γα. καὶ εὑρεθήτω α': τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αγδβ, τετραπλεύρου εὐθυγράμμου, εἶτα εὑρεθήτω ἑκάτερον τῶν βθδ, ακγ, καὶ συναφθήτωσαν εἰς ἕν, καὶ τὸ γενόμενον ἀφαιρείσθω ἀπὸ τοῦ αγδβ, τετραπλεύρου, καὶ ἐναπολειφθήσεται τὸ βθδγκαβ. Τελευταῖον εὑρεθήτω καὶ τῶν αζβ, γδη, ἑκάτερον, καὶ συναφθήτωσαν εἰς ἕν, τὸ δὲ γενόμενον προστεθήτω τῷ βθδγκαβ, καὶ τὸ ὅλον ἴσον ἔσται τῷ δοθέντι αγδβ, κυρτοκοίλῳ σχήματι. Τοῦτον τὸν τρόπον ἔξεστί σοι εὑρίσκειν τὸ ἐμβαδὸν καὶ παντὸς ἄλλου σχήματος ἐκ διαφόρων τοῦ κύκλου συγκειμένου τμημάτων.

Καταγραφὴ Ἐλλείψεως, ἤτοι σχήματος ᾠοειδοῦς.

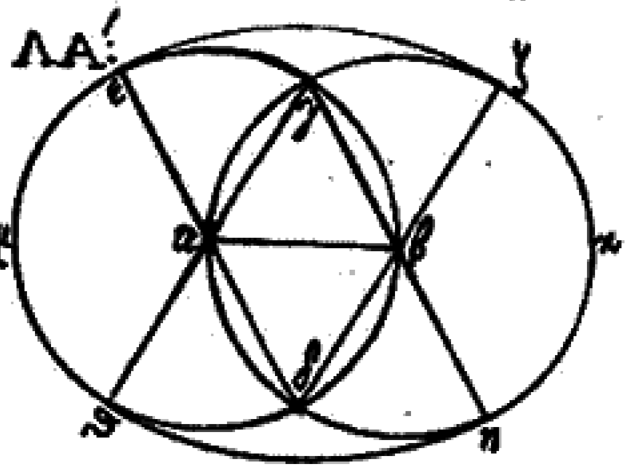
Πρότασις ΛΑ'.

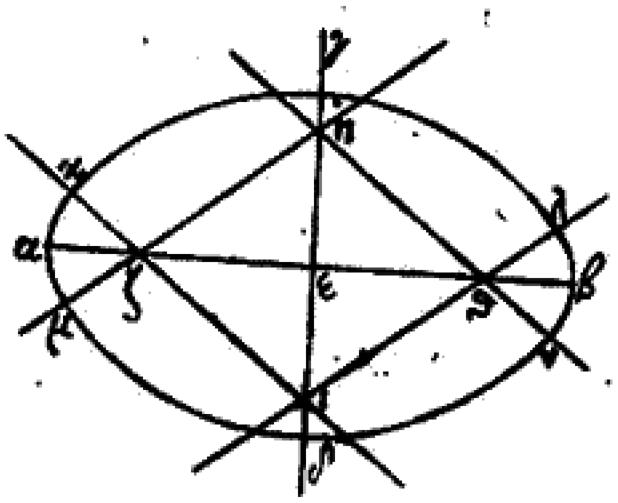
Ὁσαχῶς ἡ Ἔλλειψις καταγράφεσθαι δύναται.

Ἡ τῆς Ἐλλείψεως καταγραφὴ πολυτρόπως δύναται γενέσθαι. Ἢ γὰρ ἄμφω αἱ διάμετροι τῆς ζητουμένης δίδονται ἐλλείψεως, ἢ ἡ μία μόνη, ἢ οὐδετέρα. Ἔστω δὴ α': καταγράψαι ἔλλειψιν μηδετέρας διδομένης τῶν διαμέτρων. κείσθω ἡ τυχοῦσα αβ, πεπερασμένη εὐθεῖα, καὶ κέντροις μὲν τοῖς α, καὶ β, γραφήτωσαν δύο κύκλοι οἱ αζκη, βεμθ, τεμνόμενοι κατὰ τὰ γ, καὶ δ, σημεῖα, διὰ δὲ τῶν βγ, βδ, αγ, αδ, σημείων ἀχθήτωσαν αἱ γβη, δβζ, γαθ, δαε, εὐθεῖαι. εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, ἢ δζ, γραφήτω τόξον τὸ εζ, κέντρῳ δὲ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ γη, ἢ γθ, γραφήτω ἕτερον τόξον τὸ ηθ, καὶ τὸ εζηθ, σχῆμα Ἔλλειψις, εἴτουν ᾠοειδὲς ἔσται.

Geom. Lib. 7. Fig. 30.

ΛΑ'.





Ἄλλως. Συνεστάθω ἐπὶ τῆς αβ, τρίγωνα ἰσόπλευρα ἑκατέρωθεν τὰ αβγ, αβδ, καὶ ἀχθήτωσαν αἱ γα, γβ, δα, δβ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως. Εἶτα κέντροις μὲν τοῖς γ, καὶ δ, διαστήματι δὲ ὃ βούλει, γραφήτωσαν ἑκατέρωθεν τὰ εζ, ηθ, τόξα ὑπὸ τῶν δε, δζ, γη, γθ, ἐμπεριλαμβανόμενα εὐθειῶν. Κέντροις δ' αὖθις τοῖς α, καὶ β, διαστήματι δὲ ἴσῳ τῷ αε, ἢ αθ, ἢ βζ, ἢ βη, γραφήτωσαν τὰ ζκη, εμθ, τόξα, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν.

Ἔστω β': καταγράψαι ἔλλειψιν διδομένης μιᾶς τῶν αὐτῆς διαμέτρων. Δοθήτω δὴ ἡ αβ, καὶ τμηθήτω αὕτη δίχα κατὰ τὸ ε, δι' οὗ ἤχθω ἡ γδ, τέμνουσα τὴν αβ,

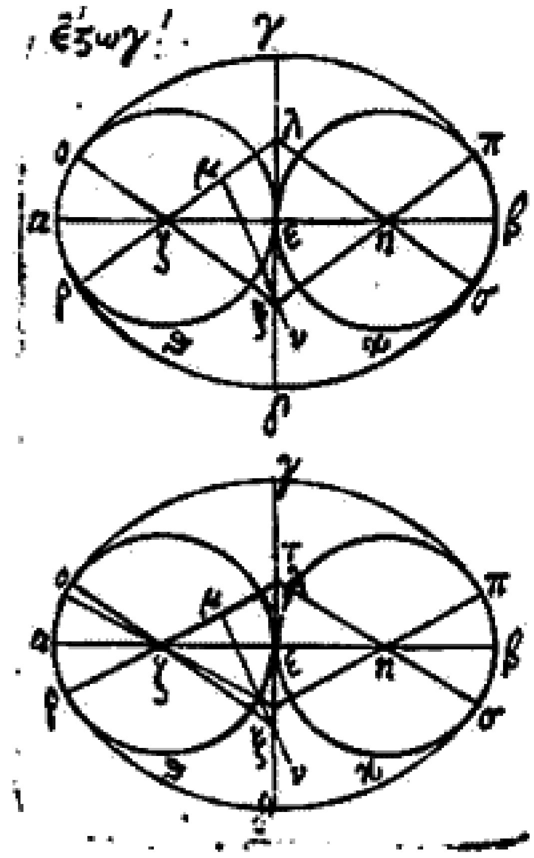
πρὸς

πρὸς ὀρθὰς, καὶ εἰλήφθω τὰ εζ, εθ, διαστήματα ἴσα ὡς ἔτυχε. Κἂν μὲν ἡ δοθεῖσα αβ, ἀντὶ τῆς μεγίστης ὑποτίθεται διαμέτρου, εἰλήφθω καὶ τὰ εη, ει, ἴσα διαστήματα, ὥστε τὸ ὅλον ηι, ἔλαττον εἶναι τοῦ ὅλου ζθ. εἰ δὲ ἀντὶ τῆς ἐλαχίστης, μεῖζον, ἀπὸ δὲ τῶν η, καὶ ι, σημείων ἐξαχθήτωσαν εὐθεῖαι διὰ τῶν ζ, καὶ θ, διερχόμεναι αἱ ηζμ, ηθν, ιζκ, ιθλ. εἶτα κέντροις μὲν τοῖς ζ, καὶ θ, διαστήματι δὲ τῷ ζα, ἢ θβ, γραφήτωσαν τόξα τὰ καμ, λβν, κέντροις δὲ τοῖς η, καὶ ι, καὶ διαστήματι τῷ ημ, ἢ ην, ἢ ικ, ἢ ιλ, γραφήτωσαν τὰ κλ, μν, τόξα, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν.

Ἰστέον δ' ὅτι κατὰ τὸν β': τουτονὶ τρόπον διαφόρως ἡ Ἔλλειψις σχηματίζεται, ἐπεὶ καὶ τὰ εζ, εθ, ελ, διαστήματα διαφόρως δύναται λαμβάνεσθαι.

Ἔστω γ': καταγράψαι Ἔλλειψιν δεδομένων ἀμφοτέρων τῶν διαμέτρων. Κείσθωσαν δὴ αἱ δοθεῖσαι αβ, γδ, διάμετροι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τεμνόμεναι κατὰ τὸ ε, καὶ τμηθήτω ἑκατέρα τῶν αε, εβ, δίχα κατὰ τὰ ζ, καὶ η, καὶ κέντροις μὲν τοῖς ζ, η, διαστήματι δὲ τῷ ζε, ἢ ηε, γραφήτωσαν οἱ αθε, εκβ, κύκλοι.

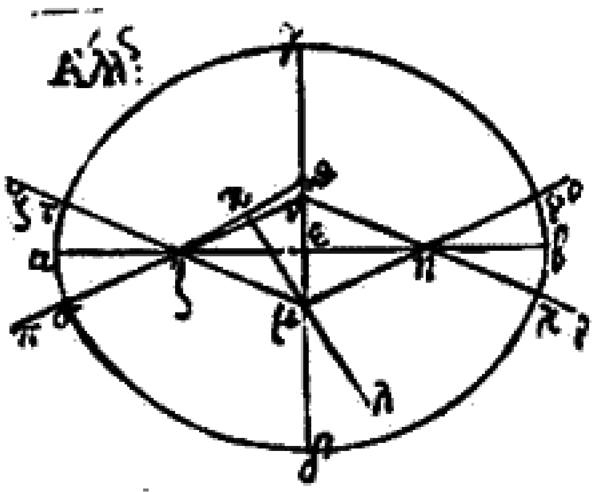
Geom. Lib. 7. Fig. 31.



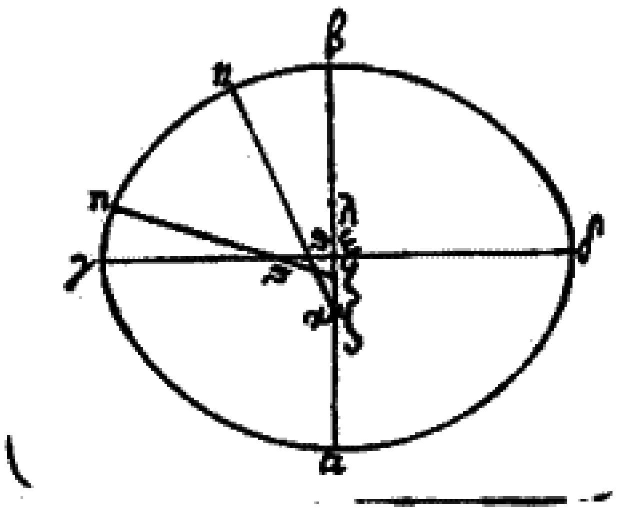
Εἶτα εἰλήφθω ἡ γλ, ἴση τῇ ζα, ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ αθε, ἢ τῇ ηβ, ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ εκβ, ἴσαι γὰρ αἱ ζα, ηβ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζλ, ταύτης δὲ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ μ, συνεστάθω κάθετος ἐπ' αὐτῆς ἡ μν, τέμνουσα τὴν λδ, κατὰ τὸ ξ, κἂν μὲν τὸ ξ, ἀφίσταται τοῦ ε, ὅσον τὸ λ, ὥστε τὸ εξ, διάστημα ἴσον εἶναι τῷ ελ, κέντροις μὲν τοῖς λ, ξ, διαστήματι δὲ τῷ ξγ, ἢ λδ, γραφήτωσαν τὰ ογπ, ρδσ, τόξα, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ ζ, καὶ ξ, ἡ οζξ, καὶ ἐπεὶ ἡ ζλ, τέτμηται δίχα, πάντως γε αἱ ζμ, μλ, ἴσαι εἰσίν, ἔστι δὲ καὶ ἡ μξ, κοινή, καὶ ἡ ὑπὸ ζμξ, γωνία τῇ ὑπὸ λμξ, ἴση, πάντως γε κατὰ τὴν δ': τοῦ α': τῶν Στοιχ: ἡ ξζ, ἴση ἐστὶ τῇ ξλ, εἴληπται δὲ καὶ ἡ λγ, ἴση τῇ ζα, ἴσῃ οὔσῃ τῇ ζο. ἄρα ἡ ξγ, ἴση ἐστὶ τῇ ξο. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ ξ, διαστήματι δὲ τῷ ξγ, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ ο. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται διέρχεσθαι καὶ διὰ τοῦ π, τῆς ξηπ, ἐπιζευχθείσης. ἠγμένων δὲ καὶ τῶν λζρ, λησ, δειχθήσεται ὁμοίως καὶ τὸ ρδσ, τόξον, κέντρῳ μὲν τῷ λ, διαστήματι δὲ τῷ λδ, γραφόμενον, διέρχεσθαι καὶ διὰ τῶν ρ, καὶ σ. Εἰ δέ γε τὰ εξ, ελ, διαστήματα, ὡς ἐπὶ τοῦ β': σχήματος ἄνισα ᾖ, εἰλήφθω τὸ ετ, ἴσον τῷ εξ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ξ, διαστήματι δὲ τῷ ξγ, γραφήτω τὸ ογπ, τόξον, κέντρῳ δὲ τῷ τ, καὶ διαστήματι τῷ τδ, γραφήτω τὸ ρδσ, καὶ γενήσεται τὸ ἐπιταχθέν. ὁ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ δευτέρῳ.

Ἄλλως. Δεδόσθωσαν αἱ αβ, γδ, διάμετροι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν πρώτων, ἀλλήλας τεμνόμεναι, καὶ ζητείσθω γράψαι περὶ αὐτὰς ἔλλειψιν. Τμηθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν αε, βε, δίχα κατὰ τὰ ζ, καὶ η, καὶ εἰλήφθω ἴση τῇ αζ, ἡ γθ. Ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς ζθ, καὶ δίχα κατὰ τὸ κ, τμηθείσης, συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς πρὸς τῷ κ, σημείῳ κάθετος ἡ κλ, τέμνουσα τὴν εδ, κατὰ τὸ μ, καὶ εἰλήφθω τὸ εν, διάστημα ἴσον τῷ εμ. ἀπὸ δὲ τῶν ν, καὶ μ, σημείων ἤχθωσαν διὰ τῶν ζ, καὶ η, αἱ μζξ, μηο, νζπ, νηρ. εἶτα κέντροις μὲν τοῖς ζ, καὶ η, διαστήματι δὲ τῷ ζα, ἢ ηβ, γραφήτωσαν τὰ σατ, φβχ, τόξα, κέντροις δὲ τοῖς μ, καὶ ν, καὶ διαστήματι τῷ μγ, ἢ νδ, ἴσα γὰρ, γραφήτωσαν τὰ τγφ, χδσ, τόξα, καὶ τὸ αγβδ, γραφόμενον σχῆμα ἔσται τὸ ζητούμενον. ἡ δεῖξις ἡ αὐτή.

Geom. Lib. 7. Fig. 32.



Ἰστέον δ' ὅτι ἔξεστί σοι λαβεῖν καὶ μεῖζον τοῦ ἡμίσεως τῆς αε, ἡμιδιαμέτρου, καὶ ἔλαττον, τὰ λοιπὰ ποιοῦντι ὡς προηρμήνευται. Δεῖ δὲ ἀεὶ ἀφαιρεῖσθαι ἀπὸ τῆς γε, ἐλάττονος ἡμιδιαμέτρου ἴσον διάστημα τῷ λαμβανομένῳ ἀπὸ τῆς μείζονος, τὸ γθ, δηλ: τῷ αζ.



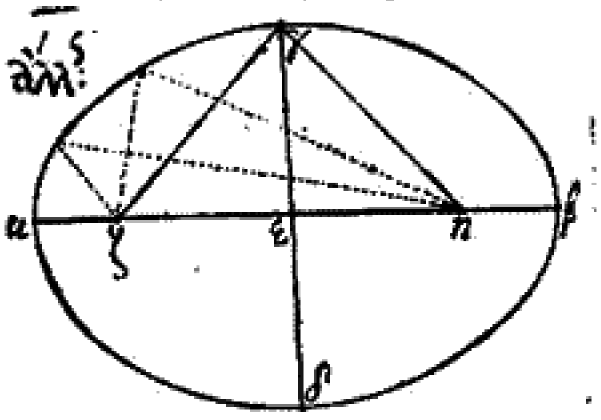
Ἄλλως. Ἔστωσαν αἱ αβ, γδ, διάμετροι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τεμνόμεναι κατὰ τὸ ε, μεγίστη μὲν ἡ γδ, ἐλαχίστη δὲ ἡ αβ, περὶ ἃς ζητεῖται ἔλλειψις καταγράψαι. Εἰλήφθω δὴ κανὼν ὁ ζη, ἴσος τῇ εγ, μεγίστῃ ἡμιδιαμέτρῳ, καὶ ἀφῃρήσθω τούτου τὸ ηθ, μέρος ἴσον τῇ εβ, ἐλαχίστῃ ἡμιδιαμέτρῳ. εἶτα ἐφαρμοσθήτω ὁ ζη, κανὼν ἐπὶ τῆς αβ, ὥστε τὸ η, πέρας αὐτοῦ συμπεσεῖν τῷ β, συμπεσεῖται γὰρ δήπουθεν καὶ τὸ μὲν θ, τῷ ε, τὸ δὲ ζ, τῷ κ, πρὸς καταγραφὴν δὲ τοῦ βγ, ἐλλειπτικοῦ τεταρτημορίου κινηθήτω ὁ κανὼν ζη, ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὸ γ, ὥστε τὸ μὲν ζ, σημεῖον αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κ, ἐπὶ τὸ ε, φερόμενον ἅπτεσθαι ἀεὶ τοῦ κε, τὸ δὲ θ, ἀπὸ τοῦ ε, ἐπὶ τὸ γ, κινούμενον μὴ ἐκπίπτειν τῆς εγ, καὶ καταγραφήσεται τὸ βγ, τεταρτημόριον. εἰς καταγραφὴν δὲ τοῦ βδ, κινηθήτω ὁ αὐτὸς κανὼν ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὸ δ, τὸν αὐτὸν τρόπον, ὥστε τὸ μὲν ζ, σημεῖον τοῦ κε, ἀεὶ ἅπτεσθαι, τὸ δὲ θ, μὴ ἐκπίπτειν τῆς εδ, καὶ πληρωθήσεται τὸ γβδ, τόξον. Τὰ αὐτὰ γενέσθω καὶ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου μέρους, ἐφαρμοττομένου τοῦ κανόνος ἐπὶ τῆς αβ, ὥστε τὸ η, συμπίπτειν τῷ α, τὸ δὲ θ, τῷ ε, καὶ τὸ ζ, τῷ λ. Καὶ πρὸς μὲν καταγραφὴν τοῦ αγ, κινηθήτω ὁ κανὼν ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ γ, ὥστε τὸ μὲν ζ, ἀεὶ τοῦ λε, ἅπτεσθαι μέρους, τὸ δὲ θ, μὴ ἐκπίπτειν τῆς εγ. Πρὸς καταγραφὴν δὲ τοῦ

αδ,

αδ, κινηθήτω ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ δ, ὥστε τὸ μὲν ζ, ἅπτεσθαι ἀεὶ τοῦ κλ, τὸ δὲ μὴ ἐκπίπτειν τῆς εδ, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. ἡ μὲν δὲ γεωμετρικῶς. ἡ δεῖξις κατεστράφη ἐν τῷ περὶ κατασκευῆς καὶ χρήσεως Ἀστρολαβίου.

Ἄλλως. Ἔστω μεγίστη μὲν τῆς ζητουμένης ἐλλείψεως διάμετρος ἡ αβ, ἐλαχίστη δὲ ἡ γδ, καὶ κείσθωσαν, ὥστε δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεσθαι ἀλλήλας. καὶ εἰλήφθω τὸ αε, διάστημα τῆς μεγίστης ἡμιδιαμέτρου, καὶ ἐφαρμοσθήτω ἀπὸ τοῦ γ, ἢ δ, σημείου ἐπὶ τῆς αβ, διαμέτρου ἑκατέρωθεν κατὰ τὰ ζ, καὶ η,

Geom. Lib. 7. Fig. 33.



σημεῖα. τοῖς δὲ ζ καὶ η, σημείοις ἐμπαγήτωσαν πρὸς ὀρθὰς ἧλοι ὀξεῖς, καὶ δεσμευθέντος μίτῳ τοῦ ἐν τῷ ζ, ἥλου, ἢ ἑτέρῳ τινὶ δυναμένῳ ἐκτείνεσθαι καὶ συστέλλεσθαι, ἐκτεινθήτω ὁ μίτος ἄχρι τοῦ γ, κἀκεῖ στηριχθεὶς, ἐπεκταθήτω αὖθις ἄχρι τοῦ η, καὶ περιειλίχθω τῷ αὐτῷ μίτῳ ὁ κατὰ τὸ η, ἧλος, ὥστε συστῆναι τὸ ζγη, τρίγωνον, οὗ πλευραὶ μὲν αἱ ζγ, γη, αἱ διὰ τοῦ μίτου παριστανόμεναι, βάσις δὲ ἡ ζη, εὐθεῖα. Τούτων δὲ γενομένων, λαβὼν γραφεῖον καὶ θεὶς τοῦτο ἐπὶ τοῦ γ, ἔνδον τοῦ μίτου, μετακόμισον αὐτὸ ἐπὶ τὸ α, μηδενὸς γενομένου σημείου. εἶτα ἀρξάμενος ἀπὸ τοῦ α, μετάφερε αὐτὸ ὁμαλῶς ἐπὶ τὸ β, τῆς αὐτῆς σωζομένης ἐκτάσεως, καὶ γραφήσεταί σοι τὸ αγβ, τόξον. τῶν δ' αὐτῶν γενομένων κἀπὶ τοῦ ἑτέρου μέρους, γραφήσεται καὶ τὸ αδβ, τόξον, καὶ πληρωθήσεται τὸ αγβδ, ᾠοειδὲς σχῆμα, ὡς διὰ τόρνου, ἔνθα δὲ μὴ οἷόν τε ἥλους ἐμπαγῆναι, ληφθήτω κανὼν ἴσος τῇ αβ, μεγίστῃ διαμέτρῳ, ἐκ ξύλου, ἢ ἄλλης τινὸς ὕλης κατειργασμένος, καὶ ἐφαρμοσθήτω ἐπιδεξίως ἐπὶ τῆς αβ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω, ὡς προειρημένα ἐστί.

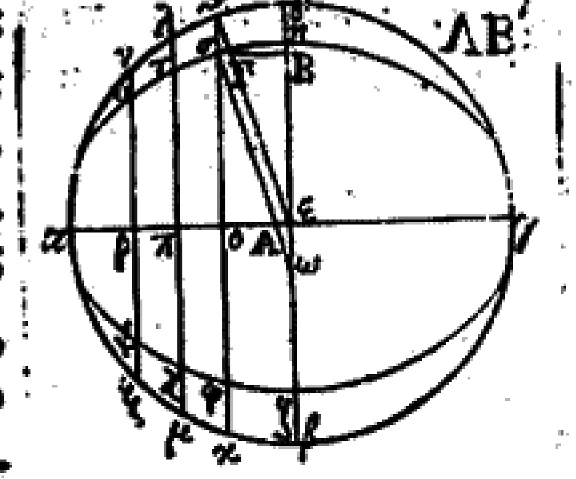
Πρότασις ΛΒ΄.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ ἔλλειψις ἐγγραφῇ, καὶ ἐπὶ τῆς μείζονος διαμέτρου κάθετοι ὁποσαιοῦν συσταθῶσι τῆς τοῦ κύκλου μὴ ἐκπίπτουσαι περιφερείας, ἀλλ' ὑπ' αὐτῆς ἑκατέρωθεν περατούμεναι, τεμεῖ ἡ ἔλλειψις ἑκατέρωθεν πάσας τὰς εὐθείας κατὰ τὸν λόγον τῆς μείζονος πρὸς τὴν ἐλάττονα αὐτῆς ἡμιδιάμετρον.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγδ, οὗ κέντρον τὸ ε, καὶ γεγράφθω εἰς αὐτὸν ἔλλειψις ἡ αζγη, ἧς μείζων μὲν διάμετρος ἡ αγ, ἐλάττων δὲ ἡ ζη. Συσταθήτωσαν δὲ ἐπὶ τῆς αγ, μείζονος διαμέτρου κάθετοι περατούμεναι ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας αἱ θκ, λμ, νξ, τέμνουσαι μὲν τὴν αγ, κατὰ τὰ ο, π, ρ, τεμνόμεναι δὲ ὑπὸ τῆς ἐλλείψεως κατὰ τὰ σ τ υ, φ χ ψ. Λέγω δὴ τὰς ο θ, π λ, ρ ν, ο κ, καὶ π μ, ρ ξ, ἀναλόγως τέμνεσθαι ταῖς α ε, ε η, ἡμιδιαμέτροις, ὥστε εἶναι τὴν ο θ, πρὸς τὴν ο σ, ὡς ἡ α ε, πρὸς τὴν ε η, ὁμοίως δὲ καὶ τὴν π λ, πρὸς τὴν π τ, καὶ τὴν ρ ν, πρὸς τὴν ρ υ, καὶ τὰς λοιπὰς πρὸς τὰς λοιπὰς τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον. Ἤχθω γὰρ ἡ σ ω, ὥστε τὴν σ Λ, ἴσην εἶναι τῇ ε η, ἐλάττονι ἡμιδιαμέτρῳ τῆς α ζ γ η, ἐλλείψεως, τὴν δὲ ὅλην σ ω, ἴσην τῇ α ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θ ε, καὶ ἐπεὶ ἡ σ ω, εἴληπται ἴση τῇ α ε, μείζονι ἡμιδιαμέτρῳ, ταύτῃ δὲ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ε θ,

Geom: Lib. 7. Fig. 34.

ΛΒ'



ἄρα ἡ ε θ, ἴση ἐστὶ τῇ σ ω, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ θ σ, ε ω, παράλληλοι, ἄρα τὸ θ σ ω ε, παραλληλόγραμμόν ἐστιν, ἡ γὰρ ὑπὸ σ θ ε, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἀπεναντίον ὑπὸ ε ω σ, διὰ τὸ ἑκατέραν ἴσην εἶναι τῇ ὑπὸ Λ σ ο, κατὰ τὴν κθ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε ἡ σ α, παράλληλός ἐστι τῇ θ ε, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ': τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ ε θ, πρὸς τὴν σ Λ, ἡ ο θ, πρὸς τὴν ο σ, ἀλλ' ἡ μὲν ε θ, ἴση ἐστὶ τῇ α ε, μείζονι ἡμιδιαμέτρῳ, ἡ δὲ σ Λ, τῇ ε η, ἐλάττονι, ἄρα ὡς ἡ α ε, πρὸς τὴν ε η, ἡ ο θ, πρὸς τὴν ο σ. ὁμοίως δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαί. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ ἔλλειψις ἐγγραφῇ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΓ':

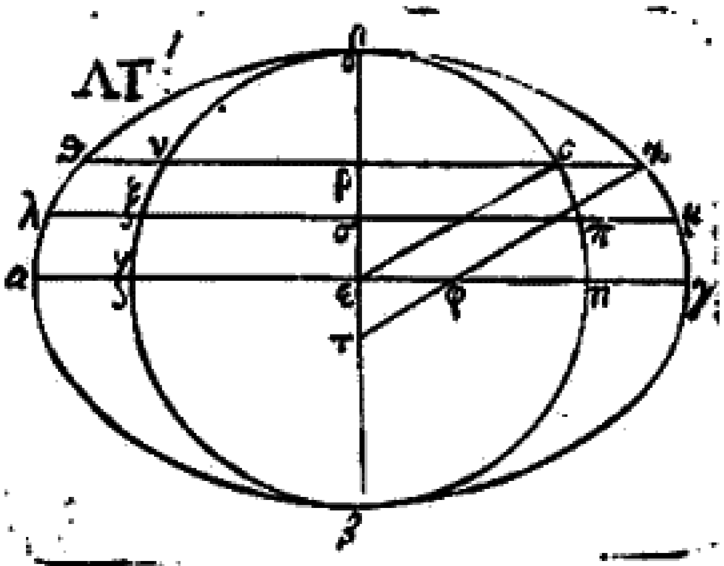
Ἐὰν περὶ τὴν ἐλάττονα διάμετρον τῆς ἐλλείψεως κύκλος περιγραφῇ, τῇ δὲ μείζονι τῆς ἐλλείψεως διαμέτρῳ παράλληλοι ὁποσαιοῦν ἀχθῶσι, περατούμεναι ὑπὸ τῆς περιφερείας τῆς ἐλλείψεως, τμηθήσεται ἑκάστη τῶν παραλλήλων ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τῷ λόγῳ τῆς ἐλάττονος διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὴν μείζονα.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ α β γ δ, ἧς κέντρον μὲν τὸ ε, μείζων δὲ διάμετρος ἡ α γ, καὶ ἐλάττων ἡ δ β, καὶ γραφήτω περὶ τὴν δ β, ἐλάττονα διάμετρον κύκλος ὁ δ ζ β η, εἶτα παραλλήλως τῇ α γ, ἀχθήτωσαν αἱ θ κ, λ μ, εὐθεῖαι, τεμνόμεναι ὑπὸ μὲν τῆς τοῦ δ ζ β η, κύκλου περιφερείας κατὰ τὰ ν ξ ο π, σημεῖα, ὑπὸ δὲ τῆς δ β, ἐλάττονος διαμέτρου κατὰ τὰ ρ, καὶ σ. Λέγω ὅτι ὡς ἡ ε γ, πρὸς τὴν ε η, ἔστι καὶ ἡ ρ κ, πρὸς τὴν ρ ο. Ἤχθω γὰρ ἡ κ τ, ὥστε τὴν ὅλην μὲν κ τ, ἴσην εἶναι τῇ ε γ, μείζονι ἡμιδιαμέτρῳ, τὴν δὲ κ φ, τῇ ε η, ἐλάττονι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ε ο, καὶ ἐπεὶ ἡ κ φ, εἴληπται ἴση τῇ ε η, τῇ δὲ ε η, ἴση ἐστὶν ἡ ε ο, ἄρα αἱ κ φ, ε ο, ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ αἱ κ ο, ε φ, παράλληλοι, ἴσαι εἰσίν, ὡς δειχθήσεται, πάντως γε αἱ κ ο, ε φ, παράλληλοί εἰσιν, ὥστε κατὰ τὴν δ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχ: ἐπεὶ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ ρ τ κ, τριγώνου τὴν κ τ, ἦκται παράλληλος ἡ

ε φ,

ε ο, πάντως γε ὡς ἡ τ κ, πρὸς τὴν ε ο, ἔχει καὶ ἡ ρ κ, πρὸς τὴν ρ ο, καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ ε ο, πρὸς τὴν τ κ, ἡ ρ ο, πρὸς τὴν ρ κ, ἀλλ' ἡ μὲν ε ο, ἴση ἐστὶ τῇ ε η, ἐλάττονι ἡμιδιαμέτρῳ τῆς α β γ δ, ἐλλείψεως, ἡ δὲ τ κ, τῇ ε γ, μείζονι, ἄρα ὡς ἡ ἐλάττων ἡμιδιάμετρος τῆς α β γ δ, ἐλλείψεως πρὸς τὴν μείζονα τῆς αὐτῆς, ἡ ρ ο πρὸς τὴν ρ κ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ρ ν, τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὴν ρ θ, ὥστε ὅλη ἡ ν ο, πρὸς ὅλην τὴν θ κ, ἔχει ὡς ἡ ζ η, ἐλάττων διάμετρος πρὸς τὴν α γ, μείζονα· τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ ἡ ξ π, ἔχειν πρὸς τὴν λ μ, ὡς ἡ ζ η, ἐλάττων διάμετρος πρὸς τὴν α γ, μείζονα.

Geom. Lb. 7. Fig. 35.



Ὅτι δὲ ἡ ε φ, ἴση ἐστὶ τῇ ο κ, δῆλον. παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ε φ κ ο, διὰ τὸ ἔχειν τὴν ὑπὸ φ ε ο, γωνίαν ἴσην τῇ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ο κ φ. ἑκατέρα γὰρ τῶν ὑπὸ φ ε ο, ο κ φ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κ φ γ, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ρ κ, ε γ.

Πρότασις ΛΔ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ ἔλλειψις ἐγγραφῇ, καὶ ἐπὶ τῆς μείζονος ἡμιδιαμέτρου τῆς ἐλλείψεως κάθετος συσταθῇ τέμνουσα μὲν τὴν ἔλλειψιν, περατουμένη δὲ ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἀπὸ δὲ τῆς κοινῆς τομῆς ἐλλείψεώς τε καὶ καθέτου παράλληλος τῇ μείζονι διαμέτρῳ εὐθεῖα ἀχθῇ τέμνουσα τὴν ἐλάττονα πρὸς ὀρθὰς, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ τῆς καθέτου πέρας, τμηθήσεται ἡ παράλληλος τῷ λόγῳ τῆς μείζονος διαμέτρου πρὸς τὴν ἐλάττω.

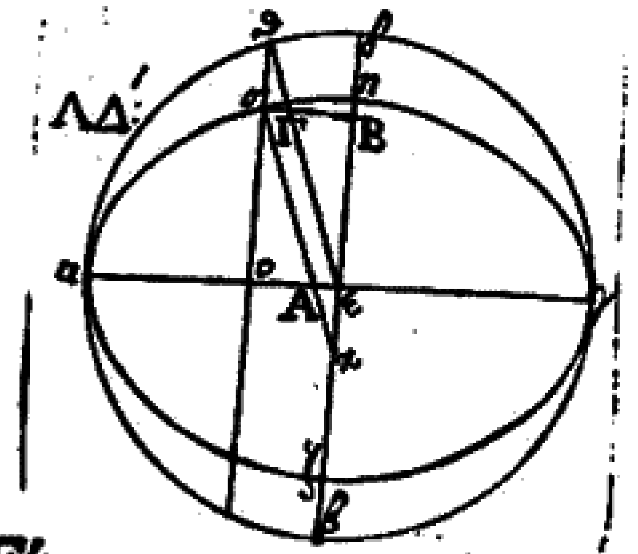
Ἔστω εἰς τὸν α β γ δ, κύκλον ἐγγεγραμμένη ἔλλειψις ἡ α ζ γ η, ἧς μείζων μὲν ἡμιδιάμετρος ἡ α ε, ἐλάττων δὲ ἡ ε η· καὶ συνιστάσθω ἐπὶ τῆς α ε, κάθετος ἡ τυχοῦσα ο θ, ἀπὸ δὲ τοῦ σ, κοινῆς τομῆς αὐτῆς τε καὶ τοῦ α η, περατουμένης τῆς ἐλλείψεως ἀχθήτω παράλληλος τῇ α ε, ἡ σ Β, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ε θ, τέμνουσα τὴν σ Β, κατὰ τὸ Γ. Λέγω τὴν σ Β, τέμνεσθαι κατὰ τὸ Γ, τῷ τῆς μείζονος α ε, παρὰ τὴν ἐλάττονα ε η, λόγῳ, ὥστε εἶναι ὡς ἡ α ε, πρὸς τὴν ε η, τὴν σ Β, πρὸς τὴν Β Γ. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ σ, παράλληλος τῇ θ ε, ἡ σ Α, καὶ ἐπεὶ ἡ σ Β, παράλληλός ἐστι τῇ ο ε, πάντως γε τὸ σ Α ε Γ, παραλληλόγραμμόν ἐστι, καὶ κατὰ τὴν λδ': τοῦ α': τοῦ Στοιχ· ἡ σ Γ, ἴση ἐστὶ τῇ Α ε, ἔστι δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ ἡ σ Β, ἴση τῇ ο ε, ἄρα κατὰ τὸ γ': ἀξίωμα ἡ Γ Β, ἴση ἐστὶ τῇ ο Α. Αὖθις ἐπεὶ ἡ σ Α,

πα-

παράλληλός ἐστι τῇ θε, πάντως γε καὶ τὴν β': τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ ὡς ἡ θσ, πρὸς σο, ἡ εΛ, πρὸς τὴν Λο, καὶ συνθέσει ὡς ἡ θο, πρὸς τὴν σο, ἡ εο, πρὸς τὴν Λο, ἀλλ' ὡς ἡ θο, πρὸς τὴν σο, ἔστι καὶ ἡ θε, πρὸς τὴν Γε, ἄρα ὡς ἡ θε, πρὸς τὴν Γε, ἡ εο, πρὸς τὴν Λο, καὶ ἡ μὲν θε, ἴση τῇ αε, ἡ δὲ Γε, τῇ εη, κατὰ τὴν ἀναστροφὴν, ὥσπερ καὶ ἡ οε, ἴση ἐστὶ τῇ σΒ, καὶ ἡ Λο, τῇ ΓΒ, ἄρα ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εη, ἡ σΒ, πρὸς ΓΒ.

Geom. Lib. 7. Fig. 36.

ΛΔ'



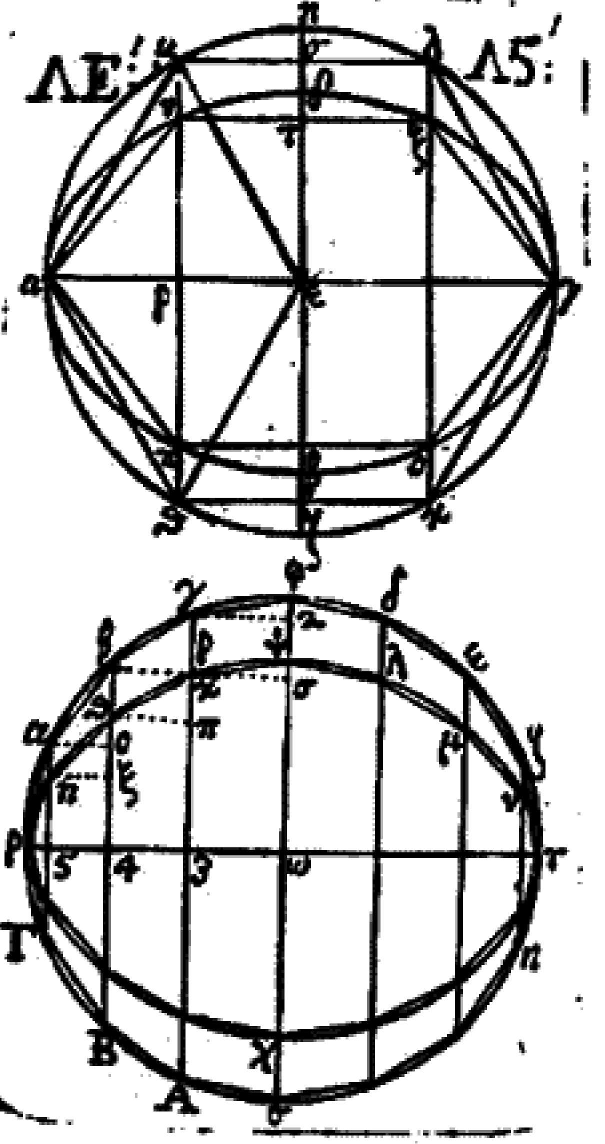
Πρότασις ΛΕ'.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν ἔλλειψιν πολύγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ αβγδ, ἧς μείζων μὲν διάμετρος ἡ αγ, ἐλάττων δὲ ἡ βδ, καὶ κέντρον τὸ ε. καὶ ζητείσθω ἐγγραφῆναι εἰς αὐτὴν ἑξάγωνον. Γραφήτω δὴ περὶ τὴν αγ, μείζονα διάμετρον κύκλος ὁ αζγη, καὶ ἐγγραφήτω εἰς αὐτὸν ἑξάγωνον τὸ αθκγλμ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ λκ, μθ, ὑφ' ὧν δηλονότι τμηθήσεται ἡ δοθεῖσα αβγδ, ἔλλειψις κατὰ τὰ νξοπ. εἶτα ἐπιζεύχθωσαν αἱ αν, νξ, ξγ, γο, οπ, πα, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. ὅτι μὲν γὰρ τὸ απογξνα πολύγωνον, ἑξάγωνόν ἐστι δῆλον. Ἰσοπληθεῖς γὰρ ἔχει τὰς πλευρὰς ταῖς τοῦ αθκγλμ. ὅτι δὲ καὶ ἐγγεγραμμένον, καὶ τοῦτο σαφές. ἅπτεται γὰρ ἑκάστη τῶν αὐτοῦ γωνιῶν τῆς περιφερείας τῆς δοθείσης ἐλλείψεως, ὅπερ ἴδιον τοῦ ἐγγραφομένου. Τὸν αὐτὸν τρόπον δύναται καὶ ἄλλ' ὁτιοῦν πολύγωνον εἰς ἔλλειψιν ἐγγραφῆναι, ὡς ἐπὶ τοῦ β': καθορᾶται σχήματος.

Geom. Lib. 7. Fig. 37.

ΛΕ' ΛϚ'



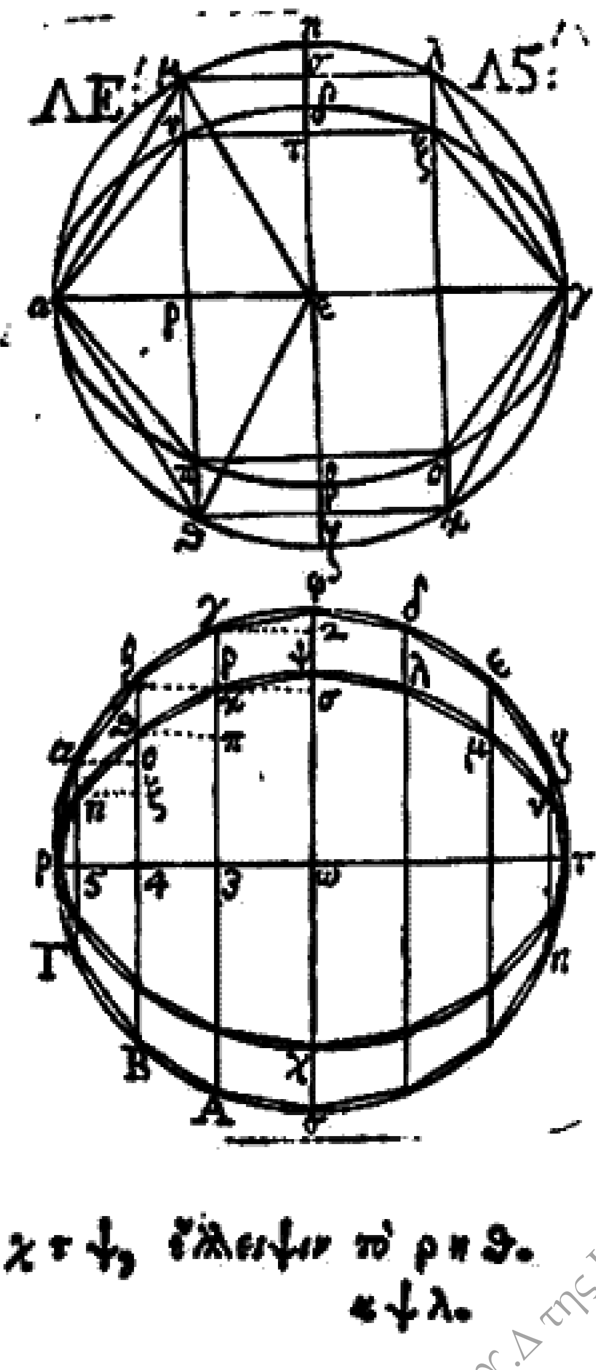
Πρό-

Πρότασις Λϛ΄.

Τὸ εἰς τὸν τῆς μείζονος διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ εἰς τὴν ἔλλειψιν ἐγγεγραμμένον ὅμοιον πολύγωνον ἔχει, ὡς ἡ μείζων τῆς ἐλλείψεως διάμετρος πρὸς τὴν ἐλάττονα.

Ἔστω α΄: εἰς μὲν τὸν α ζ γ η, κύκλον τῆς α γ, μείζονος διαμέτρου τῆς α β γ δ, ἐλλείψεως πολύγωνον ἐγγεγραμμένον τὸ α θ κ γ λ μ, εἰς δὲ τὴν α β γ δ, ἔλλειψιν τὸ α π ο γ ξ ν. Λέγω ὅτι τὸ α θ κ γ λ μ, πρὸς τὸ α π ο γ ξ ν, ἔχει ὡς ἡ α γ, πρὸς τὴν β δ. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ λ κ, μ θ, αἵτινες κατὰ τὴν αὐτέρω διελάσονται καὶ διὰ τῶν ξ ο, καὶ ν π. καὶ ἐπεὶ αἱ α μ, α θ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, κοινὴ δὲ ἡ α ε, πάντως γε ἐὰν ἐπιζευχθῶσι καὶ αἱ μ ε, θ ε, ἴσαι καὶ αὐταὶ ἔσαι, τὰ α μ ε, α θ ε, τρίγωνα ἰσογώνια ἔσονται, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ μ α ε, γωνία τῇ ὑπὸ θ α ε, ὥστε κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ μ ρ, τῇ θ ρ, εὐθεία, καὶ ἡ ὑπὸ μ ρ α, γωνία τῇ ὑπὸ θ ρ α, κάθετος ἄρα ἡ μ θ, ἐπὶ τὴν α γ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ λ κ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς

Geom. Lib. 7. Fig. 38.



αὐτῆς α γ, ὥστε κατὰ τὴν λ β΄: τοῦ παρόντος ἡ ρ μ, ἔχει πρὸς τὴν ρ ν, ὡς ἡ α ε, μείζων ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν ε δ, ἐλάττονα, ὡς δὲ ἡ ρ μ, πρὸς τὴν ρ ν, ἔχει τὸ, τε α μ ρ, τρίγωνον πρὸς τὸ α ν ρ, καὶ τὸ μ ε, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ν ε, παραλληλόγραμμον κατὰ τὴν α΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα ὡς ἡ ε η, μείζων ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν ε δ, ἐλάττονα, ἔχει τὸ α μ σ ε, τραπέζιον πρὸς τὸ α ν τ ε, τραπέζιον, ἀλλὰ τὸ μὲν α μ σ ε, ἴσον τῷ γ λ σ ε, τὸ δὲ α ν τ ε, τῷ γ ξ τ ε, τὸ ὅλον ἄρα α μ λ γ, χωρίον ἔχει πρὸς ὅλον τὸ α ν ξ γ, ὡς ἡ ε η, πρὸς τὴν ε δ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ α θ κ γ, ἔχειν πρὸς τὸ α π ο γ, ὡς ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ε β, ὡς δὲ ἡ ε η, πρὸς τὴν ε δ, ἔχει ἥτε ε ζ, πρὸς τὴν ε β, καὶ ἡ ὅλη η ζ, μείζων διάμετρος πρὸς τὴν ὅλην τὴν δ β, ἐλάττονα, ὅλον ἄρα τὸ α θ κ γ λ μ, πολύγωνον πρὸς ὅλον τὸ α π ο γ ξ ν, ἔχει ὡς ἡ η ζ, ἤτοι α γ, πρὸς τὴν δ β.

Ἔστω β΄: εἰς μὲν τὸν ρ σ τ φ, κύκλον τῆς ρ τ, μείζονος διαμέτρου τῆς ρ χ τ ψ, ἐλλείψεως πολύγωνον ἐγγεγραμμένον τὸ ρ α β γ φ δ ε ζ τ, εἰς δὲ τὴν ρ χ τ ψ, ἔλλειψιν τὸ ρ η θ.

κ ψ λ.

κψλμντ. Λέγω ὅτι τὸ ραβγφδεζτ, πολύγ: ἔχει πρὸς τὸ ρηθκψλμντ, ὡς ἡ ρτ, μείζων διάμετρος πρὸς τὴν χψ, ἐλάττονα. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ μὲν γΑ, βΒ, αΓ, παραλλήλως τῇ φσ, τέμνουσαι τὴν ρτ, κατὰ τὰ 3, 4, 5, αἱ δὲ ηξ, μο, θπ, βυ, κσ, γ2, παραλλήλως τῇ ρτ, καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν λβ: τοῦ παρόντος, ἑκάστη τῶν γ3, θ4, α5, τέμνεται ὑπὸ τῆς ρψτ, ἐλλείψεως ἀναλόγως τῇ ωφ, πάντως γε ὡς ἡ ωφ, πρὸς τὴν ωψ, ἔχει καὶ ἡ γ3, πρὸς τὴν 3κ, καὶ ἡ 4β, πρὸς τὴν 4θ, καὶ 5α, πρὸς τὴν 5η, ἀλλ' ἡ μὲν 3γ, ἴση ἐστὶ τῇ ω2, ἡ δὲ 3κ, τῇ ωσ, ἄρα ὡς ἡ ωφ, μείζων ἡμιδιάμετρος τῆς ρψτ, ἐλλείψεως (ἴση γὰρ ἡ ωφ, τῇ ωρ,) πρὸς τὴν ωψ, ἐλάττονα, ἡ ω2, πρὸς τὴν ωσ, ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ 2φ, πρὸς τὴν λοιπὴν σψ, ἔχει ὡς ἡ ωφ, πρὸς τὴν ωψ, κατὰ τὴν ιθʹ: τοῦ εʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ω2, πρὸς τὴν ωσ, ἔχει καὶ τὸ 23, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ σ3, ὡς δὲ ἡ 2φ, πρὸς τὴν σψ, τὸ φγ2, τρίγων: πρὸς τὸ ψυσ, ἄρα καὶ τὸ φγ3ω, τραπέζιον ἔχει πρὸς τὸ ψυ3ω, ὡς ἡ ωφ, μείζων ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν ωψ, ἐλάττονα. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται τό, τε γβ43, τραπέζιον πρὸς τὸ κθ43, καὶ τὸ βα54, πρὸς τὸ θη54, ἔχειν ὡς ἡ ωφ, πρὸς τὴν ωψ ὅτι δὲ καὶ τὸ αρ5, πρὸς τὸ ηρ5, τρίγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ ωφ, πρὸς τὴν ωψ, δέδεικται ἀνωτέρω ἐπὶ τῶν μαρ, ναρ. ὅλον ἄρα τὸ φγβαρω, πρὸς ὅλον τὸ ψκθηρω, ἔχει, ὡς ἡ μείζων ἡμιδιάμετρος ωφ, πρὸς τὴν ἐλάττω ωψ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ πολυγώνου ἔχειν πρὸς ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων τοῦ ἐν τῇ ἐλλείψει πολυγώνου, ὡς ἡ ωφ, πρὸς τὴν ωψ, ὅλον ἄρα τὸ ἐν τῷ κύκλῳ πολύγωνον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἐλλείψει πολύγωνον ἔχει, ὡς ἡ μείζων ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν ἐλάττω, ὡς δὲ ἡμιδιάμετρος πρὸς ἡμιδιάμετρον, ἔχει καὶ διάμετρος πρὸς διάμετρον, ἄρα τὸ εἰς τὸν τῆς μείζονος διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ εἰς τὴν ἔλλειψιν ἐγγεγραμμένον ὅμοιον πολύγωνον, ἔχει ὡς ἡ μείζων τῆς ἐλλείψεως διάμετρος πρὸς τὴν ἐλάττονα.

Πρότασις ΛΖʹ:

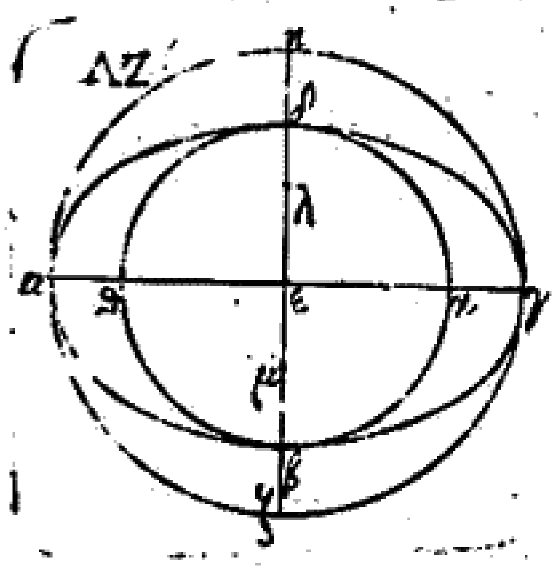
Ὁ τῆς μείζονος διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως κύκλος ἥτε ἔλλειψις, καὶ ὁ τῆς ἐλάττονος διαμέτρου τῆς αὐτῆς κύκλος, συνεχῶς εἰσὶν ἀνάλογα τῷ λόγῳ τῆς μείζονος διαμέτρου πρὸς τὴν ἐλάττω.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ αβγδ, ἧς μείζων μὲν διάμετρος ἡ αγ, ἐλάττων δὲ ἡ βδ, καὶ κέντρον τὸ ε, γραφήτω δὲ ὅ, τε τῆς μείζονος αβ, διαμέτρου κύκλος ὁ αζγη, καὶ ὁ τῆς βδ, ἐλάττονος ὁ θβκδ. Λέγω δὴ τὸν αζγη, κύκλον, καὶ αβγδ, ἔλλειψιν καὶ θβκδ, κύκλον συνεχῶς εἶναι ἀνάλογον τῷ τῆς μείζονος αγ, διαμέτρῳ πρὸς τὴν ἐλάττονα βδ, λόγῳ, τουτέστιν ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν βδ, ἔχειν τὸν αζγη, κύκλον πρὸς τὴν αβγδ, ἔλλειψιν, καὶ τὴν αβγδ, ἔλλειψιν πρὸς τὸν θβκδ, κύκλον. Ἐὰν γὰρ ἀφ' ἑκάστου σημείου τοῦ αζγη, κύκλου εὐθεῖαι ἀχθῶ-

σι πα.

ει παραλλήλως τῇ ηζ, ἅπασαι τμηθήσονται ἀναλόγως ταῖς αγ, βδ, διαμέτροις κατὰ τὴν λβ΄: τοῦ παρόντος, ὥστε ὡς ἔχει ἡ ηζ, μείζων διάμετρος τῆς αβγδ, ἐλλείψεως, ἴση γὰρ ἡ ηζ, τῇ αγ, πρὸς τὴν ἐλάττω δβ, ἔχουσι καὶ πᾶσαι αἱ ὑπὸ τοῦ αζγη, κύκλου περιεχόμεναι εὐθεῖαι πρὸς πάσας τὰς ὑπὸ τῆς αβγδ, ἐλλείψεως περιεχομένας, ἀλλ' αἱ μὲν ὑπὸ τοῦ αζγη, κύκλου περιεχόμεναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ πληροῦσιν, αἱ δὲ ὑπὸ τῆς αβγδ, ἐλλείψεως τὸ αὐτῆς ὁμοίως πληροῦσιν ἐμβαδὸν, ἄρα ὁ αζγη, κύκλος πρὸς τὴν αβγδ, ἔλλειψιν ἔχει ὡς ἡ ηζ, μείζων διάμετρος τῆς αβγδ, ἐλλείψεως πρὸς τὴν δβ, ἐλάττονα ταύτης διάμετρον, ἀλλ' ὁ αζγη, κύκλος πρὸς τὸν βθκδ, κύκλον ἐν διπλασίονι ἐστὶ λόγῳ κατὰ τὴν α΄: τοῦ γ΄: τοῦ παρ: ἄρα ἐὰν εὑρεθῇ τρίτη ἀνάλογος τῶν αγ, δβ, ἡ λμ, ὁ αζγη, κύκλος ἕξει πρὸς τὸν βθκδ, ὡς ἡ α: αγ, πρὸς τὴν γ΄: ὡς δὲ ἡ αγ, α: πρὸς τὴν β΄: δβ΄: ἔχει ὁ αὐτὸς κύκλος πρὸς τὴν αβγδ, ἔλλειψιν, τρία ἄρα μεγέθη τὰ αγ, βδ, λμ, τρισὶ μεγέθεσι τοῖς αζγη, αβγδ, θβκδ, διίσου ἀνάλογόν εἰσιν, ὥστε καὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ἀλλ' αἱ αγ, βδ, λμ, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι τῷ τῆς μείζονος διαμέτρου πρὸς τὴν ἐλάττονα λόγῳ, ἄρα καὶ ὁ αζγη, κύκλος, ἥτε αβγδ, ἔλλειψις, καὶ ὁ βθκδ, κύκλος ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον τῷ λόγῳ τῆς μείζονος αγ, διαμέτρου πρὸς τὴν δβ, ἐλάττονα.

Geom. Lib. 7. Fig. 39.

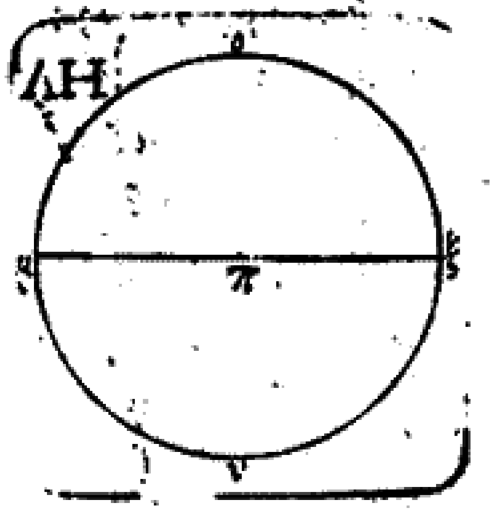


Πρότασις ΛΗ΄:

Η' ἔλλειψίς ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν τῆς αὐτῆς ἡμιδιαμέτρων.

Ἔστω ἔλλειψις μὲν ἡ αβγδ, ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος, ἧς ἡμιδιάμετροι αἱ αε, εδ, κύκλος δὲ ὁ μνξο, οὗ ἡ μπ, ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αε, εδ. λέγω τὴν αβγδ, ἔλλειψιν ἴσην εἶναι τῷ μνξο, κύκλῳ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ αε μπ, εδ, εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, πάντως γε ὁ τῆς αε, κύκλος πρὸς τὸν τῆς μπ, κύκλον ἔχει ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εδ, κατὰ τὴν α΄: τοῦ γ΄: τοῦ παρ: ἀλλ' ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εδ, ἔχει καὶ ὁ τῆς αε, κύκλος πρὸς τὴν αβγδ, ἔλλειψιν κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἄρα ὁ τῆς αε, ἡμιδιαμέτρου κύκλος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὸν μνξο, κύκλον, καὶ αβγδ, ἔλλειψιν. ὥστε κατὰ τὴν θ΄: τοῦ ε΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἡ αβγδ,

Geom. Lib. 7. Fig. 40.



ἔλλειψις ἴση ἐστὶ τῷ μνξο κύκλῳ, ἡ ἔλλειψις ἄρα ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν τῆς αὐτῆς ἡμιδιαμέτρων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τὸ περιγραφόμενον παραλληλόγραμμον περὶ τὴν ἔλλειψιν ἴσον ἐστὶ τῷ περιγραφομένῳ τετραγώνῳ περὶ τὸν κύκλον, ᾧτινι ἴση ἐστὶν ἡ ἔλλειψις, τὸ γὰρ περὶ τὴν ἔλλειψιν παραλληλόγραμμον ὑπὸ τῶν διαμέτρων αὐτῆς περιέχεται, τοῦ δὲ περὶ τὸν κύκλον τούτου τετραγώνου τετράγωνος πλευρά ἐστιν ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος, ἥτις μέση ἀνάλογός ἐστι τῶν τῆς ἐλλείψεως διαμέτρων.

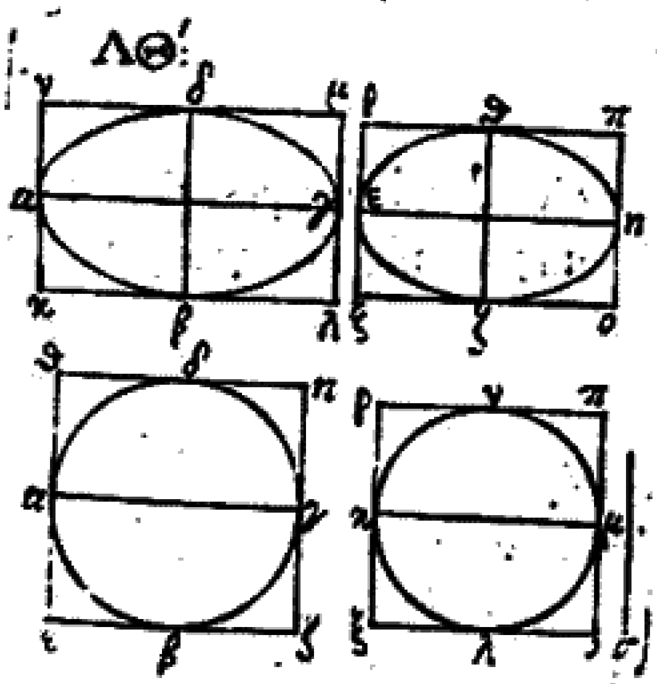
Πρότασις ΛΘ'.

Αἱ ἐλλείψεις πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν ὡς τὰ περὶ αὐτὰς ὀρθογώνια.

Ἔστωσαν ἐλλείψεις αἱ αβγδ, εζηθ, ὀρθογώνια δὲ περὶ αὐτὰς τὰ κλμν, ξοπρ. λέγω ὅτι ἡ αβγδ, ἔλλειψις πρὸς τὴν εζηθ, ἔλλειψιν ἔχει ὡς τὸ κλμν, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ξοπρ, ὀρθογώνιον. Ἔστω γὰρ τῇ μὲν αβγδ, ἐλλείψει ἴσος κύκλος ὁ αβγδ, καὶ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον τετράγωνον τὸ εζηθ, τῇ δὲ εζηθ, ἐλλείψει ἴσος ὁμοίως κύκλος ὁ κλμν, καὶ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον τετράγωνον τὸ ξοπρ. εὑρεθήτω δὴ τρίτη ἀνάλογος τῶν αγ, κμ, ἡ σ, γραμμή. Δείκνυται.

Ἡ αβγδ, ἔλλειψις πρὸς τὴν εζηθ, ἔλλειψιν ἔχει ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν κλμν, κύκλον διὰ τὴν ἰσότητα.

Geom. Lib. 7. Fig. 40.



ἐπεὶ δὲ ἡ σ, γραμμὴ γ': ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αγ, κμ, διαμέτρων, πάντως γε ὡς ἡ αγ, γραμμὴ πρὸς τὴν σ, ἔχει ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν κλμν, ὡς δὲ ἡ αγ, γραμμὴ πρὸς τὴν σ, ἔχει καὶ τὸ εζηθ, τετράγωνον πρὸς τὸ ξοπρ, τετράγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν κλμν, κύκλον ἔχει ὡς τὸ εζηθ, τετράγωνον πρὸς τὸ ξοπρ, τετράγ: ἀλλ' ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν κλμν, ἔχει καὶ ἡ αβγδ, ἔλλειψις πρὸς τὴν αζηθ, ἔλλειψιν, ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ αβγδ, ἔλλειψις πρὸς τὴν εζηθ, ἔλλειψιν ἔχει ὡς τὸ εζηθ, τετράγωνον πρὸς τὸ ξοπρ, τετράγ: ἐπεὶ δὲ τῷ μὲν εζηθ, τετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ τὸ κλμν, ὀρθογώνιον, τῷ δὲ ξοπρ, τετραγώνῳ τὸ ξοπρ ὀρθογώνιον καὶ τὸ πρόρισμα τῆς ἀνωτέρω, πάντως γε ἡ αβγδ, ἔλλειψις πρὸς τὴν εζηθ, ἔλλ: ἔχει ὡς τὸ κλμν, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ξοπρ, αἱ ἐλλείψεις ἄρα πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν, ὡς τὰ περὶ αὐτὰς ὀρθογώνια.

ΠΟΡΙΣΜΑ,

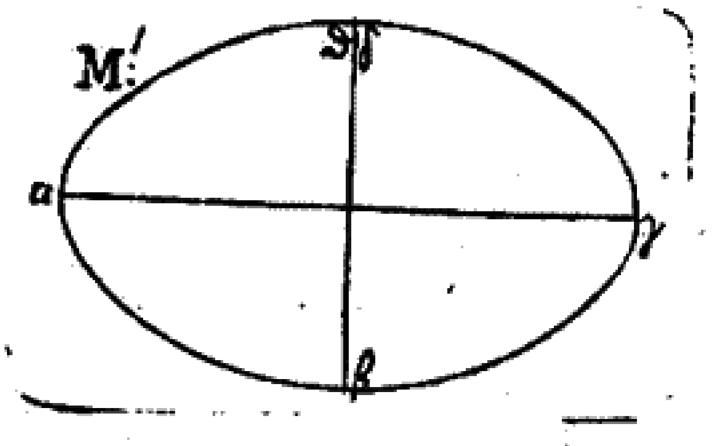
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν ἴσων ἐλλείψεων ἀντιπεπόνθασιν αἱ διάμετροι, καὶ ὧν ἐλλείψεων αἱ διάμετροι ἀντιπεπόνθασιν, ἐκεῖναι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν γὰρ ἴσαι ὦσιν αἱ ἐλλείψεις ἴσα ἔσονται καὶ τὰ περὶ αὐτὰς ὀρθογώνια, τούτων δὲ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασι κατὰ τὴν ιδ': τοῦ ς': τῶν Στοιχείων, καὶ τοὐναντίον, ὧν ὀρθογωνίων αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Πρότασις Μ':

Τὸ τῆς ἐλλείψεως ἐμβαδὸν εὑρεῖν.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ α β γ δ, καὶ ζητείσθω τὸ ταύτης ἐμβαδόν. Πολλαπλασιασθήτω δὴ ἡ α γ, μείζων διάμετρος ἐπὶ τὴν δ β, ἐλάττονα, εἶτα γενέσθω ὡς ὁ ιδ': πρὸς τὸν ια: ἀριθμόν, οὕτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιεχομένου ὀρθογωνίου ὑπὸ τῶν α γ, β δ, πρὸς ἄλλο τι, καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ': τῶν ὅρων, ἔσται τὸ τῆς α β γ δ, ἐλλείψεως ἐμβαδόν. κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς λη: τοῦ παρ: τὸ ὑπὸ τῶν α γ, β δ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ περιγραφομένῳ τετραγώνῳ περὶ τὸν κύκλον, ὅς ἐστιν ἴσος τῇ α β γ δ, ἐλλείψει, ἀλλὰ τὸ τετράγωνον ἐκεῖνο πρὸς τὸν ῥηθέντα κύκλον ἔχει ὡς ὁ ιδ': πρὸς τὸν ια: κατὰ τὴν κγ': τοῦ δ': τοῦ παρόντος ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν α γ, β δ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἔχει πρὸς τὴν α β γ δ, ἔλλειψιν, ὡς ὁ ιδ': πρὸς τὸν ια':

Geom. Lib. 7. Fig. 41.



Ἄλλως. Πολλαπλασιασθήτω ἡ α γ, ἐπὶ τὴν β δ, καὶ εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος τοῦ γενομένου ῥίζα, καὶ εἰλήφθω αὕτη διάμετρος κύκλου, εἶτα εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αὐτοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ εὑρεθεῖσα τετράγωνος ῥίζα, καὶ γνωσθήσεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως, κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς ῥηθείσης λη: τὸ ὑπὸ τῶν α γ, β δ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ περιγραφομένῳ τετραγώνῳ περὶ τὸν κύκλον ὅς ἐστιν ἴσος τῇ α β γ δ, ἐλλείψει, ἀλλ' ἡ τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου πλευρὰ διάμετρός ἐστι τοῦ εἰρημένου κύκλου, εὑρεθείσης ἄρα τῆς τετραγώνου ῥίζης τοῦ ὑπὸ τῶν α γ, β δ, περιεχομένου ὀρθογωνίου, εὑρεθήσεται ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν ἴσος τῇ δοθείσῃ ἐλλείψει, εὑρεθείσης δὲ τῆς διαμέτρου, εὑρεθήσεται ταύτης καὶ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, τῆς δὲ ἡμιδιαμέτρου ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας πολλαπλασιαζομένης γνωσθήσεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, καὶ ἑπομένως τὸ τῆς ἐλλείψεως, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τῷ αὐτῷ κύκλῳ, ὅπερ ἦν τὸ προσταχθέν.

Περὶ Ἑλικοειδοῦς γραμμῆς, ἤτοι σπειροειδοῦς ὅροι κατ' Ἀρχιμήδην.

Α': Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἐν ἐπιπέδῳ, μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος, ἰσοταχῶς περιενεχθεῖσα, ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμησεν, ἅμα δὲ τῇ γραμμῇ τῇ περιφερομένῃ φέρηται τὸ σημεῖον ἰσοταχῶς αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τῆς εὐθείας, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σημεῖον ἐκεῖνο Ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Β': Καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τῆς περιαγομένης εὐθείας τὸ μένον, ἀρχὴ τῆς Ἕλικος.

Γ': Ἡ δὲ θέσις τῆς γραμμῆς, ἀφ' ἧς ἤρξατο ἡ εὐθεῖα περιφέρεσθαι ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς.

Δ': Εὐθεῖα ἣν μὲν ἐν τῇ α: περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σημεῖον τὸ κατὰ τῆς εὐθείας φερόμενον, α: καλείσθω. ἣν δὲ ἐν τῇ β': περιφορᾷ διανύσῃ, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν.

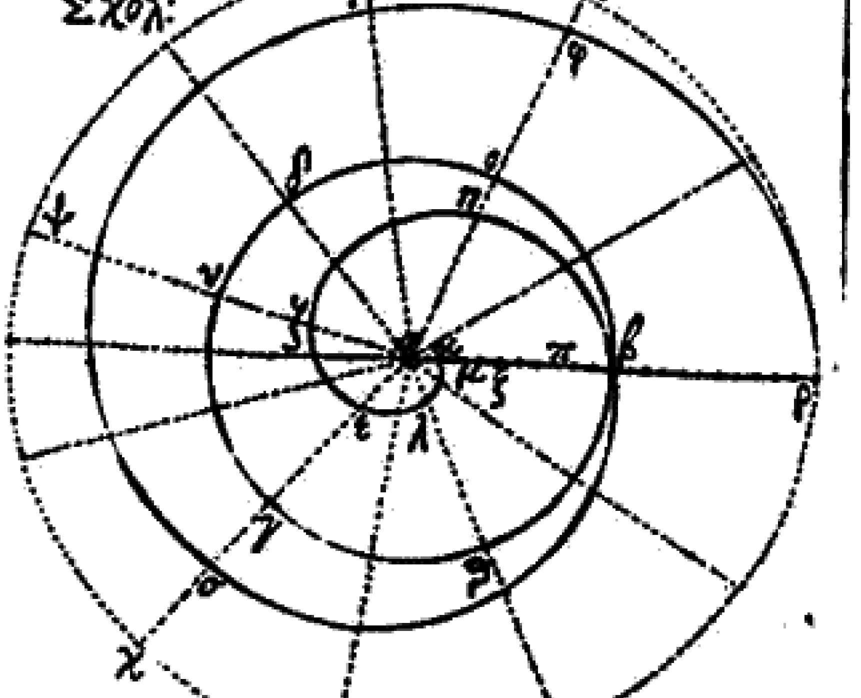
Ε': Τὸ δὲ χωρίον τὸ περιληφθὲν ὑπό τε τῆς Ἕλικος τῆς ἐν τῇ α: περιφορᾷ γραφείσης, καὶ τῆς α: εὐθείας, πρῶτον καλείσθω. τὸ δὲ περιληφθὲν ὑπό τε τῆς ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσης, καὶ τῆς εὐθείας τῆς δευτέρας, δεύτερον καλείσθω, καὶ τἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθωσαν.

ς': Καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὴ τῆς Ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμή, τῆς εὐθείας ταύτης, ἐφ' ἃ ἡ περιφορὰ γίνηται, προηγούμενα καλείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα, ἑπόμενα.

Ζ': Ὁ δὲ γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σημείῳ, ὅ ἐστιν ἀρχὴ τῆς ἕλικος, διαστήματι δὲ τῇ α: εὐθείᾳ, πρῶτος καλείσθω. ὁ δὲ γραφεὶς κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ διπλασίᾳ εὐθείᾳ, δεύτερος καλείσθω, καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις, τὸν αὐτὸν τρόπον. Geom. Lib. 7. Fig. 42.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἷον ἔστω εὐθεῖα γραμμὴ ἡ α β, ἧς πέρατα τὰ α, καὶ β, καὶ ὑποκείσθω μένοντος τοῦ α, αὐτῆς πέρατος καὶ ἠρεμοῦντος, φέρεσθαι τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἰσοταχῶς ἀπὸ τοῦ β, ἀρξαμένην διὰ τῶν γ, καὶ δ, ὥστε τὸν β γ δ, καταγράφειν κύκλον. Ἐννοείσθω δὲ καί τι σημεῖον ἐπὶ τῆς α β, εὐθείας φέρεσθαι ἰσοταχῶς τῇ αὐτῇ α β, ἐπὶ τὸ β, σημεῖον, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ α, μένοντος σημείου, ὥ-



σι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ αβ, γραμμὴ τὸν βγδ, περιγράφει κύκλον, τὸ ἀπὸ τοῦ α, ὁρ-
μῶν σημεῖον διέρχεσθαι ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ τὸ διάστημα τῆς αβ. τούτων γὰρ οὕτω κει-
μένων καταγράψει δήπουθεν τὸ αὐτὸ σημεῖον τὴν αεζηβ, Ἕλικα. τῆς γὰρ αβ,
φερομένης ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἐπὶ τὸ θ, τὸ ἰσοταχῶς φερόμενον ἐπ' αὐτῆς ση-
μεῖον τὸ ακ, διελεύσεται διάστημα, καὶ τὸ αλ, καταγράψει τόξον. γενομένης
δὲ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ γ, διελεύσεται τὸ σημεῖον τὸ αμ, διάστημα, καὶ
καταγράψει τὸ αλε, τόξον. Ἐὰν δὲ ἡ γραμμὴ ἀφίκηται ἐπὶ τὸ ν, τὸ αὐτὸ
σημεῖον τὸ αξ, διανύσει διάστημα, ἤτοι τὸ αζ, καὶ καταγράψει τὸ αλεζ, τό-
ξον, καταλαβούσης δὲ τῆς φερομένης γραμμῆς τὸ ο, σημεῖον, διελεύσεται ἤδη
τὸ φερόμενον ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ απ, διάστημα, ἤτοι τὸ αη, καὶ καταγράψει
τὸ αλεζη, τόξον. ἐπειδὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ο, ἐπὶ τὸ β, ἐπανακάμψῃ ἡ γραμμὴ,
διελεύσεται τὸ σημεῖον τὴν αβ, δοθεῖσαν γραμμὴν, καὶ καταγράψει τὴν αλε-
ζηβ, Ἕλικα. Ἐὰν δὲ ἡ γραμμὴ αβ, διπλασιασθῇ καὶ γένηται ἡ αρ, τὸ δὲ ση-
μεῖον ἀρχόμενον ἀπὸ τοῦ β, προβαίνῃ τῇ αὐτῇ ταχύτητι ἐπὶ τὸ ρ, ἰσοταχῶς τῇ
αρ, εὐθείᾳ κινουμένῃ, καταγράψει τὴν βστφρ, ἕλικα. Ἡ μὲν οὖν τῆς αλεζηβ,
Ἕλικος καταγραφὴ πρώτη περιφορὰ λέγεται, ἡ δὲ τῆς βστφρ, δευτέρα. Ἐὰν
δὲ τριπλασιασθῇ ἡ αβ, εὐθεῖα, καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως γένηται, ἡ τοῦ γ': μέρους
τῆς Ἕλικος καταγραφὴ γ': περιφορὰ λέγεται.

Τῆς αβ, τοίνυν εὐθείας γραμμῆς τὸ α, μόνον πέρας, ἀρχὴ καλεῖται τῆς
Ἕλικος κατὰ τὸν Ἀρχιμήδην, ἡ δὲ θέσις, καθ' ἣν ὑπετέθη κατ' ἀρχὰς ἡ αβ,
εὐθεῖα, καὶ ἀφ' ἧς ἤρξατο φέρεσθαι, καλεῖται ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς. ἡ δὲ εὐθεῖα
αβ, ἣν τὸ σημεῖον διέρχεται ἐν τῇ α': περιφορᾷ πρώτη καλεῖται, ἡ δὲ αρ, ἣν
τὸ αὐτὸ διανύει σημεῖον ἐν τῇ β': περιφορᾷ δευτέρα καλεῖται, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμω-
νύμως ταῖς περιφοραῖς. ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ χωρίον τὸ περιλαμβανόμενον ὑπό τε
τῆς Ἕλικος αλεζηβ, τῆς ἐν τῇ α': περιφορᾷ γραφομένης, καὶ τῆς αβ, α': εὐ-
θείας, πρῶτον καλεῖται, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς Ἕλικος τῆς ἐν τῇ β': γραφομένης περι-
φορᾷ καὶ βρ, εὐθείας περιλαμβανόμενον δεύτερον καλεῖται, καὶ τ' ἄλλα ἀναλόγως.
Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ α, σημείου, ὅπερ ἀρχὴ ὡς εἴρηται τῆς Ἕλικός ἐστιν, ἀχθῇ τις
εὐθεῖα, ὡς ἡ αβ, καὶ ἀρξαμένη φέρεσθαι μεταβῇ ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὸ θ, ἀπὸ δὲ τοῦ
θ, ἐπὶ τὸ γ, τὰ μέρη ἐφ' ἃ φέρεται, προηγούμενα καλεῖται, τὰ δὲ λοιπὰ τὰ
ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἑπόμενα. οἷον τὸ αβθ, ἐμβαδὸν, ὅπερ ἡ αβ, διῆλθεν
εὐθεῖα, ἡγούμενον καλεῖται, τὸ δὲ ἐκτὸς τῆς αβ, δὸς εἰπεῖν τὸ αβο, ἑπόμε-
νον. Ἐὰν δὲ ἡ αθ, γραμμὴ ὑποτεθῇ καὶ φερομένη ἀπὸ τοῦ θ, γένηται ἐπὶ τὸ
γ, τὸ μὲν αθγ, ἐμβαδὸν προηγούμενα καλεῖται, τὸ δὲ αβθ, ἑπόμενα, καὶ
ἐπὶ τῶν ἑξῆς ὁμοίως, προηγούμενα μὲν τὰ προσλαμβανόμενα, ἑπόμενα δὲ τὰ
ἐγκαταλειπόμενα, ἅπερ δὴ ἀντικειμένως ἔχει τοῖς παρ' Ἀστρονόμοις ἡγουμένοις
καὶ ἑπομένοις. οἱ γὰρ Πλανῆτες ἀρχόμενοι φέρονται ἀπὸ τοῦ Κριοῦ, ὅς ἐστιν ἀρ-
χὴ τοῦ Ζωδιακοῦ, καὶ διὰ τοῦ Ταύρου, τῶν Διδύμων, καὶ τῶν ἐφεξῆς Ζωδίων διαβαί-

νειν

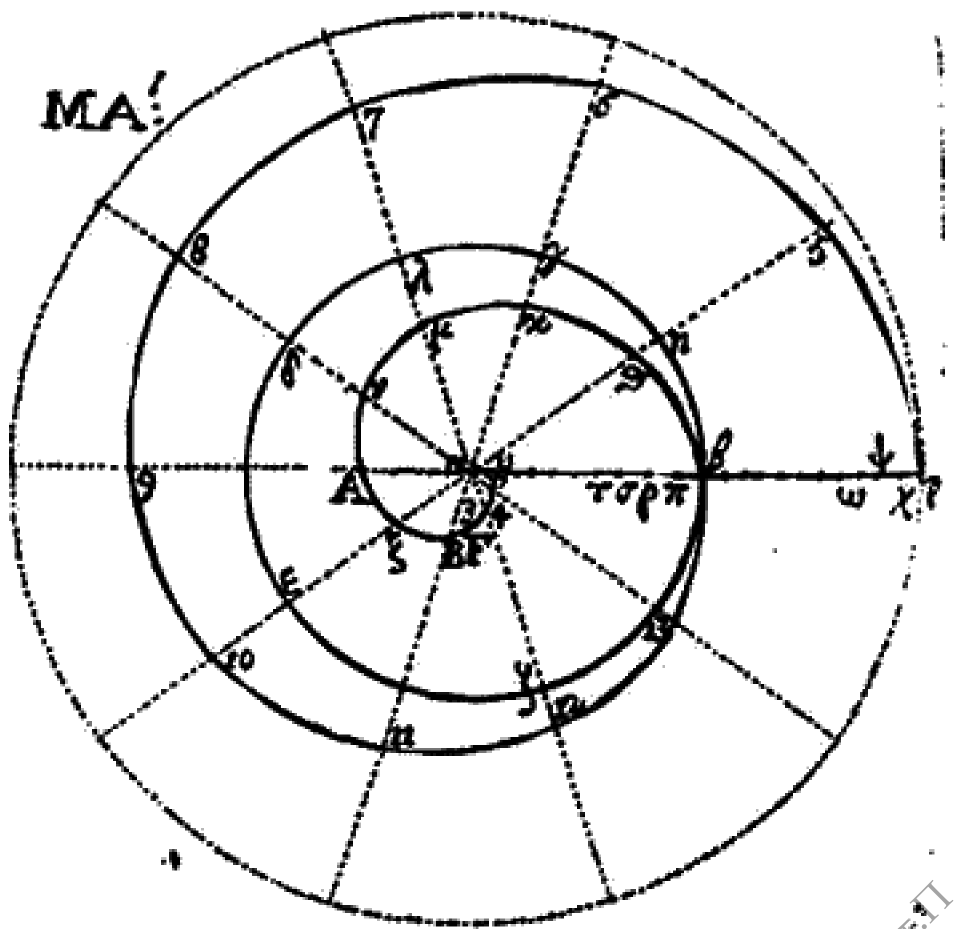
νειν κατὰ τὰ ἑπόμενα λέγονται κινεῖσθαι. ὁ μὲν γὰρ Ταῦρος ἑπόμενος λέγεται πρὸς τὸν Κριὸν παραβαλλόμενος, οἱ δὲ Ἰχθύες ἡγέμενοι, ὡς ἐν ἄλλοις εἴρηται. ὁ δὲ κύκλος βγδ, ὁ γραφόμενος κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, πρῶτος καλεῖται. ὁ δὲ ρχψω, ὁ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αρ, διπλασίονι τοῦ αβ, γραφόμενος, δεύτερος καλεῖται, καὶ οἱ ἄλλοι ἀναλόγως.

Πρότασις ΜΑ':

Εὐθείας γραμμῆς πεπερασμένης δοθείσης, Ἕλικα περὶ αὐτὴν καταγράψαι.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ αβ, περὶ ἣν ζητηθήτω γραφῆναι Ἕλικα. Ἐννοείσθω δὴ κατὰ τὰ προειρημένα ἡ αβ, φέρεσθαι περὶ τὸ α, κέντρον, ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ β, ὥστε καταγράφειν τὸν βγδεζ, κύκλον. ταύτης δὲ ὁμαλῇ περιφερομένης κινήσει, ἐννοείσθω ἐπ' αὐτῆς κινεῖσθαι καὶ τὸ β, σημεῖον ἀναλόγῳ καὶ ἰσοταχεῖ κινήσει, ὥστε καθ' ὃν ἂν χρόνον ἡ αβ, πηλίκον τι μέρος τοῦ βγδεζ, καταγράψῃ κύκλου, ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ καὶ τὸ β, σημεῖον τὸ ἀνάλογον τῆς αβ, διελθεῖν μέρος. Οἷον δεδόσθω ἐπειδὰν μὲν ἡ αβ, ἤρξατο ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἐπὶ τὸ η, φέρεσθαι, τηνικαῦτα ἄρξασθαι καὶ τὸ β, ἐπὶ τὸ π, χωρεῖν. ὅτε δὲ ἡ αβ, τὸ η, κατέλαβε, τότε δὴ καὶ τὸ β, ἐπὶ τὸ θ, ἀφικέσθαι, καὶ τὸ βθ, καταγράψαι τόξον· τῆς δὲ αβ, ἐπὶ τὸ γ, γενομένης, τὸ β, ἐπὶ τὸ κ, ἐλθεῖν, καὶ τὸ θκ, καταγράψαι τόξον, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως. ὥστε ὃ μέρος, ἢ μέρη ἐστὶ τὸ βη, τόξον τοῦ βγδεζ, κύκλου, τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ μέρη εἶναι καὶ τὸ ηθ, τῆς αβ. ὃ δὲ τὸ βγ, τοῦ βγδεζ, κύκλου, τὸ αὐτὸ καὶ τὸ γκ, τῆς αβ, ὃ δὲ τοῦ κύκλου τὸ βλ, τὸ αὐτὸ καὶ τὸ λμ, τῆς αβ, εὐθείας. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων. καὶ οὕτω μιᾷ περιστροφῇ τῆς αβ, εὐθείας καταγραφήσεται ἡ βθκμνξοα, Ἕλιξ. Ἵνα δὲ καὶ τῷ διαβήτῃ τοῦτο γένηται, κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, γραφήτω ὁ βγδεζ, κύκλος, καὶ διαιρεθήτω εἰς ὅσα βούλει μέρη. Ἔστω δὲ διῃρημένος εἰς δέκα ἴσα ἀλλήλοις τὰ βη, ηγ, γλ, λδ, καὶ λοιπά, καὶ ἀχθήτωσαν ἀπὸ τοῦ α, κέντρου δι' ἑκάστου τῶν

Geom. Lib. 7. Fig. 43.



τοῦ κύκλου σημείων ἀορίστως ἐκτεινόμεναι, αἱ α η, α γ, α λ, α δ, καὶ λοιπαί. Διαιρεθήτω δ' ἔτι εἰς τοσαῦτα μέρη ἴσα καὶ ἡ α β, τὰ β π, π ρ, σ τ, καὶ λοιπά. εἶτα εἰλήφθω τῇ μὲν α π, ἴση ἡ α θ, τῇ δὲ α ρ, ἡ α κ, τῇ δὲ α σ, ἡ α μ, τῇ δὲ α τ, ἡ α ν, καὶ αἱ λοιπαὶ ἀναλόγως, καὶ ἡ ἐσχάτη α ο, ἴση ἔστω τῇ α υ, τῷ δεκάτῳ δηλον: τῆς α β, μέρει. τούτων δὲ γενομένων, ληφθήτω τὸ α β, διάστημα, καὶ κέντροις τοῖς β, καὶ θ, γραφήτωσαν δύο τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ 3, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου γραφήτω τὸ β θ, τόξον. εἰς καταγραφὴν δὲ τοῦ θ κ, ληφθήτω τὸ α θ, διάστημα, καὶ κέντροις μὲν τοῖς θ, καὶ κ, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ α θ, γραφήτωσαν δύο τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ 4, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου γραφήτω τὸ θ κ. εἰς καταγραφὴν δ' ἔτι τοῦ μὲν κ μ, εἰλήφθω διάστημα τὸ α κ, τοῦ δὲ μ ν, τὸ α μ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς καὶ ἐπὶ τῆς τῶν β θ, θ κ, καταγραφῆς, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως τὰ αὐτὰ γινέσθω. Εἰ δὲ σοι βουλητὸν τὴν Ἕλικα διπλασιάσαι, διπλασιασθήτω ἡ α β, καὶ ἔστω ἡ β φ, ἴση τῇ α β, ὥστε τὴν ὅλην α φ, διπλασίονα εἶναι τῆς α β, καὶ διῃρήσθω καὶ ἡ β φ, εἰς ὅσα καὶ ἡ α β, τὰ φ χ, χ ψ, ψ ω, καὶ λοιπά. εἶτα εἰλήφθω ἡ μὲν α 5, ἴση τῇ α χ, ἡ δὲ α 6, τῇ α ψ, ἡ δὲ α 7, τῇ α ω, καὶ αἱ λοιπαὶ ἀναλόγως. Τούτων δ' οὕτως εἰλημμένων, κέντροις μὲν τοῖς φ, καὶ 5, σημείοις, διαστήματι δὲ τῷ α φ, γραφήτωσαν δύο τόξα τεμνόμενα ἀλλήλοις, τῆς δὲ κοινῆς τῶν αὐτῶν τόξων τομῆς ἀντὶ κέντρου λαμβανομένης, γραφήτω τῷ αὐτῷ α φ, διαστήματι τὸ φ 5, τόξον. Τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἐπὶ τῆς τῶν λοιπῶν τόξων καταγραφῆς γενέσθω, καὶ καταγραφήσεται πάντως ἡ φ 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, β, θ, κ, μ, ν, Α, ξ, Β, Γ, ο, α, Ἕλιξ διπλῆ τῆς α β, περιστροφῆς. τὸν αὐτὸν τρόπον δυνήσῃ τὴν ἕλικα τριπλασιάσαι, τετραπλασιάσαι, ἢ ἄλλως πως αὐξῆσαι, τριπλασιασθείσης, τετραπλασιασθείσης, ἢ ἄλλως πως αὐξηνθείσης τῆς α β, καὶ τῶν ἄλλων γενομένων, ὡς ἤδη ἡρμήνευται.

Ἰστέον δ' ὅτι ὅσον ὁ τῆς α: περιστροφῆς κύκλος ὁ β γ δ ε ζ, καὶ ἡ α β, ἡμιδιάμετρος εἰς πλείω μὲν τῷ ἀριθμῷ, ἐλάττω δὲ τῇ πηλικότητι συνδιαιροῦνται μέρη, τοσοῦτον καὶ ἡ τῆς Ἕλικος καταγραφὴ ἀκριβεστέρα γίνεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς Ἑλικοειδοῦς γραμμῆς ἐπὶ τοῦ κύκλου τῆς α: περιστροφῆς εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι, αἱ ὑπό τε τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ τῆς Ἑλικοειδοῦς ἐμπεριλαμβανόμεναι Γραμμῆς ἀναλόγως ἔχουσι τοῖς ὑπ' αὐτῶν ἐμπεριλαμβανομένοις τόξοις τοῦ κύκλου. τῶν γὰρ α η, α γ, α λ, εὐθειῶν ἀγομένων, αἱ η θ, γ κ, λ μ, ἀναλόγως ἔχουσι τοῖς β η, β γ, β λ, τόξοις. ὡς γὰρ τὸ β η, τόξον πρὸς τὸ β γ, ἔχει καὶ τὸ η θ, μέρος τῆς α η, γραμμῆς πρὸς τὸ γ κ, μέρος τῆς α γ, καὶ ὡς τὸ β γ, πρὸς τὸ β λ, τὸ γ κ, πρὸς τὸ λ μ. ὁμοίως δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς τὸ β 13, τόξον, πρὸς τὸ β 12, τὸ α ο, μέρος πρὸς τὸ α Γ, καὶ ὡς τὸ β 12, πρὸς τὸ β 11, τόξον, τὸ α Γ, μέρος πρὸς τὸ α Β. εἰ γὰρ ἐπὶ τῆς α β, γραμμῆς π. φερομένης τὸ β, σημεῖον

ἐπὶ

ἐπὶ τὸ α, φέρεσθαι ὑποτεθῇ, εἴτε γοῦν τὸ α, ἐπὶ τὸ β, ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἡ μὲν αβ, γραμμὴ τὸν κύκλον περιγράψει, καὶ τὸ β, ἡ α, σημεῖον τὴν αὐτὴν αβ, διελεύσεται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. ὥστε φανερὸν ἐστι ὅτι γε τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ὑπὸ τῆς Ἑλικοειδοῦς τεμνομένων γραμμῆς ἀριθμητικῶς εἰσιν ἀνάλογα, τάτε ἐντὸς τῆς Ἑλικοειδοῦς περιεχόμενα μέρη, καὶ τὰ ἐκτὸς ταύτης ἐναπολειπόμενα. τῶν μὲν γὰρ αβ, αθ, ακ, καὶ αμ, εὐθειῶν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ἡ μὲν αβ, τὴν αθ, ἡ δὲ αθ, τὴν ακ, καὶ ἡ ακ, τὴν αμ, ὑπερέχει, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως. τῶν δὲ θη, κγ, μλ, καὶ τῶν ἄλλων ἴσῃ ὁμοίως ὑπεροχῇ, ἡ μὲν θη, ὑπὸ τῆς κγ, ἡ δὲ κγ, ὑπὸ τῆς μλ, ὑπερέχεται, ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

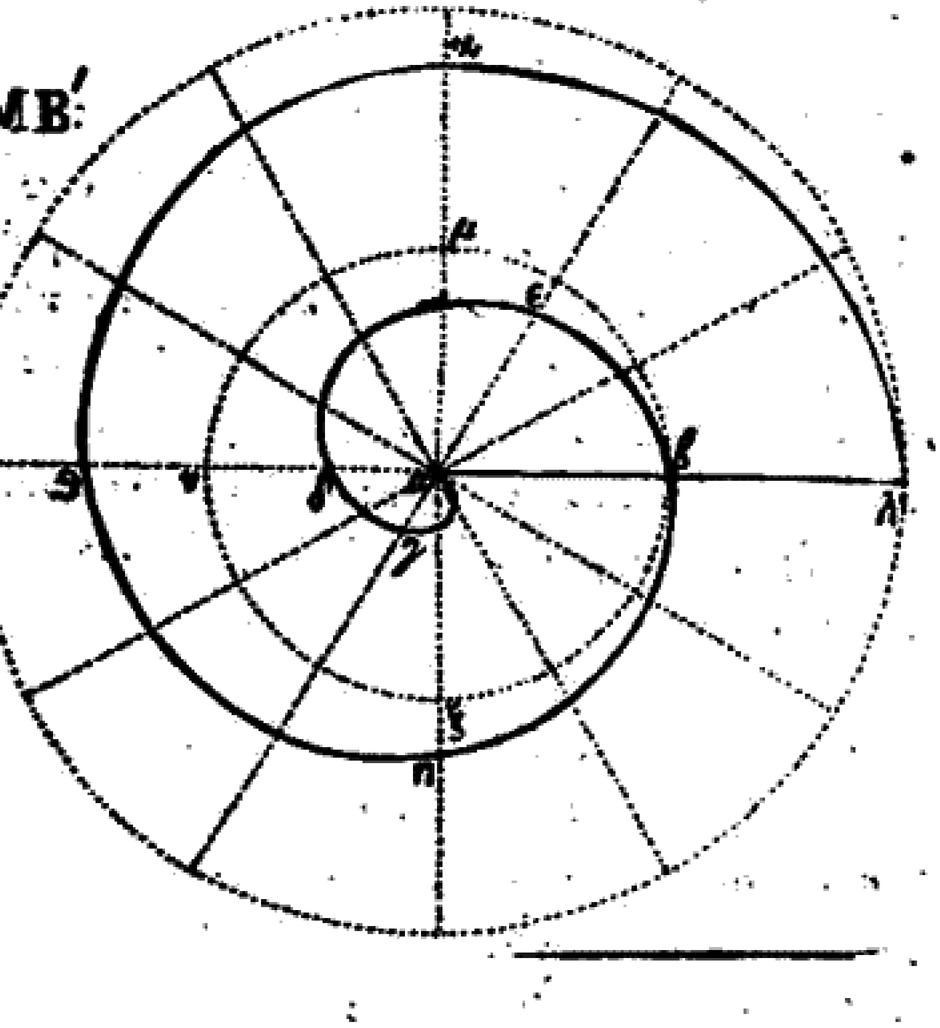
Πρότασις ΜΒ':

Τὸ ὑπὸ τῆς Ἑλικοειδοῦς γραμμῆς περιεχόμενον ἐμβαδὸν εὑρεῖν.

Ἔστω γραμμὴ Ἑλικοειδὴς ἡ α γ δ ε β η θ κ λ, καὶ ζητείσθω τὸ ὑπ' αὐτῆς περιεχόμενον ἐμβαδόν. Εὑρεθήτω δὴ α: τὸ ἐμβαδὸν τοῦ β μ ν ξ, κύκλου τῆς α: αὐτῆς περιστροφῆς, καὶ διαιρεθήτω εἰς μέρη τρία ἴσα, καὶ τὸ ἓν γ': μέρος τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἑξαπλασιασθήτω, τῷ δὲ γενομένῳ προστεθήτω τὸ γ': μέρος τοῦ κύκλου, καὶ τὸ συμποσούμενον ἴσον ἔσται τῷ ἐμβαδῷ τῷ ὑπὸ τῆς δοθείσης Ἑλικοειδοῦς περιεχομένῳ Γραμμῆς δυσὶ ταύταις περιστροφαῖς. εἰ δὲ καὶ γ': ἔχει περιστροφὴν ἡ Ἕλιξ, διπλασιασθήτω τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ γ': μέρους τοῦ κύκλου τῆς α: περιστροφῆς τῆς αὐτῆς Ἑλικοειδοῦς γραμμῆς, καὶ τῷ γενομένῳ προστεθήτω τὸ, τὸ γ': μέρος τοῦ αὐτοῦ κύκλου, καὶ τὸ τοῦ γ': ἑξαπλάσιον. εἰδ' αὖθις καὶ δ': ἔχει περιστροφὴν, τριπλασιασθήτω τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ γ': μέρους τοῦ εἰρημένου κύκλου, καὶ τῷ γενομένῳ προστεθήτω τὸ γ': μέρος τοῦ αὐτοῦ κύκλου, καὶ τὸ τούτου ἑξαπλάσιον, ἔτι δὲ καὶ τὸ τοῦ ἑξαπλασίου διπλάσιον, καὶ τὸ συμποσούμενον ἴσον ἔσται τῷ ἐμβαδῷ τῷ ὑπὸ τῆς Ἑλικοειδοῦς περιεχομένῳ γραμμῆς τετραπλῇ περιστροφῇ, καὶ ἐπὶ

Geom. Lib. 7. Fig.44.

ΜΒ'



ἐπὶ τῶν ἄλλων γενέσθω ἀναλόγως ἡ ἔρευνα. καὶ γὰρ τὸν θαυμάσιον Ἀρχιμήδην τὸ ὑπὸ τῆς α: περιστροφῆς τῆς ἑλικοειδοῦς γραμμῆς περιεχόμενον ἐπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ γ': μέρει τοῦ κύκλου τῆς αὐτῆς περιστροφῆς, ὡς ἐν προτάσει ιδ': ὁ αὐτός φησι τοῦ περὶ Ἑλίκων αὐτοῦ φιλοπονήματος. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς β': περιστροφῆς περιεχόμενον ἑξαπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῆς α: τὸ δὲ ὑπὸ τῆς γ': διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῆς β': τὸ δὲ ὑπὸ τῆς δ': τριπλάσιον τοῦ αὐτοῦ, ἤπερ ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῆς β': τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ε: τετραπλάσιον, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ἀναλόγως κατὰ τὴν ι: πρότασιν τοῦ αὐτοῦ.

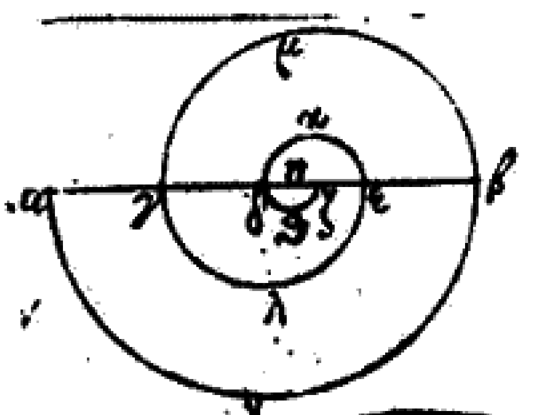
Ἄλλως εὐχερέστερον περὶ καταγραφῆς Ἑλικοειδοῦς Γραμμῆς.

Πρότασις ΜΓ'.

Περὶ τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν Ἕλικα περιγράψαι.

Ἔστω εὐθεῖα γραμμὴ ἡ αβ, περὶ ἣν γραπτέα ἐστὶν ἡ Ἕλιξ, καὶ διαιρεθήτω εἰς μέρη τέσσαρα ἴσα ἀλλήλοις τὰ αγ, γδ, δε, εβ, διχοτομηθήτω δὲ τὸ δε, καὶ τὸ ζ. ὁμοίως καὶ τὸ δζ, καὶ τὸ η, εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηζ, γραφήτω τὸ δθζ, τόξον, ἔπειτα κέντρῳ τῷ ζ, καὶ διαστήματι τῷ ζδ, γραφήτω τὸ δκε, τόξον. αὖθις κέντρῳ τῷ δ, καὶ διαστήματι τῷ δε, γραφήτω τὸ ελγ. ὁμοίως κέντρῳ τῷ ζ, καὶ διαστήματι τῷ ζγ, γραφήτω τὸ γμβ. τελευταῖον κέντρῳ τῷ δ, καὶ διαστήματι τῷ δβ, γραφήτω καὶ τὸ βνα, τόξον, καὶ ἕξεις γραμμὴν Ἑλικοειδῆ τὴν ανβμγλεκδθζ.

Geom. Lib. 7. Fig. 45.



ΜΓ'

Ἄλλως. Ἔστω εὐθεῖα γραμμὴ ἡ αβ, ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινομένη ἑκατέρωθεν, καὶ τμηθήτω τὸ αβ, διάστημα δίχα καὶ τὸ γ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ γβ, γραφήτω τὸ αβ, τόξον. Εἶτα ἀμοιβαδὸν εἰλημμένοις κέντροις τοῖς αβ, διαστήμασι δὲ τοῖς ἐμπεριλαμβανομένοις μεταξὺ αὐτῶν τόπων καὶ τοῦ σημείου, καθ' ὃ ἕκαστον τόξον τῆς Ἕλικος ἅπτεται τῆς εὐθείας γραμμῆς, καταγράψεις Ἕλικα μείζονα ἐφ' ὅσον βούλει. Οἷον κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα, γραφήτω τὸ αΓ, τόξον, κέντρῳ δὲ τῷ α, καὶ διάστημα.

στήματι τῷ αΓ, γραφέτω τὸ Γδ, κέντρῳ τῷ β, καὶ διαστήματι τῷ βδ, γραφέτω τὸ δε. κέντρῳ τῷ α, καὶ διαστήματι τῷ αε, γραφέτω τὸ εζ, ὁμοίως κέντρῳ τῷ β, καὶ διαστήματι τῷ βζ, γραφέτω τὸ ζη, ὡσαύτως κέντρῳ τῷ α, καὶ διαστήματι τῷ αη, γραφέτω τὸ ηθ, πάλιν κέντρῳ τῷ β, καὶ διαστήματι τῷ βθ, γραφέτω καὶ τὸ θκ, καὶ αὖθις κέντρῳ τῷ α, καὶ διαστήματι τῷ ακ, γραφέτω τὸ κλ, τόξον, καὶ οὕτω καθεξῆς ὁποίαν καταγράψεις Ἑλικοειδῆ γραμμὴν ἐπ' ἄπειρον, εἴτουν ἀπείροις συντιθεμένην περιστροφαῖς.

Ἰστέον δὲ, ὅτι ὅσον ἐγγύτερον ἀλλήλοις λαμβάνονται τὰ κατὰ μέσον τῆς εὐθείας γραμμῆς δύο σημεῖα, οἷα τὰ αβ, τοσοῦτον ἐν ἐλάττονι ἐπιπέδῳ μείζων καταγράφεται Ἕλιξ, μείζων γὰρ Ἕλιξ ἐστὶν ἡ πλείοσι περιστροφαῖς συγκειμένη.

Τέλος τοῦ Ἑβδόμου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου.

ΣΤΟΙ