



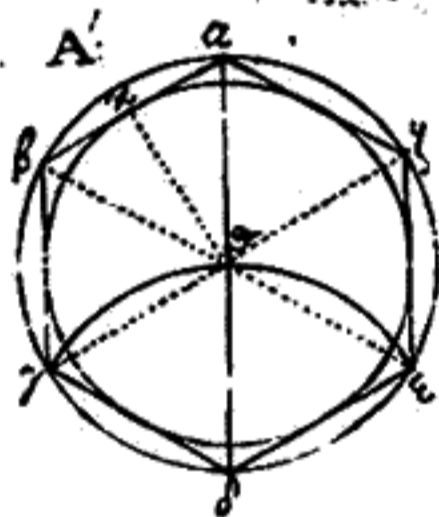
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Πρότασις Α΄:

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἐξάγωμον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγ-
γράψαι .

Εἴπω δὴ εἰς τὸν $αβγδεζ$, κύκλον ἐξάγωμον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι . Εἰς δὲ τὴν αὐτὴν κατασκευὴν ἢ χθω διὰ τοῦ θ , κέντρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου διάμετρος ἢ $αθδ$, καὶ κέντρον μετὰ τοῦ θ , διαστήματι δὲ τοῦ $\theta\theta$, γραφήτω ἔπρος κύκλος τέμνων τὸν δοθέντα κατὰ τὰ γ , καὶ ϵ , σημεία, καὶ ἐπιζώχθῃσα ἑκατέρα τῶν $\gamma\theta$, $\epsilon\theta$, ἢ χθω καὶ τὸ συνεχὲς ἀπὸς τὰ β , καὶ ζ , σημεία, καὶ ἐπιζώχθωσαν αἱ $αβ$, $αζ$, $\gammaβ$, $\zeta\epsilon$, $\gamma\delta$, $\delta\epsilon$, καὶ τὸ $αβγδεζ$, ἐξάγωμον ἰσόπλευρόν τε ἔσαι καὶ ἰσογώνιον κατὰ τὴν $\iota\epsilon$: τὴν δ : τὴν Στοιχειωτῶν . Τῦτον μετὰ δὴ τὸν ἔσπον δωματὸν καὶ περιγραφῶναι ἐξάγωμον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περὶ οἰονδήποτε κύκλον . Γίνεται δὲ ἡ περιγραφή, ὡς ἀνοημιλώδεται περὶ τὴν πενταγώνου, ἐξαγμοσύων δηλονότι ἀδειῶν τῶ αὐτῶ φεῖν εἶπειν ἀπομύων κύκλου καὶ τὰ $αβγδεζ$, σημεία . Δοθέντος δὲ ἐξαγμὸν ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, εἰὼ αἱ $αδ$, $βε$, $\gammaζ$, ἐπιζώχθωσι, καὶ κέντρον μετὰ θ , διαστήματι δὲ τοῦ $\theta\alpha$, ἢ $\theta\beta$, κύκλος γραφῆ, περιγραφῆσεται ἔπρος περὶ τὸ δοθέν ἐξάγωμον, εἰδὲ ἐπὶ τῆς $αβ$, ἢ $αζ$, ἢ ἄλλης τινὸς τῶ λοιπῶν τοῦ ἐξαγμὸν πλῶρων κάθετος συσταθῆ, πίπτωσα ἀπὸ τοῦ θ , δὸς εἶπειν, ἀπὸς τὸ $\theta\kappa$, καὶ κέντρον μετὰ τοῦ θ , διαστήματι δὲ τοῦ $\theta\kappa$, κύκλος γραφῆ, ἐγγραφήσεται πάντως ὁ κύκλος ἔπρος εἰς τὸ δοθέν ἐξάγωμον .

Geom. Lib. 7. Fig. 1.



Πρότασις Β'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἐπιταγώμου ἐγγράψαι ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον .

Εἶτω δὴ εἰς τὸν αβγ, κύκλον ἐπιτάγωνον ἐγγράψαι ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον . Ἴνα δὲ πῶπο γένηται, ὀριθήτω τὸ ε, κέντρον τοῦ δοθέντος κύκλου, καὶ ληφθήτω κέντρον μετὰ τὸ α, τυχόν σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφέρειας τοῦ αὐτοῦ κύκλου, διάστημα δὲ τὸ αε, καὶ γραφήτω ἔπρος κύκλος τέμνων τὸν δοθέντα καὶ τὸν β, καὶ γ, καὶ ἐπιζώχθω ἡ βγ, ἥτις τμηθήσεται δίχα καὶ τὸ δ, ὑπὸ τῆς αε. τῶν δ' ἔπω γενομένων ἡ βδ, ἡ δγ, πλάρα ἴσαι ἐπιταγώμου εἰς τὸν δοθέντα ἐγγραφομένης κύκλου. Δείκνυται.

Geom. Lib. 7. Fig. 2.



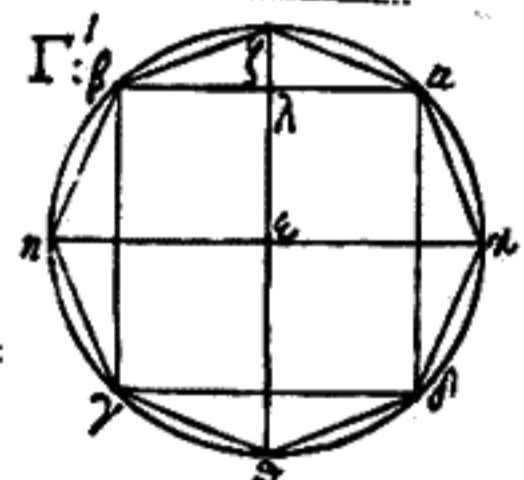
Μιτριχθήτω δὴ ἡ γδ, ἐπὶ τῆς γζ, ἐφ' ἧς συνισάδω τρίγωνον ἰσοσκελές, ἔχον ἑκατέρω τῶν ἑρῶν τῆ βάσει γωνιῶν ἑπιπλασίονα τῆς καὶ κορυφῶν, οἷον τὸ γζκ, καὶ καὶ τῶν λγ': τῶ ε': τῶ Στοιχιστῶ, ἡπε γμλκ, καὶ ζηθκ, περιφέρειαι, ἑκατέρα ἑπιπλασία ἐστὶ τῆς γζ, περιφέρειας, αἱ γὰρ περιφέρειαι ἔχουσι ἑρῶν ἀλλήλας, ὡς αἱ ἐπ' αὐτῶν βιβηκῆαι γωνίαι. καὶ ἡ μετὰ ὑπὸ γζκ, γωνία βέβηκεν ἐπὶ τῆς γμλκ, ἡ δὲ ὑπὸ ζγκ, ἐπὶ τῆς ζηθκ, περιφέρειας, ἀλλ' ἑκατέρα τῶν τῶν γωνιῶν ἑπιπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ γκζ, καὶ κορυφῶν, βιβηκῆαι ἐπὶ τῆς γζ, περιφέρειας, καὶ αἱ περιφέρειαι ἄρα γμλκ, καὶ ζηθκ, ἑκατέρα ἑπιπλασία ἐστὶ τῆς γζ. καὶ συνδέσει αἱ δύο ὁμοῦ γμλκ, κθκζ, τῆς γζ, ἑξαπλασιαί εἰσι. ἑρῶν δὲ τῆς γζ, ὁ ὅλος κύκλος ἑπιπλασιόσεται τῶ γζ, τμήματος. ἡ γζ, ἄρα περιφέρεια ἐπιτάκις μετρεῖ τῶν περιμέτρων τοῦ ὅλου κύκλου, καὶ κατὰ τῶν κθ': τοῦ γ': τῶ αὐτῶ, καὶ ἡ γζ, ὑποτείνουσα ἐπιτάκις ἑρῶν ἑρῶν ἀρμοδῆσεται περιφορῶν ὑφ' ὅλων τῶν περιμέτρων τοῦ κύκλου, ὡς ἐγγραφήσεται τὸ γμλκθκζ, ἐπιτάγωνον ἰσόπλευρον. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, δῆλον. ἐπιζώχθῆσαι γὰρ αἱ γη, μζ, ἴσονται ἴσαι. κατὰ γὰρ τῶν ἑρῶν ῥηθῆσαν κθ': ὑπὸ τῆς ἴσας περιφέρειας ἴσαι ἀφῆσαι ὑποτείνουσιν (αἱ γὰρ μγζ, γζη, περιφέρειαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν) ἀλλ' εἰσὶν ἴσαι καὶ αἱ μγ, γζ, ταῖς γζ, γη, καὶ τὸ β': ἀξίωμα τοῦ Εὐκλείδου, ἄρα καὶ τῶν ἡ: τῶ α': τῶ αὐτῶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ μγζ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῆ ὑπὸ γζη. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται ὁμοίως ἴσαι καὶ αἱ λοιπαὶ τῶ ἐπιταγώμου γωνίαι, ὡς καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Γ΄

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλου ὀκτάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐστω δοθεὶς κύκλος ὁ $\alpha\beta\gamma\delta$, εἰς ὃν ζητεῖται ὀκτάγωνον ἐγγραφῆναι ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἐγγραφήτω δὴ α : εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον τὸ $\alpha\beta\gamma\delta$, πεντάγωνον. εἴτα διαιρεθῆτω ἕκαστη τῶν τέσσα πλευρῶν δίχα, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου πίπτω κάθετος ἐπὶ πᾶς τῆς ἑκάστης πλευρᾶς, ἐξαγομένη μὲχρι πᾶς περιφέρειας τοῦ κύκλου, ὡς ἢ $\epsilon\kappa$, ἢ $\epsilon\theta$, ἢ $\epsilon\eta$, ἢ $\epsilon\zeta$, καὶ τμηθήσεται ὁ δοθεὶς κύκλος εἰς μέρη ὀκτὰ ἴσα, καὶ τὰ $\alpha, \zeta, \beta, \eta, \gamma, \theta, \delta, \kappa$. ἐπιζώχθουσιν δὲ τῶν $\alpha\zeta, \zeta\beta, \beta\eta$, καὶ λοιπῶν, ἐγγραφήσεται εἰς αὐτὸν ὀκτάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ὁ λόγος σαφής. Διαιρεθείσης γὰρ πᾶς $\alpha\beta$, δίχα κατὰ τὸ λ , ὑπὸ πᾶς $\epsilon\zeta$, ἔσται ἢ μὲν $\alpha\lambda$, ἴση τῇ $\lambda\beta$, ἢ δὲ ὑπὸ $\alpha\lambda\zeta$, γωνία τῇ ὑπὸ $\beta\lambda\zeta$, καὶ τὴν γ : τῇ γ : τῇ Στοιχειωτῇ. ὡςτι καὶ τὴν δ : τῇ α : τὰ αὐτὰ, ἔσται καὶ ἢ $\alpha\zeta$, ὑποτείνουσα ἴση τῇ $\beta\zeta$, καὶ δὲ τὴν κ : τῇ γ : τῇ αὐτῇ, καὶ ἢ $\alpha\zeta$, περιφέρεια ἴση ὁμοίως ἔσται τῇ $\beta\zeta$, περιφέρειᾳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δεχθήσεται καὶ ἢ $\beta\eta$, τῇ $\eta\gamma$, καὶ ἕκαστη τῶν λοιπῶν τῇ ἐφεξῆς.

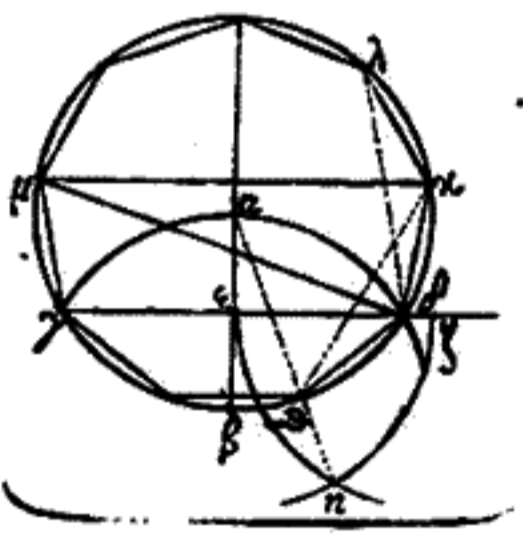
Geom. Lib. 7. Fig. 2.



Πρότασις Δ΄

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλου ἑμπετάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Κείθω δὴ εἰς τὸν $\delta\beta\gamma$, κύκλου, εἰς κέντρον τὸ α , ἑμπετάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. Εἰς κατασκέλευ δὲ τῆς ληφθείσης κέντρον τὸ β , τυχρὸν σημεῖον ἐπὶ πᾶς περιφέρειας τοῦ δοθέντος κύκλου, διάστημα δὲ τὸ $\beta\alpha$, καὶ γραφήτω ἔπρος κύκλος πέμπτων τὸν δοθέντα καὶ τὰ δ , καὶ γ , καὶ ἐπιζώχθωσιν αἱ $\alpha\beta, \gamma\delta$, ἢ μὲν ὑφ' ἑκατέρου τῶν σημείων α , καὶ β , περὶ τῆς $\mu\epsilon$, ἢ δὲ, ὑπὸ τῷ γ , μόνον, ἀπὸ δὲ τῷ δ , ἐξαγομένη καὶ τὸ σωσχῆς. εἴτα τῷ αὐτῷ $\beta\alpha$, διαστήματι κέντρον μὲν τῷ ϵ , καθ' ὃ αἱ $\alpha\beta, \gamma\delta$, τέμνονται, γραφήτω τὸ $\zeta\eta$, τόξον, κέντρον δ' αὐθις τῷ ζ , γραφήτω ὁμοίως τῇ $\epsilon\eta$, καὶ ἐπιζώχθω ἢ $\alpha\eta$, πέμψουσα τὸν δοθέντα κύκλον καὶ τὸ θ , καὶ τὸ $\epsilon\theta$, ἑνατον ἔσται μέρος τῷ δοθέντος κύκλου. Δείκνυται.



Προσαρμωθήτωσιν ὑπὸ τῶν περιφίρειων τοῦ κύκλου δύο ὀρθοίαι, αἱ $\delta\kappa$, καὶ $\lambda\epsilon$, ἕκαστη.

ἑκατέρα ἴση τῇ $\theta \delta$. καὶ ἐπὶ τῆς $\delta \kappa$, συσταθῆτω τρίγωνον ἰσοσκελές, ἔχον ἑκατέρω πῶν ἑπὶ τῇ βάσει γωνιών πῆραπλασίονα τῆς καὶ κορυφῆς, καὶ τὴν ι : τοῦ δ : Στοιχειωτῶς, εἶον τὸ $\delta \kappa \mu$, ἢ τῶν ἑπὶ τῇ δ , καὶ κ , γωνιών ἑκατέρα πῆραπλασία τῆς ἑπὶ τῇ μ . καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ $\theta \kappa$, $\delta \lambda$, καὶ καὶ τὴν $\delta \alpha$ δῶξιν τῆς $\delta \delta$ πῆρας τῷ παρόντι, καὶ πῆς ἐκεί ἑσοσημείας ἑσοπέσις, διαχθήσεται ἡ $\delta \kappa$, ἢ ἴση ληφθεῖσα τῇ $\theta \delta$, ἐνστάσις μίξιν τὸν $\beta \theta \delta \kappa \lambda \mu \gamma$. κύκλον, ὡςτε μεταφορικῶς ἐγγράφει ἐνστάγων ἰσόπλευρον. ὅπιρ ὅτι καὶ ἰσογώνιον δείκνυται ἔτω. κατὰ γὰρ τὴν ι : τῷ α : τῷ αὐτῷ, ἴσαι ἢ ὑπὸ $\theta \delta \kappa$, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ $\delta \kappa \lambda$, ὡσαύτως διαχθήσονται καὶ αἱ λοιπαί, ἑσοαρμωσμένον τῶν πλευρῶν ὑπὸ τὴν περιμέτρῳ τοῦ κύκλου. Ἐγγέγραπται ἄρα εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἐνστάγων ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον. ὅπιρ ἡ ι τὸ ἑσοτιθέσθαι.

Πρότασις Ε΄:

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον δεκάγωνου ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐστω κύκλος ὁ $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$, εἰς ὃν δεῖ δεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἰσογώνιον ἐγγράψαι. Ἐγγραφήτω δὴ α : εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον πεντάγωνον, καθ’ ὃν ἑσοημεύεται ἔσοπον. εἴτα διαριθῆτω δέχα ἑκάστῃ περιφέρειᾳ τῶν τῷ πενταγώνῳ πλευρῶν, καὶ διαριθῆσεται ὁ κύκλος εἰς δέχα ἴσα μέρη. ὑποτεινυσῶν δὲ ἀγομείων ἀφ’ ἑκάστου σημείου ἑφ’ ἑκαστον, ἐγγραφήσεται δεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ὁ λόγος σαφῆς ἐξ αὐτῆς τῆς κατασκευῆς.

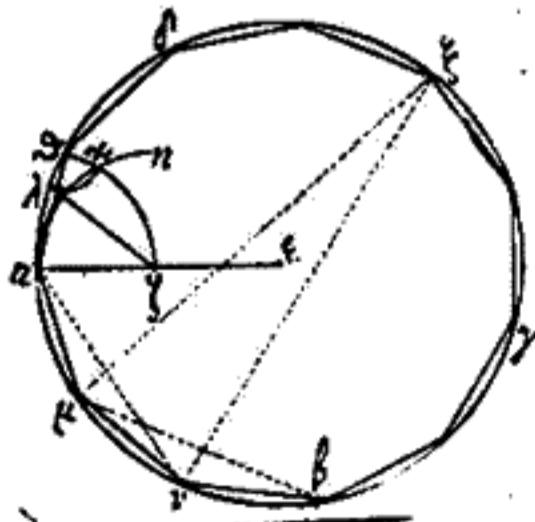
Geom. Lib. 7. Fig. 4



Πρότασις ς΄:

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἐνδεκάγωνου ἰσόπλευρόν τε ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐστω δὴ εἰς τὸν $\alpha \beta \gamma \delta$, κύκλον, ἢ κέντρον τὸ ϵ , ἐνδεκάγωνον ἐγγράψαι ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Διαριθῆτω δὴ ἡ $\alpha \epsilon$, ἢ ἡμιδιάμετρος τῷ δοθέντι κύκλου δέχα καὶ τὸ ζ , καὶ ἀπὸ μὲν τῶν α , καὶ ζ , σημείων ὡς ἀπὸ κέντρων, διαστήματι τῷ $\alpha \zeta$, γραφήτωσαν δύο τόξα τὰ $\alpha \eta$, $\zeta \theta$, τιμώμενα κατὰ τὸ κ , ἀπὸ δὲ τοῦ θ , καθ’ ὃ ὁ δοθείς $\alpha \beta \gamma \delta$, κύκλος πίμπεται ὑπὸ τοῦ $\zeta \theta$, τόξου, διαστήματι τῷ $\theta \kappa$, γραφήτω ὁμοίως τόξον τὸ $\kappa \lambda$, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ $\zeta \lambda$, καὶ ἴσαι αὐτῶν πλευρὰ τῷ ἐγγραφομένῳ ἐνδεκαγώνῳ. εἰς τὸν δοθέντα $\alpha \beta \gamma \delta$, κύκλον.



168 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

κλον . ταύτων δ' ἐστὶν εἶπειν καταμεξῆν τὴν ζ λ, ἐδεκάκις , τὸν α β γ δ, κύκλον . Δείκνυται .

Προσημώθωσαν ὑπὸ τὴν α β, περιφέρειαν ἑξῆς ἀθεῖαι αὐτὰς α μ, μ ν, ἡ δὲ γὰρ ἐκαστὴ ἴση τῇ ζ λ. καὶ ἐπὶ τῆς μ ν, συνασάθω ἕξωγωνον ἰσοσκελεῖς, τὸ μ ν ξ, καὶ ἐκατέρω τῶν ἀπὸς τῆς βάσει γωνιῶν, ἀμέλει τὰς ἀπὸς τῆς μ, καὶ ν, περὶ τῆς α μ τῆς ἀπὸς τῆς ξ, καὶ κορυφῶν, καὶ καὶ τὴν δεῖξιν τῆς δαύτερας τῆς παρόντος, καὶ τὰς ἐκεῖ προσήγουσας ἀποδείξεις, ἡ περιφέρεια τῆς ὅλης κύκλου ἐδεκάπλασιός ἐστι τῆς μ ν, περιφέρειας, καὶ ἡ μ ν, ὑποκείμενα περιφερομένη ἐδεκάκις, ἐγγράφεται εἰς τὸν κύκλον ἐδεκάγωνον ἰσόπλευρον. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον δῆλον. καὶ γὰρ τὴν δὲ τῆς α: Στοιχειώτῃ, ἡ ὑπὸ α μ ν, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ μ ν β. διὰ ταῦτα δειχθήσονται καὶ αὐτὴ ἐξῆς τῆς ἐδεκάγωνου γινόμενα γωνία ἴσαι. Εἰς τὸν δευτέρωτα ἄρα κύκλον ἐγγράφεται ἐδεκάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει δεικνύσθαι.

Ἀποσημειώσεις.

Ἰστέον δ' ὅτι περὶ τῆς τῶν πολυγώνων κατασκευῆς ἐδεμίᾳ εὑρηται μέθοδος τοῖς περὶ πάλαι καὶ νῦν περὶ τὰ ποιαῦτα ἀρχολογίαις, ὥστε δι' αὐτῆς διύσασθαι τὸν βεβλημένον οἰονδήποτε ἐγγράφειν πολύγωνον γεωμετρικῶς εἰς τὸν τυχόντα κύκλον, ἢ γὰρ ἐπὶ τῆς δοθείσης ἀθεῖας, περὶ δ' ὅσων Εὐκλείδης ἠρμύωδισε καὶ τινες ἄλλοι, ταῦτα μόνον χεῖρον καὶ τῆς ἀποδείξεως γεωμετρικῆς ἐννοήσασθαι ἀποδείξεως. Εἰδέγει καὶ παρὰ ταῦτα τοῖς μεταγενετέροις ἄλλα τινὰ πολυτρόπως τῆς ἰδίας ἐτυχε κατασκευῆς, ἀμοιρῶσι μὲντοι τὰ πλείω τῆς ἀποδείξεως αὐτοῖς λόγῳ καὶ ἀποδείξεως, ὡς ἐπὶ τῆς παρόντος, δῆλον καθίσταται. Εἰ γὰρ καί τισι μὲν τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, καὶ τὰς ἀποδείξεις ἐξεδέμιθα, ἀλλ' ἕκ ἐκ τῆς κατασκευῆς ἢ δεῖξεις ἐκάστῃ παρῆκται. τὸ γὰρ πλῆθος τῶν ἀπὸ τῶν ἕξωγωνων ἀρχομένων σχημάτων καὶ τὴν ἐπ' ἀπειρον τῶν ἀριθμῶν αὐξάνουσαν ἀπόδοσιν. διὸ δὴ ἐδὲ μέθοδῳ τινὶ οἰόντε ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀθεῖας οἰονδήποτε πολύγωνον γεωμετρικῶς συστήσασθαι, ἢ εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγράφαι κύκλον. τὸ γὰρ ἀπειρον ἀπερίληπτον, ἢ δὲ εἰς τὸν κύκλον ἐγγράφειν τῶν αὐτῶν, ἤρηται τῆς καὶ πάντα ἀριθμῶν τῆς κύκλου διαίρεσιως. Τὸ δὲ τὸν κύκλον καὶ τὸν δοθέντα, ἢ γὰρ ἀποσπασθέντα ἀριθμῶν διαίρειν, δι' ὀργάνων μὲν πως γεωμετρικῶς γινώσκουσι δυνάτων, καὶ γὰρ καὶ πρὶ δυσχερέστατον διὰ τὴν τῶν ἀριθμῶν ἐπ' ἀπειρον ἀπόδοσιν, μέθοδῳ δὲ ὑδαμῶς. ὥσπερ γὰρ τὸ περὶ τῶν ἑξωγωνων δι' ἰσοσκελεῖς ἕξωγωνων ἐκατέρω τῶν ἀπὸς τὴν βάσιν γωνιῶν διπλασίονα ἕξωγωνον τῆς καὶ κορυφῶν εἰς κύκλον ἐγγράφεται, ἐποσί γὰρ πᾶσι καὶ τὰ λοιπὰ τῶν ἰσοπλευρῶν ἰσογώνιων σχημάτων, διὰ τῆς ἰσοσκελεῖς ἕξωγωνων διύσασθαι εἰς κύκλον ἐγγράφεται. Δεῖ δὲ τὸ ἕξωγωνον ἐκατέρω τῶν ἀπὸς τὴν βάσιν γωνιῶν πολλαπλασίονα, ἢ ἐπιμερῆ τῆς καὶ κορυφῶν ἔχειν, καθὰ ὁ ἀριθμῶν τῶν πλεονῶν τῆς δοθείσης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟΝ ΠΑΙΣΙΟΝ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΩΝ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΠΙ. ΚΑΘΗΜΕΡΗ Κ.Τ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

δοθέντος απαιτεῖ χήματος. πῶν μὲν γὰρ περὶ τοπλόρων τὸ α': ὅ ἐστι τρίγωνον ἰσοπλόρον, εἰς τὸν τυχόντα κύκλον ἐγγραφῶναι δύναται δι' ἰσοσκελεῖς τρίγωνον, ἑκατέρῃ πῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν ἴσῳ ἔχοντος τῆ κατα κορυφῶν, τὸ δὲ πεντάγωνον β': ὃν τῆ τάξει, ὅταν πῶν πρὸς τῆ βάσει γωνιῶν ἑκατέρα τοῦ ἰσοσκελεῖς τρίγωνου διπλασία εἴη τῆς κατὰ κορυφῶν· τριπλασίας δὲ ἔσσης, τὸ ἑπτάγωνον ἐγγράφεται, γ': γὰρ ἐν τοῖς περὶ τοπλόροις, ὡσπερ καὶ τὸ ἐννεάγωνον δ': ὃν δὲ ἰσοσκελεῖς τρίγωνον ἐγγράφεται, τετραπλασίονα ἔχοντος ἑκατέρῃ πῶν πρὸς τῆ βάσει γωνιῶν τῆς κατὰ κορυφῶν, καὶ ἐπὶ πῶν ἄλλων ἀνάλογως. Τῶν δ' ἀρτιοπλόρων τὸ τὴν α': χῶραν ἔχον, ταῦτ' ἐστὶν εἰπεῖν, τὸ τετράγωνον, δύναται εἰς κύκλον ἐγγραφῶναι δι' ἰσοσκελεῖς τρίγωνον ἡμιόλιον ἔχοντος ἑκατέρῃ πῶν πρὸς τῆ βάσει γωνιῶν τῆς κατὰ κορυφῶν. τὸ δὲ ἑξάγωνον, πλῆκε τὸ ἰσοσκελεῖς τρίγωνον, ἑκατέρῃ πῶν πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ γωνιῶν διπλασιφημίσειον ἔχει τῆς κατὰ κορυφῶν, ὡσπερ καὶ τὸ ὀκτάγωνον, ὅταν ἑκατέρῃ πῶν πρὸς τὴν βάσιν τριπλασιφημίσειον ἢ τῆς κατὰ κορυφῶν, γ': γὰρ τῆ τάξει πῶν ἀρτιοπλόρων.

Ὅτι δὲ ταῦτα ἔπος ἔχει, ἐξ ἐπαγωγῆς δυνάμεθα συναγαγεῖν. εἰ μὲν γὰρ τρίγωνον ἰσοσκελεῖς εἰς κύκλον ἐγγραφῆ, ἴσῳ ἔχον ἑκατέρῃ πῶν πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆ γωνιῶν τῆς κατὰ κορυφῶν, ἰσοπλόρον τε ἔσαι καὶ ἰσογώνιον. ἑκάστη γὰρ πῶν γωνιῶν αὐτῆ ἐπὶ ἴσης βίβηκε περιφέρειας. εἰδὲ γὰρ ἑκατέρῃ πῶν πρὸς τὴν βάσιν διπλασία ἢ τῆς κατὰ κορυφῶν, αἱ δύο ὁμῶς πρὸς τὴν βάσιν τετραπλασίαι ἔσονται τῆς κατὰ κορυφῶν, ὡς ἢ τῆ κύκλου περιφέρεια, ἐφ' ἧς ἢ κατὰ κορυφῶν βίβηκε γωνία, ε': μέρος ἐστὶ τῆ ὅλης κύκλου, ὑποτετραπλάσιος ἔσται τῆς λοιπῆς περιφέρειας. Ἐὰν δὲ τριπλασία γίνηται ἑκατέρῃ πῶν πρὸς τὴν βάσιν τῆς κατὰ κορυφῶν, ἢ περιφέρεια, ἐφ' ἧς ἢ κατὰ κορυφῶν γέγονε γωνία, ζ': ἔσται τῆ κύκλου μέρος. ἑκατέρῃ γὰρ πῶν δύο λοιπῶν περιφερειῶν, ἐφ' ὧν αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι βιβήκασιν, τριπλασία ἐστὶ τῆς αὐτῆς, ἐφ' ἧς ἢ κατὰ κορυφῶν βίβηκεν. ἔχουσι γὰρ πρὸς ἀλλήλας αἱ περιφέρειαι ὡς αἱ γωνίαι. ὡσπερ δὲ ἐπὶ τῶν περὶ τοπλόρων, ἔπω γὰρ καὶ ἐπὶ τῶν ἀρτιοπλόρων τὸν λόγον ἐκάστου συναγαγεῖν ἔχομεν. πλῆκε γὰρ τῆ ἰσοσκελεῖς τρίγωνου ἑκατέρῃ πῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν τῆς κατὰ κορυφῶν ἡμιόλιος εἴη, δῆλον, ὅτι ἢ περιφέρεια, ἐφ' ἧς ἢ κατὰ κορυφῶν βίβηκε γωνία, δ': μέρος ἐστὶ τῆ ὅλης κύκλου, καὶ ἢ ταύτης ὑποτείνουσα, πλόρα τῆ ἐγγραφομένη εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον τετραγώνου ἐστὶ, πῶν γὰρ λοιπῶν δύο περιφερειῶν, ἐφ' ὧν αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι βιβήκασιν, ὑποτριπλασίος ἐστὶν. ὅτι δὲ πῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν ἑκατέρῃ τῆς κατὰ κορυφῶν διπλασιφημίσειον ἢ, ἔκτον τῆ κύκλου μέρος ἔσαι ἢ περιφέρεια, ἐφ' ἧς ἢ κατὰ κορυφῶν βίβηκεν, ὑποπενταπλάσιος γὰρ τοι δέσκειται πῶν λοιπῶν δύο, ἐφ' ὧν αἱ πρὸς τὴν βάσιν βιβήκασιν. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων κατὰ τὸ ἀνάλογον πῶν πλόρων ἑκάστη.

εἰ μὲν ἔν οἶόν τε ἦν μέθοδόν τινα γεωμετρικὴν ὀρίσθηναι, δι' ἧς γένοιτο αὐτὸ τρίγωνον ἰσοσκελεῖς ἑκατέρῃ πῶν πρὸς τῆ βάσει γωνιῶν πολλαπλασίονα ἔχον τῆς

170 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

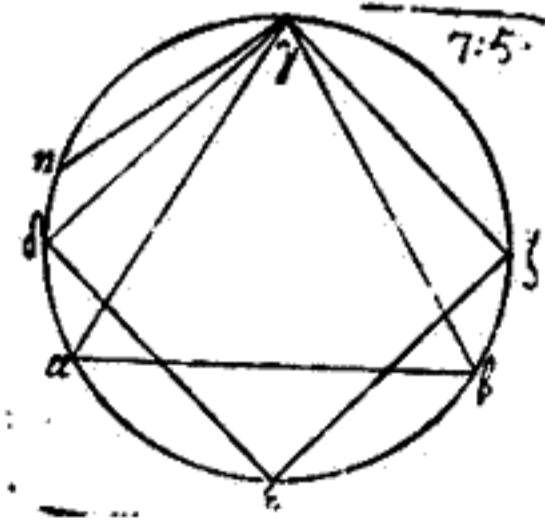
κατὰ κοροφήν, ἢ ἐπιμερῆ κατ' οἴονδ' ἕνα λόγον, ῥαδίως αὖ ἄκων χῆμα ἰσοπλάροισι τε καὶ ἰσογώνιοι συσασθῆν ἐπὶ τῆς τυχεύσης ἀξείας, ἢ γὰρ ἐγγραφεῖν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῶν περὶ τοπλάρων καὶ ἀρτισπλάρων, ἐπεὶ δὲ τῶτο ἀμήχανον, διατί τοῦτο ἐπείρας τινὰς μεθωδίσασατο ἐφόδος πρὸς μικρὰ τῶν φιλομαθῶν παρηγορίας εἰ περὶ τὰ τοιαῦτα ἐναχολύμενοι. διατὶ δὲ τῆς περὶ ἀγωγισίας ἐξομοσ καὶ τῶν τῶ τοιαῦτα ἕργων κατασκευῶν, ὡς δ' ὁμοίως.

Τῶ γὰρ βυλομεθῶ εἰς κύκλον τινὰ τὸ τυχόν ἐγγράψαι πολύγωνον, διατριπτόν α': τὸν μὲν κύκλον εἰς ἴσα μέρη τέσσαρα, α' καὶ περτημορία καλεῖται, εἰ δὲ τῶ αὐτῶ περτημορίων εἰς ποσαῦτα, ὅσαι καὶ αἱ τῶ δοθέντος πολυγώνου γωνίαι τε καὶ πλάραί. εἴπα εἰλήφθω τῶν τέσσαρα, καὶ ἔσαι πλάρα τῶ δοθέντος πολυγώνου. οἷον ἔστω εἰς κύκλον τινὰ ζητεῖται ἐγγραφεῖν περὶ εἰπεῖν δωδεκάγωνον, διατριπτόν εἰς τῶν πῆ κύκλου περτημορίων εἰς μέρη δυοκαίδεκα, καὶ τῶν εἰλήφθω τῶ κοινῶ διαβήτη τὰ τέσσαρα, καὶ τῶ αὐτῶ διαστήματι διατριπθήσεται ὁ κύκλος εἰς μέρη δαδέκα, ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶ ἄλλων. Ὅτι δὲ τῶτο ἕπας ἔχει, δῆλον. Εἰ γὰρ ὁ τῶν μέρων τῶ διατριπτότος περτημορία ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶ τῶ κύκλου μέρων πολλαπλασιασθῆ, πολλαπλασιασθῆ δ' ἔτι καὶ ὁ τῶ πλάρων τῶ δοθέντος πολυγώνου ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶ δοθέντων μέρων, ὁ αὐτὸς γινίσσεται ἀριθμὸς. ὁ, τε γὰρ ἀριθμὸς τῶ τῶ διατριπτότος περτημορία ἴσος ἐστὶ τῶ ἀριθμῶ τῶ πλάρων, καὶ ὁ τῶ μέρων τῶ κύκλου τῶ τῶ λαμβασομένων μορίων.

Αὕτη μὲν ἢ ἐφόδος ἐργοδισάτη ἐστὶ διατὶ τῶν δυοχέρειων τῆς τῶ περτημορία ἀπαιτημένης διατρέσεως, ἐφαρμόττει μὲν τοι εἰς κατασκευῶν παντὸς πολυγώνου περιτοπλάρου τε καὶ ἀρτισπλάρου. περὶ δὲ τῶν παρωτυμεμένων πολυγώνων ὑπ' ἀριθμῶν δατέρων τε καὶ σαυθέντων ἐπείρας τινὰ ἐκ τῆς τῶ περτημορία ἀπαιτημένης κατασκευῆς, ἢς ἐφόδος Εὐκλείδης, ἐρωσίθησας, ἔστι δὲ τοιαύτη.

Δοθέντος τῶν πολυγώνου τινὸς, εἰ δὲ τῶν πλάρων ἀριθμὸς β': καὶ σωθέντος ἐστὶ, ταῦτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν ἀριθμῶν τινι μίξυμενος κατὰ τινὰ ἀριθμὸν. Εὐριθήσασα οἱ ἀριθμοί, ὑφ' ὧν τὸ δοθὸν μίξυται πολύγωνον, εἴπα ἐγγραφήσασα εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, εἰς ὃν καὶ τὸ δοθὸν ζητεῖται ἐγγραφεῖν πολύγωνον, τὰ παρωτυμέμενα πολύγωνα ὑπὸ τῶν μίξυτων ἀριθμῶν τῶ τῶ δοθέντος πολυγώνου ἀριθμὸν, ἀφ' οἷος σημεῖα ἀρχόμενα. πάντες γὰρ οἱ ἀριθμοί πλὴν τῆς δυάδος πολυγώνιον τι παρίσσει, καὶ μὲν ἢ τῶ μείζονος πλάρα μονάδι ὑπερέχει τῶν τῶ ἐλάττονος, ἢ ὑπεροχὴ ἔσαι πλάρα τῶ δοθέντος πολυγώνου. εἰδέ γε δυάδι, ἢ ἄλλῳ τινὶ ἀριθμῶ, διατριπτόν ἢ διαφορὰ εἰς ποσαῦτα μέρη ἴσα, ὅσα καὶ ὁ τῆς διαφορᾶς τῶν πλάρων ἀριθμὸς. οἷον ἔστω ἐγγραφεῖν εἰς τὸν αβγ, κύκλον δωδεκάγωνον.

Εὐκλ. Λιβ. 7. Fig. 5.



ἔπει

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ. 174

ἔπει δὲ ὁ δωδεκά αὐθιμὸς δώδεκός ἐστι καὶ σωθίτος μετρίμινος ὑπὸ τῆ πένταρα καὶ τὸν ἑξία, ἐγγραφήτω εἰς τὸν αβγ, κίκλον τὸ, τε αβγ, ἑξίγωνον, καὶ δεζγ, πεξάγωνον. Ἐπει δ' αὐθις ἡ τῆ ἑξαγώνου πλῆρὰ ὑπερέχει τῆς τῆ ἑξιγώνου μονάδι, ἡ αδ, ὑπεροχὴ, πλῆρὰ ἐστὶ τῆ δωδεκαγώνου, τὸ γὰρ αβγ, ἑξίγωνον διαιροῦν τὸν κύκλον εἰς ἑξία ἴσα, δῆλον ὅτι ἡ αδγ, περιέριπτα πένταρας πλῆρὰς περιέχει τῆ ζημίτη πολυγώνου. Ἐπει δὲ πάλιν τὸ δεζγ, πεξάγωνον διαιρεῖ τὸν αὐτὸν κύκλον εἰς μέρη ἀλλήλοις ἴσα πένταρα, ἡ δγ, περιέριπτα τετάρτα περιέχει τῆ αὐτῆ πολυγώνου μέρη, ὡς ἡ αδ, ἕξτον ἐστὶ τῆς δγ, μέρος, καὶ ἑτεμίτως δωδεκάκις τὸν κύκλον καταμετρεῖ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α. Α΄:

Ἐκ τῆς δῆλον, ὅτι ἰσὺ ἐν κύκλῳ ἀπὸ τῆ αὐτῆ σημείω τῆς περιμετρίας, δύο πολυγώνων ἐγγραφήσι πλῆρὰ ἰσοπλῆρῶν καὶ ἰσογωνίων, τὸ ἀνα μίσην τῆ πλῆρῶν ἐκείνων τόξον τσαύτας περιέχει πλῆρὰς τῆ συμμετρίτη πολυγώνου ἐκ τῆ πολλαπλασιασμῶ τῆ αὐθιμῶν τῆ δύο ἐκείνων πολυγώνων, ἔσαι καὶ αἱ μονάδις τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ὡς ἀλλήλων ὑπερέχουσι. τὸ γὰρ αδ, πλῆρὰ ἐστὶ δωδεκαγώνου, ὅτι καὶ ἡ ὑπεροχὴ, καθ' ὡς τὸ πεξάγωνον ὑπερέχει τὸ τεξίγωνον, ὑφ' ὧν τὸ δωδεκάγωνον συλλίσσεται, μονάς ἐστιν. Εἰδόντες ἐγγραφῆ εἰς τὸν αβγ, κύκλον ἡ γη, πλῆρὰ πενταγώνου, τὸ μεθ' δη, πλῆρὰ ἔσαι εἰκοσαγώνου. πολλαπλασιαζομένη γὰρ τῆ πέντα αὐθιμῶν ἐπὶ τὸν πένταρα, συλλίσσεται ὁ εἴκοσι, καὶ ἡ πενταγώνου πλῆρὰ μονάδι ὑπερέχει τῆς τῆ πεξάγωνου, τὸ δὲ αη, δύο περιέχει πλῆρὰς τῆ πεντακαιδεκαγώνου, ὅτι καὶ ἡ τῆ πενταγώνου πλῆρὰς δύο αἱ ὑπερέχει τῆς τῆ ἑξιγώνου, ἐκ δὲ τῆ πολλαπλασιασμῶ τῆ πέντα ἐπὶ τὸν τετάρτα, ὁ πεντακαίδεκα συλλίσσεται αὐθιμῶν.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Τ Α. Β΄.

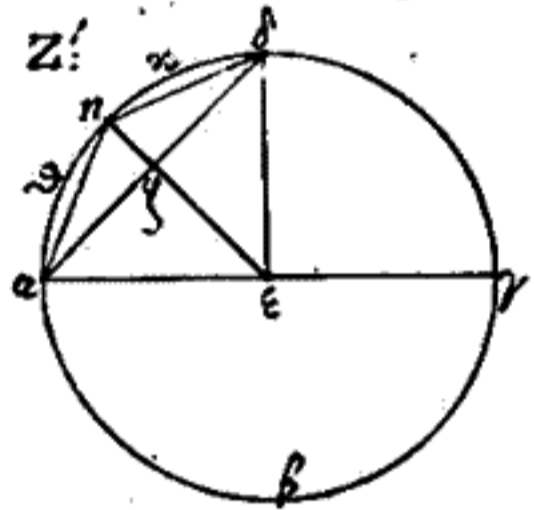
Ἔστι ἐκάστη πολυγώνου ἰσοπλῆρῶν καὶ ἰσογωνίων εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένη, εἰς ὅσα ὡς μέρη ἴσα διαιρηθῆ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ὑπὸ τῆς αὐτῆ πλῆρῆς, τσαυταπλάσιον τῆ αὐτῆ ἐγγραφήσεται πολυγώνου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, ὡς ὁ βυλόμενος διπλάσιόν τε ἢ ἑξπλασίον πολυγώνου, ἢ κατ' ἄλλαν τινὰ αὐθιμῶν πολλαπλάσιον ἐγγράφαι τῆ ἐγγεγραμμένη ἤδη πολυγώνου, δεῖται διαιρεῖν τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ὑπὸ τῆς τῆ ἐγγεγραμμένη πλῆρῆς εἰς μέρη ἀνάλογα τῆ λόγῳ τῆ πολλαπλασίῳ, οἷον ἑπταγώνου ἑξ' ἀπὸν γήματος εἰς κύκλον τινὰ ἐγγεγραμμένη, ἰσοπλῆρῶν καὶ ἰσογωνίων, ὁ βυλόμενος πεντακαιδεκαγώνου ἐγγράφαι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, διαιρεῖτω τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ὑπὸ μιᾶς τῆ τῆ ἑπταγώνου πλῆρῶν εἰς δύο, καὶ ἔξει τὸ ζητούμενον.

Πρότασις Ζ΄:

Τῆς τῆ κύκλου ἡμιδιαμέτρου ὁσωμνητοσῶν μερῶν ὑποτιθεμένης, καὶ ὑποτείνουσας δοθέντος τόξου ἐγγραμμένης, ὑποτείνουσα τῶς ἡμισείας τῆς δοθέντος ὀρθῆς, καὶ δεῖξαι πόσῳ αὐτὴ εἶναι αὐτῆ περιεκτικῆ τῆς ἡμιδιαμέτρου μερῶν.

Ἐστω κύκλος ὁ $\alpha\beta\gamma\delta$, ἡ ἡμιδιαμέτρος ἡ $\alpha\epsilon$, ὑποτίθεται εἶναι μερῶν ἑκατόν. διδοῖται δὲ καὶ τόξον τὸ $\alpha\delta$, ἡ ὑποτείνουσα μερῶν γ : καὶ ζητηθῆτω ἡ τῆ ἡμισείας τῆ αὐτῆς τόξου ὑποτείνουσα. Ἐπιζώχθω δὲ ἡ $\alpha\delta$, ὑποτείνουσα τῆς δοθέντος τόξου, καὶ διαιρηθῆτω δίχα κατὰ τὸ ζ , διὲ ἡχθῶ ἡ $\epsilon\zeta\eta$, καὶ ἐπιζώχθω ἡ $\alpha\eta$, καὶ αὐτὴ εἶναι ἡ ζητούμενη. κατὰ γὰρ τὴν γ : τῆ γ : τῆ Στοιχ: ἡ $\alpha\delta$, πῆνεται πρὸς ὀρθῆς ὑπὸ τῆς $\epsilon\eta$, ὡς ἐπεὶ αἱ $\alpha\zeta$, $\zeta\eta$, εἰσὶν ἴσαι εἰσὶ ταῖς $\delta\zeta$, $\zeta\eta$, ἴσιν δὲ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\alpha\zeta\eta$, καὶ ὑπὸ $\delta\zeta\eta$, ἴση, πάντως γὰρ κατὰ τὴν δ : τῆ α : τῆ αὐτῆς εἶναι ἴση καὶ ἡ $\alpha\eta$, τῆ $\eta\delta$, ἀλλ' ἡμὸν $\alpha\eta$, ὑποτείνει τὸ $\alpha\theta\eta$, τόξον, ἡ δὲ $\eta\delta$, τὸ $\eta\kappa\delta$, ἄρα καὶ τὸ $\alpha\theta\eta$, τόξον ἴσον ἐστὶ τῷ $\eta\kappa\delta$, κατὰ τὴν $\kappa\eta$: τῆ γ : τῆ αὐτῆς, καὶ ἐπομένως τὸ $\alpha\theta\eta$, ἡμισυῖ ἐστὶ τῆς δοθέντος $\alpha\eta\delta$, τῆς δὲ ὑποτείνουσα ἡ $\alpha\eta$, ἄρα ἡ $\alpha\eta$, ἐστὶν ἡ ζητούμενη, ὅπερ ἠτοῦτο.

Geom. Lib. 7. Fig. 6.



ἀλείπεται δὲ δεῖξαι καὶ πόσῳ αὐτὴ εἶναι μερῶν ἡ αὐτῆς $\alpha\eta$, τῆς τῆς ἡμιδιαμέτρου. Ἐπεὶ οὖν ἡ $\alpha\delta$, ὑπεπέθη μερῶν γ : πάντως γὰρ ἡ $\alpha\zeta$, ἡμισεία αὐτῆς μερῶν ἐστὶ ποσῶν μ : πολλαπλασιασθήτω δὲ ἡ $\alpha\zeta$, πρὸς ἑαυτὴν, καὶ ἡ $\alpha\epsilon$, καὶ γενήσονται πάντως δύο τετράγωνοι ἀειθμοί. εἴτα ἀφρηθῶ ὁ τετράγωνος τῆς $\alpha\zeta$, ἀειθρὸς ἀπὸ τῆς τετράγωνου ἀειθμοῦ τῆς $\alpha\epsilon$, τῆς δὲ ἑναπολειφθεῖς ὀρθῆς διαιρηθῶ ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ αὐτὴ ἀφρηθῶ τῆς ρ : ὁ δὲ ἑναπολειφθεῖς τετράγωνοιδίπο, καὶ ὁ γινόμενος συναφθήτω τῆς τῆς $\eta\zeta$, τετράγωνου, ἀπὸ δὲ τῆς ὅλης ὀρθῆς διαιρηθῶ πάλιν ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ ὅσῳ αὐτὴ εἶναι αὐτῆς μονάδων περιεκτικῆ, ποσῶν εἶναι μερῶν καὶ ἡ $\alpha\eta$, κατὰ γὰρ τὴν $\mu\zeta$: τῆς α : τῆς Στοιχ: τῆ ἀπὸ τῆς $\alpha\epsilon$, τετράγωνου ἴσον ἐστὶ τῆς ἀπὸ τῆς $\alpha\zeta$, $\zeta\epsilon$, τετράγωνοις: ὡς ἀφαιρέμενου τῆς ἀπὸ τῆς $\alpha\zeta$, τετράγωνου τῆς ἀπὸ τῆς $\alpha\epsilon$, ἑναπολείπεται τὸ τῆς $\zeta\epsilon$, τετράγωνον: εὐριθείσης δὲ τῆς αὐτῆς ῥίζης, γινώσκονται ἡ $\zeta\epsilon$, πάντως δὲ ἀφαιρέμενης ἀπὸ τῆς $\epsilon\eta$, γινώσκονται καὶ ἡ $\zeta\eta$, συναπτομένων δὲ τῶν δύο τετράγωνων τῶν ἀπὸ τῆς $\zeta\eta$, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς $\zeta\alpha$, γινώσκονται καὶ τὸ τετράγωνον τῆς $\alpha\eta$, ἴσον γάρ ἐστι τῆς

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ. 173

ποις ἀπὸ τῶν ηζ, ζα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν μζ: , ἔπῃς πεξαγώνου ἀρεθείσης ῥίζης , γνωθῆσεται καὶ ἡ αη, ὅπερ ἴσῃ τὸ β':

ἡ αε, μιρῶν 100 πεξαγώνου 10000
 ἡ αζ, μιρῶν 45 πεξαγώνου 2025

τὸ ἀναπολειφθεὶ δι' ἀφαιρίσεως πεξαγώνου τῆς αε, 10000. ῥίζα 7975
 πεξαγώνου τῆς ζε, 7975. ῥίζα 89.

τὸ ἀναπολειφθεὶ δι' ἀφαιρίσεως ἡ ζη, μιρῶν 11. τετραγώνου αὐτῆς 121
 ἡ αζ, μιρῶν 45. τετραγώνου 2025

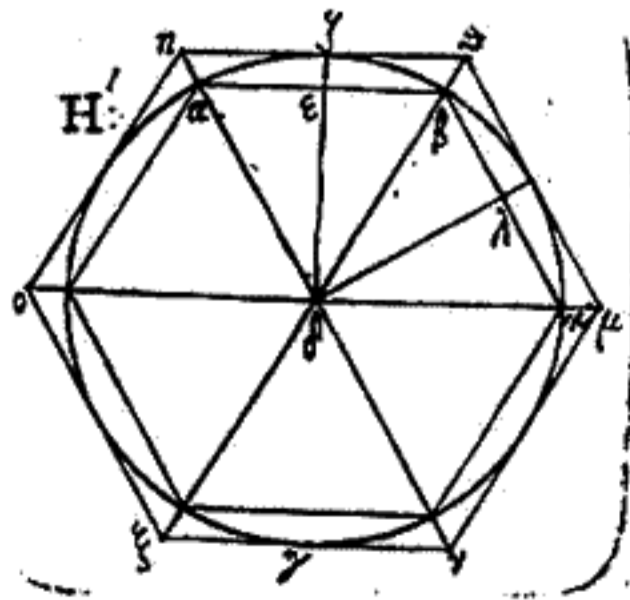
Τὸ συμπόσιμον ἐκ πῶν δύο τετραγώνων, 2146
 ῥίζα τῶν ἐκ τῶν δύο 46
 καὶ πόσιμων ἐστὶν ἡ ζη,

Πρότασις Η':

Πλῆρᾱς πολυγῶν ἰσοπλευροῦτε καὶ ἰσογωνίαι ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένῳ δοθείσης, τὴν τῷ περιγραφομένῳ ὁμοίᾳ πολυγῶν πλῆρᾱν εἶναι.

Δοθήτω πλῆρᾱ ἑξαγώνου ἰσοπλευροῦτε καὶ ἰσογωνίου ἐν κύκλῳ τῷ αβγ, ἔκκεντρον τὸ δ, ἐγγεγραμμένον, καὶ ζηθεῖτω ἡ τῷ περιγραφομένῳ περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον ἑξαγώνου πλῆρᾱ. Τμηθεῖτω δὴ ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ ε, δι' ἃ ἦχθῃ κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ δεζ, ἥτις διελθῆσεται, καὶ διὰ τῷ δ, κέντρῳ καὶ τὴν γ': τῷ γ': τῷ Στοιχ: καὶ ἐπ' αὐτῆς συνιστάτω κάθετος ἡ ηζθ, ἀπὸ δὲ τῷ δ, ἀχθήτωσαν διὰ τῶν α, καὶ β, αὐτῶν δαη, δβθ, καὶ ἡ ηζθ, εἶναι πλῆρᾱ ἑξαγώνου τῷ περὶ τὸν αβγ, κύκλον περιγραφομένου. τμηθείσης γὰρ καὶ τῆς βκ, πλῆρᾱς δίχα καὶ τὸ λ, καὶ τῶν λοιπῶν γνησιμίων ὁμοίως, ἐπεὶ ἡ μὲν αβ, παράλληλός ἐστι τῇ ηθ, ἡ δὲ βκ, τῇ θμ, δῆλον, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βκ, ἡ ηθ, πρὸς τὴν θμ, καὶ γὰρ τὴν β': τῷ ε': τῷ αὐτῷ, ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν δθ, ἔχει καὶ ἡ αβ, πρὸς τὴν ηθ, καὶ ἡ βκ, πρὸς τὴν θμ, ἀλλ' ἡ αβ, ἴση ἐστὶ τῇ βκ, ἄρα καὶ ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ θμ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται καὶ αὐτῶν εζ, καὶ λοιπῶν πλῆρᾱ ἴσαι, ὥστε τὸ ηθμνξο,

Geom. Lib.7. Fig.7.



ἴσο.

174 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΤΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ισόπλευρόν ἔστω . Ὅτι δὲ καὶ περιγεγραμμένον περὶ τὸν $\alpha\beta\gamma$, κύκλον, δῆλον ἄπεται γὰρ αὐτῷ ἐκάστη πλάρα πᾶ αὐτῷ ἔξαγωνον .

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α .

Ἐκ τῆς δῆλον, ὅτι δοθείσης τῆς πᾶ ἐγγραφομένου πολυγώνου πλάρας, ἐγνωσμένης καὶ καὶ τὰ μέρη, γνωθῆσεται καὶ ἡ πᾶ περιγεγραφομένου . Διδόσθω γὰρ τῶν $\alpha\beta$, μορίων εἶναι δέκα, ἡ $\epsilon\beta$, πάντως μορίων ἔσται πέντε, ἡμίσεια γὰρ ἀφαιρούμενα δὲ πᾶ πῆραγώνου τῆς $\epsilon\beta$, ἀπὸ πᾶ πῆραγώνου τῆς $\delta\beta$, ἡμιδιαμῆρου, γνωθῆσεται τὸ πῆραγώνον τῆς $\delta\epsilon$, τῶς δὲ τῆς πῆραγωνικῆς ὀριθείσης ρίζης, γνωθῆσεται καὶ ἡ $\delta\epsilon$. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ $\delta\epsilon$, πρὸς τῶν $\epsilon\beta$, ἔχει καὶ ἡ $\delta\zeta$, πρὸς τῶν $\zeta\theta$, διὰ τῶν ὁμοιότητα τῶν ἑξαγώνων . ἄρα διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἑξῶν γνωθῆσεται καὶ ἡ $\zeta\theta$, ταύτης δὲ διπλασιαθείσης γνωθῆσεται ἔτι καὶ ἡ $\alpha\lambda\eta\eta\theta$, πλάρα ἴσα τῷ περιγεγραμμένῳ .

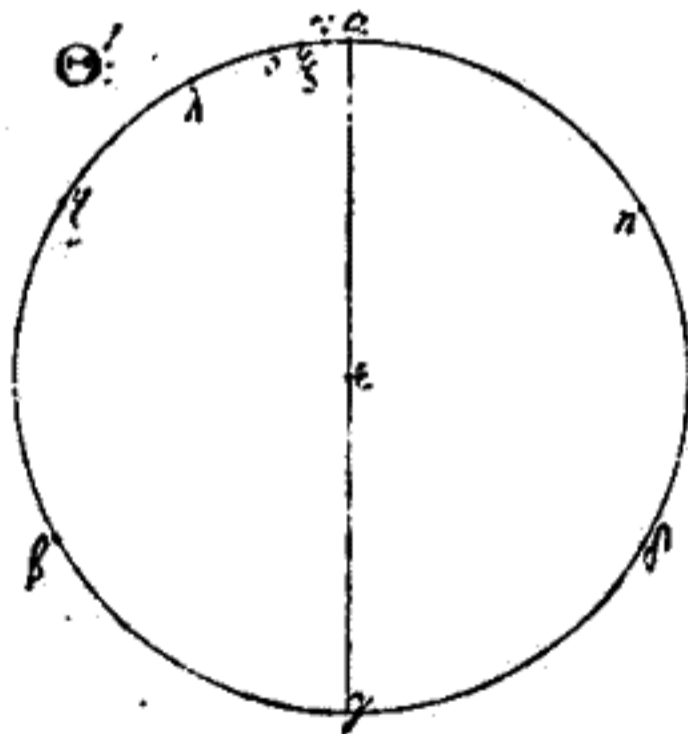
Πρότασις Θ΄:

Τῆς διαμέτρου τῷ κύκλου πρὸς λόγον ὀριθίου, ὅμ πρὸς τῶν αὐτῷ περιφέρειαν ἔχει ἐγγύτερον τῆς ἀληθείας .

Ἐστω ὁ $\alpha\beta\gamma\delta$, κύκλος, καὶ ζητηθῆτω ὁ λόγος τῆς $\alpha\gamma$ διαμέτρου πρὸς τῶν αὐτῷ περιφέρειαν ἐγγύτερον τῆς ἀληθείας . Ληφθῆτω δὴ τὸ $\epsilon\alpha$, διάστημα, καὶ διαιρηθῆτω ὁ κύκλος εἰς μέρη ἕξ καὶ τὸ πῆραγμα τῆς $\epsilon\epsilon$: τῷ δ : τῷ Στοιχ: τῶν $\alpha\zeta$, $\zeta\beta$, καὶ λοιπὰ . Διαιρηθῆτω δὲ τῶν $\epsilon\alpha$ ἕκαστον δίχα, καὶ διαιρηθῆσεται ὁ πᾶς κύκλος εἰς μέρη δυοκαίδεκα, τῶν $\alpha\lambda$, $\lambda\zeta$, καὶ λοιπὰ, τῶν δ' ἕκαστου αὐτῶν δίχα διγρημένῳ, τμηθῆσεται ὁ κύκλος εἰς μέρη τεσσαρακαὶ εἴκοσι .

Geom. Lib. 7. Fig. 2

ἕκαστου δὲ καὶ τῶν δίχα πάλιν διγρημένῳ, τμηθῆσεται εἰς ὀκτώ καὶ τεσσαράκοντα . ἔστω δὲ καὶ τῶν ἕκαστον τὸ αὐτῷ πῆραγμα πᾶσιν, διαιρηθῆσεται ὁ κύκλος εἰς μέρη ἕξ καὶ ἐνεσηκοντα ἴσα ἀλλήλοις τῶν $\alpha\nu$, $\nu\epsilon$, $\epsilon\theta$, καὶ λοιπὰ . ἐπιζυχθῆσάντων δὲ τῶν $\alpha\nu$, $\nu\epsilon$, $\epsilon\theta$, καὶ λοιπῶν ὑποτερευσῶν, ἐγγραφήσεται πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐνεσηκονθεξάγωνον . ἔστω δὲ ἐκάστη τῶν $\alpha\nu$, $\nu\epsilon$, τῶν ἐνεσηκονθεξάγωνου πλάρων δίχα τμηθῆ, καὶ διὰ τῆς τομῆς ἀπὸ τῶν ϵ , καὶ ζ καὶ θ ἀχθῆ, καὶ τῶν λοιπῶν



γένε.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ. 173

γένηται, ὡς ἐν τῇ ἀνωτέρω ἡρμήνεται, περιγραφῆσεται περὶ τὸν αβγδ, κύκλον ὁμοιον πολύγωνον. Τύπων δ' ἕτω γινόμενων, ἔριθῆτω κατὰ μὲν τὴν ζ: τῆ παρ: ἢ τῆ ἐγγραφομένη πλῆρὰ πόσων αὐ εἴη μιρῶν, οἷων ἢ αε, ἡμιδιάμιξος ὑποτίθεται διηρημένη, διὰ δὲ τῆς ἀνωτέρω ἔριθῆτω καὶ ἢ τῆ περιγραφομένη. Εἶτα πολλαπλασιασθέντω ἑκάστος τῶν ἔριθῆτων ἀριθμῶν ἐπὶ τὸν ζξ καὶ ἐνεσηκαστα, καὶ εἰ γινόμενοι συναφθῆτωσαν ἀλλήλοις, καὶ ὁ ἐξ ἀμφοῖν μειωθήτω ἐπὶ τὸν δύο, καὶ ἕως ἔσται καὶ τὸν Ἀρχιμήδην παραστατικός τῆς τῆ κύκλου περιφερείας, ἢ τινος παραβαλλομένου πρὸς τῆς διαμέτρου, γνωθῆσεται ὁ τῆς περιφερείας πωπῆς κύκλου λόγος, ὃν ἐγγύτερον τῆς ἀληθείας σφὸς τὴν διάμετρον ἔχει.

Εἰς ἑξαπῆρω δὲ τῶν εἰρημένων κατάληψιν, κείτω ἢ αε, ἡμιδιάμιξος μορίων εἶναι περιεκτικὴν 10000000: , καὶ ποσῆτων ἔσται καὶ ἢ τῆ ἐξαγῶντε. Τύπων δὲ δεθῶτων, ζητηθήτω καὶ ἢ τῆ δεκαγῶντε πλῆρὰ καὶ τὴν ρηθῆσαι ζ: καὶ ἔριθῆσεται μορίων ποιῆτων 5176380: , ἐγνωσμένης δὲ καὶ τῆς τῆ δωδεκαγῶντε πλῆρᾶς, ζητηθήτω διὰ τῆς αὐτῆς, καὶ ἢ τῆ εἰκοσιπεπαραγῶντε, καὶ ἔριθῆσεται μορίων 2610523: δεθῆσης δὲ καὶ ταύτης ζητηθήτω ὁμοίως καὶ ἢ τῆ πεαρακοντοκταγῶντε, καὶ ἔσται περιεκτικὴν μορίων, οἷα πᾶ τῆς ἡμιδιαμίξε 1308061: γνωθῆσης δὲ καὶ ταύτης, ζητηθήτω τελευαῖον καὶ ἢ τῆ ἐνεσηκονθιξαγῶντε, καὶ ἔριθῆσεται μορίων 654380: , τῆς δὲ τῆ ἐγγιγραμμένου ἐνεσηκονθιξαγῶντε πλῆρᾶς γνωθῆσης, ζητηθήτω διὰ τῆς ἀνωτέρω καὶ ἢ τῆ περιγγραμμένη, καὶ ἔριθῆσεται μορίων 654730: εἶτα πολλαπλασιασθέντω ἑκάστος τῶν τῶν ἀριθμῶν, ὅ,τι τῆς τῆ ἐγγιγραμμένου πλῆρᾶς, καὶ ὁ τῆς τῆ περιγγραμμένη ἐπὶ τὸν θβ: , καὶ ἔριθῆσεται ὁ ἀριθμὸς, ὅλης τῆς τῆ ἐνεσηκονθιξαγῶντε πλῆρᾶς, τῆς μὲν τῆ ἐγγιγραμμένη ὁ 62820480: , τῆς δὲ τῆ περιγγραμμένη ὁ 62854080. Τούτων δὲ συναφθῶτων γενήσεται ὁ 135674560. , ἢ ἐπὶ τὸν 2. μειωθέντος, ἔριθῆσεται πηλίκον ὁ 62837200: ὁ τῆς τῆ κύκλου δηλ: περιφερείας. κατὰ τὸν Ἀρχιμ: ἢ τῆ κύκλου περιφέρεια ἔχει σφὸς τὴν διάμετρον, ὡς ὁ 62837280: σφὸς πᾶ 20000000: ἢ ὡς ὁ 3141864: σφὸς τὸ 1000000: εἰς ἐλαχίστας τῶν σφωτέρων ἀριθμῶν ἡγμένων ὄρες.

176 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ἡμιδιάμετρος α ε, ἥτις τῆς πλόρας ἐξαγώνη ἔστω
 ταύτης τετράγωνον
 ἡμίσεια τῆς τῆ ἐξαγώνη πλόρας ἢ α ζ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν
 ταύτης τετράγωνον

10000000
 1000000000000000
 05000000
 250000000000000

τὸ ἐναπολείπομενον δι' ἀφαιρίσεως δηλοῖ τετράγωνον τῆς ε ζ,

750000000000000
 ἢ ρίζα 8660254
 10000000
 8660254

ἡμιδιάμετρος α ε,
 ἢ τῆ ἐναπολειπομένης ρίζα ἢ ε ζ,

τὸ ἐναπολείπομενον δι' ἀφαιρίσεως ἢ ζ η,
 ταύτης τετράγωνον
 τῆς α ζ, τετράγωνον
 τὸ ἐξ ἀμφοῖν τετράγωνον

1339746
 1794919344516
 250000000000000
 26794919344516
 ἢ ρίζα 5176380. πλόρα
 ρὰ δαδικαγώνη.

Π Ρ Α Ξ Ι Σ Β'

ἢ α ε, ἡμιδιάμετρος μορίων
 ἢς τετράγωνον
 ἢ α δ, πλόρα δαδικαγώνη
 ἢ α ζ, ἡμίσεια τῆς α δ,
 ἢς τετράγωνον

10000000
 1000000000000000
 5176380
 2588190
 6698727476100

τὸ ἐναπολείπομενον δι' ἀφαιρίσεως δηλοῖ τετράγωνον τῆς ε ζ,

93301272523900
 ἢ ρίζα ἢ ε ζ, 9659258
 10000000
 9659258

ἢ α ε, ἡμιδιάμετρος
 ἢ ε ζ,

τὸ ἐναπολείπομενον δι' ἀφαιρίσεως δηλοῖ ἢ ζ η,
 ἢς τετράγωνον
 τῆς α ζ, τετράγωνον

340742
 116105110564
 6698727476100

τὸ ἐξ ἀμφοῖν τετράγωνον

6814832586664
 ἢ ρίζα 2610523 πλόρα
 εἰκοσιτισαγαγώνη.

Π Ρ Α Ξ.

Π Ρ Α Ξ Ι Σ Γ΄

ή αε, ήμιδιάμετρος	10000000	1000000000000000
ής τετράγωνον		
ή αδ, πλάρα είκοσιτεσαραγώνου	2610553	
ή αζ, ήμίσεια τής αδ,	1305261	
ής τετράγωνον		<u>1703706377121</u>
τò εναπολειπ. δι' αφαιρίσεως τετράγ. τής εζ,		98296293622879
	ή ρίζα ή εζ.	9914448
		<u>7319144704</u>
ή αε, ήμιδιάμετρος	10000000	
ή εζ,	9914448	
τò εναπολειπ. δι' αφαιρίσεως δηλ. ή ζη,	0085552	
ής τετράγωνον		7319144704
τής αζ, τετράγωνον		<u>1703706377101</u>
τò εζ άμφοϊν τετράγωνον		1711025521825
		ή ρίζα 1308061. πλ:
		τεσσερακοντοκαγών:

Π Ρ Α Ξ Ι Σ Δ΄

ή αε, ήμιδιάμετρος	10000000	1000000000000000
ής τετράγωνον		
ή αδ, πλάρα τεσσερακοντοκαγώνου	1308061	
ή αζ, ήμίσεια τής αδ,	654030½	
ής τετράγωνον		<u>427756548961</u>
τò εναπολειπόμενον δι' αφαιρίσ. δηλ. τετράγωνον τής εζ,		99572243451039
		ή ρίζα ή εζ, 9978589
ή αε, ήμιδιάμετρος	10000000	
ή εζ,	9978589	
τò εναπολειπ. δι' αφαιρίσεως δηλ. ή ζη,	0021411	
ής τετράγωνον		458430921
τής αζ, τετράγωνον		<u>427756548961</u>
τò εζ άμφοϊν τετράγωνον		428214979882
		ή ρίζα 654381 πλ:
		επεννηκονθ εξαγώνου

178 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

Π Ρ Α Ξ Ι Σ Ε:

ἡ ἡμιδιάμετρος	10000000	ἡς τετραγώνου	1000000000000000
ἡ τῷ ἐπισημοειδιξαγώνῳ	654381		
ἡ ἡμίσεια ταύτης	327190	ἡς τετραγώνου	<u>107053296100</u>
τὸ ἀπολειπόμενον δι' ἀφαιρίσεως.			99892946703900
			ἡ ρίζα τῆς: 9994645

Μέθοδος τῆς Τριῶν.

ὁ α': ὄρος 9994645. ὁ β': 327190. ὁ γ': 10000000. ὁ δ': 327365. ἡμί-
2 σεις

ἡ τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐπιση- μοειδιξαγώνῳ πλάρᾳ	<u>654380</u>	ἡ τῷ περιγεγραμμένῳ ἐπισημοειδιξ. πλάρᾳ	<u>654730</u>	ἡ τῷ περι- γεγρα- μμένῳ ἐπιση- μοειδι- ξαγώνῳ πλάρᾳ
ἡ ὅλη περίμετρος τῷ ἐγγεγρ:	62820480.	ἡ περίμετρος τῷ περιγι- γραμμένῳ	62854080	
			<u>62820480</u>	

ἡ τῷ κύκλῳ περιφέρεια

2. { 225674560
62837280



Γρίον ὅτι ἐφ' ἑκάστης ἀνάξιας εἴληπται εἰς παράδειγμα τὸ αὐτὸ γῆμα . διὸ ἢ α δ, ὑπιπέθη ἀπὸ τῆς πλῆραῖς τῆ δωδिकाγώνη, εἰκοσιτιαγαγώνη, τετρακοι-
 πεκαγώνη, καὶ ἐννενηκοσιξίκαγώνη . διὰ δὲ τὸ ἀπονοώτερον τὰ ἐναπολειπόμενα
 ἐφ' ἑκάστης τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς παριωρέθησαν .

Ἡ τῷ κύκλῳ ἄρα περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον ἔχει κατὰ
 μὲν τὸν Ἀρχιμήδην .

ὡς ὁ 3141864.	πρὸς τὸν	1000000.	κατ' ἄλλους δὲ
ἢ ὡς ὁ 21.	πρὸς τὸν	7.	ὁ λόγος ἔπος ἐλάττων τῷ ἀληθῆς.
ἢ ὡς ὁ 223.	πρὸς τὸν	71.	
ἢ ὡς ὁ 1543.	πρὸς τὸν	491.	ἔπος δὲ μείζων τῷ ἀληθῆς.
ἢ ὡς ὁ 1542.	πρὸς τὸν	491.	ἔπος δ' ἐλάττων τῷ ἀληθῆς.
ἢ ὡς ὁ 355.	πρὸς τὸν	113.	
ἢ ὡς ὁ 31.	πρὸς τὸν	10.	ἔπος δὲ ἐλάττων τῷ ἀληθῆς.
ἢ ὡς ὁ 314.	πρὸς τὸν	100.	

Πρότασις Γ΄:

Δοθεῖσθε τῆς διαμέτρου τιμὸς κύκλου τὴν περιφέρειαν εἶρεῖν, καὶ τὸ ἀ-
 μαίπαλιον .

Ἐῶσα ἢ τῆς Γῆς διάμετρος Λόκων Γαλικῶν 4584, καὶ ζητηθήτω ἢ αὐτῆς περι-
 μέτρος . Γενίθω δὲ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ῥιζῶν ὡς ὁ 71, ἀριθμὸς πρὸς τὸν 223,
 ἔπος ὁ 4584, πρὸς ἄλλον τινά, καὶ ἀριθμήσεται τέταρτος ὅρος ὁ 14397, καὶ το-
 σούτων Λόκων Γαλικῶν ἔσαι ἢ περιμέτρος τῆς Γῆς . καὶ γὰρ τὴν γ' ὑπόθεσιν
 ἢ τῷ κύκλῳ διάμετρος πρὸς τὴν περιφέρειαν ἔχει, ὡς ὁ 71, πρὸς τὸν 223, ἀλλ'
 ὡς ὁ 71, πρὸς τὸν 223, γέγονε καὶ ὁ 4584, πρὸς τὸν 14397, δοθείσης ἄρα
 τῆς διαμέτρου τοῦ τῆς Γῆς κύκλου, εὑρηται ἢ αὐτοῦ περιφέρεια . Εἰδείγε δοθῆ ἢ
 περιμέτρος τῆς Γῆς, γενίθω διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου, ὡς ὁ 223, πρὸς τὸν 71,
 ὁ 14397, πρὸς ἄλλον τινά, καὶ ἀριθμήσεται ὁ 4584, παραστατικὸς τῆς διαμέτρου
 τῆς Γῆς .

Πρότασις ΓΑ΄:

Τετραγωνίζουσα καταγράψαι γραμμῶν κατὰ τε τὸν Νικόστρατον καὶ Νι-
 κόδημον τῆς Μαθηματικῆς .

Κατὰ μὲν εἰν τὴν Ἀρχιμήδειον ἔφοδον ἔπο δωδάμεθα ἀείσκειν τὸν λόγον τῆς
 τῷ κύκλῳ περιφέρειας, ὅν πρὸς τὴν διάμετρον ἔχει, ὅσον εἴησι τῆς ἀληθείας
 ἐγγύτερον, ἢ μικρόν πρὸς πῆραγωνισμὸν κύκλου, καὶ ἄλλας γεωμετρικὰς συμ-
 βαίλ.

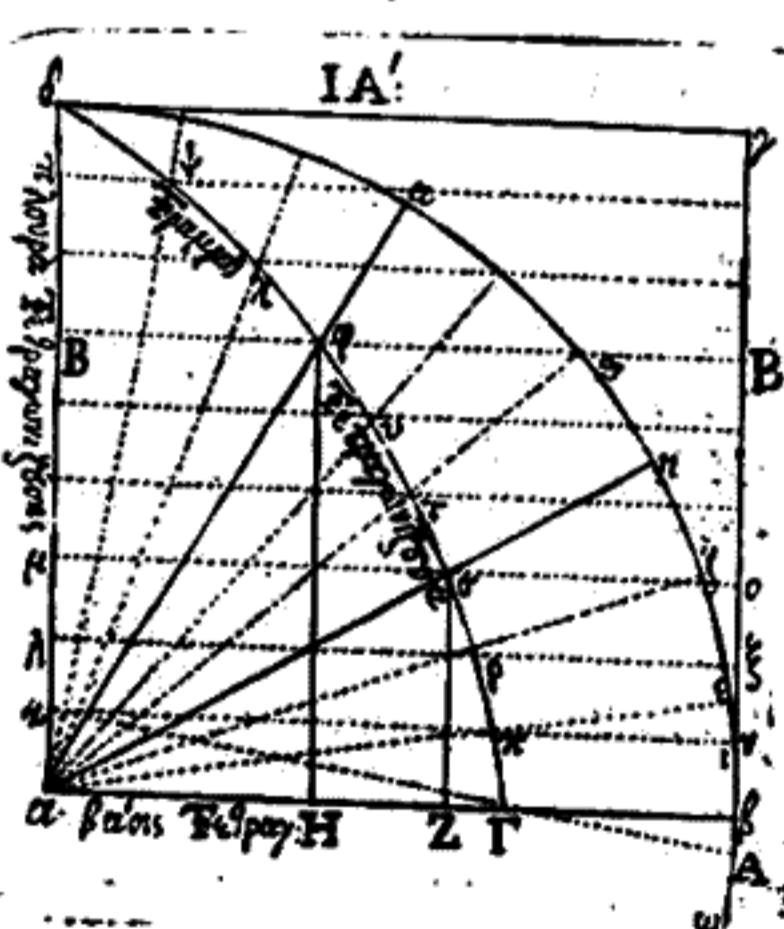
Ε.Δ.Π.Σ.Κ.Τ.Π.
 ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

180 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

βάλλοντα πράξεις. ἄλλοι δὲ τῶν ἀρχαίων Μαθηματικῶν ἄλλας τινὰς παραδεί-
 κασιν ἐφόδες πρὸς εὕρισιν εὐθείας γραμμῆς ἴσης τῇ τῷ κύκλῳ περιφέρειᾳ. Διὸ
 δὴ καὶ περὶ αὐτῶν ἐπόμυον ἔστιν εἰπεῖν, καὶ ἂν περὶ καταγραφῆς Τετραγωνίζουσης
 Γραμμῆς, ὡς Νικόστρατος καὶ Νικόδημος τῶν παύ ἀρχαίων Μαθηματικῶν
 ἐδίδαξαν. Συμμάθω ἐπὶ τῆς $αβ$, τυχούσης εὐθείας τετραγώνου τὸ $αβγδ$, καὶ
 ὑπεκείθω τὰς $αδ$, $δγ$, πλάρὰς τῷ αὐτῷ τετραγώνῳ, ὁμαλῇ συνεχῶς κινεί-
 θαι κινήσει, τὴν μὲν $αδ$, περὶ τὸ $α$, κέντρον, ὥστε καταγράφειν τὸ $δβ$, τε-
 ταρτημόριον, τὴν δὲ $γδ$, παραλλήλως τῇ $αβ$, ὥστε ὀρθὰς ποιεῖν γωνίας ἐπὶ
 τῆς $γβ$, καὶ ἐὰν τὸ αὐτῷ τῷ χρόνῳ διαστήματι τὴν μὲν ἐπὶ τὸ $β$, ἀφικνεῖσθαι ση-
 μεῖον, τὴν δὲ συμπέπτειν τῇ $αβ$. ἔπο γὰρ τῶν κινουμένων, καὶ τιμονομένων
 ἀλλήλαις, γραφῆσεται διὰ τῶν κοινῶν αὐτῶν τομῶν ἡ $δΓ$, καμπύλη γραμμὴ,
 ἡ δὲ $αδ$, εὐθεῖα, πλάρὰ Τετραγωνίζουσης, καὶ ἡ $αΓ$, βάσις.

Ἐπεὶ δὲ τὰς $αδ$, $δγ$, πλάρὰς κινηθῶσαι ἀδύνατον, ἕποσιν ἐχέσας, ὅτι
 μὴ διάτινος μηχανῆς, ἐκ σειράς κατασκευαστότος ὕλης τῷ τετραγώνῳ, ἵνα καὶ
 χρωματικῶς πως ἡ $δΓ$, Τετραγωνίζουσα καταγραφῆ Γραμμὴ. Διαριθῆτω ἡ $αδ$,
 εἰς ὅσα δυνατὸν ἴσα ἀλλήλοις μέρη, καὶ γραφήτω ἀπὸ τῆς $α$, κέντρον, διαστήματι
 τῆς $αβ$, ἡ $αδ$, τὸ $δβ$, τεταρτημόριον. Διαριθῆτω δὲ καὶ τὸ εἰς μέρη ἴσα ἀλλή-
 λους, εἰς ὅσα καὶ ἡ $αδ$, εἴτα ἀφ' ἑκάστου μὲν σημείου τῆς $αδ$, ἀχθῆτωσαν εὐθεῖαι
 ἰσὺ καὶ παραλλήλως τῇ $αβ$, ἀπὸ δὲ τῆς $α$, κέντρον ἀχθῆτωσαν ὁμοίως ἰσὺ καὶ εὐ-
 θεῖαι, ἐφ' ἑκάστον τῶν τῷ $δβ$, τεταρτημορίου σημείων. καθ' ὃ δ' ἑκάστου τῶν

Geom. Lib. 7. Fig. 9.



εὐθεῖαι τὴν ἀνάλογον αὐτῇ ἐκείνων τέ-
 μνει, τεθήτω σιγμῇ, καὶ σχεδιαθή-
 σεται πάρος ἡ ζήτησις. Οἷον διαρι-
 θῆτω ἕτε $αδ$, πλάρὰ, καὶ τὸ $δβ$,
 τεταρτημόριον εἰς μέρη ἐνενήκοντα, ἢ
 πέντε καὶ τεσσαράκοντα, ἢ γὰρ ἐνεία
 ὡς ἐπαύθαι διὰ τὸ ἀπονώτερον, τὰ
 $βε$, $εζ$, $ζη$, $ακ$, $κλ$, $λμ$, καὶ λοιπαί.
 Εἴτα ἀχθῆτωσαν ἀπὸ τῆς $α$, κέντρον ἐφ'
 ἑκάστον σημείου τῷ $βδ$, τεταρτημορί-
 αι $αε$, $αζ$, $αη$, $αθ$, καὶ λοιπαί, ἀφ'
 ἑκάστου δὲ σημείου τῆς $αδ$, διήχθωσαν
 παράλληλοι τῇ $αβ$, αἱ $κν$, $λξ$, $μο$,
 καὶ λοιπαί, καὶ τμηθῆσεται ἡ μὲν $αε$,
 ὑπὸ τῆς $κν$, καὶ τὸ $π$, ἡ δὲ $αζ$, ὑπὸ
 τῆς $λξ$, καὶ τὸ $ρ$, ἡ δὲ $αη$, ὑπὸ τῆς
 $μο$, καὶ τὸ $σ$, καὶ αἱ λοιπαὶ τῶν ἀπὸ
 τῆς $α$, ὑπὸ τῶν λοιπῶν τῇ $αβ$, παραλλήλων ἀεολόγως καὶ τὰ $τ$, $υ$, $φ$, $χ$, $ψ$, $π$.

πίνω δια τῶν ψ , χ , ϕ , υ , καὶ λοιπῶν διαβαίνουσα σημεῖων, Γραμμὴ Τετραγωνί-
 ζουσα καλεῖται, δι' ἧς ἀκριβῶς κατασκευαθεῖσιν, ῥαδίως ἀριθμησεται ἡ δὲ
 δεῖα γραμμὴ ἴση τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ. ταύτης δ' ἀριθμήσεως ἀκριβῶς καὶ ὁ
 κύκλος τετραγωνιζήσεται, ὡς ὀψομιθᾶ. Ἐπεὶ δὲ τὸ Γ, σημεῖον τὸν ῥόπον τῶ-
 ν ἔχ' ἀρίσκειται, ἐξαχθήτω τὸ δβ, τριταρτημόριον ἀλλ' ἢ τῷ ω, καὶ ληφθήτω τὸ
 βλ, τόξον ἴσον τῷ εἰ, καὶ ἐπιζείχθω ἡ κλ, καὶ τμηθήσεται ἡ αβ, καὶ τὸ Γ,
 ζυγόμενον σημεῖον. ἴσαι γὰρ τὸ ιλ, τόξον ἴσον τῷ εβ, καὶ ὡσπερ ἡ αε, τέμνει
 τὴν κν, καὶ τὸ π, ἔπω καὶ ἡ κλ, τμηθεῖ τὴν αβ, καὶ τὸ Γ, ἀναλόγως. Τοιαύτη
 μὲν εἶναι ἡ τῆς Τετραγωνιζέσης Γραμμῆς καταγραφὴ κατὰ τὸ Νικόστρατον καὶ Νικόδου-
 μον πρὸς ἀρχαιοτάτως τῶν Μαθηματικῶν.

Ἰστέον δὲ, ὅτι ὅσον εἰς πλείω μέρη ἦτε αδ, πλόρα, καὶ τὸ δβ, τριταρτημό-
 ριον διαιρεῖται, τοσαῦτον καὶ ἡ τῆς Τετραγωνιζέσης Γραμμῆς καταγραφὴ ἐπιτελεστέρα
 γίγνεται.

Πρότασις ΙΒ΄:

Τετραγωνιζέσης δοθείσης Γραμμῆς, εἰ μὴ ἀπὸ τῆς κέντρῳ ἀχθῆ τις δεῖα
 τέμνουσα ταύτην, ἀπὸ δὲ τῆς τομῆς δεῖα παράλληλος τῇ βάσει
 ἀχθῆ, τμηθήσεται καὶ ἡ πλόρα τῆς δοθείσης τετραγωνιζέσης ἀνα-
 λόγως τῆς αὐτῆς περιφερείᾳ.

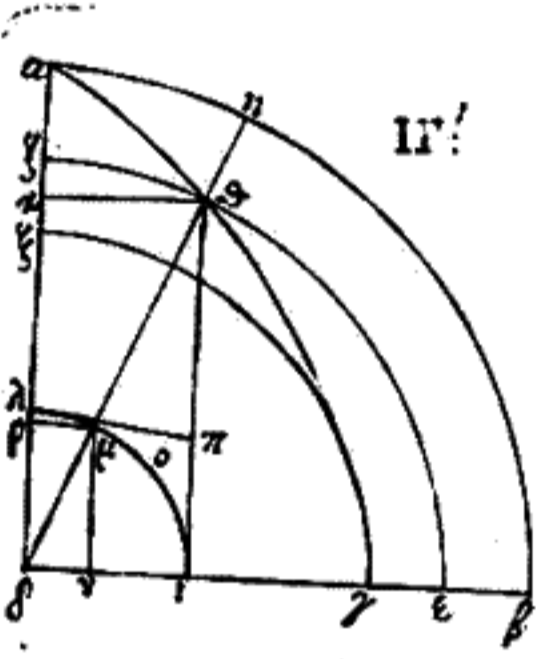
Δοθήτω τετραγωνίζουσα γραμμὴ ἡ δΓ, καὶ ἀχθῆπωσιν ἀπὸ τοῦ α, κέντρῳ αὐ-
 αφ, ασ, δεῖαι, ἀπὸ δὲ τῶν φ, καὶ σ, σημεῖων τῶν τομῶν ἀχθῆπωσιν πα-
 ράλληλοι τῇ αΓ, βάσει αἱ φβ, σμ, λέγω δὲ ὅτι ἡ αδ, πλόρα ἀναλόγως τέ-
 μνεται τῇ δβ, περιφερείᾳ τῆς τετραγωνιζέσης. καὶ γὰρ τὴν κατασκευὴν αἰτεῖ αα,
 ββ, καὶ αἱ αη, μο, δεῖαι ἀνάλογοί εἰσιν. ἕκαστον γὰρ τῆς τετραγωνιζέσης ση-
 μεῖον ὑπὸ τῶν ἀναλόγων χαρακτηρίζεται γραμμῶν. καὶ γὰρ ἕκαστη τῶν ἀπὸ τοῦ
 κέντρῳ ὑπὸ πολλῶν τέμνεται τῇ βάσει παραλλήλων, καὶ μέντοι πᾶσα τομὴ εἰς κα-
 ταγραφὴν συμβάλλεται τῆς τετραγωνιζέσης, ὅτι μὴ ἢ ὑπὸ τῶν ἀναλόγων. ὡς
 ὁ μέρος εἰς τὸ δα, τῆ δβ, τὸ αὐτὸ δὴ κενθρόν εἰσι μέρος καὶ τὸ δβ, τῆς δα, ὁ δὲ
 τὸ δη, τῆς περιφερείας, τὸ αὐτὸ καὶ τὸ δμ, τῆς δεῖας, ἄρα ὡς τὸ δβ, πρὸς
 τὸ δα, τόξον, ἡ δα, δεῖα πρὸς τὴν δβ, καὶ διαιρῖσιν, ὡς τὸ δα, πρὸς τὸ αβ, ἡ δβ,
 πρὸς τὴν Βα. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς τὸ δη, τόξον πρὸς τὸ ηβ, ἡ δμ,
 πρὸς τὴν μα. ὡς πᾶσα μιν γίνεσθαι τὰ δα, αβ, δη, ηβ, ἀνάλογά εἰσι πᾶσαι
 μιν γίνεσθαι τοῖς δβ, Βα, δμ, μα, σὺν δύο λαμβανόμενα, ὡς καὶ δι' ἴσων ἀνά-
 λογά εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ δα, πρὸς τὸ ηβ, τόξον, ἡ δβ, πρὸς τὴν μα, ὁ-
 μοίως διαιρῖσεται καὶ τὰ λοιπὰ μέρη τῆς δβ, περιφερείας ἀνάλογα τοῖς λοιποῖς
 μέρει τῆς δα, πλόρας τετραγωνιζέσης. Ἄρα τετραγωνιζέσης δοθείσης, καὶ τῇ ἐξῆς.

Πρότασις ΙΓ΄:

Τὸ τεταρτημόριον ἢ τε πλάρα ἢ βάσις τῆς τετραγωνιζέσης γραμμῆς συνεχῶς εἰσι ἀνάλογον.

Ἐστω τεταρτημόριον μὲν τὸ αβ, τετραγωνίζουσα δὲ ἐν αὐτῇ γραμμὴ ἡ αθγ, ἢς πλάρα μὲν ἡ αδ, βάσις δὲ ἡ δγ. Λέγω δὴ τὸ αβ, τεταρτημόριον ἔχειν πρὸς τὴν αδ, ὡς ἡ αὐτὴ αδ, πρὸς τὴν δγ. εἰ γὰρ μὴ, πάντως γὰρ ἡ αδ, ἢ πρὸς μείζονα τῆς δγ, ἢ πρὸς ἐλάττωτα ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὅν τὸ αβ, ἔχει τεταρτημ. πρὸς αὐτὴν. Ἐχίτω γοῦν α: πρὸς μείζονα τὴν δε, καὶ γραφήτω ἀπὸ κέντρου τῆς δ, διαστήματι τῆς δε, τὸ εθζ, τεταρτημ. τέμνον τὴν αδγ, τετραγωνίζουσα γραμμὴν καὶ τὸ θ, δι' ἧς ἡχθω ἡ δθκ, καὶ παράλληλος τῇ μὲν αδ, διήχθω ἡ θι, τῇ δὲ εδ, ἡ θκ. Ἐπεὶ οὖν καὶ τὴν ὑπόθεσιν ὡς τὸ αβ, τεταρτημ. πρὸς τὴν αδ, ἢ αὐτὴ αδ, πρὸς τὴν δε, ὡς δὲ ἡ αδ, πρὸς τὴν δε, ἔχει τὸ αβ, τεταρτημ. καὶ πρὸς τὴν εζ, ὡς ὁφείμεθα. τὸ αβ, ἄρα τεταρτημόριον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὴν αδ, πλάρα, καὶ εζ, τεταρτημόριον. ὡςτε κατὰ τὴν θ': τὸ ε': τὸ στοιχειωτὸν τὸ εζ, τεταρτημόριον ἴσον ἐστὶ τῇ αδ. Ἐπεὶ δ' αὐταὶ καὶ τὴν ἀνωτέρω, ὡς τὸ αβ, τεταρτημόριον πρὸς τὸ βκ, πῶρον, ἔχει καὶ ἡ αδ, πλάρα πρὸς τὴν δκ, ὡς δὲ τὸ αβ, πρὸς τὸ βκ, ἔχει καὶ τὸ ζε, πρὸς τὸ εθ, διὰ τὴν πρὸς ἀλλήλα ὁμοιότητα, πάντως γὰρ ὡς τὸ ζε, τεταρτημόριον πρὸς τὸ εθ, πῶρον, ἢ αδ, πρὸς τὴν δκ, ἀλλ' ἡ αδ, ἴση δίδεικται τῇ ζε, τεταρτημωρῶ. ἄρα καὶ ἡ κδ, ἢση ἐστὶ τῇ εθ, πῶρον, τῇ δὲ κδ, ἴση ἐστὶν ἡ θι, καὶ τὴν λδ': τὸ α: τὸ στοιχ.: ἢ θι, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ θε, πῶρον, ὅπερ ἀδυνάτων. ὅτι δὲ τὸ αβ, τεταρτημόριον ἔχει πρὸς τὸ ζε, ὡς ἡ αδ, πρὸς τὴν δε, δῆλον, καὶ γὰρ τὴν εη: τὸ δ': τὸ παρόντος ἐναλλαξ, οἱ κύκλοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ σὺντων διάμειροι, ὡς δὲ διάμειρος πρὸς διάμειρον, ἔστι καὶ ἡμιδιάμειρος πρὸς ἡμιδιάμειρον, οἱ κύκλοι ἄρα ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὡς αἱ ἡμιδιάμειροι. ἀλλ' ὡς κύκλος πρὸς κύκλον, ἔχει καὶ τεταρτημόριον πρὸς τεταρτημόριον, ἄρα ὡς ἡ αδ, ἡμιδιάμειρος πρὸς τὴν δε, ἡμιδιάμειρος, ἔχει καὶ τὸ αβ, τεταρτημόριον πρὸς τὸ ζε, τεταρτημόριον.

Geom. Lib. 7. Fig. 10.



Ἐχίτω β': ἡ δα, πρὸς ἐλάττωτα τῆς δγ, τὴν δε, τὸν αὐτὸν λόγον, ὅν

τὸ α β, τεταρτημόριον ἀπὸς αὐτὴν ἔχει. καὶ γραφήτω ἀπὸ κέρου τῷ δ, διαστήματι τῷ δ ε, τεταρτημόριον τὸ ι λ, ἴσαι δὲ τὸ ι λ, τεταρτημόριον καὶ τὴν ὑπόθεσιν ἴσον τῷ α δ, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται καὶ τῷ ε ζ. ἀλλ' ὡς τὸ α β, τεταρτημόριον ἀπὸς τὸ β η, τόξον, τὸ λ ι, τεταρτημόριον ἀπὸς τὸ ι μ, τόξον, ὡς δὲ τὸ α β, τεταρτημόριον ἀπὸς τὸ β η, τόξον, ἔχει καὶ ἡ α δ, ἀπὸς τὴν δ κ, ἥτοι τὴν θ ι, ἴσῳ, ἄρα ὡς ἡ δ α ἀπὸς τὴν θ ι, τὸ λ ι, τεταρτημόριον ἀπὸς τὸ ι μ, τόξον. ἐπεὶ δὲ τὸ λ ι, τεταρτημόριον ἴσον δέδεικται καὶ τὴν ὑπόθεσιν τῷ α δ, πάντως καὶ τὸ μ ι, τόξον ἴσον ἐστὶ τῷ θ ι, ὅπερ ἀδυνάτου. ἡ γὰρ ἀπτομένη πάντος τόξου μείζων αὐτοῦ ἐστὶ. Κεῖθω γὰρ τὸ ι ο, τόξον ἴσον τῷ ο λ, τόξου, καὶ ἀχθῆτω ἀπτομένη τῷ μ κ ι ο, καὶ τὸ ι, ἡ ι π, τῷ δὲ ο λ, καὶ τὸ λ, ἡ λ π. καὶ ἐπεὶ τὰ τόξα ἴσα ὑπέθεσαν, ἴσαι δὲ πνεύσει ἴσονται καὶ αἱ αὐτῶν ἀπτόμεναι. Ἐπιπέτως εἰσὶ συναμφοτέραι συναμφοτέρων, ὡς καὶ ἑκατέρα ἑκατέρου, ἡ ι π, ἄρα μείζων ἐστὶ τῷ ι ο, τόξου. Τὸ τεταρτημόριον ἄρα, ἥπε πλάρα.

Πρότασις ΙΔ΄:

Κύκλος τεταρτημόριον, τῷ διαστήματι ἴσῳ τῇ βάσει τῆς τετραγωνιζέσης γραφομένου, ἴσον ἐστὶ τῇ πλάρα τῆς τετραγωνιζέσης.

Γραφήτω ἀπὸ δ, τῷ κέρου διαστήματι τῷ δ γ, τεταρτημόριον τὸ γ ξ, λέγω δὲ τὸ ἴσον εἶναι τῷ α δ. καὶ γὰρ τὴν ἀνωτέρω, ὡς τὸ α β, τεταρτημόριον ἀπὸς τὴν α δ, ἡ α δ, ἥτοι ἡ δ β, ἀπὸς τὴν δ γ, ἀλλ' ὡς ἡ δ β, ἡμιδιάμετρος ἀπὸς τὴν δ γ, ἔχει τὸ α β, τεταρτημόριον ἀπὸς τὸ γ ξ, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται, τὸ α β, ἄρα τεταρτημόριον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἀπὸς τὴν α δ, πλάραν τῆς τετραγωνιζέσης, καὶ τὸ γ ξ, τεταρτημόριον, ὡς καὶ τὴν ῥηθεῖσαν θ': τῷ ε': τῷ στοιχειωτῷ, τὸ γ ξ, τεταρτημόριον ἴσον ἐστὶ τῷ α δ. Κύκλου ἄρα τεταρτημόριον.

Πρότασις ΙΕ΄:

Τὸ δοθεὲν τόξον εἰς τὰ δοθέντα μέρη, ἡ γουὼ κατὰ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν διελεῖν.

Ἐστω διελεῖν τὸ α β, τόξον εἰς μέρη δύο, ἔχοντα λόγον ἀπὸς ἀλλήλα, ὃν ἡ γ, δέθεῖται ἀπὸς τὴν δ. Εὐριθέτω δὲ τὸ κέρου τῷ δοθέντος α β, τόξου καὶ τὴν β': τῷ β': τῷ παρ: καὶ ἔστω τὸ ε, καὶ ἀναπληρωθῶ τὸ α β ζ, τεταρτημόριον. εἴτα γραφήτω ἐν αὐτῷ ἡ ζ η, τετραγωνίζουσα γραμμὴ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ β ε, πνεύσα τὴν ζ η, τετραγωνίζουσα καὶ τὸ θ, ἀφ' ἧ ἤχθω παράλληλος τῇ κ ε, ἡ θ κ, καὶ ἡ ἀπολαμβανομένη κ, τμηθῆτω εἰς δύο μέρη τὰ ε λ, λ κ, καὶ τὸν