# Δ΄. ΕΚ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

***Μεθοδικὴ ἑνότης.*** Τὰ κοινὰ κλάσματα.

***Σκοπός.*** Ἀπὸ τὸν χαρτοπώλην Α. ἀγοράζομεν μολυβδοκόνδυλα, χαρτί, τετράδια καὶ ἄλλα πράγματα, τὰ ὁποῖα μᾶς χρειάζονται διὰ τὴν ἐργασίαν μας. Σήμερον θὰ μάθωμεν πῶς ἀγοράζει αὐτὸς τὰ πράγματα αὐτά.

## ΜΕΘΟΔΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

### Ι΄ ΣΤΑΔΙΟΝ ΕΠΟΠΤΕΙΑΣ

### α΄) Πραγματικὴ ἐπεξεργασία.

#### *α΄.) Πραγματικὴ ἀνάλυσις.*

***Διδ.*** Γνωρίζομεν πόσον μᾶς πωλεῖ ὁ Α. τὰ πράγματα αὐτά; ***Μαθ.*** Τὰ εὐθηνότερα μολυβδοκόνδυλα καὶ τοὺς εὐθηνοτέρους κονδυλοφόρους καὶ κανόνας ἀγοράζομεν 50 λεπτά, τὰ δὲ ἀκριβώτερα 80 λεπτά. Τὸ μικρὸν τετράδιον 20 λεπτά, μίαν πλάκα 80 λεπτά, 1 φύλλον χάρτου 5 λεπτά, 3 πέννες 20 λεπτὰ κ. λ. κ. λ. (Οἱ μαθηταὶ λέγουσι πάσας τὰς τιμάς, ἃς γνωρίζουσι). ***Διδ.*** Νἀγοράζῃ ἄρά γε τὰ πράγματ' αὐτὰ καὶ ὁ χαρτοπώλης εἰς τὴν αὐτὴν τιμήν, εἰς τὴν ὁποίαν μᾶς τὰ πωλεῖ; ***Μαθ.*** Θὰ τἀγοράζῃ εὐθηνότερα, διότι ἄλλως δὲν θὰ ἐκέρδιζε τίποτε καὶ δὲν θὰ ἠδύνατο νὰ ζήσῃ· ὅ,τι τοῦ χρειάζεται διὰ νὰ ζήσῃ, νὰ συντηρήσῃ τὴν οἰκογένειάν του, νἀγοράζῃ ἐνδύματα, νὰ πληρώνῃ ἐνοίκιον κ. λ. πρέπει νὰ κερδίζῃ ἀπὸ τὰ δέσιμον τῶν βιβλίων καὶ ἀπὸ τὰ πράγματα τὰ ὁποῖα πωλεῖ. ***Διδ.*** Δι' αὐτὸ λοιπόν; ***Μαθ.*** Δι' αὐτὸ θὰ τἀγοράζῃ εὐθυνότερα ἀπὸ ὅ,τι τὰ πωλεῖ.

#### *β΄.) Πραγματικὴ σύνθεσις.*

1. ***Διδ.*** Τὰ ἐμπορεύματά του προμηθεύεται ὁ Α ἀπὸ τὸ κατάστημα Π. καὶ Κ. ἐν Ἀθήναις. Ἐκεῖ δὲ πληρώνει δι' ἓν μολυβδοκόνδυλον, τὸ ὁποῖον πωλεῖ εἰς ἡμᾶς 50 λεπτά, 40 λεπτὰ περίπου· μάλιστα κάτι ὀλιγώτερον· δι' ἐκεῖνα δέ, τὰ ὁποῖα μᾶς πωλεῖ 80 λεπτά, μόνον 65 λεπτὰ κ. λ. Δι' αὐτὸ ὅμως δὲν πρέπει νὰ ὑποθέσετε ὅτι καὶ τὰ παιδιὰ ποὺ εὑρίσκονται εἰς τὰς Ἀθήνας ἀγοράζουν τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα χρειάζονται εἰς τὸ σχολεῖον εὐθηνότερ' ἀπὸ σᾶς· διότι, ἂν ὑπάγουν π. χ. καὶ ἐκεῖνα εἰς τὸ κατάστημα τῶν Π. καὶ Κ. καὶ ζητήσουν μολυβδοκόνδυλα θά τους ποῦν: τὰ καλύτερα κοστίζουν 80 λεπτά, τὰ ἄλλα 50, τὸ ἴδιον δὲ καὶ διὰ τὰ ἄλλα πράγματα ὅλα. Ὥστε; ***Μαθ.*** Τὸ κατάστημα Π. καὶ Κ. θὰ ἔχῃ δύο τιμὰς διὰ τὰ ἐμπορεύματά του.

Μίαν διὰ τοὺς μικροτέρους ἐμπόρους καὶ ἄλλην διὰ τὰ παιδιὰ τοῦ σχολείου. **Διδ.** Διατί ἆρά γε ; ἐνθυμηθῆτε τὰ κάρβουνα, τὰ ὁποῖα ἀγοράζομεν εἰς τὸ σπίτι μας, τὸ πετρέλαιον κ. λ. πότε τἀγοράζομεν εὐθηνότερα, ὅταν τὰ παίρνωμεν λίγα λίγα, ἢ ὅταν τἀγοράζωμεν μαζωμένα ; **Μαθ.** Ἐμένα ὁ πατέρας μου ἔλεγε προχθὲς ὅτι δὲν συμφέρει νἀγοράζωμεν ἀπὸ τὸν παντοπώλην τὸ πετρέλαιον, διότι τὸ πωλεῖ ἀκριβά· δι' αὐτὸ δὲ ἀγόρασεν ἕνα τενεκὲ καὶ εἶπεν ὅτι δὲν θἀγοράζῃ πλέον ἀπὸ τὸν παντοπώλην. **Διδ.** Κἄτι ὅμοιον συμβαίνει καὶ ἐδῶ, δηλαδή ; **Μαθ.** Τὰ παιδιὰ ἀγοράζουν ἕνα ἕνα τὰ μολυβδοκόνδυλα, ἕνα ἕνα τὰ τετράδια, ἕνα κονδυλοφόρον, ὀλίγες πέννες κ. λ. ἐνῷ ὁ χαρτοπώλης θἀγοράζῃ ἀπὸ ὅλα αὐτὰ πολλά· δι' αὐτὸ ἐκεῖνος τἀγοράζει εὐθηνότερα. **Διδ.** Μάλιστα· ἐκεῖνος παραγγέλλει διὰ μιᾶς ἑκατοντάδας μολυβδοκόνδυλα, φύλλα χάρτου, κονδυλοφόρους κ. λ. Ὥστε τὸ κατάστημα Π. καὶ Κ. ἔχει πολὺ ὀλιγωτέραν ἐργασίαν καὶ ὀλιγώτερον κόπον νὰ στείλῃ ὅλα αὐτά, παρὰ νὰ πωλῇ ἀπὸ ἕνα μολυβδοκόνδυλον, κονδυλοφόρον κ. λ. Ἐκτὸς τούτου ἀπὸ μίαν παραγγελίαν τοῦ Λ. χαρτοπώλου κερδίζει πολὺ περισσότερον, ἀπὸ ὅσα κερδίζει ἀπὸ ἕνα παιδὶ ὅλον τὸν καιρόν, ποὺ πηγαίνει εἰς τὸ σχολεῖον. Δι' αὐτὸ πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του πολὺ εὐθηνότερα εἰς τοὺς χαρτοπώλας παρὰ εἰς τὰ παιδιά. Κἄτι ὅμοιον κάμνει καὶ ἐδῶ ὁ χαρτοπώλης Λ. **Μαθ.** Ἐγὼ ἐπῆγα νἀγοράσω 12 τετράδια καὶ ἐπλήρωσα 20 δεκάρες μόνον, ἐνῷ ἂν τα ἀγόραζα ἀπὸ ἓν θὰ ἐπλήρωνα 24. **Διδ.** Εἰς αὐτὸ μίαν ἐπιγραφήν. **Μαθ.** ***Διαφορὰ τιμῶν κατὰ τὴν ἀγορὰν μολυβδοκονδύλων, κονδυλοφόρων*** κ. λ. (Ἀπόδοσις ὑπὸ ἑνὸς ἢ πλειόνων μαθητῶν, συμπλήρωσις, διόρθωσις κλ.).

2 **Διδ.** Ὅταν τὸ κατάστημα Π. καὶ Κ. στέλλῃ τὴν παραγγελίαν τοῦ χαρτοπώλου Α. τοῦ στέλλει συγχρόνως καὶ κἄτι ἄλλο. **Μαθ.** Τοῦ στέλλει συγχρόνως καὶ τὸν λογαριασμόν. **Διδ.** Ἀφοῦ δὲ στέλλει τόσον πολλὰ πράγματα ἀπὸ κάθε εἶδος θὰ τοῦ λέγῃ πόσον κοστίζει τὸ ἕνα ; ὅταν ἀγοράζωμεν πολλὰ κάρβουνα ἢ πολλὰ ξύλα πῶς τὰ λογαριάζομεν ; **Μαθ.** (Λέγει). **Διδ.** καὶ ἐδῶ κἄτι ὅμοιον γίνεται· σᾶς ἔφερα ἕνα λογαριασμόν, τὸν ὁποῖον ἔστειλε τὸ κατάστημα Π. καὶ Κ. πρὸς τὸν χαρτοπώλην Α. παρατηρήσατέ τον καλά. **Μαθ.** (Παρατηροῦσι). **Διδ.** Νά τον ἀναγνώσῃ ἕνας νὰ δοῦμε τί λέγει. **Μαθ.** (Ἀναγινώσκει) $12\frac{3}{4}$ δωδεκάδες μολυβδοκόνδυλα ἀρ. 2 πρὸς 6 δραχμάς. **Διδ.** Τί θὰ εἴπῃ πρὸς 6 δραχμάς ; **Μαθ.** 6 δραχμὰς ἑκάστη δωδεκάς. **Διδ.** Μάλιστα προχώρει. **Μαθ** $10\frac{1}{4}$ δωδεκάδες κονδυλοφόροι ἀρ. 42 πρὸς..... 5 γκρόσσες πέννες πρὸς..... **Διδ.** Ξεύρει κανένας τί εἶναι γκρόσσα ; **Μαθ.** ..... **Διδ.** Θὰ σᾶς εἴπω ἐγώ· μερικὰ πράγματα πωλοῦνται μὲ τὴν δωδεκάδα, ἄλλα ὅμως πωλοῦνται μὲ 12 δωδεκάδας· τὰς 12 αὐτὰς δωδεκάδας λέγουν εἰς τὴν γλῶσσαν τοῦ ἐμπορίου γκρόσσαν

(γραφὴ ἐπὶ τοῦ πίνακος). Ἔπειτα· **Μαθ.** $8\frac{1}{2}$ δωδεκάδες τετράδια πρὸς... 40 καδένα χάρτου πρός. . **Διδ.** Ἀπὸ αὐτὰ βλέπομεν ὅτι τὸν χάρτην πωλοῦσι κατὰ καδένα· τὸ καδένον πόσα φύλλα ἔχει ; **Μαθ.** Τὸ καδένον ἔχει 10 φύλλα. **Διδ.** Καὶ ἡ δεσμίς; **Μαθ.**..... **Διδ.** Ἡ δεσμὶς ἔχει 50 καδένα δηλ. 500 φύλλα. Αὐτὰ εἰς τὸ μεγάλο χαρτί, τὸ ὁποῖον ἀγοράζομεν διὰ νὰ κάμνωμεν τετράδια· εἰς τὸν χάρτην ὅμως τῶν ἐπιστολῶν συμβαίνει ἄλλως. Παρατηρήσατε ἐδῶ πόσα φύλλα ἔχει τὸ καδένον ; **Μαθ.** Τὸ καδένον εἰς τὸν χάρτην τῶν ἐπιστολῶν ἔχει 5 φύλλα. **Διδ.** Καὶ ὅλον αὐτὸ εἶναι μία δεσμίς· πόσα καδένα εἶναι; **Μαθ.** (Ἀφοῦ ἠρίθμησεν)· αὐτὰ εἶναι 100 καδένα. **Διδ.** Καὶ φύλλα ; **Μαθ.** Καὶ φύλλα 500, ὅπως καὶ εἰς τὸ ἄλλο. **Διδ.** Εἰς αὐτά, τὰ ὁποῖα ἐμάθομεν, μίαν ἐπιγραφήν. **Μαθ.** ***Πῶς πωλοῦν τὸν χάρτην, τὰ μολυβδοκόνδυλα, τὰ τετράδια κ.λ.*** (Τὰ λοιπά, ὅπως καὶ ἀνωτέρω).

## β΄. Τυπικὴ ἐπεξεργασία.

### α΄) Τυπικὴ Ἀνάλυσις.

**Διδ.** Ὅταν πρόκειται νὰ ἑτοιμάσῃ τὸ κατάστημα Π. καὶ Κ. εἰς Ἀθήνας τὸν λογαριασμὸν διὰ τὸν χαρτοπώλην Α. πρέπει νὰ γνωρίζῃ πόσας δωδεκάδας, γκρόσσας, καδένα, δεσμίδας κ.λ. παρήγγειλεν οὗτος. Ὁ χαρτοπώλης Α. γράφει πολλάκις ἀκριβῶς τὰ ποσὰ ταῦτα, ὅπως τὰ εἴπομεν προηγουμένως, εἰς τὴν παραγγελίαν του· γράφει π. χ. **Μαθ.** Στείλατέ μου 20 δωδεκάδας μολυβδοκόνδυλα ἀριθμ. 2, 10 γκρόσσας γραφίδας, 50 καδένα χάρτην τετραδίων κ.λ. κ.λ. **Διδ.** Ἄλλοτε ὅμως γράφει π. χ. 48 μολυβδοκόνδυλα, 120 κονδυλοφόρους κ. λ. Τότε τί πρέπει νὰ κάμῃ τὸ κατάστημα Π. καὶ Κ.; **Μαθ.** Θὰ εἶναι ὑποχρεωμένον νά τα μεταβάλῃ εἰς δωδεκάδας, γκρόσσας κ. λ. **Διδ.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἴμεθα ὑπάλληλοι εἰς τὸ κατάστημα Π. καὶ Κ., τὸ ὁποῖον λαμβάνει μίαν τοιαύτην παραγγελίαν, καὶ λαμβάνομεν τὴν διαταγὴν νὰ κάμωμεν τὰς σχετικὰς μεταβολάς. Ἐγὼ θά σας λέγω τί λέγει ἡ παραγγελία καὶ σεῖς θά το μεταβάλετε, ὅπως πρέπει. (Οὕτω π. χ. λέγει τὰ ἑξῆς ὁ διδάσκαλος, οἱ δὲ μαθηταὶ λέγουσιν ἀμέσως τὸ σχετικῶς ἀνάλογον).

| Διδάσκαλος | | Μαθηταί | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 μολυβδοκόνδυλα | = | 2 | δωδεκάδας | μολυβδοκονδύλων. |
| 48 Κανόνας | = | 4 | » | κανόνων. |
| 120 κομμάτια ἐλαστ. κόμμεος | = | 10 | » | ἐλαστ. κόμμεος. |
| 72 κονδυλοφόρους | = | 6 | » | κονδυλοφόρων. |
| 108 τετράδια | = | 9 | » | τετραδίων. |
| 240 φύλλα χάρτου | = | 24 | καδένα χάρτου. | |
| 550 καδένα | = | 11 | δεσμίδας χάρτου. | |
| 80 φύλλα χάρτου ἐπιστολῶν | = | 16 | καδένα χάρτου ἐπιστολῶν. | |
| 600 καδένα » » | = | 6 | δεσμίδας » | » |

Ταῦτα καὶ ἄλλα ἀνάλογα δίδει ὁ διδάσκαλος πρὸς μετατροπήν, ἕως ὅτου ἴδῃ ὅτι οἱ μαθηταὶ κατέστησαν ἐντριβέστατοι περὶ τὴν μετατροπὴν ταύτην.

### β') *Τυπικὴ Σύνθεσις.*

***Διδ.*** Ἀπὸ τὸν λογαριασμόν, τὸν ὁποῖον ἔστειλε τὸ κατάστημα Π. καὶ Κ. εἰς τὸν χαρτοπώλην Α. εἴδομεν ὅτι αἱ παραγγελίαι δὲν γίνονται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ περιέχωσιν ***ὁλοκλήρους*** δωδεκάδας ἢ γκρόσσας ἢ δεσμίδας κ. λ. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ μάθωμεν νὰ μετατρέπωμεν καὶ τοιαύτας παραγγελίας. Διὰ νὰ εὐκολυνθῶμεν εἰς τὴν ἐργασίαν μας ἔφερα μαζί μου πολλὰ μολυβδοκόνδυλα, ὅλα αὐτά· εἰς ἕκαστον πρόβλημα θὰ παίρνετε ὅσα μᾶς λέγει ἡ παραγγελία, θὰ τὰ θέτετε δώδεκα δώδεκα, καὶ τὰ ἄλλα, τὰ ὁποῖα δὲν κάμνουν 12, θὰ τὰ βάζετε ἐδῶ χωριστά. Ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι παρηγγέλθησαν 25 μολυβδοκόνδυλα· νὰ ἔλθῃ ἕνας νὰ τὰ χωρίσῃ, ὅπως εἴπομεν. ***Μαθ.*** (Χωρίζει· ἀποτελεῖ μίαν ὁμάδα ἀπὸ 12, ἄλλην μίαν ἀπὸ 12 καὶ θέτει καὶ 1 χωριστά· ἔπειτα λέγει) : τὰ 25 μολυβδοκόνδυλα κάμνουν 2 δωδεκάδας καὶ ἓν μολυβδοκόνδυλον. ***Διδ.*** Πόσα μολυβδοκόνδυλα θά μας ἐχρειάζοντο ἀκόμη διὰ νὰ ἔχωμεν ἄλλην μίαν δωδεκάδα ; ***Μαθ.*** Χρειαζόμεθα ἄλλα 11 διὰ νὰ ἔχωμεν ἄλλην μίαν δωδεκάδα. ***Διδ.*** Ὥστε πόσα κομμάτια κάμνουν μίαν δωδεκάδα ; ***Μαθ.*** Μίαν δωδεκάδα κάμνουν 12 κομμάτια. ***Διδ.*** Καὶ τὸ ἕνα κομμάτι τί θὰ εἶναι τῆς δωδεκάδος ; ***Μαθ.*** Θὰ εἶναι τὸ ἓν δωδέκατον τῆς δωδεκάδος. ***Διδ.*** Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἕνα μολυβδοκόνδυλον δὲν εἶναι μία δωδεκάς, ἀλλὰ μόνον ἕνα κομμάτι, ἕνα τεμάχιον τῆς δωδεκάδος, διὰ τοῦτο τὸ λέγομεν ***κλάσμα*** (γραφὴ ἐπὶ τοῦ πίνακος) τῆς δωδεκάδος· τὸ γράφομεν δὲ οὕτω $\frac{1}{12}$ καὶ τὸ ἀναγινώσκομεν ἓν δωδέκατον. Ἐκ τῶν δύο δὲ ἀριθμῶν, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἀποτελεῖται τὸ κλάσμα τοῦτο τὸ 1 λέγομεν ἀριθμητήν, τὸ δὲ 12 παρονομαστὴν (γραφὴ ἐπὶ τοῦ πίνακος). Ὥστε ἀντὶ νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ 25 μολυβδοκόνδυλα εἶναι δύο δωδεκάδες μολυβδοκόνδυλα καὶ ἀκόμη ἕν, πῶς δυνάμεθα νὰ λέγωμεν συντομώτερον ; ***Μαθ.*** Ὅτι εἶναι δύο δωδεκάδες καὶ $\frac{1}{12}$ μολυβδοκόνδυλα. ***Διδ.*** Ἂς γράψωμεν αὐτὸ εἰς τὸν πίνακα. ***Μαθ.*** (Γράφει 25 μολυβδ.$=2\frac{1}{12}$ δωδεκ. μολυβδ.) ***Διδ.*** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅμως, ὅτι εἰς τὴν παραγγελίαν ὑπάρχουν 26 μολυβδοκόνδυλα· ἂς χωρίσωμεν πάλιν διὰ νὰ ἴδωμεν τί θὰ εὕρωμεν. ***Μαθ.*** (Χωρίζει, ὅπως καὶ ἀνωτέρω καὶ εἶτα λέγει): τὰ 26 μολυβδοκόνδυλα εἶναι 2 δωδεκάδες καὶ ἀκόμη δύο μολυβδοκόνδυλα. ***Διδ.*** Πόσας φορὰς ἀκόμη πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ 2 μολυβδοκόνδυλα διὰ νὰ κάμωμεν ἄλλην μίαν δωδεκάδα μολυβδοκονδύλων ; ***Μαθ.*** Πρέπει νὰ λάβωμεν ἀκόμη πέντε φορὰς ἀπὸ 2 διὰ νὰ κάμωμεν ἄλλην μίαν δωδεκάδα. *Διδ.* Δηλαδὴ πόσας φορὰς ὅλον καὶ ὅλον πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ 2 διὰ νὰ κάμωμεν μίαν δωδεκάδα; μέτρησε νὰ ἴδωμεν. *Μαθ.* Πρέπει νὰ λάβωμεν 6 φορὰς ἀπὸ 2 διὰ νὰ κάμωμεν μίαν δωδεκάδα. *Διδ.* Ὅταν ἐλαμβάνομεν 12 μολυβδ. διὰ νὰ κάμωμεν μίαν δωδεκάδα, πῶς ἐλέγομεν τὸ ἓν μολυβδοκόνδυλον; *Μαθ.* Τὸ ἐλέγομεν τὸ $\frac{1}{12}$. *Διδ.* Καὶ τώρα, ποὺ λαμβάνομεν 6 φορὰς καθ' ἓν ἀπὸ αὐτά, πῶς θὰ ὀνομάσωμεν τὸ ἕν; *Μαθ.* Τὸ ἓν αὐτὸ (λέγει δεικνύων τὴν ἐκ δύο μολυβδοκονδύλων ἀποτελουμένην ὁμάδα) θὰ ὀνομασθῇ τὸ ἓν ἕκτον τῆς δωδεκάδος. *Διδ.* Πῶς εἴχομεν γράψει τὸ ἓν δωδέκατον; *Μαθ.* (Γράφει: $\frac{1}{12}$). *Διδ.* Καὶ τὸ ἓν ἕκτον πῶς θὰ τὸ γράψωμεν; *Μαθ.* (Γράφει: $\frac{1}{6}$). *Διδ.* Πῶς λέγονται οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοί; *Μαθ.* Τὸ 1 λέγεται ἀριθμητὴς καὶ τὸ 6 παρονομαστής. *Διδ.* Νὰ γράψωμεν λοιπὸν 26 μολυβδοκόνδυλα πόσαι δωδεκάδες εἶναι. *Μαθ.* (Γράφει: 26 μολυβδοκόνδυλα$=2\frac{1}{6}$ δωδ. μολυβδ.). *Διδ.* Μάλιστα· αὐτὸ ὅμως δυνάμεθα νὰ τὸ γράψωμεν καὶ κατ' ἄλλον τρόπον· τὸ 1 μολυβδοκόνδυλον τί εἴπομεν ὅτι εἶναι τῆς δωδεκάδος; *Μαθ.* Τὸ ἓν δωδέκατον. *Διδ.* Καὶ τὰ δύο λοιπόν; *Μαθ.* Τὰ δύο θὰ εἶναι τὰ δύο δωδέκατα. *Διδ.* Ἄς γράψωμεν λοιπὸν εἰς ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἐγράψαμεν πρωτύτερα καὶ αὐτό. *Μαθ.* (Προσθέτει εἰς τὸ ἀνωτέρω): ἢ $2\frac{2}{12}$ δωδεκ. μολυβδοκόνδυλα. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκονται καὶ τὰ ἑπόμενα:

27 μολυβδοκόνδυλα$=2$ δωδεκάδες μολυβδ. καὶ 3 κομμάτια$=2\frac{1}{4}$ δωδεκάδος μολυβδ.$=2\frac{3}{12}$ δωδεκ. μολυβδ.

28 μολυβδ.$=2$ δωδ. μολυβδ. καὶ 4 κομμάτια$=2\frac{1}{3}$ δωδεκ. μολυβδ.$=2\frac{2}{6}$ δωδ. μολυβδ.$=2\frac{4}{12}$ δωδεκ. μολυβδ.

29 μολυβδ.$=2$ δωδ. μολυβδ. καὶ 5 κομμάτια$=2\frac{5}{12}$ μολυβδ.

30 μολυβδ.$=2$ δωδ. μολυβδ. καὶ 6 κομμάτια$=2\frac{1}{2}$ δωδεκ. μολυβδ.$=2\frac{2}{4}$ δωδ. μολυβ.$=2\frac{3}{6}$ δωδ. μολβδ.$=2\frac{6}{12}$ δωδ. μολυβδοκ. κ. λ. κ. λ. μέχρι τοῦ 36 μολυβδ.$=3$ δωδεκάδες.

Ἄλλοτε πάλιν παραγγέλλονται κονδυλοφόροι καὶ πρέπει νὰ μεταβάλωμεν πάλιν τὴν παραγγελίαν εἰς δωδεκάδας.

37 κονδυλ.$=3$ δωδ. κονδυλ. καὶ 1 κομμάτι$=3\frac{1}{12}$ κονδ.

38 κονδυλ. = 3 δωδ. κονδυλ. καὶ 2 γομμ. = $3\frac{2}{12}$ δωδ. κονδυλ. = = $3\frac{1}{6}$ δωδεκ. κονδυλ.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

48 κονδυλ. = 4 δωδ. κονδυλ. = $3\frac{12}{12}$ δωδεκ. κονδυλ. κ.λ. κ.λ. κατὰ τἀνωτέρω.

Εἰς τρίτην παραγγελίαν παραγγέλλονται φύλλα χάρτου.

50 φύλλα χάρτου = 5 καδένα χάρτου.

51 » » = 5 καδ. χ. καὶ 1 φ. = $5\frac{1}{10}$ καδ. χάρτου.

52 » » = 5 καδ. χ. καὶ 2 φ. = $5\frac{1}{5}$ καδ. χ. = $5\frac{2}{10}$ καδ. χ.

53 » » = 5 καδ. χ. καὶ 3 φ. = $5\frac{3}{10}$ καδ. χ.

54 » » = 5 καδ. χ. καὶ 4 φ. = $5\frac{4}{10}$ καδ. χ. = $5\frac{2}{5}$ καδ. χ.

55 » » = 5 καδ. χ. καὶ 5 φ. = $5\frac{1}{2}$ καδ. χ. = $5\frac{5}{10}$ καδ. χ.

56 » » = 5 καδ. χ. καὶ 6 φ. = $\frac{3}{5}$ καδ. χ. = $5\frac{6}{10}$ καδ. χ.

κ. λ. κ. λ.

## Β. ΣΤΑΔΙΟΝ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

### Σύνδεσις α.

***Σκοπός.*** Εἰς τἀνωτέρω εὕρομεν διάφορα κλάσματα· πρῶτον προκειμένου περὶ δωδεκάδων, δηλαδή; ***Μαθ.*** Εὕρομεν $\frac{1}{2}$ δωδ., $\frac{1}{3}$ δωδ., $\frac{1}{4}$ δωδ., $\frac{1}{5}$ δωδ. κ. λ. ***Διδ.*** Ἔπειτα προκειμένου περὶ καδένων χάρτου; ***Μαθ.*** Εὑρήκαμεν πάλιν $\frac{1}{2}$ καδ. $\frac{1}{5}$ καδ. $\frac{2}{5}$ καδ. $\frac{3}{5}$ καδ. κ.λ. ***Διδ. Αὐτὰ τὰ κλάσματα πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν καλύτερον διὰ νὰ δυνάμεθα μετὰ ταῦτα νὰ λογαριάζωμεν καὶ μὲ αὐτά.*** Καὶ πρῶτα πρῶτα θὰ συγκρίνωμεν τὰ κλάσματα αὐτὰ πρὸς ἄλληλα διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ μεγαλύτερα καὶ τὰ μικρότερα. Νὰ γράψῃ ἕνας εἰς τὸν πίνακα κλάσματα ***μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν. Μαθ.*** (Γράφει $\frac{1}{2}$ δωδ. $\frac{1}{3}$ δωδ. $\frac{1}{4}$ δωδ. $\frac{1}{6}$ δωδ. $\frac{1}{12}$ δωδ.). ***Διδ.*** Ἄς ἐνθυμηθῶμεν τί λέγει ἕκαστον τῶν κλασμάτων αὐτῶν· τί θὰ εἴπῃ $\frac{1}{2}$ δωδεκ.; ***Μαθ.*** $\frac{1}{2}$ δωδ. θὰ εἴπῃ, ὅτι διαιροῦμεν τὴν δωδεκάδα εἰς 2 μέρη καὶ λαμβάνομεν τὸ 1. ***Διδ.*** Καὶ πόσα λοιπὸν λαμβάνομεν; **Μαθ.** Λαμβάνομεν 6. **Διδ.** Ὥστε τὸ $\frac{1}{2}$ δωδ. μὲ τί εἶναι ἴσον; **Μαθ.** Τὸ $\frac{1}{2}$ δωδ. εἶναι ἴσον μὲ 6. **Διδ.** Νὰ γράψωμεν αὐτὸ εἰς τὸν πίνακα. **Μαθ.** (Γράφει $\frac{1}{2}$ δωδ. = 6). **Διδ.** Καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ δωδ. τί μᾶς λέγει; **Μαθ.** Τὸ $\frac{1}{3}$ δωδ. μᾶς λέγει, ὅτι διαιροῦμεν τὴν δωδ. εἰς 3 μέρη καὶ λαμβάνομεν τὸ 1. **Διδ.** Δηλαδὴ πόσα; **Μαθ.** Λαμβάνομεν 4. **Διδ.** Νὰ γράψωμεν καὶ αὐτὸ ἀποκάτω ἀπὸ τὸ ἄλλο. **Μαθ.** (Γράφει $\frac{1}{3}$ δωδ. = 4). Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκει ὁ μαθητὴς καὶ ἄλλα καταγράφων αὐτὰ ὡς ἑξῆς:

$\frac{1}{2}$ δωδεκάδος = 6 $\qquad$ $\frac{1}{6}$ δωδεκάδος = 2.

$\frac{1}{3}$ δωδ.κάδος = 4 $\qquad$ $\frac{1}{12}$ δωδεκάδος = 1.

$\frac{1}{4}$ δωδ.κάδος = 3

**Διδ.** Ἂς προσέξωμεν εἰς τὰ κλάσματ' αὐτὰ νὰ ἴδωμεν κατὰ τί ὁμοιάζουν καὶ κατὰ τί διαφέρουν ἀλλήλων. **Μαθ.** Ὅλα τὰ κλάσματα ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, διάφορον ὅμως παρονομαστήν. **Διδ.** Καὶ τί παρατηροῦμεν; **Μαθ.** Ὅσον μικρότερος εἶναι ὁ παρονομαστὴς τόσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ κλάσμα, καὶ ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ παρονομαστὴς τόσον μικρότερον εἶναι τὸ κλάσμα **Διδ.** Ἂς παρατηρήσωμεν τώρα, ἐὰν συμβαίνῃ τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα σημαίνουν καδένα χάρτου. Νὰ μου εἴπῃ ἕνας κλάσματα τοιαῦτα. **Μαθ.** (Λέγει: $\frac{1}{2}$ καδ. χ., $\frac{1}{5}$ καδ. χ., $\frac{1}{10}$ καδ. χ.), **Διδ.** Τί θὰ εἴπῃ $\frac{1}{2}$ καδ. χάρτου; **Μαθ.** Ὅτι διαιροῦμεν τὰ 10 φύλλα χάρτου, τὰ ὁποῖα περιέχει τὸ καδένον, εἰς 2 μέρη καὶ παίρνομεν τὸ 1 μέρος. **Διδ.** Δηλαδὴ πόσα; **Μαθ.** Δηλαδὴ 5 φύλλα χάρτου. **Διδ.** Νὰ γράψωμεν αὐτὸ εἰς τὸν πίνακα. **Μαθ.** (Γράφει: $\frac{1}{2}$ καδ. χ. = 5 φύλλα χάρτου. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὴν σημασίαν καὶ τῶν λοιπῶν κλασμάτων $\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{1}{10}$ φύλλα χάρτου καὶ καταγράφομεν ἐπὶ τοῦ πίνακος:

$\frac{1}{2}$ καδ. χάρτου = 5 φύλλα χάρτου.

$\frac{1}{5}$ » » = 2 » »

$\frac{1}{10}$ » » = 1 φύλλον χάρτου.

**Διδ.** Τί παρατηροῦμεν λοιπὸν καὶ ἐδῶ; **Μαθ.** Καὶ ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ μεγαλύτερα κλάσματα ἔχουσι μικροτέρους παρονομαστὰς καὶ τὰ μικρότερα μεγαλυτέρους, ἐνῷ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ὁ ἴδιος. *Διδ.* Εἰς ὅλα ὅμως τὰ κλάσματα ταῦτα ὁ ἀριθμητὴς εἶναι 1· ἂς ἴδωμεν ἂν συμβαίνῃ τὸ ἴδιον καὶ ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι 2, 3 κ. λ. Ἐκ τῆς σχετικῆς ἐρεύνης καὶ συγκρίσεως, γιγνομένης κατὰ τὸν αὐτὸν ὡς καὶ ἀνωτέρω τρόπον, εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς:

$\frac{2}{4}$ δωδ.=6 $\frac{3}{4}$ δωδ.=9 $\frac{3}{5}$ καδ. χάρτου=6 φύλλα χάρτου.
$\frac{2}{6}$ » =4 $\frac{3}{6}$ » =6 $\frac{3}{10}$ » » =3 » »
$\frac{2}{12}$ » =2 $\frac{3}{12}$ » =3.

Ἐκ τῆς προηγουμένης δὲ διδασκαλίας καὶ τοῦ καθ' ἡμέραν βίου γνωρίζουσιν οἱ μαθηταὶ καὶ ἄλλα κλάσματα, π. χ.

$\frac{1}{2}$ μήλου, $\frac{1}{4}$ μήλου, $\frac{3}{4}$ μήλου.
$\frac{1}{2}$ ἄρτου, $\frac{1}{4}$ ἄρτου, $\frac{3}{4}$ ἄρτου.
$\frac{1}{2}$ ὥρας, $\frac{1}{4}$ ὥρας, $\frac{3}{4}$ ὥρας.
$\frac{1}{2}$ μέτρου, $\frac{1}{5}$ μέτρου, $\frac{3}{5}$ μέτρου, $\frac{1}{10}$ μέτρου.

Καὶ ταῦτα συγκρίνομεν δεικνύοντες εἰς τοὺς μαθητὰς τὰ μέρη, περὶ ὧν πρόκειται ἑκάστοτε μῆλα, ἄρτον, ὡρολόγιον καὶ μέτρον. Οὕτω δ' εὑρίσκομεν π. χ. $\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου, διότι $\frac{2}{4}$ τοῦ μήλου $=\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου, κ. λ. *Διδ.* Τί βλέπομεν λοιπόν; *Μαθ.* Συνεκρίναμεν κλάσματα, ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν καὶ διάφορον παρονομαστὴν καὶ εὕρομεν ὅτι τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μικρότερον παρονομαστὴν εἶναι μεγαλύτερον, ἐκεῖνο δὲ τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μεγαλύτερον παρονομαστὴν εἶναι μικρότερον.

### Σύστημα α'.

*Διδ.* Ποῖος θά μου κάμῃ τώρα ἕνα κανόνα; *Μαθ.* ***Ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων, ἐχόντων τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον τὸν μικρότερον παρονομαστήν, μικρότερον δὲ τὸ ἔχον τὸν μεγαλύτερον παρονομαστήν.*** *Διδ.* Μάλιστα καὶ ἄλλος νὰ ἐπαναλάβῃ. *Μαθ.* (Ἐπαναλαμβάνει). *Διδ.* Νὰ γράψῃ ἕνας εἰς τὸν πίνακα μικρότερα καὶ μεγαλύτερα κλάσματα. *Μαθ.* (Γράφει:

$\frac{1}{2}$ μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ » » $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ » » $\frac{1}{5}$

$\frac{1}{5}$ » » $\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}$ » » $\frac{1}{7}$

κ. λ. κ. λ.).

**Διδ.** Νἀποδείξωμεν αὐτό, τὸ ὁποῖον ἐγράψαμεν· ἂς λάβωμεν π. χ. $\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου καὶ $\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου. ***Μαθ.*** Διὰ νὰ λάβωμεν $\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ μῆλον εἰς 2 ἴσα μέρη μόνον καὶ νὰ λάβωμεν ἕν· ἐνῷ διὰ νὰ λάβωμεν $\frac{1}{4}$ μήλου πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ μῆλον εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ νὰ λάβωμεν 1· αὐτὸ δὲ τὸ 1 εἶναι πολὺ μικρότερον ἀπὸ τὸ 1, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ὅταν θὰ διαιρέσωμεν τὸ μῆλον εἰς 2 ἴσα μέρη. Τὸ κλάσμα λοιπὸν $\frac{1}{4}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$ Τὸ αὐτὸ ἀποδεικνύομεν διὰ τῆς κατ' αἴσθησιν ἐποπτείας καὶ ἐπὶ τοῦ ἄρτου. **Διδ.** Τώρα ἂς λάβωμεν τὰ δύο κλάσματα $\frac{3}{4}$ δωδ. καὶ $\frac{3}{12}$ δωδ. (Οἱ μαθηταὶ καὶ ἐνταῦθα ἔχουσι πρὸ ὀφθαλμῶν πραγματικὰ ἀντικείμενα εἰς δωδεκάδας π. χ. μολυβδοκόνδυλα ἢ ὅ,τι δήποτε ἄλλο). ***Μαθ.*** Διὰ νὰ λάβω $\frac{3}{4}$ δωδ. διαιρῶ ὅλην τὴν δωδεκάδα εἰς 4 ἴσα μέρη. (πράττει τοῦτο). Ἕκαστον δὲ μέρος ἔχει τρία μολυβδοκόνδυλα· διὰ νὰ λάβω ὅμως $\frac{3}{12}$ τῆς δωδ. πρέπει νὰ διαιρέσω αὐτὴν εἰς 12 ἴσα μέρη (πράττει τοῦτο)· βλέπομεν δ' ὅτι ἕκαστον μέρος ἔχει ἓν μόνον μολυβδοκόνδυλον. Ὥστε ἐνῷ τὴν πρώτην φορὰν ἕκαστον μέρος εἶχε 3 μολυβδοκόνδυλα τώρα ἕκαστον μέρος ἔχει μόνον 1 μολυβδ. ἔχομεν μὲν καὶ τὰς δύο φορὰς 3 μέρη, ἀλλὰ τὰ μέρη κατὰ τὴν πρώτην φορὰν εἶναι μεγαλύτερα. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον συγκρίνομεν καὶ ἄλλα κλάσματα, π. χ. $\frac{2}{3}$ δωδ. καὶ $\frac{2}{6}$ δωδ. κ. λ. κ. λ. **Διδ.** Ὥστε τώρα ἐννοοῦμεν, διατί ἓν κλάσμα μὲ μεγαλύτερον παρονομαστὴν εἶναι μικρότερον. ***Μαθ.*** Ὅταν ἓν κλάσμα ἔχῃ μεγαλύτερον παρονομαστὴν τὸ ὅλον διαιρεῖται εἰς περισσότερα μέρη· δι' αὐτὸ δ' ἕκαστον μέρος εἶναι μικρότερον ἀπὸ ὅτι θὰ ἦτο, ἐὰν διῃροῦμεν τὸ ὅλον εἰς ὀλιγώτερα μέρη. **Διδ.** Τώρα νά μου εἴπῃ ἕνας τὸν κανόνα καὶ τὴν δικαιολογίαν, τὴν ὁποίαν τώρα εὕρομεν. ***Μαθ.*** ***Ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων, ἐχόντων τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον τὸν μικρότερον πα-***

*ρονομαστήν, μικρότερον δὲ τὸ ἔχον τὸν μεγαλύτερον παρονομαστήν· διότι, ὅταν ἓν κλάσμα ἔχῃ μεγαλύτερον παρονομαστήν, τὸ ὅλον διαιρεῖται εἰς περισσότερα μέρη, δι' αὐτὸ ἕκαστον μέρος εἶναι μικρότερον ἀπὸ ὅ,τι θὰ ἦτο, ἐὰν διῃροῦμεν τὸ ὅλον εἰς ὀλιγώτερα μέρη.* ***Διδ.*** Νὰ ἐπαναλάβῃ καὶ ἄλλος. ***Μαθ.*** (Ἐπαναλαμβάνουσι μέχρι τελείας ἐντυπώσεως).

## Σύνδεσις β΄.

***Σκοπός.*** Ἡμεῖς ὅμως συνεντήσαμεν καὶ κλάσματα μὲ ***τοὺς αὐτοὺς παρονομαστὰς*** καὶ διαφόρους ἀριθμητὰς π. χ.: ***Μαθ.*** $\frac{1}{3}$ δωδ., $\frac{2}{3}$ δωδ., $\frac{1}{4}$ δωδ., $\frac{2}{4}$ δωδ., $\frac{3}{4}$ δωδ., $\frac{1}{6}$ δωδ., $\frac{2}{6}$ δωδ., $\frac{1}{5}$ καδ., $\frac{2}{5}$ καδ. $\frac{3}{5}$ καδ. κ.λ. ***Διδ.*** ***Ἂς συγκρίνωμεν καὶ ταῦτα πρὸς ἄλληλα·*** τί θὰ κάμωμεν λοιπὸν τώρα ; ***Μαθ.*** Θὰ συγκρίνωμεν κλάσματα, ἔχοντα τὸν αὐτὸν μὲν παρονομαστήν, ἀλλὰ διαφόρους ἀριθμητάς. ***Διδ.*** Ἂς συγκρίνωμεν πρῶτον τὰ δύο ταῦτα $\frac{1}{3}$ δωδεκ. καὶ $\frac{2}{3}$ δωδεκ. ***Μαθ.*** Τὸ $\frac{1}{3}$ δωδ. σημαίνει νὰ διαιρέσωμεν τὴν δωδεκάδα εἰς 3 μέρη καὶ νὰ λάβωμεν τὸ ἕν, δηλ. 4 μολυβδοκόνδυλα, τὸ δὲ $\frac{2}{3}$ σημαίνει νὰ διαιρέσωμεν πάλιν τὴν δωδ. εἰς 3 μέρη, ἀλλὰ νὰ λάβωμεν τὰ 2 ἀπὸ αὐτά, δηλαδὴ 8. ***Διδ.*** Ἂς γράψωμεν τώρα τὰ κλάσματα εἰς τὸν πίνακα καὶ πρὸς τί ἰσοῦνται. ***Μαθ.*** (Γράφει : $\frac{1}{3}$ δωδεκ.=4 μολυβδ. $\frac{2}{3}$ δωδεκ.=8 μολυβδοκόνδυλα). ***Διδ.*** Τί παρατηροῦμεν λοιπὸν εἰς τὰ κλάσματα ταῦτα ; ***Μαθ.*** Τὸ δεύτερον κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πρώτου καὶ εἶναι μὲν ὁ παρονομαστὴς ὁ αὐτός, ἀλλ' ὁ ἀριθμητὴς εἶναι δύο φορὰς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν τοῦ πρώτου. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν: $\frac{1}{4}$ δωδεκ.=3 μολυβδ. $\frac{2}{4}$ δωδεκ.=6 μολυβδ. $\frac{3}{4}$ δωδεκ.=9 μολυβδ. καὶ ὅτι μεγαλύτερον εἶναι τὸ $\frac{3}{4}$, ὅπερ ἔχει καὶ τὸν μεγαλύτερον ἀριθμητήν, μικρότερον δὲ τὸ $\frac{1}{4}$, ὅπερ ἔχει καὶ τὸν μικρότερον ἀριθμητήν. Ὁμοίως συγκρίνομεν καὶ τὰ κλάσματα :

$\frac{1}{6}$ δωδ., $\frac{2}{6}$ δωδ., $\frac{3}{6}$ δωδ., $\frac{4}{6}$ δωδ., $\frac{5}{6}$ δωδεκάδος.

$\frac{1}{12}$ δωδ., $\frac{2}{12}$ δωδ., $\frac{3}{12}$ δωδ., $\frac{4}{12}$ δωδ., $\frac{5}{12}$ δωδ., $\frac{6}{12}$ δωδ., $\frac{7}{12}$ δωδ. κ. λ. κ. λ.

$\frac{1}{5}$ καδ., $\frac{2}{5}$ καδ., $\frac{3}{5}$ καδ., $\frac{4}{5}$ καδ.

$\frac{1}{10}$ καδ., $\frac{2}{10}$ καδ., $\frac{3}{10}$ καδ., $\frac{4}{10}$ καδ. κ. λ. κ. λ.

Τοῖς παραδείγμασιν τούτοις προσθέτομεν ἄλλα ἐκ τῆς προηγουμένης διδασκαλίας καὶ τοῦ καθ' ἡμέραν βίου καὶ συγκρίνομεν ταῦτα πρὸς ἄλληλα, ἐννοεῖται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς κατ' αἴσθησιν ἐποπτείας πάντοτε π.χ.

$\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου $\frac{2}{4}$ τοῦ μήλου $\frac{3}{4}$ τοῦ μήλου.

$\frac{1}{4}$ τοῦ ἄρτου $\frac{2}{4}$ τοῦ ἄρτου $\frac{3}{4}$ τοῦ ἄρτου.

$\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας $\frac{2}{4}$ τῆς ὥρας $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας.

$\frac{1}{5}$ τοῦ μέτρου $\frac{2}{5}$ τοῦ μέτρου $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου.

***Διδ.*** Εἰς ὅλα τὰ παραδείγματα ταῦτα τί ἐκάμαμεν; ***Μαθ.*** Εἰς τὰ παραδείγματα ταῦτα συνεκρίναμεν κλάσματα μὲ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ διάφορον ἀριθμητὴν καὶ εἴδομεν ὅτι τὰ κλάσματα, τὰ ἔχοντα μεγαλύτερον ἀριθμητὴν ἦσαν μεγαλύτερα, τὰ δ' ἔχοντα μικρότερον ἀριθμητὴν ἦσαν μικρότερα.

## Σύστημα β΄.

***Διδ.*** Τίς θά μου κάμῃ λοιπὸν ἕνα κανόνα; ***Μαθ.*** ***Ἐκ δύο ἢ πλειόνων κλασμάτων, ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον τὸν μεγαλύτερον ἀριθμητὴν καὶ μικρότερον τὸ ἔχον τὸν μικρότερον ἀριθμητήν.*** ***Διδ.*** Νὰ γράψωμεν τοιαῦτα κλάσματα καὶ νὰ δείξωμεν καὶ τὴν σχέσιν αὐτῶν. ***Μαθ.*** (Γράφει):

$\frac{1}{3}$ μικρότερον τῶν $\frac{2}{3}$

$\frac{1}{4}$ » » $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{4}$ » » $\frac{3}{4}$

$\frac{1}{5}$ » » $\frac{2}{5}$.

Τὴν ἀπόδειξιν τούτου εὑρίσκομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθ' ὃν καὶ τὴν ἐν τῷ συστήματι α καὶ εἶτα προσθέτομεν εἰς τὸν σχηματισθέντα κανόνα.

## Σύνθεσις γ΄.

***Σκοπός.—Διδ.*** Εἰς τὰς μετατροπάς, τὰς ὁποίας ἐκάμαμεν, εὕρομεν κλάσματα ἔχοντα διαφόρους ἀριθμητὰς καὶ διαφόρους παρονομαστάς, σημαίνοντα ὅμως τὸ ἴδιον· ταῦτα θὰ ἐξετάσωμεν τώρα. Οὕτως ἐξετάζονται τὰ κλάσματα:

$\frac{1}{2}$ δωδεκ. $=$ $\frac{2}{4}$ δωδεκ. $=$ $\frac{3}{6}$ δωδεκ. $=$ $\frac{6}{12}$ δωδεκάδος διότι:

$\frac{1}{2}$ δωδεκ. $=$ 6 μολυβδοκ.

$\frac{2}{4}$ δωδεκ. $=2\times 3$ μολυβδ. $=6$ μολυβδ.

$\frac{3}{6}$ δωδεκ. $=3\times 2$ μολυβδ. $=6$ μολυβδ.

$\frac{6}{12}$ δωδεκ $=6\times 1$ μολυβδ. $=6$ μολυβδ.

$\frac{1}{3}$ δωδεκ. $=\frac{2}{6}$ δωδεκ. $=\frac{4}{12}$ δωδεκ , διότι . . .

$\frac{2}{3}$ δωδεκ. $=\frac{4}{6}$ δωδεκ $=\frac{8}{12}$ δωδεκ , διότι . . .

$\frac{1}{4}$ δωδεκ. $=\frac{3}{12}$ δωδεκ., διότι . . .

$\frac{3}{4}$ δωδεκ. $=\frac{9}{12}$ δωδεκ., διότι . . .

$\frac{1}{6}$ δωδεκ. $=\frac{2}{12}$ δωδεκ., διότι . . .

$\frac{1}{2}$ καδ. $=\frac{5}{10}$ καδ., διότι . . .

$\frac{1}{5}$ καδ. $=\frac{2}{10}$ καδ., διότι . . .

$\frac{2}{5}$ καδ. $=\frac{4}{10}$ καδ., διότι . . .

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ἀνάλογα πρὸς τἀνωτέρω κλάσματα, ἀναφερόμενα καὶ εἰς ἄλλ' ἀντικείμενα· π. χ.

$\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου $=\frac{2}{4}$ τοῦ μήλου.

$\frac{1}{2}$ τοῦ ἄρτου $=\frac{2}{4}$ τοῦ ἄρτου.

$\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας $=\frac{2}{4}$ τῆς ὥρας $=\frac{3}{6}$ τῆς ὥρας $=\frac{6}{12}$ τῆς ὥρας.

$\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας $=\frac{2}{6}$ τῆς ὥρας $=\frac{4}{12}$ τῆς ὥρας.

$\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας $=\frac{4}{6}$ τῆς ὥρας $=\frac{8}{12}$ τῆς ὥρας.

$\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας $=\frac{8}{12}$ τῆς ὥρας

Ἐὰν θὰ ἠθέλομεν νῦν νὰ ἐξαγάγωμεν τὸν κανόνα πότε δύο κλάσματα εἶναι ἴσα, θὰ συνεκρίνομεν τἀνωτέρω πρὸς ἄλληλα καὶ ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης θὰ κατελήγομεν εἰς τὸ γενικόν· προτιμότερον ὅμως εἶναι, ἐπειδὴ μέχρι τοῦδε ἐξηγήθησαν δύο γενικά, ὡς γνωστὸν δὲ τὰ πολλὰ ἀφῃρημένα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιφέρωσι σύγχυσιν εἰς τὸ πνεῦμα τοῦ μαθητοῦ, νἀρκεσθῶμεν ἐπὶ τοῦ παρόντος ***νὰ εὕρωμεν μόνον σειράς τινας ἴσων κλασμάτων***. Διὰ τῆς ἐργασίας ταύτης εὐκολυνόμεθα μετὰ ταῦτα τὰ μέγιστα εἰς τὴν τοῦ κανόνος εὕρεσιν. Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον διατάττομεν τὰ κλάσματα ταῦτα κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε μόνος ὁ παῖς ευρίσκει καὶ ἐξαίρει τὸ ὅμοιον κατὰ τὰ εἰρημένα ἐν σελ. 212· οὕτω π. χ. θὰ ἔχωμεν :

$\frac{1}{2}$ δωδεκ. $=\frac{2}{4}$ δωδεκ.

$\frac{1}{2}$ τοῦ μήλ. $=\frac{2}{4}$ τοῦ μήλ.

$\frac{1}{2}$ τοῦ ἄρτου $=\frac{2}{4}$ τοῦ ἄρτου.

$\frac{1}{2}$ τῆς ὥρ. $=\frac{2}{4}$ τῆς ὥρ.

Ὥστε $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$.

$\frac{1}{2}$ δωδεκ. $=\frac{2}{4}$ δωδεκ. $=\frac{3}{6}$ δωδεκ. $=\frac{6}{12}$ δωδεκάδος.

$\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας $=\frac{2}{4}$ τῆς ὥρας $=\frac{3}{6}$ τῆς ὥρας $=\frac{6}{12}$ τῆς ὥρας.

Ὥστε $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{6}{12}$.

$\frac{1}{3}$ δωδεκ. $=\frac{2}{6}$ δωδεκ. $=\frac{4}{12}$ δωδεκάδος.

$\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας $=\frac{2}{6}$ τῆς ὥρας $=\frac{4}{12}$ τῆς ὥρας.

Ὥστε $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{4}{12}$.

$\frac{2}{3}$ δωδεκ. $=\frac{8}{12}$ δωδεκ.

$\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας $=\frac{8}{12}$ τῆς ὥρας.

Ὥστε $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$.

$\frac{1}{4}$ δωδεκ. $=\frac{3}{12}$ δωδεκ.

$\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας $=\frac{3}{12}$ τῆς ὥρας.

Ὥστε $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$.

$\frac{3}{4}$ δωδεκ. $=\frac{9}{12}$ δωδεκ.

$\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας $=\frac{9}{12}$ τῆς ὥρας.

Ὥστε $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$.

## Σύστημα γ΄.

*Διδ.* Νὰ γράψωμεν λοιπὸν τώρα χωριστὰ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα εὕρομεν, χωρὶς νὰ προσθέτωμεν καὶ τί σημαίνει ἕκαστον κλάσμα.

*Μαθ.* (Γράφει): $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{6}{12}$.

$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{4}{12}$ κ. λ. κ. λ.

### *Καταγραφὴ ἐν τῷ τετραδίῳ τοῦ συστήματος*

### Κοινὰ κλάσματα.

### *1. Σχέσεις τῶν κλασμάτων πρὸς ἄλληλα.*

Ἀγορὰ καὶ πώλησις παρὰ τῷ χαρτοπώλῃ.

### *Μέτρα.*

***Δωδεκάδες.*** (Μολυβδοκόνδυλα, κονδυλοφόροι, γραφίδες, κανόνες, ἐλαστικὸν κόμμι, τετράδια).

***Γκρόσσες*** (γραφίδες, μολυβδοκόνδυλα, ἐλαστικὸν κόμμι, κανόνες).

***Καδένα, δεσμίδες*** (χάρτης πρὸς γραφὴν κοινός, χάρτης τῶν ἐπιστολῶν).

1 δωδεκὰς=12 τεμάχια. 1 γκρόσσα=144 τεμάχια=12 δωδεκάδες (κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καταγράφονται καὶ τὰ ἄλλα μέτρα).

Κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, ἀλλὰ διάφορον παρονομαστήν.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | μεγαλύτ. τοῦ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | μεγαλύτ. τοῦ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{3}$ | μεγαλύτ. τοῦ | $\frac{2}{4}$ |
| $\frac{1}{3}$ | » » | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | » » | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{4}$ | » » | $\frac{3}{6}$ |
| $\frac{1}{4}$ | » » | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{5}$ | » » | $\frac{1}{10}$ | $\frac{4}{5}$ | » » | $\frac{4}{10}$ |

### *Κανών;*

Κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἀλλὰ διάφορον ἀριθμητήν.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | μικρότερον τῶν | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{5}$ | μικρότερον τῶν | $\frac{4}{5}$ |
| $\frac{1}{4}$ | » » | $\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{6}$ | » » | $\frac{5}{6}$ |
| $\frac{2}{4}$ | » » | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{10}$ | » » | $\frac{5}{10}$ |
| $\frac{1}{5}$ | » » | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{6}$ | » » | $\frac{4}{6}$ |

*Κανών ;*

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{6}{12}$ ; ...ντα ὅσα εὕρομεν ἐν τῇ συνδέσει γ'.

### III. ΣΤΑΔΙΟΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

#### *I. Ἀσκήσεις ἐκ τῆς ὕλης, ἣν ἐχρησιμοποιήσαμεν καὶ ἐν τῇ συνθέσει.*

α') Μεταβάλλομεν ἀκεραίους εἰς κλάσματα.

1. 2 τεμάχ., 5, 3, 4, 7, 9, 1, 11, 10, 12, 6, 8 τεμάχια = ; δωδεκάδος.

2. 5, 2, 1, 4, 3, 7, 6, 9, 8, 10 φύλλα χάρτου = ; τοῦ καδένου.

3. 20, 10, 15, 30, 45, 40, 50, 35, 25, 55 λεπτά = ; τῆς ὥρας.

β') Κλάσματα μεταβάλλομεν εἰς ἀκεραίους.

1. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}, \frac{3}{6}$, τῆς δωδεκάδος = ; τεμάχια.

2. $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$ τοῦ καδένου τοῦ χάρτου = ; φύλλα χάρτου.

3. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{12}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{3}{12}$ τῆς ὥρας = ; λεπτά.

γ') Κατατάξατε τὰ ἑξῆς κλάσματα οὕτως, ὥστε νἀρχίσετε ἀπὸ τὸ μικρότερον καὶ νὰ τελειώσετε μὲ τὸ μεγαλύτερον.

1. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}, \frac{8}{12}, \frac{11}{12}, \frac{1}{12}, \frac{6}{12}$ τῆς δωδεκάδος.

2 $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$ τοῦ καδένου.

3. $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}$ τῆς ὥρας.

#### *II. Ἀσκήσεις μεθ' ἁπλῶν ἀριθμῶν.*

α') Τακτοποιήσατε τὰ ἑξῆς κλάσματα κατὰ τὴν ἀξίαν των ἀρχόμενοι ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον.

1. $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{2}$.

2. $\frac{2}{3}, \frac{2}{6}, \frac{2}{4}, \frac{2}{12}, \frac{2}{5}$.

3. $\frac{3}{6}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{12}$.

4. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

5. $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$.

6. $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$.

7. $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$.

8. $\frac{11}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{12}$.

β') Ἀπέναντι ἑκάστου τῶν ἑπομένων κλασμάτων γράψατε τὸ ἴσον.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $\frac{1}{2}=$ | 4. $\frac{1}{4}=$ | 7. $\frac{1}{5}=$ | 10. $\frac{4}{5}=$ |
| 2. $\frac{1}{3}=$ | 5. $\frac{2}{4}=$ | 8. $\frac{2}{5}=$ | 11 $\frac{1}{6}=$ |
| 3. $\frac{2}{3}=$ | 6. $\frac{3}{4}=$ | 9. $\frac{3}{5}=$ | 12. $\frac{5}{6}=$ |

### *III. Ἐφαρμογὴ τοῦ διδαχθέντος ἐπὶ νέας ὕλης.*

α') Τὸ ἔτος.

1. 1, 3, 4, 6, 8, 9, 5, 7, 10, 11 μῆνες= ; τοῦ ἔτους.

2. $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$ τοῦ ἔτους = ; μῆνες.

3. Γράψατέ μου μερικὰ ἴσα κλάσματα. δηλοῦντα τὸ ἔτος.

4. Γράψατε 5 κλάσματα μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν οὕτως, ὥστε πᾶν ἑπόμενον νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου.

5. Τὸ αὐτὸ ἐπὶ κλασμάτων, ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

β') Ἡ ἑβδομάς.

1. 2, 5, 4, 3, 6 ἡμέραι= ; τῆς ἑβδομάδος.

2. $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{}{7}$, $\frac{6}{7}$ τῆς ἑβδομάδος= ; ἡμέραι.

γ') Ἡ δραχμή.

1. 10, 30, 20, 40, 50, 70, 60, 80, 90 λεπτά= ; τῆς δραχμῆς.

2. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{10}$ τῆς δραχμῆς = ; λεπτά.

3., 4., 5. } Ἀνάλογα πρὸς τὰς ὑπ' ἀριθμ. 3, 4, 5 ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ ἔτους.

Τὰς ἀσκήσεις ταύτας δύναται ἐν γένει νὰ ἐπεκτείνῃ ἢ συντομεύῃ ὁ διδάσκαλος κατὰ τὰς ἑκάστοτε παρουσιαζομένας ἀνάγκας.