα σημεῖα, εἰς τρία μέρη ἴσα ἀλλήλοις τὰ κ ο, ο π, π μ, καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ λ ν, λ ο, λ ξ, λ π, κἂν μὲν τὰ ο, καὶ π, σημεῖα συμπέσωσι τοῖς ν, καὶ ξ, ἔσται τὸ ἐπιταχθὲν διὰ τὴν α: τοῦ ς′: τῶν Στοιχ: εἰ δὲ μή, ἀχθήτω ἀπὸ μὲν τοῦ ο, παράλληλος τῇ λ ν, ἡ ο ρ, ἀπὸ δὲ τοῦ π, παράλληλος τῇ λ ξ, ἡ π σ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ν ρ, ξ σ, καὶ διὰ τῶν ν ρ, ξ σ, ἀχθεισῶν διαιρεθήσεται τὸ κ λ μ, δοθὲν τρίγωνον εἰς τρία μέρη ἴσα τὰ κ λ ρ ν, ν ρ σ ξ, ξ σ μ, ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν λ ο, λ π, τὰ κ λ ο, λ ο π, λ π μ, τρίγωνα ἴσα εἰσίν. ἔχουσι γὰρ ὡς αἱ βάσεις. αὗται δὲ ἴσαι ἀλλήλαις εἰλήφθησαν αἱ κ ο, ο π, π μ, διὰ τὴν α: τοῦ ς′: τοῦ Στοιχ: διὰ δὲ τὴν λζ′: τοῦ α: τῶν αὐτῶν τὰ λ ν ο, ν λ ρ τρίγωνα ἴσα εἰσί. κοινοῦ δὲ τοῦ κ λ ν, λαμβανομένου, ἔσται καὶ τὸ κ λ ρ ν, τραπέζιον ἴσον τῷ κ λ ο, τριγώνῳ, τοῦτο δὲ γ′: μέρος ἐστὶ τοῦ κ λ μ, δοθέντος τριγώνου, ἄρα καὶ τὸ κ λ ρ ν, τραπέζιον τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ ξ σ μ, γ′: εἶναι



Geom. Lib. 8. Fig. 9.

ΙΓ′:

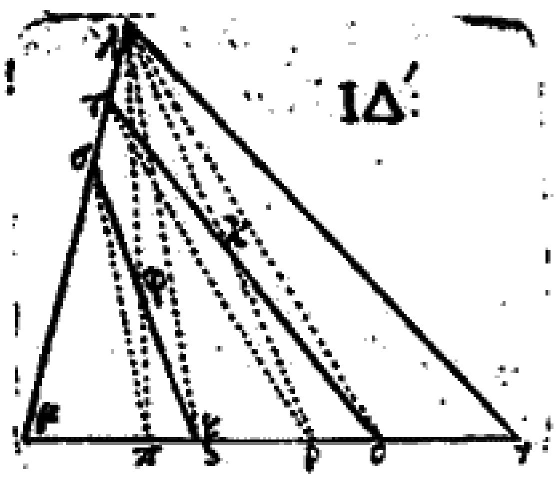
μέρος τοῦ κ λ μ, τὰ γὰρ π σ λ, σ π ξ, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ διὰ τὴν ῥηθεῖσαν λζ′: κοινοῦ δὲ τοῦ π σ μ, λαμβανομένου ἔσται τὸ ξ σ μ, ἴσον τῷ π λ μ, τρίτῳ ὄντι τοῦ κ λ μ, λείπεται ἄρα καὶ τὸ ν ρ σ ξ, τραπέζιον γ′: εἶναι μέρος τοῦ δοθέντος κ λ μ, τριγώνου. Τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΔ′:

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς τρία μέρη ἄνισα διελεῖν κατὰ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν ἀπὸ τῶν δοθέντων σημείων ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν.

Δοθήτω τρίγωνον τὸ λ μ ν, καὶ ἔστω τοῦτο διελεῖν ἀπὸ τῶν ξ, καὶ ο, σημείων εἰς μέρη τρία, ὧν τὸ α: οἷ τέταρτον ἔσται τοῦ ὅλου, τὸ δὲ β′: οἷ γ′: καὶ τὸ γ′: ὅλον τὸ λειπόμενον. Τμηθήτω δὴ ἡ μ ν, εἰς τρία μέρη, τὰ π μ, π ρ, ρ ν, ὥστε τὸ μὲν μ π, οἷ δ′: εἶναι τῆς ὅλης μ ν, τὸ δὲ π ρ οἷ γ′: τῆς αὐτῆς, καὶ τὸ ρ ν, λοιπὸν ἀόριστον. Ἐπιζεύχθωσαν δὴ αἱ λ ξ, λ ο, λευκαὶ γραμμαὶ, καὶ τῇ μὲν λ ξ, ἤχθω παράλληλος ἡ π σ, τῇ δὲ λ ο, ἡ ρ τ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ σ ξ, τ ο, καὶ τὸ μὲν σ μ ξ, ἓν δ': ἔσαι μέρος τοῦ λ μ ν, τὸ δὲ σ ξ ο τ, ἓν γ'. ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν λ π, λ ρ, τὰ λ μ π, λ π ρ, ἕξουσι πρὸς τὸ λ μ ν, ὅλον ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις μ π, π ρ, πρὸς τὴν μ ν, βάσιν τοῦ λ μ ν, ὅλου, ἀλλ' ἡ μὲν μ π, ἓν τέταρτόν ἐστι τῆς μ ν, ἡ δὲ π ρ, ἓν γ'. κατὰ τὴν κατασκευὴν τῆς αὐτῆς, ἄρα καὶ τὸ λ μ π, ἓν τέταρτόν ἐστι τοῦ λ μ ν, τὸ δὲ λ π ρ, ἓν γ': ἐπεὶ δὲ ἡ π σ, ἤχθη παράλληλος τῇ λ ξ, πάντως γε κατὰ τὴν λ ζ': τοῦ α: τῶν Στοιχ: τὰ σ π ξ, π σ λ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ, κοινοῦ δὲ τοῦ σ μ π, λαμβανομένου ἴσα ἔσαι καὶ τὰ λ μ π, σ μ ξ, τὸ δὲ λ μ π, ἓν δ': ἐστὶ τοῦ λ μ ν, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ σ μ ξ, ὁμοίως ἓν δ': ἐστι τοῦ αὐτοῦ. Αὖθις ἐπεὶ τὰ σ π ξ, π σ λ, ἴσα ἐστὶν ὡς εἴρηται, ἀφαιρουμένου κοινοῦ τοῦ σ π φ, ἐναπολείπονται τὰ φ π ξ, φ σ λ, ἴσα, κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ φ ξ ρ λ, ἔσονται καὶ τὰ λ π ρ, λ σ ξ ρ, ἴσα. πάλιν ἐπεὶ ἡ ρ τ, ἤχθη παράλληλος τῇ ο λ, πάντως γε τὰ λ ο ρ, λ ρ τ, ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λ ζ': κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ λ χ ο, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ χ ο ρ, χ λ τ, κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ τ χ ρ ξ σ, ἔσονται ἴσα καὶ τὰ λ ρ ξ σ, τ ο ξ σ, ἀλλὰ τὸ λ ρ ξ σ, δέδεικται ἴσον τῷ λ π ρ, ἄρα καὶ τὸ τ ο ξ σ, ἴσον ἐστὶ τῷ λ π ρ, τὸ δὲ λ π ρ, ἓν γ': ἐστὶ τοῦ ὅλου λ μ ν, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ τ ο ξ σ, ἓν γ': ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ. τὸ λ μ ν, ἄρα δοθὲν τρίγωνον διῄρηται εἰς μέρη τρία κατὰ τὸν δοθέντα λόγον:

Geom. Lib. 8. Fig. 10.



Πρότασις ΙΕ':

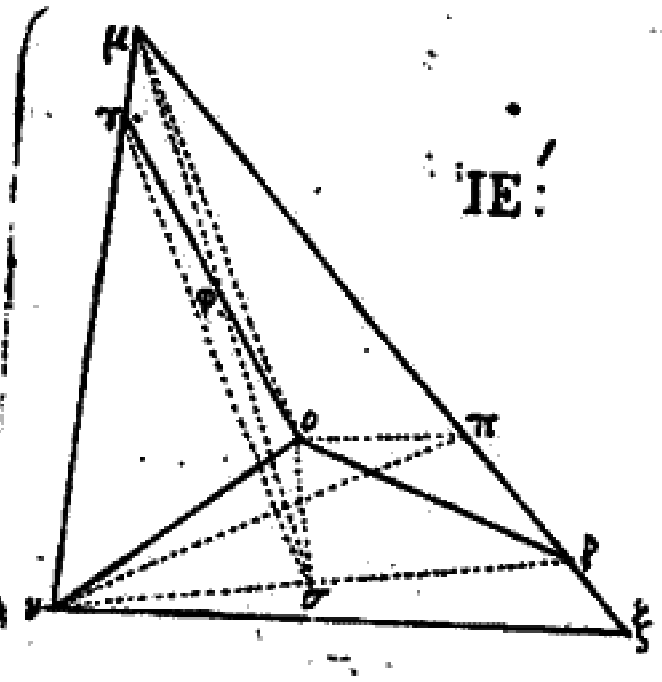
Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς τρία ἴσα μέρη διελεῖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐν αὐτῷ σημείου.

Ἔστω τρίγωνον τὸ μ ν ξ, καὶ δέοι τοῦτο διελεῖν εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις τρία ἀπὸ τοῦ ο, δοθέντος ἐν αὐτῷ σημείου, ὥστε μίαν τῶν διαιρετικῶν αὐτοῦ γραμμῶν διὰ τοῦ ν, διέρχεσθαι. Ἀπὸ τῆς μ ξ, τοίνυν ὑποτεινούσης τῆς ὑπὸ μ ν ξ, γωνίας ἀφῃρήσθω γ': μέρος τὸ ξ π, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ο π, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἤχθω ἡ ν ρ, εἶτα ἐπιζεύχθω ἡ ο μ, τῆς δὲ ν ρ, δίχα κατὰ τὸ σ, τμηθείσης, ἤχθω ἀπὸ τοῦ σ, παράλληλος τῇ ο μ, ἡ σ τ, ἀπὸ δὲ τοῦ δοθέντος ο, σημείου ἀχθήτωσαν ἐπὶ τὰ ν ρ, σημεῖα αἱ ο ν, ο ρ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ μ ν ξ, τρίγωνον εἰς τρία ἴσα τὰ ο ν ξ ρ, ο ρ μ τ, σ τ ν. ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ν π, μ σ, σ ο. Δείκνυται, τὸ ν ξ π, τρίγωνον γ': ἐστὶ μέρος τοῦ μ ν ξ, δοθέντος τριγώνου, ὥσπερ

καὶ

καὶ τὸ ξπ, τῆς ξμ, κατὰ τὴν α: τοῦ ς': τοῦ Στοιχ: ἐπεὶ δὲ αἱ οπ, νρ, παράλληλοί εἰσι, πάντως γε κατὰ τὴν λζ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, τὰ νορ, νπρ, τρίγωνα ἴσα εἰσί, κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ νρξ, ἔσονται ἴσα καὶ τὰ νορξ, νπξ, ἀλλὰ τὸ νπξ, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ μνξ, δοθέντος, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ νορξ, τραπέζιον γ': μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ. Αὖθις τὰ μνσ, μσρ, ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν α: τοῦ ς': τοῦ Στοιχ: , καὶ διὰ τὴν λζ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ ἴσα ἔτι ἐστὶ καὶ τὰ τοσ, μστ, κοινοῦ δὲ εἰλημμένου τοῦ τσν, ἔσονται ἴσα καὶ τὰ τοσν, μσν, τὸ δὲ μσν, ἴσον ἐστὶ καὶ τῷ μσρ, ἄρα τὸ τοσν, τραπέζιον ἴσον ἐστὶ τῷ μσρ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὰ νσο, σορ, τρίγ: ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν προειρημένην α: τοῦ ς': τοῦ Στοιχ: , πάντως γε ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ μὲν τοῦ τοσν, τραπεζίου τὸ οσν, ἀπὸ δὲ τοῦ μσρ, τὸ οσρ, ἐναπολειφθήσεται τὸ τον τρίγωνον ἴσον τῷ μτορ, τραπεζίῳ. πάλιν ἐπεὶ τὰ τοσ, σμτ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶν, ὡς δέδεικται, κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ τφσ, τὰ ἐναπολειπόμενα δήπουθεν φσο, φτμ, τρίγωνα ἴσα ἔσονται, κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ μφορ, τραπεζίου, ἔσται τὸ μσορ, τραπέζιον ἴσον τῷ μτορ, ἀλλὰ τὸ μσορ, δέδεικται ἴσον τῷ τον, ἄρα καὶ τὸ μτορ, τραπέζιον ἴσον ἐστὶ τῷ τον. Δῆλον οὖν ἐκ τούτων, ὅτι τὸ μνορ, τραπέζιον τέτμηται δίχα διὰ τῆς το, ἀλλὰ τὸ μνορ, δύο τρίτα περιέχει, ὡς δειχθήσεται, τοῦ ὅλου μνξ, ἑκάτερον ἄρα τῶν τον, μτορ, ἓν γ': ἐστὶ τοῦ δοθέντος μνξ. Ὅτι δὲ τὸ μνορ, δύο γ': περιέχει τοῦ δοθέντος μνξ, τριγ: δῆλον. ἀφῄρηται γὰρ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μνξ, ἓν γ': ὡς προαποδέδεικται, τὸ νορξ, τραπέζιον, ὥστε τὸ ἐναπολειφθὲν μνορ, δύο τρίτα περιέχει· τούτου δὲ δίχα διῃρημένου ἔσται τὸ ὅλον μνξ, εἰς τρία ἴσα διῃρημένον. Τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 8. Fig. 11.



ΙΕ'

Πρότασις Ις':

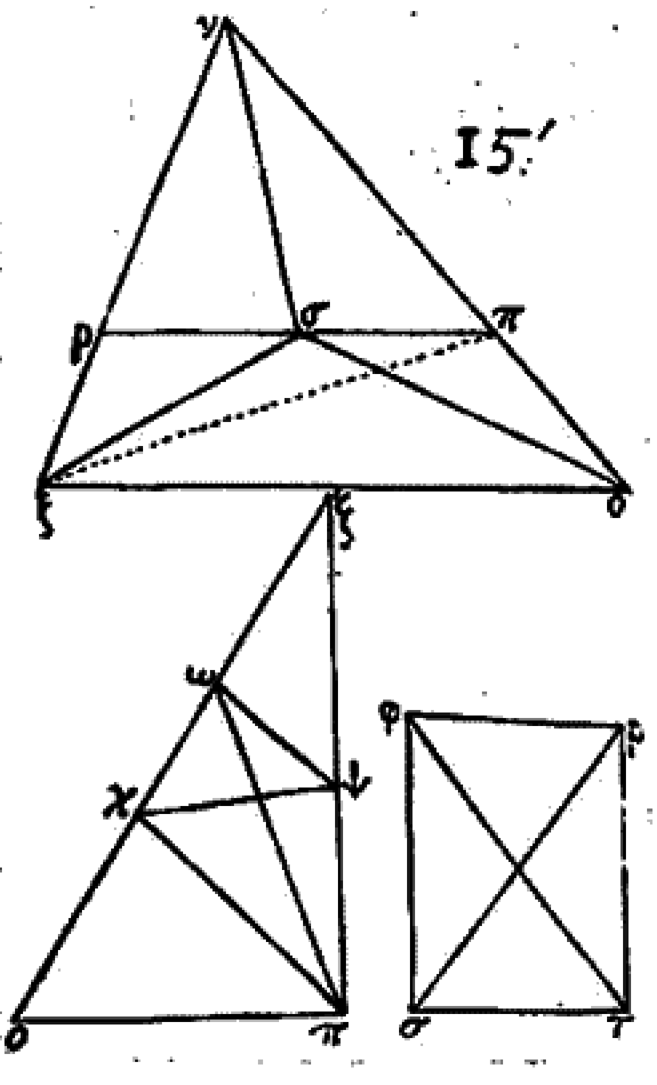
Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς τρία ἴσα μέρη διελεῖν ἀπὸ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Ἔστω τρίγωνον τὸ νξο, καὶ ζητείσθω ἡ εἰς τρία ἴσα τούτου διαίρεσις ἀπὸ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ τῶν γραμμῶν ἀγομένων. Εἰλήφθω δὴ ἀπὸ τῆς ον, φέρ' εἰπεῖν γραμμῆς τὸ οπ, τρίτον μέρος, ἀπὸ δὲ τοῦ π, ἤχθω παράλληλος τῇ ξο, ἡ πρ, εἶτα τμηθείσης τῆς πρ, δίχα κατὰ τὸ σ, ἀχθήτωσαν αἱ σν, σξ, σο, εὐθεῖαι, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δοθὲν νξο, τρίγωνον εἰς τρία ἴσα, τὰ νσξ, ξσο, οσν. Τὸ γὰρ ξσο, ἴσον ἐστὶ τῷ ξπο, ἀλλὰ τὸ ξπο, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ νξο, κατὰ τὴν α:

τοῦ

τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχ: ὥσπερ καὶ ἡ α π, πρὸς ο ξ, ἄρα καὶ τὸ ξ α ο, γ': ἐςὶ μέρος τοῦ ν ξ ο, ὥστε τὸ ἐναπολειπόμενον ν ξ σ α, τραπέζιον δύο περιέχει γ': μέρη τοῦ αὐτοῦ ν ξ ο, ἐπεὶ δὲ τὰ ν ρ σ, ν σ π, τρίγωνα ἴσα ἐςὶ κατὰ τὴν ἐνθεῖσαν, κατὰ δὲ τὴν λ ζ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, ἴσα ἐςὶ καὶ τὰ ρ σ ξ, π σ ο, τοιγαροῦν τῷ ρ σ ξ, προστεθῇ τὸ ρ σ ξ, τῷ δὲ ν σ π, τὸ π σ ο, ἴσα ἔσονται καὶ τὰ ν σ ξ, ν σ ο, καὶ ἑκάτερον γ': ἔςαι μέρος τοῦ ν ξ ο, δέδεικται δὲ γ': καὶ τὸ ξ σ ο, τὸ ἄρα δοθὲν τρίγωνον ν ξ ο, διήρηται εἰς μέρη τρία ἴσα ἀπὸ τῶν αὐτοῦ γωνιῶν κατὰ τὸ προσταχθέν.

Geom. lib. 6. Fig. 12.



15'

Πρότασις ιζ':

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος τριγώνου ἀφελεῖν τρίγωνον ἴσον τῷ δοθέντι, ἔχον τὴν αὐτὴν γωνίαν τῇ ἀφ' οὗ ἀφαιρεῖται.

Δοθήτωσαν δύο τρίγωνα ἄνισα τὰ ξ ο π, ρ σ τ, καὶ ζητηθήτω ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ ξ ο π, μείζονος ἴσον τρίγωνον τῷ ρ σ τ, ἐλάττονι, ὥστε ἔχειν τὸ ἀφαιρεθὲν τὴν ὑπὸ ο ξ π, γωνίαν. Γενέσθω δὲ τῇ ο ξ π, γωνίᾳ ἴση ἡ ρ τ φ, καὶ ἀπὸ τοῦ σ ἤχθω παράλληλος τῇ τ ρ, ἡ φ σ, συμπίπτουσα τῇ τ φ, κατὰ τὸ φ, εἶτα εἰλήφθω τῇ μὲν τ φ, ἴση ἡ ξ χ, τῇ δὲ τ ρ, ἡ ξ ψ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ χ ψ. Λέγω τὸ ξ χ ψ, ἴσον εἶναι τῷ ρ σ τ, δοθέντι, κατὰ γὰρ τὴν δ': τοῦ α': τοῦ Στοιχ: τὸ ξ χ ψ, ἴσον ἐςὶ τῷ τ ρ φ, τούτῳ δὲ ἴσον ἐςὶ τὸ φ σ τ, κατὰ τὴν λ ζ': τοῦ αὐτοῦ, τὸ ἄρα ξ χ ψ, ἴσον ἐςὶ τῷ ρ σ τ, ἔχει δὲ καὶ τὴν ὑπὸ ξ χ ψ, γωνίαν, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Εἰ δὲ τὸ π, σημεῖον δοθῇ, ἀφ' οὗ δεῖ τὴν διαιρετικὴν ἀχθῆναι γραμμὴν, τῶν αὐτῶν προκατασκευασθέντων, ἐπιζεύχθω ἡ π χ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἤχθω ἡ ψ ω, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ π ω, καὶ τὸ π ξ ω, ἴσον ἔςαι τῷ δοθέντι ρ σ τ, κατὰ γὰρ τὴν β': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχ: ὡς ἡ ξ π, πρὸς τὴν ξ ψ, ἔχει καὶ ἡ ξ χ, πρὸς τὴν ξ ω, ἐπεὶ δὲ ἡ ξ χ, εἴληπται ἴση κατὰ τὴν προτέραν κατασκευὴν τῇ τ φ, ἡ δὲ ξ ψ, τῇ τ ρ, πάντως γε ὡς ἔχει ἡ ξ π, πρὸς τὴν τ ρ, ἔχει καὶ ἡ τ φ, πρὸς τὴν ξ ω, τῶν ἄρα ξ ψ ω, τ ρ φ, τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, ἔχουσι δὲ καὶ τὰς ὑπὸ ρ τ φ, ψ ξ ω, γωνίας ἴσας, κατὰ τὴν ιε': ἄρα τοῦ αὐτοῦ τὰ ξ π ω, τ ρ φ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ, ἀλλὰ τὸ τ ρ φ, ἴσον ἐςὶ τῷ ρ σ τ, κατὰ τὴν λ ζ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τὸ π ξ ω, ἴσον ἐςὶ τῷ δοθέντι ρ σ τ.

Εἰ-

Εἰ δ' αὖθις δοθῇ τὸ ψ, σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ζητηθῇ ἀχθῆναι τὴν διαμετρικὴν γραμμὴν, γινομένης τῆς ρτφ, γωνίας ἴσης τῇ ψξχ, εὑρεθήτω δ': ἀνάλογος τῶν ψξ, τρ, τφ, ἡ ξχ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ψχ, καὶ τὸ ξψχ ἴσον ἐστὶ τῷ ρτφ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιε': τοῦ ϛ': ἀλλὰ τὸ ρτφ ἴσον ἐστὶ τῷ ρστ, ἄρα τὸ ξψχ ἴσον ἐστὶ τῷ ρστ, δοθέντι. ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

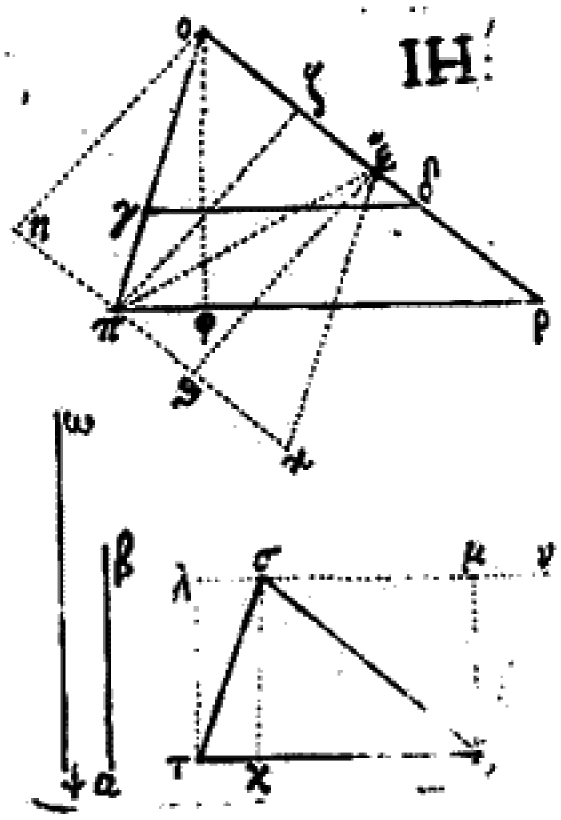
Πρότασις ΙΗ':

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος τριγώνου ἴσον τρίγωνον ἀφελεῖν ἑτέρῳ δοθέντι τριγώνῳ δι' εὐθείας παραλλήλου μιᾷ τῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου.

Δοθήτωσαν δύο τρίγωνα τὰ οπρ, στυ, καὶ ζητηθήτω ἀφαιρεθῆναι ἀπὸ τοῦ οπρ, μείζονος ἴσον τρίγωνον τῷ στυ, ἐλάττονι, ἀγομένης τῆς εὐθείας παραλλήλου τῇ πρ, αὐτοῦ πλευρᾷ. Πιπτέτω δὴ κάθετος ἀπὸ τοῦ ο, ἐπὶ τῆς πρ, ἡ οφ, ἀπὸ δὲ τοῦ σ, ἐπὶ τῆς τυ, ἡ σχ, καὶ τῆς μὲν πρ, βάσεως καὶ οφ, ὕψους, εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος ἡ ψω, τῆς δὲ τυ, βάσεως καὶ χσ, ὕψους ἡ αβ: ἔπειτα εὑρεθήτω τῶν ψω, αβ, οπ, δ': ἀνάλογος ἡ ογ, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ α': τοῦ παρόντος. καὶ ἀπὸ τοῦ γ, ἤχθω παράλληλος τῇ πρ, ἡ γδ. Λέγω δὴ τὸ ογδ, τρίγωνον ἴσον εἶναι τῷ στυ, κατὰ γὰρ τὴν μα': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ὑπὸ

Geom. Lib. 8. Fig. 13.

τῶν πρ, φο, ὀρθογώνιον διπλάσιόν ἐστι τοῦ οπρ, τριγώνου, ὁμοίως καὶ τὸ ὑπὸ τῶν τυ, χσ, ὀρθογώνιον διπλάσιόν ἐστι κατὰ τὴν αὐτὴν τοῦ στυ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν πρ, φο, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ψω, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν τυ, χσ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ψω, τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ οπρ, τριγώνου, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ στυ, ὥστε ὡς ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ψω, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἔχει καὶ τὸ οπρ, τρίγωνον πρὸς τὸ στυ. Αὖθις ἐπεὶ τὰ οπρ, ογδ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι διὰ τὴν τῶν γωνιῶν ἰσότητα, πάντως γε καὶ ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν οπ, ογ, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ. ἀλλὰ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ψω, αβ, τετράγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ πρὸς ἄλληλα κατὰ τὴν αὐτήν. ὡς δὲ ἡ ψω, πρὸς τὴν αβ, γέγονε καὶ ἡ οπ, πρὸς τὴν ογ,



ἄρα ὡς ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ψω, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἔχει καὶ τὸ οπρ, πρὸς τὸ στυ, ὡς δέδεικται, ἄρα τὸ οπρ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ ογδ, καὶ στυ. ὥστε κατὰ τὴν θ': τοῦ ε': τοῦ αὐτοῦ, τὰ ογδ, στυ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἄλλως.

Α'λλως. Συνιϛάσθω κάθετος ἀπὸ τοῦ π, ἐπὶ τῆς ορ, ἡ πζ, καὶ τῶν πζ, σχ,
τυ, εὑρεθήτω δ': ἀνάλογος ἡ οε, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιϛ': τοῦ α': τοῦ παρόντ: κατὰ δὲ
τὴν θ': τοῦ αὐτοῦ εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος, τῶν ορ, οε, καὶ ἔϛω αὕτη ἡ οδ, ἀπὸ
δὲ τοῦ δ, ἤχθω παράλληλος τῇ πρ, ἡ γδ, καὶ τὸ ογδ, τρίγωνον ἴσον ἔϛαι τῷ
στυ. Α'χθήτωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν ο, καὶ ε, παράλληλοι τῇ πζ, αἱ οη, εθ, διὰ δὲ
τοῦ π, ἤχθω παράλληλος τῇ οε, ἡ ηθ, ἤχθω δ' ἔτι ἀπὸ τοῦ ε, ἡ εκ, παράλ-
ληλος τῇ οπ, τέμνουσα τὴν ηθ, ἐκβαλλομένην κατὰ τὸ κ, καὶ συϛαθήσονται τὰ οη-
θε, οπκε, ἴσα παραλληλόγραμμα κατὰ τὴν λε': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, συνι-
ϛάσθωσαν δὲ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ τὰ λτυμ, στυν, ἴσα παραλληλόγραμμα.
Δείκνυται.

Η' μὲν οη, ἴση ἐϛὶ τῇ πζ, ἡ δὲ λτ, τῇ σχ, κατὰ τὴν λδ': τοῦ αὐτοῦ. ὥϛε
ὡς ἔχει ἡ πζ, πρὸς τὴν σχ, ἔχει καὶ ἡ οη, πρὸς τὴν λτ, ἀλλ' ὡς ἡ πζ, πρὸς
τὴν σχ, γέγονε καὶ ἡ τυ, πρὸς τὴν οε, ἄρα ὡς ἔχει ἡ οη, πρὸς τὴν λτ, ἔχει
καὶ ἡ τυ, πρὸς τὴν οε. καὶ ἑπομένως τὸ ηε, ἴσον ἐϛὶ τῷ τμ, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ ϛ':
τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλὰ τὸ μὲν ηε, ἴσον ἐϛὶ τῷ πε, τὸ δὲ τμ, τῷ τν, ὡς εἴρη-
ται, τὸ πε, ἄρα ἴσον ἐϛὶ τῷ τν. ἐπεὶ δὲ τοῦ μὲν πε, παραλληλογράμμου ἥ-
μισύ ἐϛι τὸ οπε, τοῦ δὲ τν, τὸ στυ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν μα': τοῦ α': πάντως γε
τὸ οπε, τρίγωνον ἴσον ἐϛὶ τῷ στυ, ἀλλὰ τὸ οπε, ἴσον ἐϛὶ τῷ ογδ, ὡς
δειχθήσεται, καὶ τὸ ογδ, ἄρα ἴσον ἐϛὶ τῷ στυ, ὅπερ ἦν τὸ προταχθέν. Ο'-
τι δὲ τὸ οπε, ἴσον ἐϛὶ τῷ ογδ, οὐ χαλεπὸν δεῖξαι. κατὰ γὰρ τὴν α': τοῦ ϛ':
τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ οπρ, τρίγωνον ἔχει πρὸς τὸ οπε, ὡς ἡ ορ, βάσις πρὸς τὴν
οε, βάσιν, ἰσοϋψῆ γάρ, ἐπεὶ δὲ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ορ, οδ, οε, ἑξῆς ἀνάλογόν
εἰσι κατὰ τὴν κατασκευήν, τὰ δὲ οπρ, ογδ, τρίγωνα ὅμοια, ὡς ἰσογώνια, πάν-
τως γε κατὰ τὴν α': τοῦ γ': τοῦ παρόντος, τὸ ἐπὶ τῆς α': ορ, τουτέϛι τὸ οπρ, τρί-
γωνον, πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς β': οδ, τὸ ογδ, ἔχει ὡς ἡ ορ, πρὸς τὴν οε, ἀλλ' ὡς
ἡ ορ, πρὸς τὴν οε, δέδεικται ἔχειν καὶ τὸ οπρ, πρὸς τὸ οπε, τὸ οπρ, ἄρα
τρίγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὸ οπε, καὶ ογδ, ὥϛε κατὰ τὴν θ': τοῦ
ε': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ οπε, ἴσον ἐϛὶ τῷ ογδ. Α'πὸ τοῦ δοθέντος ἄρα τριγώ-
νου, καὶ τὰ ἑξῆς.

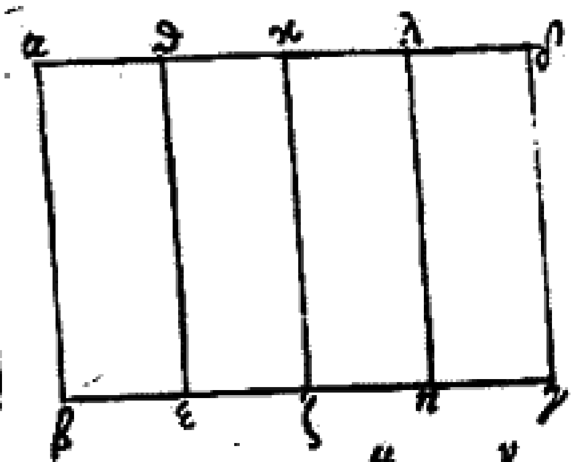
Πρότασις ΙΘ':

Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν κατὰ τὸν δο-θέντα λόγον.

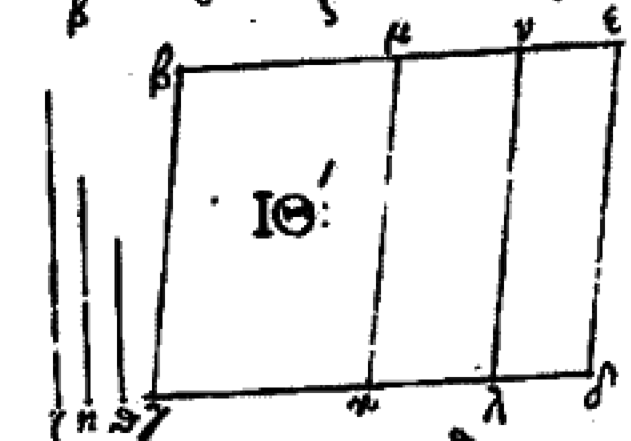
Ε'ϛω διελεῖν τὸ αβγδ, παραλληλόγραμμον εἰς τέσσαρα μέρη ἴσα. Τμηθή-
τω δὴ ἡ βγ, ἀφ' ἧς δεῖ τὰς διαιρετικὰς ἄγεσθαι γραμμάς, εἰς μέρη τέσσαρα ἴ-
σα ἀλλήλοις, τὰ βε, εζ, ζη, ηγ, καὶ ἀπὸ τῶν εζη, σημείων ἤχθωσαν παράλλη-
λοι τῇ αβ, ἢ γδ, αἱ εθ, ζκ, ηλ, καὶ τὰ βθ, εκ, ζλ, ηδ, παραλληλόγραμ-
μα

μα ἴσα ἔσονται. ἔχουσι γὰρ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις βε, εζ, ζη, ηγ, καὶ τὴν α: τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλ' αἱ βε, εζ, ζη, ηγ, εἰλήφθησαν ἴσαι ἀλλήλαις, ἄρα καὶ τὰ βθ, εκ, ζλ, ηδ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, τοῖς δὲ τέσσαρσι τούτοις παραλληλογράμμοις ἴσον ἐστὶ τὸ δοθὲν βδ, καὶ τὴν α: τοῦ β': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ βδ, ἄρα παραλληλόγραμμον διῄρηται εἰς μέρη 4, καὶ τὸ προσταχθέν.

Geom. Lib. 8. Fig. 14.

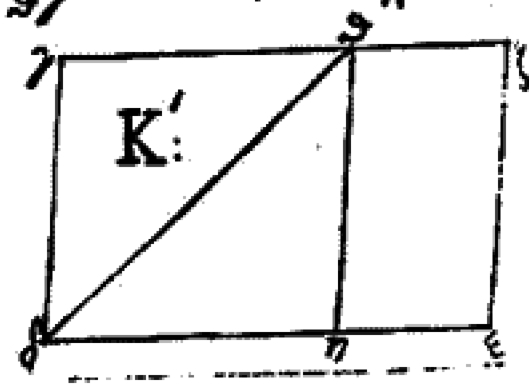


Ἔστω ἔτι διελεῖν τὸ βγδε, εἰς μέρη 3, ὥστε ἔχειν πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ ζηθ, εὐθεῖαι. Τμηθήτω δὴ ἡ γδ, εἰς τὰ γκ, κλ, λδ, ὥστε τὸ μὲν γκ, ἔχειν πρὸς τὸ κλ, ὡς ἡ ζ, πρὸς τὴν η, τὸ δὲ κλ, πρὸς τὸ λδ, ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ, καὶ ἀπὸ τῶν κ, καὶ λ, ἤχθωσαν παραλλήλως τῇ βγ, ἢ δε, αἱ κμ, λν, καὶ τὰ γμ, κν, λε, παραλληλόγραμμα εἰς ἃ τὸ γε, διαιρεῖται, ἕξουσι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ ζηθ, δοθεῖσαι εὐθεῖαι. Ἡ δεῖξις ἡ αὐτὴ τῇ ἀνωτέρω. Τοῦτον δὴ τὸν τρόπον δύναται ἕκαστον παραλληλόγραμμον διαιρεθῆναι, κἄν τε ὀρθογώνιον ᾖ, κἄν τε μὴ τοιοῦτον, εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη καθ' οἱονδήτινα λόγον διὰ εὐθειῶν παραλλήλων.



Πρότασις Κ':

Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον διελεῖν εἰς μέρη τρία ἴσα μιᾶς μόνον παραλλήλου ἀγομένης γραμμῆς, τῆς δ' ἑτέρας ἀπὸ τῆς δοθείσης αὐτοῦ γωνίας.



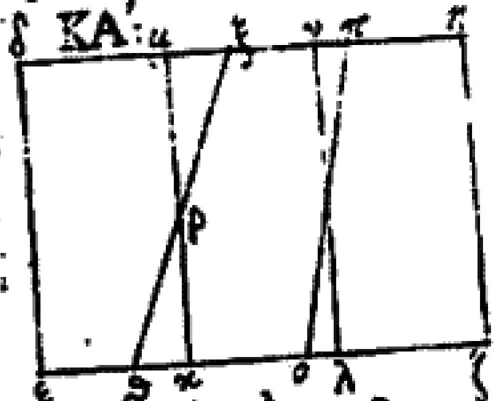
Ἔστω διελεῖν τὸ γδεζ, παραλληλόγραμμον εἰς μέρη τρία ἴσα, διδόσθω δὲ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γδε, ἀφ' ἧς ὀφείλει ἡ ἑτέρα τῶν διαιρετικῶν ἀχθῆναι γραμμῶν. Ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τῆς δε, τὸ εη, τρίτον αὐτῆς μέρος, καὶ ἀπὸ τοῦ η, ἤχθω παράλληλος τῇ εζ, ἢ δγ, ἡ ηθ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ δθ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δζ, εἰς τὰ γδθ, δθη, ηεζθ, μέρη ἴσα ὄντα ἀλλήλοις. τὸ μὲν γὰρ ηζ, γ': ἐστὶ μέρος τοῦ δζ, καὶ τὴν ἀνωτέρω, τὸ δὲ γδηθ, διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα διὰ τῆς δθ, διαμέτρου κατὰ τὴν λδ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ τῶν γδθ, δθη, τριγώνων ἑκάτερον γ': ἐστὶ μέρος τοῦ ὅλου γδεζ, παραλληλογράμμου. Τὸ δοθὲν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς.

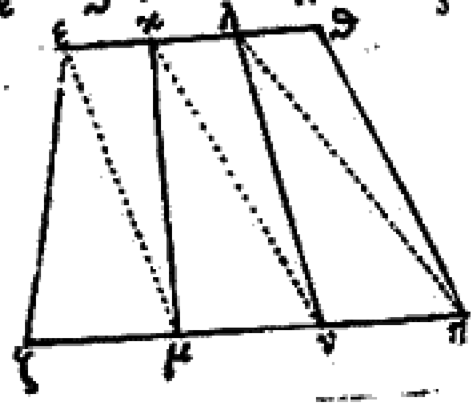
Πρότασις ΚΑ':

Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς τρία μέρη ἴσα, ἢ καὶ πλείω διελεῖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μιᾶς τῶν διαιρετικῶν αὐτοῦ ἀγομένης γραμμῶν.

Ἔστω διελεῖν τὸ δεζη, παραλληλόγραμμον εἰς τρία μέρη ἴσα. δεδόσθω δὲ καὶ τὸ θ, σημεῖον, ἀφ' οὗ ὀφείλει ἡ μία τῶν διαιρετικῶν ἀχθῆναι γραμμῶν. Διαιρεθήτω δὴ ἡ εζ, ἐφ' ἧς τὸ δοθὲν σημεῖον εἰς τρία μέρη ἴσα τὰ εκ, κλ, λζ, καὶ ἀπὸ τῶν κ, καὶ λ, ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ εδ, ἢ ζη, αἱ κμ, λν, καὶ εἰλήφθω τῇ θκ, ἴση ἡ μξ. εἶτα τμηθήτω δίχα ἡ θζ, καὶ ξη, κατὰ τὰ ο, καὶ π, σημεῖα. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ θξ, οπ. Λέγω δὴ τὰ δεθξ, ξθοπ, ποζη, τραπέζια ἴσα εἶναι. τὰ γὰρ μρξ, θρκ, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν κϛ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἔχουσι γὰρ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ρμξ, ρξμ, ἴσας ταῖς ὑπὸ ρθκ, ρκθ, καὶ τὴν μξ, πλευρὰν τῇ θκ. κοινοῦ δὲ προστιθεμένου τοῦ δεθρμ, τραπεζίου, ἔσται ἴσον καὶ τὸ δεθξ, τῷ δεκμ, ἀλλὰ τὸ δεκμ, γ': ἐστὶ μέρος κατὰ τὴν ἀνωτέρω τοῦ εη, ἄρα καὶ τὸ δεθξ, γ': ἐστὶ μέρος τοῦ αὐτοῦ εη. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, καὶ τὸ μέσον θοπξ, ἴσον τῷ κλνμ, τὸ δὲ ποζη, τῷ νλζη, ἀλλ' ἑκάτερον τῶν κν, λη, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ εη, ἄρα ἑκάτερον καὶ τῶν θπ, οη, γ': ὁμοίως μέρος ἐστὶ τοῦ εη. Τὸ δοθὲν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 8. Fig. 13.





Πρότασις ΚΒ':

Τὸ δοθὲν τραπέζιον, οὗ αἱ ἀπεναντίον δύο πλευραὶ παράλληλοι, εἰς τρία μέρη ἴσα διελεῖν.

Ἔστω διελεῖν τὸ εζηθ, τραπέζιον εἰς μέρη τρία. Διαιρεθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν εθ, ζη, παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν εἰς τρία μέρη ἴσα τὰ εκ, κλ, λθ, ζμ, μν, νη, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ κμ, λν, καὶ τὰ εζμκ, κμνλ, λνηθ, ἴσα ἔσονται. Ἀχθήτωσαν γὰρ αἱ εμ, κν, λη, λέγω, καὶ ἐπεὶ τὰ εζμ, κμν, λνη, τρίγωνα ἐπὶ ἴσων βάσεών εἰσι, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, πάντως γε κατὰ τὴν λη': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ὁμοίως δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν ἴσα εἰσὶ καὶ τὰ εμκ, κνλ, λνθ. ὥστε προστιθεμένων τῶν ἴσων εμκ, κνλ, λνθ, τοῖς ἴσοις εζμ, κμν, λνη, ἔσονται τὰ ὅλα εζμκ, κμνλ, λνηθ, ἴσα κατὰ τὸ β': ἀξίωμα τοῦ αὐτοῦ. Τὸ δοθὲν ἄρα τραπέζιον, καὶ τὰ ἑξῆς.

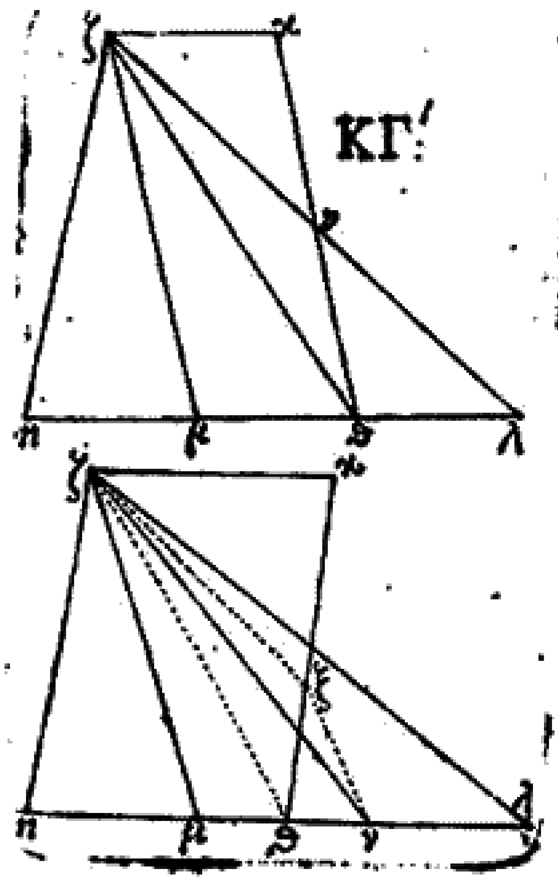
Πρό-

Πρότασις ΚΓ′:

Τραπεζίου δοθέντος τὰς δύο τῶν ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευρῶν παραλλήλους ἔχοντος τρίτον μέρος ἀπ' αὐτοῦ ἀφελεῖν, ἢ εἰς τρία ἴσα αὐτὸ διελεῖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου.

Ἔστω ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ ζηθκ, δοθέντος τραπεζίου, οὗ αἱ ζκ, ηθ, παράλληλοι, γ′: μέρος. Ἤχθω δὴ ἡ ηθ, κατὰ τὸ συνεχές, ὥστε τὴν θλ, ἴσην εἶναι τῇ ζκ, τῆς δὲ ηλ, εἰς 3, ἴσα μέρη διαιρεθείσης τὰ ημ, μθ, θλ, ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζμ, ζθ. Λέγω δὴ τὸ ζημ, γ′: εἶναι μέρος τοῦ ζηθκ· κατὰ γὰρ τὴν κϛ′: τοῦ α′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὰ ζνκ, θνλ, τρίγωνα ἴσα εἰσίν. ἔχουσι γὰρ τάς τε ὑπὸ ζκν, λθν, καὶ τὰς ὑπὸ κνζ, θνλ, γωνίας ἴσας, καὶ μίαν πλευρὰν τὴν ζκ, μιᾷ τῇ θλ, ἴσην, κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ ζηθν, τραπεζίου, τὸ ζηθκ, τραπέζιον ἴσον ἔσται τῷ ζηλ, τριγώνῳ, ἀλλὰ τὸ ζημ, τρίγωνον γ′: ἐστὶ μέρος τοῦ ζηλ, κατὰ τὴν α′: τοῦ ϛ′: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ τὸ ζημ, γ′: ἐστὶ μέρος καὶ τοῦ ζηθκ, τραπεζίου, τὸ δὲ ζημ, ἴσον ἐστὶ τῷ ζμθ, ἄρα καὶ τὸ ζμθ, γ′: αὐτοῦ μέρος ἐστίν, ἑπομένως δὲ καὶ τὸ ζθκ. εἰ γὰρ μή, οὐδέτερον τῶν ζημ, ζμθ, γ′: ἔσται μέρος τοῦ ζηθκ.

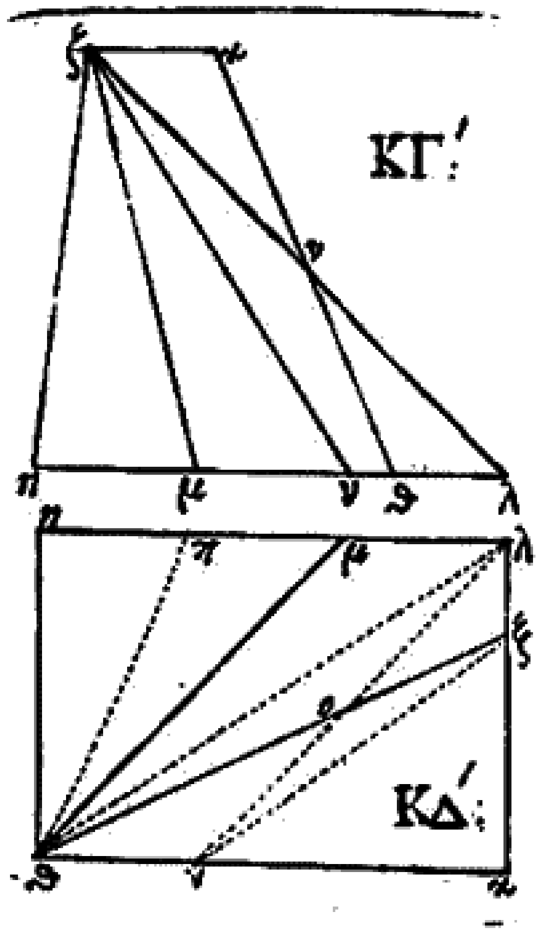
Geom. Lib. 8. Fig. 16.



Εἰ δὲ ἡ ζθ, οὐ συμπίπτει τῇ κθ, ἀλλὰ τέμνει αὐτὴν ὡς ἡ ζν, ἐπιζεύχθω ἡ κλ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἤχθω ἡ νξ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζξ, καὶ τὸ ζηθκ, διαιρεθήσεται εἰς μέρη τρία ἴσα τὰ ζημ, ζμθξ, καὶ ζξκ. Ὅτι μὲν γὰρ τὸ ζημ, γ′: ἐστὶ μέρος τοῦ ζηθκ, δέδεικται ἀνωτέρω. ὅτι δὲ καὶ τὸ ζμθξ, γ′: ὁμοίως τοῦ αὐτοῦ μέρος ἐστίν, οὐ χαλεπὸν ἀποδεῖξαι. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ζκ, θλ, παράλληλοί εἰσι καὶ ἴσαι, δῆλον ὅτι καὶ αἱ ζθ, κλ, παράλληλοί εἰσιν, ἀλλὰ τῇ κλ, εὐθείᾳ παράλληλος ἤχθη ἡ ξν, ἄρα καὶ αἱ ζθ, ξν, παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν λ′: τοῦ α′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὥστε κατὰ τὴν λζ′: τοῦ αὐτοῦ τὰ ζθν, ζθξ, τρίγωνα ἴσα εἰσίν. ἔχουσι γὰρ τὴν αὐτὴν ζθ, βάσιν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ζθ, ξν, κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ ζμθ, πάντως γε τὸ ζμν, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ζμθξ, τραπεζίῳ, ἀλλὰ τὸ ζμν, γ′: ἐστὶ μέρος τοῦ ζηθκ, ἴσον γὰρ τῷ ζημ, κατὰ τὴν α′: τοῦ ϛ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ τὸ ζμθξ, τραπέζιον γ': ἐςὶ μέρος τοῦ ζηθκ. δέδεικται δὲ τοῦ αὐτοῦ γ': μέρος καὶ τὸ ζημ, ἐγκαταλείπεται ἄρα καὶ τὸ ζξκ, ὁμοίως γ': μέρος τοῦ αὐτοῦ ζη, κκ.

Εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ζμ, ζν, ἐντὸς πεσεῖται τῆς ηθ, τῶν αὐτῶν γενομένων τῆς κατασκευῆς παραγγελμάτων, ὡς ἐπὶ τοῦ παραδείγματος, δῆλον, ὅτι τὸ ζηθκ, δοθὲν τραπέζιον διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη τὰ ζημ, ζμν, ζνθκ. Ὅτι μὲν γὰρ ἕκαστον τῶν ζημ, ζμν, τριγώνων γ': ἐςὶ μέρος τοῦ ζηθκ, καὶ συναμφότερα, ταυτὸ δ' ἐςὶν εἰπεῖν τὸ ζην, δύο τρίτα τοῦ αὐτοῦ περιέχει μέρη, συνάγεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω. τὸ γὰρ ζηθκ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ α': διαγράμματι, ἴσον ἐςὶ τῷ ζηλ, τριγώνῳ. ἀφαιρουμένου δὲ κοινοῦ τοῦ ζην, ἐναπολείπεται τὸ ζνθκ, ἴσον τῷ ζνλ, τριγώνῳ. τοῦτο δὲ ἴσον ἐςὶ τῷ τε ζημ, καὶ ζμν, χωρὶς, ἄρα καὶ τὸ ζνθκ, τραπέζιον ἴσον ἐςὶν ἑκατέρῳ τῶν αὐτῶν, καὶ ἑπομένως γ': ἐςὶ μέρος τοῦ ζηθκ, δοθέντος τραπεζίου.

Geom. Lib. 8. Fig. 17.



Πρότασις ΚΔ'.

Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς τρία ἴσα μέρη διελεῖν ἀπὸ τῆς δοθείσης γωνίας.

Ἔςω διελεῖν τὸ ηθκλ, παραλληλόγραμμον εἰς τρία ἴσα μέρη ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ θ, γωνίας. Εἰλήφθω δὴ γ': μέρος τῆς μὲν ηλ, τὸ λμ, τῆς δὲ θκ, τὸ θν, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ θμ, θλ, ἀπὸ δὲ τοῦ ν, ἤχθω παράλληλος τῇ θλ, διαμέτρῳ ἡ νξ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ θξ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δοθὲν ηθκλ, παραλληλόγραμμον εἰς τρία ἴσα τὰ ηθμ, θμλξ, θξκ. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ λν, καὶ ἐπεὶ ἡ ηλ, ἴση ἐςὶ τῇ θκ, κατὰ τὴν λδ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀφῃρέθη δὲ ἴση ἡ λμ, τῇ θν, τρίτον γάρ ἐςιν ἑκατέρα μέρος, ἡ μὲν τῆς ηλ, ἡ δὲ τῆς θκ, ἐγκαταλείπεται πάντως καὶ ἡ ημ, ἴση τῇ νκ, ἔςι δὲ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λδ': καὶ ἡ ηθ, τῇ κλ, ἴση, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ μηθ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ νκλ, ὁμοίως ἴση, ἄρα τὸ μηθ, τρίγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ νκλ, κατὰ τὴν δ': τοῦ αὐτοῦ. Αὖθις ἐπεὶ αἱ θλ, νξ, παράλληλοί εἰσι πάντως γε κατὰ τὴν λζ': τοῦ αὐτοῦ τὰ νξλ, ξνθ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ, κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ νκξ, τρίγωνα ἔσαι καὶ τὰ λνκ, θξκ, τρίγωνα ἴσα, τὸ δὲ λνκ, ἴσον δέδεικται τῷ θημ, ἄρα καὶ τὸ θξκ, ἴσον ἐςὶ τῷ αὐτῷ θμη, ἀλλὰ τὸ ηθλ, κατὰ τὴν προειρημένην λδ': ἴσον ἐςὶ τῷ θκλ, ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν ἴσων θημ, θκξ, ἀπὸ τῶν θηλ, θκλ, ἐγκαταλείπονται ἴσα κατὰ τὸ β': ἀξίωμα τὰ θμλ, θξλ, τρίγωνα. Ἐπεὶ δὲ τὸ θμλ, ἴσον ἐςὶν ἑκα-

ἑκατέρῳ τῶν θηπ, θπμ, καὶ τὴν α΄: τοῦ ς΄: τοῦ αὐτοῦ, δῆλον ὅτι καὶ τὸ θξλ, ἴσον ἐστὶ
τῷ θηπ, ἢ θπμ, καὶ ἑπομένως συναμφότερα τὰ θηπ, θπμ, τουτέστι τὸ θημ,
τρίγωνον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς θμλ, θξλ, ταὐτὸν δ᾽ ἐστὶν εἰπεῖν τῷ
θμλξ, τραπεζίῳ, ἀλλὰ τὸ θημ, δέδεικται ἴσον καὶ τῷ θξκ, τὰ τρία ἄρα
θημ, θμλξ, θξκ, ἴσα ἐστὶν, ὥστε τὸ δοθὲν κθκλ, διῄρηται εἰς μέρη ἴ-
σα τρία καὶ τὸ προσαχθέν.

Πρότασις ΚΕ΄:

Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς ὁσαδηποτοῦν διελεῖν μέρη ἀπὸ τῆς δοθείσης γωνίας.

Ἔστω διελεῖν τὸ θκλμ, εἰς μέρη, δὸς εἰπεῖν ἑπτὰ ἴσα ἀπὸ τῆς κ, γω-
νίας. Διαιρεθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν θμ, λμ, εἰς μέρη ἑπτὰ ἴσα τὰ θν, νξ,
ξο, καὶ λοιπὰ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν ἀνὰ δύο σημεῖα αἱ κξ, κπ, κσ, κυ,
κχ, κω, καὶ ἔσται τὸ προσαχθέν. Ἐπιζεύχθω γὰρ λευκὴ ἡ κμ, γραμμὴ, καὶ
διαιρεθήσεται τὸ θκλμ, δι᾽ αὐτῆς εἰς δύο ἴσα τὰ θκμ, θλμ, τρίγωνα καὶ
τὴν λδ΄: τοῦ α: τοῦ Στοιχ: . Ἐπεὶ δ᾽ ἑκατέρα τῶν θμ, λμ, διῄρηται εἰς μέ-
ρη ἑπτὰ ἴσα ἀλλήλοις, δῆλον ὅτι ὃ μέρος ἐστὶ
τὸ θκξ, τρίγωνον τοῦ θκμ, τὸ αὐτὸ ἐστὶ μέ-
ρος καὶ τὸ κλυ, τοῦ κλμ, καὶ ἑπομένως ἴσον
τῷ θκξ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ κυ, κτ,
ἑκάτερον μὲν τῶν κθν, κνξ, ζ΄: ἔσται μέρος
τοῦ κθμ, ἑκάτερον δὲ τῶν κλτ, κτυ, ζ΄: ἔ-
σται μέρος τοῦ κλμ, ὥσπερ δὲ τὸ ὅλον ἴσον ἐ-
στὶ τῷ ὅλῳ, οὕτω καὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῖς αὐτοῖς
μέρεσιν ἴσα εἰσὶν, ἀλλὰ τῷ μὲν κθξ, ἴσον
ἐστὶν ἑκάτερον τῶν κξπ, κπσ, τῷ δὲ κλυ, ἑ-
κάτερον τῶν κυχ, κχω, ἄρα ἕκαστον τῶν κθξ, κξπ, κπσ, ἴσον ἐστὶν ἑκά-
στῳ τῶν κλυ, κυχ, κχω. Ὅτι δὲ καὶ τὸ κσμω, τραπέζιον ἴσον ἐστὶν ἑκάστῳ
τῶν εἰρημένων, δῆλον. τὸ μὲν γὰρ κσμ, ἴσον ἐστὶ τῷ κρσ, ἥμισυ δὲ τοῦ κπσ,
τὸ δὲ κωμ, ἴσον μὲν τῷ κψω, ἥμισυ δὲ τοῦ κχω, ἀλλὰ τὸ κπσ, ἴσον δέ-
δεικται τῷ κχω, ἄρα καὶ τὸ κσμ, ἴσον ἐστὶ τῷ κωμ, καὶ ἑπομένως τὸ κσμω,
ἴσον ἐστὶ τῷ τε κπσ, καὶ κχω, χωρίς. ἑκάτερον γὰρ τῶν κπσ, κχω, δέ-
δεικται ἴσον τοῖς λοιποῖς, τὰ πάντα ἄρα θκξ, κξπ, καὶ λοιπὰ μέρη ἴσα
εἰσὶν, ὥστε τὸ θκλμ, δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς μέρη ἴσα ἑπτὰ διῄρη-
ται καὶ τὸ προσαχθέν.

Geom. Lib. 8. Fig. 18.