

4. 'Αποτελέσματα έρευνών στο Βέλγιο.

A'. 'Η κατανόηση του περιεχομένου των προβλημάτων (1)

Το 1930, ο H. Desmet είχε ένεργήσει έρευνα, για να εξακριβώσει την κατανόηση από τους μαθητές του περιεχομένου μικρών αριθμητικών προβλημάτων.

Ο έρευνητής παρουσίασε πέντε προβλήματα παρόμοια μαθηματικά, αλλά διατυπωμένα με δύο μορφές Α και Β με χαρακτηριστικό την απουσία ή την παρουσία μερικών δεδομένων.

Τέστ: ΙΑ: εύκολη έποπτεία δεδομένων: δέντρα.

Τέστ: ΙΙΑ: δύσκολη έποπτεία δεδομένων: χιλιόμετρα.

1. Τα αποτελέσματα φανερώνουν, ότι η δυσχέρεια στην έποπτική παράσταση των δεδομένων του προβλήματος από τα παιδιά δημιουργεί σοβαρές δυσκολίες για τον απαραίτητο μαθηματικό συλλογισμό.

2. Όταν το περιεχόμενο των προβλημάτων παρουσιάζεται χωρίς αριθμούς, οι μαθητές δυσκολεύονται σημαντικά, πράγμα που φανερώνει, ότι δεν είναι συνηθισμένοι να σκέπτονται με βάση γενικούς κανόνες. Τουτό αποδεικνύει, ότι τα παιδιά υποβάλλονται από τις σχολικές συνήθειες σ' ένα είδος μηχανικών αντανακλαστικών ενεργειών, οι οποίες χάνονται άμέσως, όταν παρουσιάζονται νέες, λιγότερο σχολικής ύφης, περιστάσεις. Έτσι, θα μπορούσε κανείς να έρωτηση: ή λύση αριθμητικών προβλημάτων καλλιεργεί άραγε τη νοημοσύνη των παιδιών; Δυστυχώς τουτό δε συμβαίνει πάντοτε. Τα προβλήματα, όπως διατυπώνονται στα σχολικά βιβλία αριθμητικής, δεν προκαλούν πάντοτε στο πνεύμα των μαθητών πραγματικούς λογικούς συλλογισμούς: τις περισσότερες φορές υποκινούν την εύρεση τυπικών λύσεων, την έφαρμογή ενός τεχνάσματος.

Έπί του θέματος αυτού, ο Merroux (1929) είχε τα έξης αποτελέσματα: επί 253 έσφαλμένων λύσεων, 28 μόνον μαρτυρούν κάποια μερική κατανόηση του προβλήματος: οι υπόλοιπες 225, ήτοι 89%, δεν αφήνουν να διαφανή ούτε το μικρότερο ίχνος κατανόησης. Δύο «τυπικά προβλήματα», που δόθηκαν, προκαλούν στα παιδιά 78% και 58% λύσεις χωρίς πραγματική κατανόηση. Η μόρφωση του παιδιού επί του μαθηματικού συλλογισμού δεν έχει έπιτευχθή από το σύγχρονο Δημοτικό Σχολείο.

B'. 'Η πορεία του παιδικού συλλογισμού κατά τη λύση των προβλημάτων

Το 1953, ή Anna Maria M. de Moraes είχε την πρόθεση να μελετήσει τα διάφορα βήματα του παιδικού συλλογισμού για τη λύση αριθμητικών προβλημάτων και ένήργησε είδική σχετική έρευνα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο καταγραφής του «όμιλουμένου συλλογισμού». Οργάνωσε άτομική προφορική εξέταση παρουσιάζοντας στο παιδί μια σειρά προβλημάτων με πολλές πράξεις και κατέγραψε με ένα μαγνητόφωνο τις «όμιλούμενες σκέψεις». Πρόκειται για την ίδια μέθοδο, που χρησιμοποιήσαμε κι έμεις (βλ. το πρώτο μέρος αυτής της μελέτης). Έστερα από την ανάλυση των λύσεων των παιδιών, ή Anna M. de Mo-

1. R. Dottrens : «L'amelioration des programmes scolaires» 1957, p. 223, 196.

raes έφθασε στις έξής παρατηρήσεις (1) επί έξ προβλημάτων άριθμητικής (οί 4 βασικές πράξεις επί άκεραίων), τά όποία προσπάθησαν νά λύσουν μαθητές τών 3ης και 4ης τάξεων (29 μαθητές: 13 τής 3ης και 16 τής 4ης): «Γενικά, φαίνεται ότι οί μαθητές τών 3ης και 4ης τάξεων δέν έχουν κατανοήσει επαρκώς τις διαδικασίες τών βασικών πράξεων τής άριθμητικής, κυρίως του πολλαπλασιασμού και τής διαιρέσεως, ώστε νά μπορούν νά τις χρησιμοποιούν σέ συγκεκριμένες περιπτώσεις. Έπί πλέον, μή κατέχοντας άκόμη τους αυτοματισμούς τών πράξεων, δέν είχαν άρκετά έλεύθερο τό πνεύμα τους, γιά νά έπιδοθοούν στην άνακάλυψη τής πορείας, πού έπρεπε ν' άκολουθήσουν γιά τή λύση τών προβλημάτων.

Οί έρωτήσεις, πού δόθηκαν, έκτός άπό την τελευταία, δέν ξεπερνούσαν την ικανότητα νοημοσύνης παιδιών 8—10 έτών. "Αν δέν υπολογισθοούν τά λάθη πράξεων, προκύπτει ότι σέ κάθε ένα άπό τά πέντε προβλήματα δόθηκαν όρθές λύσεις τουλάχιστον άπό 6 μαθητές στους 29. Δύο μόνον παιδιά μπόρεσαν νά δώσουν άντιστοιχώς πέντε όρθές λύσεις. Κάθε παιδί έχει ιδιαίτερο τρόπο συλλογισμού, πού έκδηλώνεται νοερά στη λύση τών προβλημάτων».

«Τά δεδομένα αυτά θά πρέπει νά ληφθοούν ύπ' όψη κατά την έπεξεργασία μιάς σοβαρής μεθοδολογίας γιά τή λύση τών άριθμητικών προβλημάτων».

Γ' ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ - ΔΙΑΠΙΣΤΩΣΕΙΣ

1. Σημεία συγκρίσεως

α) Τά άποτελέσματα τών διαφόρων έρευνών (Ίωάννινα, Άθήνα, Γαλλία, Γενεύη, Βέλγιο) άποδεικνύουν, ότι οί μαθητές τών Δημοτικών Σχολείων συναντοούν σημαντικές δυσκολίες και, μερικές φορές, άνυπέριθητες, κατά τή λύση τών συγκεκριμένων προβλημάτων άπό τή ζωή επί τών έφτά βασικών άριθμητ. πράξεων. Οί δυσκολίες αυτές άναφέρονται:

1. Στην πράξη, πού άπαιτείται γιά τή λύση του προβλήματος (πρόσθεση, άφαίρεση τριών ειδών, πολλαπλασιασμός, διαίρεση δύο ειδών).

2. Στόν άριθμό τών πράξεων, πού άπαιτοούνται σέ κάθε πρόβλημα (προβλήματα με μία μόνον πράξη, προβλήματα με πολλές πράξεις).

3. Στό λεξιλόγιο, πού χρησιμοποιείται στη σύνταξη του κειμένου του προβλήματος.

4. Στό είδος τής καταστάσεως, στην όποία άντιστοιχεί τό πρόβλημα (συγκεκριμένη κατάσταση πού μπορεί νά ζή πραγματικά τό παιδί, άφηρημένη και όχι γνωστή στό παιδί κατάσταση, εύκολη ή δύσκολη στην έποπτική της παράσταση).

5. Στόν αυτοματισμό τών πράξεων (άν δέν είναι κτήμα τών παιδιών, δέν ύπάρχει άρκετή έλευθερία στό πνεύμα τους γιά ν' άνακαλύψουν τή λύση του προβλήματος).

β) Άπό τις παρατηρήσεις όλων τών έρευνητών διαπιστώνεται, ότι κάθε παιδί έχει, σχεδόν πάντοτε, τόν ιδιαίτερο δικό του τρόπο πνευμα-

1. «Recherche psychopédagogue sur la solution des probl. arithmet». E. Nauwelaerts, Louvain, 1954, p. 45, 112.

τικής ενέργειας, ό όποιος διαμορφώνεται από ποικίλους παράγοντες (ένέργεια τής λογικής, προσωπική πείρα, συναισθηματικές άπηχήσεις, σχολική μόρφωση).

2. Σημεία έκτός συγκρίσεως:

Άπό τήν έρευνά μας: Καταχωρούνται δεδομένα από τούς αυτούς μαθητές τόσο επί τής ποσοτικής άποδοτικότητός των (γραπτή όμαδική εξέταση) όσο κι επί τών έσωτερικών συλλογισμών τής παιδικής σκέψης (άνάλυση λύσεων — άτομική προφορική εξέταση). Έτσι, παρέχεται ή δυνατότητα νά διατυπωθούν διαπιστώσεις για όλα τά ζητήματα τών άριθμητικών προβλημάτων (συλλογισμοί και τεχνική τών πράξεών των).

Άπό τήν έρευνα στην Άθήνα: Παρέχονται δεδομένα για τó περιεχόμενο τών προβλημάτων, που συντάσσουν τά ίδια τά παιδιά: προσωπικές προτιμήσεις, δυνατότητες ή διαφέροντα.

Άπό τήν έρευνα στη Γαλλία: Προσφέρονται δεδομένα για τις δυσκολίες τών μαθητών στο λεξιλόγιο τών προβλημάτων.

Άπό τήν έρευνα στο Βέλγιο: Καταχωρούνται δεδομένα για τήν κατανόηση τού περιεχομένου τών προβλημάτων και για τά μερικότερα θέματα, που κάνει ή παιδική σκέψη στη λύση προβλημάτων με πολλές πράξεις.

3. Διαπιστώσεις:

1. Τά προβλήματα, που δόθηκαν στους μαθητές από κάθε έρευνητή, ανταποκρίνονται στις έννοιες, που διδάσκονται στο σχολείο κατά τó αναλυτικό πρόγραμμα διδασκίας ύλης κάθε χώρας. Τά άποτελέσματα όμως δέν είναι καθόλου ίκανοποιητικά. Ίσως, μερικές γνώσεις θά διδάσκονται πρόωρα σε όρισμένες τάξεις. Θά πρέπει επίσης ν' αναλυθούν και άλλοι παράγοντες τής σχολικής άποδοτικότητος (ή μέθοδος διδασκαλίας, ό δάσκαλος κλπ.) και νά λαμβάνεται ύπόψη ή ψυχολογία τών παιδικών συλλογισμών.

2. Μπορούμε άραγε νά δεχτούμε, με θάση τά σχετικά δεδομένα, ότι ή διδασκαλία τής άριθμητικής στο Δημοτ. Σχολείο επέτυχε τόν ένα σκοπό της, που συνίσταται στην καλλιέργεια τής νοημοσύνης τών παιδιών; Τά δεδομένα μάς δυσκολεύουν ν' άπαντήσωμε θετικά.

3. Η έρευνα, που έγινε στην Άθήνα (προβλήματα, που συντάσσουν έλεύθερα τά παιδιά) και οι διαπιστώσεις τού κ. G. Mialaret άποδεικνύουν τή σημασία τών έσωτερικών κινήτρων τού παιδιού για τή λύση τών προβλημάτων. Η έρευνα επίσης τού Η. Desmet (Βέλγιο) μαρτυρεί πόσον είναι άναγκαίο νά συγκεκριμενοποιούνται τά δεδομένα τού προβλήματος (δυνατότητα έποπτικής παραστάσεώς του).

4) Όλα τά δεδομένα φαίνεται ότι καταδεικνύουν, ότι τά άριθμητικά προβλήματα μπορούν νά ταξινομηθούν κατά διάταξη αύξανόμενης δυσκολίας. Η κατοχή ενός άριθμητικού λεξιλογίου παίζει τó ρόλο της στην κατανόηση τών προβλημάτων. Σε άλλο κεφάλαιο τής μελέτης αυτής, τó όποίο δέ δημοσιεύεται έδω, καταβάλλεται προσπάθεια νά διαπιστωθή κατά πόσον τά προγράμματα διδασκίας ύλης, τά σχολικά βιβλία και ή διδακτική μέθοδος έχουν υπολογίσει τά δεδομένα αυτών τών παρατηρήσεων.

5. Τέλος, τó γεγονός, ότι κάθε παιδί λύει τά προβλήματα κατά

προσωπικό δικό του τρόπο, μᾶς ὑποχρεώνει νὰ συστήσωμε, στὸ κεφάλαιο τῶν παιδαγωγικῶν συνεπειῶν, τὴν ἐφαρμογὴ τῆς ἀτομικευμένης ἐργασίας τῶν μαθητῶν.

Δ' ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

α'. Ἀπὸ τὰ δεδομένα τῆς ἀποδοτικότητος τῶν μαθητῶν

1. Εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐφαρμόζονται ἰδιαίτερες ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ ἀπλοῦ ἀριθμητικοῦ λεξιλογίου στὸς μαθητὲς τοῦ Νηπιαγωγείου καὶ τῶν τριῶν πρώτων τάξεων (Α, Β, Γ) τοῦ Δημοτ. Σχολείου. Ἡ ἐκμάθηση τοῦ λεξιλογίου μπορεῖ νὰ εὐκολύνῃ τὴν κατανόησιν τοῦ περιεχομένου (νοήματος) τῶν προβλημάτων ἀπὸ τὴ ζωὴ (βλ. ἐρευνες στὴ Γαλλία).

Στὶς τάξεις τοῦ Νηπιαγωγείου καὶ στὴν πρώτη τάξη τοῦ Δημοτ. Σχολείου (5, 6, 7 ἐτῶν): Ὁδηγοῦμε τὰ παιδιὰ σὲ πραγματικὲς συγκεκριμένες πράξεις, ποὺ ἐπιτρέπουν τὴν καλλιέργειαν τῆς δεξιότητος τῶν χεριῶν, τὴν παρατηρητικότητά καὶ τὴν ἔκφραση. Οἱ πράξεις αὐτὲς ἀναφέρονται στὶς ἐξῆς ἔννοιες — λέξεις: ἀπ' ἔξω, ἀπὸ μέσα, τὸ ψηλότερο, ἐπάνω, ἀπὸ κάτω, πίσω, τὸ πλατύτερο, μπροστά.

Στὴ δευτέρᾳ τάξει (7-8): Παρόμοιες συγκεκριμένες πράξεις, ποὺ ἀναφέρονται στὶς ἐξῆς ἔννοιες - λέξεις: τὸ πλατύτερο, τὸ ἐλαφρότερο, στὸ μέσον καὶ ἄνω, ἀνταμώνω, σηκώνω, τραβῶ, χάνω.

Στὴν τρίτη τάξει (8-9 ἐτῶν): Παρόμοιες συγκεκριμένες πράξεις, ποὺ ἀναφέρονται στὶς ἐξῆς ἔννοιες - πράξεις: τὸ ἐλαφρότερο, τὸ πιὸ μακρυνό, κάτω καὶ ἀριστερά, ἄνω καὶ δεξιά, ἀνακατώνω, μοιράζω, κόβω σὲ «Χ» κομμάτια, 5 φορές περισσότερο, ὑπόλοιπο, συμπλήρωμα, διαφορά.

2. Τὰ συγκεκριμένα προβλήματα ἀπὸ τὴ ζωὴ μποροῦν, ὡς πρὸς τὴ διδασκαλίαν τους, ν' ἀκολουθοῦν μιὰ διάταξιν, ποὺ καθορίζεται μὲ θάσιν τὶς αὐξανόμενες δυσκολίες τοῦ ἀπαιτουμένου μαθηματικοῦ συλλογισμοῦ (γιὰ τὴν κατάλληλη ἀριθμητ. πράξιν): προβλήματα, ποὺ περιέχουν μιὰ μόνον πράξιν: α) πρόσθεσις, β) ἀφαίρεσις — ὑπόλοιπο, γ) ἀφαίρεσις — συμπλήρωμα, δ) πολλαπλασιασμός, ε) ἀφαίρεσις - διαφορά, στ) διαίρεσις μερισμοῦ, ζ) διαίρεσις μετρήσεως (βλ. δεδομένα ἀπὸ τὶς ἐρευνες στὰ Ἰωάννινα, στὴ Γαλλίαν τοῦ κ. G. Mialaret).

3. Μιὰ προσπάθεια κατανομῆς τῆς διδακτέας ὕλης, μὲ θάσιν τὰ πειραματικὰ δεδομένα, μᾶς δίνει τὰ ἐξῆς:

Στὴν Τρίτη τάξει (8-9 ἐτῶν): Προβλήματα μὲ μιὰ μόνον πράξιν: α) πρόσθεσις (ἐρευνα στὴ Γενεύη).

Στὴν Τετάρτη τάξει (9-10 ἐτῶν): προβλήματα μὲ μιὰ μόνον πράξιν: α) ἀφαίρεσις — ὑπόλοιπο, β) πολλαπλασιασμός.

Στὴν Πέμπτη τάξει (10-11 ἐτῶν): προβλήματα μὲ μιὰ μόνον πράξιν: α) ἀφαίρεσις — συμπλήρωμα, β) ἀφαίρεσις — διαφορά, γ) διαίρεσις μερισμοῦ.

Στὴν Ἑκτὴ τάξει (11-12 ἐτῶν): α) προβλήματα μὲ μιὰ μόνον πράξιν: διαίρεσις μετρήσεως, β) προβλήματα μὲ δύο ἢ τρεῖς πράξεις (πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμός) (βλ. δεδομένα ἐρευνῶν στὰ Ἰωάννινα, στὴν Ἀθήναν, στὸ Παρίσι, στὸ Βέλγιο).

Οἱ ἀνωτέρω συνέπειαι ὑπαγορεύονται ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα διαφόρων μετρήσεων, ποὺ εἶχαμε ἀπὸ δικὲς μας ἐφαρμογὰς ἢ ποὺ γνωρίσαμε ἀπὸ ἐρευνες ἄλλων. Πρόκειται ἐδῶ γιὰ τὴν ἀντανάκλασιν μιᾶς δι-

δασκαλίας, ή όποία, κατά ένα γενικό τρόπο, δέν έχει ύποστή τήν εύεργετική επίδραση από τά δεδομένα τών ψυχολογικών έρευνών. Τολμούμε νά πιστεύωμε ότι, όταν κατορθωθή και πραγματοποιηθή αύτή ή επίδραση, τά προγράμματα θα μπορούν νά είναι ούσιαστικότερα και δε θα διακρίνονται από μειονεκτήματα σε θάρος τών μαθητών.

4. Ός προς τό περιεχόμενο τών προβλημάτων, πρέπει νά λαμβάνονται υπόψη τά διδακτικά αξιώματα τής διεγέρσεως τών έσωτερικών κινήτρων για τή μάθηση και τής συγκεκριμενοποιήσεως τών δεδομένων του προβλήματος: έτσι, πρέπει νά διδάσκονται α) προβλήματα, που αναφέρονται στη διατροφή, στα παιδικά παιχνίδια, στην ένδυμασία, β) προβλήματα, που ανταποκρίνονται σε μιá συγκεκριμένη κατάσταση, τήν όποία μπορεί νά ζήσει πραγματικά τό παιδί, γ) προβλήματα, τά όποία μπορούν νά πάρουν ύπόσταση στον παραστατικό κύκλο τών παιδιών (μέ δέντρα, μέ καρπούς, μέ σπίτια κλπ.) (βλ. έρευνες στην Άθήνα, στο Παρίσι, στο Βέλγιο).

5. Οί μαθητές πρέπει ν' άσκώνται και σε προβλήματα, τών όποιών τό περιεχόμενο δέν έχει άριθμούς και τά όποία άποτελούν ένα πραγματικό «πνευματικό πρόβλημα». Δέν πρέπει νά είμαστε ίκανοποιημένοι μέ τήν άσκηση τών μαθητών στη λύση μόνον προβλημάτων μέ ένα τέχνασμα ή έναν τύπο (λύση ενός ύποδειγματικού προβλήματος) (βλ. έρευνες στο Βέλγιο, στο Παρίσι).

6. Έπειδή οί μαθητές τών 3ης, 4ης και 5ης τάξεων άποδεικνύονται όλίγον ίκανοί για λογικό—μαθηματικούς συλλογισμούς (αίτιολόγηση τών πράξεων για κάθε πρόβλημα, κατανόηση του συνδυασμού τών πράξεων: έρευνες στα Ίωάννινα, Παρίσι, Γενεύη, Βέλγιο), όφείλομε νά έγκύψωμε, μέ ιδιαίτερη φροντίδα, στο πρόβλημα τής μεθόδους, μέ τήν όποία θα διδάσκεται στους μαθητές ό κατάλληλος μαθηματικός συλλογισμός για κάθε πρόβλημα. Πρέπει ν' αναζητηθή λύση μέ βάση τά ψυχολογικά δεδομένα.

7. Έπειδή οί μαθητές τών 5ης και 6ης τάξεων δυσκολεύονται και «σκοντάφτουν» σε εύκολα προβλήματα (διατυπώνοντας έσφαλμένους συλλογισμούς), πρέπει νά έπαναλαμβάνωμε, σε διάφορα μαθήματα, τις άπλές πράξεις, που χρησιμοποιούνται σε ποικίλα προβλήματα, και νά επιμένωμε επί τών έννοιών αυτών, όσον άπλές κι' άν είναι (βλ. μετρήσεις προφορικής άποδοτικότητας μαθητών στα Ίωάννινα, στο Βέλγιο, γραπτές μετρήσεις στο Παρίσι).

8. Η άτομικευμένη εργασία τών μαθητών πρέπει νά εφαρμόζεται μέ ιδιαίτερη έπιμέλεια: σύνταξη προβλημάτων σε δελτία (καρτέλλες) τριών κατηγοριών: α) για αδύνατους μαθητές, β) για μέσης άποδοτικότητας μαθητές, γ) για μεγάλης άποδοτικότητας μαθητές (=θεραπεία τής μεγάλης διασποράς τών άποτελεσμάτων άποδοτικότητας τών μαθητών).

9. Ό άριθμός τών μαθητών σε κάθε τάξη πρέπει νά είναι, όσο τό δυνατόν, μικρότερος (25 μαθητές, τό άνώτερον, σε κάθε τάξη).

10. Οί φροντίδες και ή βοήθεια τών γονέων, κατά τις κατ' οίκον εργασίες τών μαθητών, πρέπει νά ένεργοούνται μέ παιδαγωγικό τρόπο (νά λαμβάνονται υπόψη οί παιδαγωγικές συνέπειες, που αναφέραμε, και τά ψυχολογικά δεδομένα, νά οργανώνονται από τους δασκάλους τακτικές συγκεντρώσεις τών γονέων, όπου θα συζητούνται τά σχετικά προβλήματα).

1. Το γεγονός, πού έχει διαπιστωθῆ στην ἔρευνα τοῦ κ. G. Mialaret κατὰ τὸ ὁποῖο θρίσκομε διαφορετικὰ ποσοστὰ % στὰ ἀποτελέσματα, πού δίνουν τὰ παιδιὰ ἐπὶ τῶν προβλημάτων, πού ἀπαιτοῦν τὴν ἴδια πράξη ἀπὸ τοὺς ἴδιους μαθητὲς (στὴν ἴδια τάξη), μᾶς ὑποχρεώνει νὰ σκεφτοῦμε, ὅτι ἡ λύση ἑνὸς προβλήματος δὲν εἶναι καθαρὰ λογικὴ δραστηριότητα καὶ δὲν ἐξαρτᾶται παρὰ ἀπὸ ποικίλες σχολικὲς συνήθειες ὑπάρχουν δηλαδὴ ἀκόμη καὶ ἄλλοι παράγοντες (συναισθήματα, ἐμπειρία τοῦ παιδιοῦ ἀπὸ τὴ ζωὴ, μηχανισμοὶ τῆς γλώσσας κλπ.), τοὺς ὁποίους ἐξετάσαμε σὲ ἄλλο κεφάλαιο (δὲν δημοσιεύεται ἐδῶ) καὶ ἀπὸ τοὺς ὁποίους οἱ παιδαγωγικὲς συνέπειες πρόκειται ἀμέσως νὰ μᾶς ἀπασχολήσουν.

β' Παιδαγωγικὲς συνέπειες ἀπὸ τὰ ψυχολογικὰ δεδομένα

Κατὰ τὴ γενικὴ ἔρευνά μας ἐπὶ τῶν δυσκολιῶν τῶν μαθητῶν στὴν ἀριθμητικὴ μελετήσαμε τὰ δεδομένα ἀπὸ τὴν ψυχολογία τοῦ παιδιοῦ. Δημοσιεύομε ἐδῶ μόνον τὶς παιδαγωγικὲς συνέπειες γιὰ τὴ διδακτικὴ τῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων, πού προκύπτουν ἀπὸ τὰ ψυχολογικὰ δεδομένα.

1. **Τὸ περιεχόμενο τῶν προβλημάτων:** Κατὰ τὴ σύνταξη τῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων ἀπὸ τὴ ζωὴ, πρέπει νὰ λαμβάνεται ὑπόψη ἡ ἡλικία τοῦ παιδιοῦ, κατὰ τὴν ὁποία ἀποκτᾶ τὴν ἔννοια τῆς διατηρήσεως τοῦ βάρους τοῦ ὄγκου, τοῦ χρόνου καὶ τῆς ταχύτητος. Διότι ἡ χρησιμοποίηση π.χ. βαρῶν στὸ περιεχόμενο ἑνὸς προβλήματος θέτει ἕνα πρόβλημα: τὸ παιδί τῶν 7 ἐτῶν δὲν παραδέχεται τὴ διατήρηση τοῦ βάρους ἑνὸς σώματος στὶς διάφορες μεταβολὲς τῆς μορφῆς τοῦ σώματος, ὅποτε ἕνα θάρος π.χ. 60 γρμ. δὲν εἶναι ἀναγκαστικὰ ἰσοδύναμο γι' αὐτὸ μὲ 6 θάρη τῶν 10 γρμ. (ἀξίωμα μαθήσεως: προσαρμογὴ τῶν παιδευτικῶν ἐνεργειῶν στὸ ἐπίπεδο ὠριμάσεως τοῦ παιδιοῦ).

Ἡ ἀπόκτηση τῶν ἐννοιῶν τοῦ βάρους καὶ τοῦ ὄγκου, κατὰ τὴν ἐξελικτικὴν ψυχολογία τοῦ κ. J. P. ager(1) πραγματοποιεῖται κατὰ τὰ ἐξῆς στάδια:

Πείραμα: Παρουσιάζομε στὰ παιδιὰ μιὰ σφαῖρα ἀπὸ πλαστιλίνη καὶ ζητοῦμε νὰ κατασκευάσουν μὲ πλαστιλίνη μιὰ ἄλλη ἐντελῶς ὁμοία, «τὸ ἴδιο χοντρή καὶ τὸ ἴδιο βαρειά». Ἀφοῦ διαπιστωθῆ ὅτι οἱ δύο σφαῖρες εἶναι ὁμοίες, ἐπιμηκύνομε τὴ μιὰ ἀπ' αὐτὲς καί, ἀφοῦ τὴν κάνομε «ψωμί — μπαστούνι», τὴν κόβομε σὲ κομματάκια, τὰ ὁποῖα ἀραιώνομε ἢ τὴν μεταβάλλομε σὲ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια σὰν γαλέττα. Ἐρωτοῦμε τὰ παιδιὰ: «Ἐχουν ἀκόμη τὴν ἴδια ποσότητα πλαστιλίνης, τὸ ἴδιο θάρος ἢ τὸν ἴδιο ὄγκο οἱ δύο ἐκείνες σφαῖρες ἔτσι, ὅπως ἔχει μεταβληθῆ ἢ μιὰ ἀπ' αὐτὲς;».

Τὰ παιδιὰ μέχρις ἡλικίας 7 ἐτῶν νομίζουν ὅτι, μ' αὐτὴ τὴν τριπλὴ σχέση, ἡ σφαῖρα ἔχει ἀλλάξει, γιὰτὶ ἔχει μεταβληθῆ ἢ ἐμφάνισή της. Μετὰ τὸ 7ο ἔτος, τὸ ἀξίωμα τῆς «διατηρήσεως τῆς οὐσίας τῶν πραγμάτων» ἔχει ἤδη κατακτηθῆ. Ἡ διατήρηση τοῦ βάρους γίνεται δεκτὴ ἀπὸ τὸ παιδί, κατὰ μέσον ὄρον, πέραν τοῦ 10ου ἔτους, καὶ τοῦ ὄγκου κατὰ

1. J. Piaget - B. Inhelder : «Le developpement des quantités chez l' enfant», Paris 1941, p. 7, 83,

τὸ 11—12 ἔτος. Διαπιστώνομε τὰ ἴδια στάδια σὲ ἓνα ἄλλο πείραμα, ποῦ ἀναφέρεται στὴ διατήρηση τῆς οὐσίας, τοῦ βάρους καὶ τοῦ ὄγκου ἑνὸς τεμαχίου ἀπὸ ζάχαρη, τὸ ὁποῖο διαλύομε μέσα στὸ νερό.

Ἡ ἀπόκτηση τῆς ἐννοίας τοῦ χρόνου (1)

Πείραμα ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς γεγονότων: Ἀπὸ ἓνα μπουκάλι ἀφήνομε νὰ τρέχη χρωματισμένο νερὸ σὲ ἓνα ἄλλο μπουκάλι διακόπτοντας τὴ ροὴ μὲ μιὰ θρύση (προσαρμοσμένη κοντὰ στὸν πυθμένα) κατὰ κανονικὰ χρονικὰ διαστήματα. Τὸ παιδί, ποῦ παρατηρεῖ, πρέπει, σὲ ἔτοιμα σχέδια (μπουκαλιῶν), νὰ δείχνη μὲ μιὰ γραμμὴ σὲ κάθε στάση τῆς ροῆς τὸ ἐπίπεδο τοῦ νεροῦ στὸ ψηλότερο μπουκάλι καὶ στὸ χαμηλότερο. Κατόπιν, ἀνακατώνομε τὰ σχέδια αὐτὰ καὶ ζητοῦμε ἀπὸ τὸ παιδί νὰ τὰ ταξινομήσῃ κατὰ χρονολογικὴ σειρὰ, δηλαδή ν' ἀναπαραστήσῃ μὲ τὰ σχέδια τὴ ροὴ τοῦ νεροῦ στὰ διαδοχικὰ του στάδια.

Τὸ παιδί τῶν 9 ἐτῶν μπορεῖ ν' ἀντιληφθῇ τὴν ἀντιστοιχία στὴ σειρὰ τῶν σχεδίων καὶ κατὰ συνέπεια τὶς σχέσεις τῆς διαδοχῆς καὶ τοῦ συγχρονισμοῦ.

Πείραμα ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῆς χρονικῆς διάρκειας: Παρουσιάζομε στὸ παιδί δύο ἀνθρώπους ἀπὸ χαρτόνι καὶ θέτομε σὲ κίνηση καὶ τοὺς δύο ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο καὶ μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα. Σὲ κάποια στιγμή, ὁ ἄνθρωπος Β σταματᾷ, ἐνῶ ὁ Α συνεχίζει λιγάκι ἀκόμη τὴν πορεία του. Ζητοῦμε ἀπὸ τὸ παιδί νὰ μᾶς εἰπῇ: «ποιὸς ἐθάδισε περισσότερο χρόνο;». Τὸ παιδί 9 ἐτῶν μπορεῖ νὰ διανοηθῇ ἐσωτερικὰ καὶ νὰ κατανοήσῃ τὶς ποιοτικὲς διάρκειες καὶ τὴ μέτρηση τοῦ χρόνου.

Πείραμα ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῶν ἡλικιῶν: Ζητοῦμε ἀπὸ τὸ παιδί νὰ συγκρίνῃ τὴν ἡλικία του μὲ ἐκείνη τῶν ἀδελφῶν του (ἀρρένων ἢ θηλέων), τῶν γονέων του ἢ ἄλλων προσώπων, στὸ παρὸν καὶ στὸ μέλλον (ποιὸς εἶναι νεώτερος τώρα, ὕστερα ἀπὸ μερικὰ χρόνια, ὅταν θὰ μεγαλώσῃ κλπ.) καὶ νὰ δικαιολογήσῃ τὶς ἀπαντήσεις του. Κατὰ τὴ διάρκεια τοῦ πρώτου σταδίου (4-6 ἐτῶν), οἱ ἡλικίες γιὰ τὸ παιδί εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπὸ τὴ σειρὰ τῶν γεννήσεων καὶ οἱ διαφορὲς ἡλικίας μποροῦν νὰ μεταβάλλωνται μὲ τὸ χρόνο. Κατὰ τὸ δεύτερο στάδιο (7-8 ἐτῶν) ἢ οἱ ἡλικίες ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴ σειρὰ γεννήσεων, ἀλλὰ οἱ διαφορὲς ἡλικίας δὲ διατηροῦνται κατὰ τὴν πορεία τῆς ἀνθρώπινης ὑπάρξεως, ἢ οἱ διαφορὲς διατηροῦνται, ἀλλὰ δὲν ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴ σειρὰ τῶν γεννήσεων. Κατὰ τὸ τρίτο στάδιο (8-9 ἐτῶν), οἱ διάρκειες καὶ οἱ διαδοχὲς συντονίζονται ὡς ἐννοίες στὸ πνεῦμα τοῦ παιδιοῦ καὶ οἱ σχετικὲς μερικότερες ἐννοίες διατηροῦνται χάρις σ' αὐτὸν τὸν ἴδιο τὸ συντονισμό!

Ἡ κατάκτηση τῆς ἐννοίας τῆς ταχύτητος (2) ..

Πείραμα: Παρουσιάζομε στὰ παιδιὰ δύο εὐθεῖες παράλληλες σὲ ἓνα φύλλο — χαρτί. Στὴν πρώτη γραμμὴ προχωρεῖ ἓνα αὐτοκίνητο, τὸ ὁποῖο, ἀπὸ τὸ πρῶτο πρῶνὸ ἕως τὸ πρῶτο θραδυνό, ἔχει διανύσει κάποια ἀπόσταση, π.χ. 2 ἐκμ. Κατὰ τὸ χρόνο αὐτόν, ἓνας ἄνθρωπος (ἀπὸ

1. J. Piaget, «Le développement de la notion du temps chez l' enfant», P.U.F. 1946 p.p. 5, 37, 87, 211.

2. J. Piaget, «Les notions du mouvement et de la vitesse chez l' enfant, P.U.F. 1946 p. 210.

πλαστιλίνη, χαρτόνι), που άναχωρεῖ ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο καὶ τὴν ἴδια ὥρα διανύει μὲ μοντοσυκλέττα μιὰ μικρότερη διαδρομὴ (δὲν λέγεται, φυσικά, αὐτὴ ἢ λέξη καὶ περιορίζεται κανεὶς νὰ σημειώσῃ τὶς στάσεις τοῦ αὐτοκινήτου στὰ 2 ἑκμ. καὶ τοῦ ἀνθρώπου στὸ 1 ἑκμ.). Θέτομε στὰ παιδιὰ τὶς ἐξῆς ἐρωτήσεις: Εἰσαγωγικὴ ἐρώτηση ἐπὶ τοῦ συγχρονισμοῦ τῶν ἐκκινήσεων, τῶν ἀφίξεων καὶ ἐπὶ τῆς ἰσότητος τῶν συγχρόνων διαρκειῶν τῆς πορείας. *Ἐρώτηση I*: Πόσο θὰ θαδίση τὸ αὐτοκίνητο τὴ δεύτερη, τὴν τρίτη ἡμέρα, ἂν ἀναχωρῇ καὶ φθάσῃ τὶς ἴδιες ὥρες καὶ θαδίξῃ μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα; Ἄρα, σὲ ἴσους ταχύτητες καὶ χρόνους εὕρεση τῆς ἰσότητος τῶν ἀποστάσεων. *Ἐρωτήσεις II*: Ποία διαδρομὴ θὰ διανύσῃ ὁ ἀνθρώπος, ἂν συνεχίξῃ νὰ τρέχῃ σὲ ἴσους χρόνους μὲ τὴ δική του ταχύτητα; (διατήρηση τῆς διαφορᾶς τῶν ταχυτήτων). *Ἐρώτηση III*. Τὴν τελευταία ἡμέρα, τὸ αὐτοκίνητο δὲν τρέχει παρὰ τὸ ἥμισυ τῆς ἡμέρας. Ποῦ φθάσῃ; *Ἐρώτηση IV*: Ἡ ἴδια ἐρώτηση, ὅπως καὶ προηγουμένως, ἀλλ' αὐτὴ τὴ φορά γιὰ τὸν ἀνθρώπο. *Ἐρώτηση V*: Ὅταν μᾶς δοθῇ μιὰ θέση τοῦ αὐτοκινήτου (π.χ. ἔβδομη ἡμέρα) καὶ μιὰ θέση τοῦ ἀνθρώπου (π.χ. τὴν ἴδια ἡμέρα ἢ τὴν 3ῃ ἡμέρα), πόσες ἡμέρες θὰ χρειασθῇ ὁ ἀνθρώπος, γιὰ νὰ φθάσῃ τὸ αὐτοκίνητο, ἐφ' ὅσον ἐκεῖνο θὰ μένῃ ἀκίνητο; *Ἐρώτηση VI*: Ἡ ἀπόσταση (ἢ ἀπόλυτη) μεταξὺ τῶν σημείων ἀφίξεως τοῦ αὐτοκινήτου καὶ τοῦ ἀνθρώπου, στὸ τέλος κάθε ἡμέρας, παραμένει ἢ ἴδια ἢ μεγαλώνει κανονικά; Τὸ παιδί, κατὰ τὸ 10ο-11ο ἔτος μπορεῖ νὰ λύσῃ τὰ προβλήματα αὐτὰ νοερά μὲ ἀφηρημένο συλλογισμό.

Συμπέρασμα: Σὲ ὅ,τι ἀφορᾶ στὸ περιεχόμενο τῶν συγκεκριμένων προβλημάτων ἀπὸ τὴ ζωὴ, παρατηροῦμε ὅτι ὁ δάσκαλος μπορεῖ νὰ θέτῃ προβλήματα στὰ παιδιὰ, ποὺ ἀναφέρονται:

- α) Στὴν ἔννοια τοῦ θάρους ἀπὸ τὸ 10 ἔτος.
- β) Στὴν ἔννοια τοῦ ὄγκου ἀπὸ τὸ 11-12 ἔτος.
- γ) Στὴν ἔννοια τοῦ χρόνου (χρονικὴ σειρά γεγονότων, διάρκεια, ἡλικίες) ἀπὸ τὸ 9ο ἔτος.
- δ) Στὴν ἔννοια τῆς ταχύτητος ἀπὸ τὸ 10-11 ἔτος.

2. Τὸ ἀξίωμα τῶν ἐσωτερικῶν κινήτρων.

Ἡ μάθηση εἶναι ἀποτελεσματικότερη ὅταν τὸ ἄτομο διαπνέεται ἀπὸ ἐσωτερικὰ κίνητρα πρὸς τὸ ἀντικείμενο μαθήσεως. Τὰ κίνητρα αὐτὰ παρουσιάζονται, ὅταν τὸ ἀντικείμενο μαθήσεως σχετίζεται μὲ τὶς βασικὰς ἀνάγκες τοῦ ἀνθρώπου – παιδιοῦ (βιολογικὰς καὶ πνευματικὰς).

Γι' αὐτὸ, τὰ προβλήματα, ποὺ παρουσιάζονται στὰ παιδιὰ, πρέπει ν' ἀναφέρονται στὰ ἔξοδα καὶ στὰ προϊόντα τοῦ σχολικοῦ κήπου, στὶς δραστηριότητες τοῦ σχολικοῦ συνεταιρισμοῦ, στὰ ἔσοδα τῶν γονέων καὶ τῶν ἀδελφῶν, ποὺ ἐργάζονται, στὰ ἔξοδα μιᾶς ἡμέρας, μιᾶς ἐβδομάδος κλπ. στὴν οἰκογένεια, στὰ ἔξοδα τῶν γονέων γιὰ τὴ διατροφή καὶ τὴν ἐνδυμασίαν τοῦ παιδιοῦ, στὰ ἔξοδα τοῦ Κράτους γιὰ κάθε μαθητὴ σὲ ἓνα σχολικὸ ἔτος, στὸ οἰκονομικὸ συμφέρον αὐτῆς ἢ ἐκείνης τῆς ἐργασίας, ποὺ γίνεται στὸ περιβάλλον τοῦ παιδιοῦ ἢ σὲ ἄλλα μακρυνὰ περιβάλλοντα κλπ.

Ἐπειδὴ εἶναι δύσκολο, μερικὰς φορές, νὰ θρεθοῦν ψυχολογικὰ κίνητρα, μποροῦμε νὰ καταφεύγωμε στὸ «παντοπωλεῖο τῆς τάξης», ποὺ ὀργανώνουν οἱ μαθητὲς σὲ μιὰ γωνία τῆς αἴθουσας. Σ' αὐτὸ τὸ παντο-

πωλείο βρίσκει κανείς δείγματα από διάφορα έμπορεύματα με ετικέτες, στις οποίες αναγράφονται οί τιμές τους, τὸ βάρος τους, τὸ περιεχόμενό τους, τὸ μήκος τους κλπ. Τὰ παιδιὰ παίζουν τὸν «παντοπώλη» καὶ ἔτσι ἐξασφαλίζονται εὐνοϊκὰ γιὰ τὰ ἀριθμητικὰ προβλήματα ψυχολογικὰ κίνητρα.

3. Τὸ ἀξίωμα τῶν συγκεκριμένων πράξεων τοῦ παιδιοῦ:

Κατὰ τὴ λύση τῶν προβλημάτων, ὁ δάσκαλος ὀφείλει νὰ καθοδηγῇ τοὺς μαθητές: α) στὴν ἐκτέλεση συγκεκριμένων πράξεων μὲ πραγματικὰ ἀντικείμενα, β) στὴ γραφικὴ παράσταση τῶν πράξεων καὶ γ) στὴ νοερὴ ἐπανάληψη τῆς πραγματικῆς πράξης (ἐσωτερικὴ ἀνασύνθεση τῶν πράξεων, ἐσωτερικοποίηση τῶν πράξεων) (1).

Παράδειγμα: "Ἐχετε ἓνα οἰκόπεδο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευρᾶς 50 μ. Ἐνας δρόμος μὲ ὁμοιόμορφο πλάτος τὸ διασχίζει κατ' εὐθείαν καὶ λοξὰ ἀπὸ τὴν πλευρὰ ΑΔ πρὸς τὴν πλευρὰ ΒΓ. Δὲν εἶναι γνωστὸ σὲ ποιά ἀπόσταση ἀπὸ τὸ Α εἰσέρχεται στὸ οἰκόπεδο οὔτε σὲ ποιά ἀπόσταση ἀπὸ τὸ Β εἰσέρχεται στὸ οἰκόπεδο οὔτε σὲ ποιά ἀπόσταση ἀπὸ τὸ Β ἐξέρχεται. Ἐκεῖνο, ποὺ γνωρίζομε, εἶναι ὅτι ὁ δρόμος διακόπτει ἐπὶ 6 μέτρα τὴ γραμμὴ ΑΔ καὶ τὴ γραμμὴ ΒΓ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἡ κατάλληλη ἀκόμη γιὰ καλλιέργεια;": Ὁ μαθητὴς ἐκτελώνοντας τὴν πραγματικὴ πράξη, μπορεῖ νὰ κάμῃ τὰ ἑξῆς: «Νά, τὸ οἰκόπεδό μου (ἓνα φύλλο—χαρτί). Διπλώνω τὸ φύλλο ἔτσι, ὥστε νὰ φέρω τὴ γραμμὴ γδ ἐπὶ τῆς γραμμῆς αβ. Κόβω καὶ καταργῶ τὸ δρόμο, ὅποτε τὸ ἀρχικὸ τετράγωνό μου γίνεται παραλληλόγραμμο μήκους 50 μ. καὶ πλάτους 50—6—44) μ. Ἡ καλλιεργήσιμη ἐπιφάνεια εἶναι τότε 50X44 μ., ἥτοι 2.200 τ.μ.». β) Ὁ μαθητὴς παριστάνει γραφικὰ τὶς πράξεις αὐτές. γ) Σκέπτεται νοερὰ τὴν πραγματικὴν πράξη ἀνασυνθέτοντάς τὴν ἐσωτερικὰ.

4. Οἱ «σχολικοὶ συλλογισμοί», ποὺ διδάσκονται ἀπὸ τοὺς δασκάλους, δὲν εἶναι πάντοτε ἐφαρμόσιμοι, ὅπως ἔχουν, στὴ λύση τῶν συγκεκριμένων προβλημάτων ἐπὶ τοῦ πρακτικοῦ πεδίου.

1ο Παράδειγμα: Πρόβλημα: «Μιὰ κουζίνα ἔχει πλευρὲς 315 ἐκμ. X 400 ἐκμ. Στρώνομε τὸ πάτωμα μὲ μικρὲς τετράγωνες σανίδες πλευρᾶς 20 ἐκμ. Πόσες θὰ χρειαστοῦμε;» Στὸ πρόβλημα αὐτό, ἡ συνηθισμένη «σχολικὴ λύση» δίνει τὰ ἑξῆς ἀποτελέσματα: 315X400=126000 τ. ἐκμ. (= ἐπιφάνεια τοῦ δαπέδου) 20 ἐκμ. X 20 ἐκμ. = 400 τ. ἐκμ. (= ἐπιφάνεια μιᾶς μικρῆς σανίδας), λύση: 126000:400=315 σανίδες. Στὴν πράξη ὅμως διαπιστώνομε, ὅτι 315 σανίδες δὲν εἶναι ἀρκετές. Πράγματι, ἂς παρατηρήσωμε τὴν 1η σειρὰ κατὰ μήκος τῆς πλευρᾶς, ποὺ ἔχει μήκος 315 ἐκμ. Ἄν ἐκτελέσωμε τὴν τοποθέτηση, βλέπομε, ἀμέσως, ὅτι δὲ θγαίνει ἀκέραιος ἀριθμὸς σανίδων: 315:20=15,75 σανίδες. Στὴν πράξη, παρατηροῦμε, ὅτι εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νὰ κόψωμε μιὰ σανίδα σὲ 0,75, πρᾶγμα ποὺ δὲν προβλέπει ἡ θεωρία, ἀλλὰ μπορεῖ νὰ γίνῃ φανερὸ μὲ τὴν πραγματικὴν πράξη τοῦ παιδιοῦ (σχέδιασμα σὲ χαρτί, διπλωμα κλπ.).

1. H, Aebli, «Didactique psychologique», Neuchâtel, Paris, 1951, p. 104.
E. Michaud, «Action et pensée enfantines», Paris 1953, p. 22.

2ο Παράδειγμα: Προσφέρομε στο παιδί 20 κουτάκια με σπίρτα και του ζητούμε να κάμη ένα πακέτο με τὰ κουτάκια αὐτά. Τὸ παιδί μπο-
ρεῖ, θεωρητικὰ σκεπτόμενο, νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα λέγοντας, ὅτι θὰ το-
ποθετήσῃ τὰ κουτάκια σὲ εὐθεία γραμμὴ τὸ ἓνα ἐπάνω στὸ ἄλλο καὶ θὰ
τὰ δέσῃ. Ὅμως, στὴ συγκεκριμένη πράξη, θὰ διαπιστώσῃ, ὅτι εἶναι
προτιμότερο, ὕστερα ἀπὸ προσωπικὴ ἔρευνα, νὰ ταξινομήσῃ κατὰ τε-
τράδες τὰ κουτάκια (τὴ μιὰ ἐπάνω στὴν ἄλλη, ἤτοι 5 φορές τὰ $4=20$).

**5. Ἀπαραίτητη πάντοτε εἶναι ἡ ἐκτέλεση, κατὰ τὴ λύση τῶν προβλη-
μάτων:**

α) Πράξεων κατ' εὐθεία φορά, β) κατ' ἀντίστροφη φορά, καὶ γ)
συνδυαστικῶν πράξεων (ψυχολογία τοῦ κ. J. Piaget ἀξίωμα τῆς ὀργα-
νώσεως συνόλων).

Παράδειγμα: «Ἡ Μαρία παίρνει ἀπὸ τὴ μητέρα της 4 νομίσματα
τῶν 5 δραχμῶν, γιὰ ν' ἀγοράσῃ ἓνα βιβλίο με ἱστορίες 6 δρχ. καὶ ἓνα
βιβλίο με ὠραία τοπία 11 δρχ. Λογαριάζει, ἂν εἶναι ἀρκετὰ τὰ χρήμα-
τά της καὶ πόσα τῆς λείπουν ἢ τῆς μένουν ὑπόλοιπα, γιὰ νὰ ἐπιστρέψῃ
στὴ μητέρα της.»

α) Πράξη κατ' εὐθεία φορά: 5 δρχ. $4 \times 5 = 20$ δρχ. (= σύνολο πού πή-
ρε), 6 δρχ. + 11 δρχ. = 17 δρχ. (= σύνολο ἐξόδων), 20 δρχ. - 17 δρχ.
= 3 δρχ. (= ὑπόλοιπο).

β) Πράξη κατ' ἀντίστροφη φορά: «Ἡ Μαρία παίρνει ἀπὸ τὴ μη-
τέρα της μερικὰ νομίσματα τῶν 5 δρχ., γιὰ ν' ἀγοράσῃ ἓνα βιβλίο με
ἱστορίες 6 δρχ. καὶ ἓνα βιβλίο με ὠραία τοπία 11 δρχ. Ἐπιστρέφει στὴ
μητέρα της 3 δρχ. Πόσα νομίσματα τῶν 5 δρχ. πήρε ἀπὸ τὴ μητέρα
της;»: $3 + 6 + 11 = 20$ δρχ., $20 : 5 = 4$ νομίσματα τῶν 5 δρχ.

γ) Συνδυαστικὴ πράξη: (ἓνας ἄλλος συλλογισμὸς, πού ὀδηγεῖ στὸ
ἴδιο ἀποτέλεσμα): σύνολο χρημάτων, πού ἔλαβε: $5 \times 4 = 20$ δρχ., ὑπό-
λοιπο, ὕστερα ἀπὸ τὴν πρώτη δαπάνη: $20 - 6 = 14$ δρχ., ὑπόλοιπο, μετὰ
τὴ δεύτερη δαπάνη: $14 - 11 = 3$ δρχ.

Ἡ πράξη κατ' ἀντίστροφη φορά προσθέτει σπουδαῖο στοιχεῖο στὴν
κατανόηση τοῦ μαθηματικοῦ συλλογισμοῦ. Μὲ τὴ συνδυαστικὴ πράξη,
ὁ μαθητὴς κατανοεῖ τὶς ἀριθμητικὲς σχέσεις καὶ ἔτσι οἱ ἐπὶ μέρους ἐ-
νέργειες δὲν γίνονται πάγιες συνήθειες, τῶν ὁποίων δὲ θὰ γνωρίσῃ πλέ-
ον τὴ σημασία. Τὸ παιδί θέτει σὲ ἐνέργεια τὴν ἐπινόησή του καὶ τὴν
προσωπικὴ του ἔρευνα.

**6. Θέτομε προβλήματα στὰ παιδιά, πού παρέχουν δυνατότητα ἐκλογῆς
ἐκ μέρους των:**

Παράδειγμα: «Ἡ μητέρα τοῦ συμμαθητοῦ σας Π. ἐργάζεται ὡς
πωλήτρια σὲ ἓνα ἄρτοποιεῖο καὶ παίρνει 150 δρχ. κάθε ἐβδομάδα καὶ
5 κιλά ψωμί γιὰ τὴν οἰκογένειά της. Σὲ μιὰ ἐφημερίδα διαβάζει, ὅτι
ζητεῖται πωλήτρια σὲ ἓνα παντοπωλεῖο με ἀμοιβὴ 36 δρχ. τὴν ἡμέρα.
Μήπως ἔχει οἰκονομικὸ συμφέρον ν' ἀλλάξῃ ἐργασία;»

Παρόμοια προβλήματα, πού παρέχουν τὴ δυνατότητα ἐκλογῆς ἀπὸ
τὸ παιδί, ἀποτελοῦν καλὴ ἄσκηση μαθηματικοῦ συλλογισμοῦ καὶ ὑπο-
κινοῦν τὴν προσωπικὴ του ἔρευνα. Μπορεῖ νὰ συναντήσῃ κανεὶς τέτοια
προβλήματα με τὴ δυνατότητα ἐκλογῆς ὑλικοῦ γιὰ τὴν κατασκευὴ μιᾶς
κατοικίας, γιὰ τὸ χρωμάτισμα ἐνὸς τοίχου ἢ ἐκλογῆς τῶν μέσων καλλι-
εργίας τοῦ σχολικοῦ κήπου ἢ τῶν ἀγροκτημάτων τῆς οἰκογενείας ἢ

έκλογής τῶν προτιμητέων ἐμπορευμάτων κλπ. Αὐτά, ἄλλωστε, εἶναι πραγματικά προβλήματα ἀπὸ τὴ ζωὴ.

7. Τὸ ἀξίωμα ποὺ ἀπαιτεῖ τὴν ἔρευνα καὶ τὴν ἐπινόηση τοῦ μαθητοῦ

Σπάνια εἶναι τὰ προβλήματα, ποὺ ἐπικαλοῦνται πραγματικά τὴν ἔρευνα τοῦ παιδιοῦ. Ἄς δώσωμε ἓνα παράδειγμα: Συναντοῦμε συχνὰ προβλήματα τοῦ ἐξῆς τύπου: τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 10 ἐκμ. καὶ ἡ ἐπιφάνειά του 50 τ. ἐκμ. Ποία εἶναι ἡ περίμετρος του; Τὸ πρόβλημα αὐτὸ δὲν προσφέρει καμμιά ἔρευνα γιὰ τὸ παιδί. Ἀντίθετα, ἂν ἀντικαταστήσωμε τὴ λέξη «ὀρθογώνιο» μὲ τὴ λέξη παραλληλόγραμμο καὶ «μῆκος» μὲ τὴ λέξη «βάση», ὑπάρχει μιὰ ἀπειρία ἀπαντήσεων, π.χ. τὸ παιδί μπορεῖ ν' ἀνακαλύψῃ, ὅτι ἡ περίμετρος εἶναι δυνατὸν νὰ περάσῃ τὸ 1 μ. ἢ τὸ 1 χιλμ. ἢ ἀκόμη ὅτι ἡ μικρότερη περίμετρος εἶναι ἐκείνη τοῦ ὀρθογωνίου μὲ μῆκος 10 καὶ πλάτος 5.

8. Ἡ πορεία τῆς ἐργασίας γιὰ τὴ λύση ἑνὸς προβλήματος

α) Θέτομε τὸ πρόβλημα στοὺς μαθητὲς καὶ ὑποκινοῦμε μιὰ συζήτηση, ἕως ὅτου γίνῃ σαφὲς καὶ ζωντανὸ στὸ πνεῦμα τους. β) Κατόπιν, οἱ μαθητὲς ὀδηγοῦνται κατάλληλα στὴν ἀτομικὴ ἢ κοινὴ ἢ ὁμαδικὴ ἔρευνα. γ) Ἐκτελοῦν πραγματικὲς πράξεις μὲ συγκεκριμένα ἀντικείμενα (πράξεις κατ' εὐθεῖα φορά, κατ' ἀντίστροφη φορά, συνδυαστικὲς). δ) Παριστάνουν γραφικὰ τὶς πράξεις αὐτές. ε) Ξανασκέπτονται τὶς πράξεις, ποὺ ἔχουν ἐκτελέσει καὶ ἐκφράζουν μὲ ἀριθμητικὰ σύμβολα ὅ,τι ἔχουν κάμει ἐκτελώντας τὶς ἀντίστοιχες ἀριθμητικὲς πράξεις (μὲ σημεῖα). Οἱ ἐπεμβάσεις τοῦ δασκάλου περιορίζονται στὸ ἐλάχιστο: ὅταν κατανοηθῇ τὸ πρόβλημα ἀπὸ τὸ παιδί καὶ ὅταν καταστρωθῇ τὸ σχέδιο γιὰ τὴν ἔρευνα, τότε ὁ μαθητὴς θεωρεῖ τὴ συμβολὴ τοῦ δασκάλου σὰν μιὰ ἀπλὴ βοήθεια, ἀφοῦ ἡ ἐπέμβασή του δὲν εἶναι μιὰ ἐνέργεια μηχανικῆς μεταφορᾶς τῆς σκέψης τοῦ μαθητοῦ σὲ ἓνα σκοπὸ γνωστὸ μόνον ἀπὸ τὸ δάσκαλο. Τὰ ἀποτελέσματα, ὕστερα ἀπὸ τὴν περίοδο τῆς ἐλεύθερης ἔρευνας, πρέπει ν' ἀνακοινῶνται πάντοτε ἀπὸ τὶς ὁμάδες ἢ ἀπὸ τὰ ἄτομα· τότε ἔχει τὴν εὐκαιρίαν ὁ δάσκαλος νὰ ἐπεμβαῖνῃ διορθώνοντας καὶ συμπληρώνοντας τὰ δεδομένα τῶν παιδιῶν. Οἱ ἐσφαλμέναι λύσεις τῶν μαθητῶν πρέπει νὰ μελετῶνται μὲ προσοχὴ στὴν τάξη, ὥστε ν' ἀντιληφθοῦν τὰ παιδιὰ τοὺς λόγους, γιὰ τοὺς ὁποῖους μιὰ ἐνέργεια δὲν εἶναι ὀρθὴ καὶ νὰ συλλάβουν τὶς διαφορὰς καὶ τὶς σχέσεις μεταξὺ τῆς ὀρθῆς καὶ ἐσφαλμένης ἐνεργείας.

9. Ὁ ἐπιστημονικὸς ἔλεγχος τῶν ἀνωτέρω προτάσεών μας στὶς παιδαγωγικὲς συνέπειες ἀπαιτεῖ τὴν πειραματικὴ ἐφαρμογὴ τους στὶς σχολικὲς τάξεις καὶ τὴ μέτρηση τῆς ἀποδοτικότητος τῶν μαθητῶν. Αὐτὰ εἶναι ἔργο τοῦ μέλλοντος.