ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΔΟΜΕΣ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ*

Τό τελευταῖο αὐτό κεφάλαιο πραγματεύεται τό πρόβλημα τοῦ φυσικοῦ περιεχόμενου τῆς κβαντικῆς μηχανικῆς καί εἰδικότερα τό πρόβλημα τῆς αἰτιότητας, σέ μιά πιό ἐξειδικευμένη γλώσσα. Γι' αὐτό μπῆκε στό τέλος τοῦ βιβλίου, ὥστε νά μή διασπᾶ τήν ἑνότητά του καί νά μπορεῖ νά παραληφθεῖ ἀπό τόν ἀναγνώστη πού δέν εἶναι κάπως ἐξοικειωμένος μέ τή γλώσσα του.

Στό κείμενο αὐτό θά ὁρίσουμε τίς λογικές δομές τῶν προτάσεων πού ἀφοροῦν τά κλασικά καί τά κβαντικά συστήματα. Θά ἀναζητήσουμε σέ συνέχεια τό φυσικό περιεχόμενο αὐτῶν τῶν δομῶν. Θά θέσουμε τέλος τό ἐρώτημα γιά τή σταθερότητά τους, δηλαδή τό ἐρώτημα γιά τήν πληρότητα τῆς θεωρίας.

Τό πρόβλημα τῆς ἑρμηνείας τῆς κβαντικῆς μηχανικῆς, τέθηκε οὐσιαστικά ἀπό τότε πού διαμορφώθηκε σά φυσική θεωρία. Ἡ δραματικότητα τοῦ προβλήματος ἐκδηλώθηκε σέ ὅλη της τήν ἔκταση στό Συνέδριο τοῦ Solvay (1927). Τό 1935, οἱ Einstein, Podolsky καί Rosen, ἔθεσαν, μέ τή βοήθεια ἑνός νοητικοῦ πειράματος, τό πρόβλημα τῆς πληρότητας τῆς κβαντικῆς μηχανικῆς. Ἀντίθετα μέ τόν Bohr, ὑποστήριξαν ὅτι ἡ κβαντομηχανική περιγραφή δέν εἶναι πλήρης, καί ὑπέδειξαν - ἔμμεσα - τή δυνατότητα γιά μιά πληρέστερη περιγραφή, μέ τήν εἰσαγωγή συμπληρωματικῶν παραμέτρων. Τόν ἑπόμενο χρόνο οἱ Birkhoff καί Von Neumann μελέτησαν τή λογική δομή τῶν προτάσεων τῆς κβαντικῆς μηχανικῆς καί ἀπέδειξαν ὅτι εἶναι ἰσόμορφη μέ ἕνα μή-μπούλειο πλέγμα, σ' ἀντίθεση μέ τό πλέγμα τῶν προτάσεων τῆς κλασικῆς μηχανικῆς, πού εἶναι ἰσόμορφο μέ ἕνα πλέγμα Boole. Στή

* Κείμενο σεμιναρίου πού δόθηκε στήν Ἀθήνα (Θεμέλια τῶν Ἐπιστημῶν) καί στήν Ecole Normale Supérieure de Paris (Seminaire, Philosophie et Mathématique, Dieudonné, Loi, Thom). Τό Ἑλληνικό κείμενο δημοσιεύτηκε στόν τόμο *Θεμέλια τῶν Ἐπιστημῶν I*, 1978. Τό γαλλικό θά δημοσιευθεῖ σέ τόμο τοῦ Σεμιναρίου. Στό ἀρχικό κείμενο ἔγιναν ὁρισμένες βελτιώσεις.

δεκαετία τοῦ 1960, οἱ Jauch, Piron, καί ἄλλοι ἐρευνητές σέ διάφορες χῶρες, προχώρησαν καί γενίκευσαν τίς ἔρευνες σ' αὐτή τήν περιοχή. Ἔτσι τό παλαιό πρόβλημα τῆς φυσικῆς ἑρμηνείας καί τῆς πληρότητας τῆς κβαντικῆς μηχανικῆς, ἐξετάσθηκε ἀπό μία ἄποψη πού ἔχει τά πλεονεκτήματα τῆς αὐστηρότητας τοῦ λογικομαθηματικοῦ φορμαλισμοῦ, ἀλλά καί τά μειονεκτήματά του: τήν ἐπίφαση τῆς τελεσίδικης ἀλήθειας.

Α΄ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Θά δώσουμε πρῶτα ὁρισμένα στοιχεῖα τοῦ λογισμοῦ τῶν προτάσεων, πού γιά τήν περιοχή τῆς κβαντικῆς μηχανικῆς ὀνομάζεται συχνά (καί ὄχι ὀρθά), κβαντική λογική. Τά στοιχεῖα αὐτῆς τῆς γλώσσας εἶναι ἀπαραίτητα γιά τή φυσική μελέτη τοῦ προβλήματος.

A_1. Τό κλασικό ἰδεῶδες καί τά μικροφυσικά συστήματα

Ἡ κλασική φυσική δεχόταν ὅτι εἶναι δυνατόν νά προσδιοριστοῦν, ταυτόχρονα ἤ διαδοχικά, ὅλες οἱ μεταβλητές πού ὁρίζουν τήν κατάσταση ἑνός φυσικοῦ συστήματος. Δεχόταν συνεπῶς ὅτι ἦταν ἐφικτή μιά πλήρης περιγραφή, ὅπως π.χ. ἡ χωροχρονική καί ταυτόχρονα ἡ δυναμική περιγραφή τῆς κίνησης τοῦ ὑλικοῦ σημείου. Ἔτσι δεχόταν ὄχι μόνο τήν ὕπαρξη τοῦ αἰτιακοῦ καθορισμοῦ, ἀλλά καί τή δυνατότητα τῆς πειραματικῆς του ἐπαλήθευσης.

Σύμφωνα μέ τήν κλασική ἀντίληψη τῆς αἰτιότητας, ἴδιες αἰτίες ὁδηγοῦν στά ἴδια ἀποτελέσματα. Ἀλλά κατά τή μηχανιστική ἀντίληψη πού ἐπεκράτησε στήν κλασική φυσική, τό φυσικό σύστημα διατηρεῖ σ' ὅλες τίς ἀλλαγές τήν ταυτότητά του. Ἡ ἀλλαγή εἶναι μόνο ποσοτική, καί ἡ ἔννοια τῆς ποιότητας καί τῆς ποιοτικῆς ἀλλαγῆς βρίσκονται ἔξω ἀπό τό πεδίο αὐτῆς τῆς ἄποψης.

Ἡ ἁπλοϊκή αὐτή ἀντίληψη γιά τή φυσική πραγματικότητα καί τούς νόμους της, ἀνατράπηκε ἀπό τή νεώτερη φυσική. Ἡ κβαντομηχανική περιγραφή χρησιμοποιεῖ ζεύγη ἀσύμβατων παραμέτρων. Τέτοιες παράμετροι δέν μποροῦν νά μετρηθοῦν ταυτόχρονα μέ ἀπεριόριστη ἀκρίβεια, γιατί ἡ μέτρηση τῆς μιᾶς διαταράσσει τήν τιμή τῆς ἄλλης. Οἱ ἀνισότητες τοῦ Heisenberg εἶναι ἡ τυπική ἔκφραση τῆς νέας κατάστασης. Ἕνα ζεῦγος ἀσύμβατων παραμέτρων εἶναι, π.χ., ἡ θέση καί ἡ ὁρμή. Ἡ ἀκριβής χωροχρονική περιγραφή τοῦ συστήματος ἀποκλείει τή δυναμική του περιγραφή, καί ἀντίστροφα ἡ αἰτιακή-δυναμική, ἀποκλείει τή χωροχρονική.

Ποιά εἶναι ἡ φυσική ἑρμηνεία τῶν ἀνισοτήτων τοῦ Heisenberg; Στόν ἴδιο τόν Heisenberg ὀφείλεται ἡ *ὀπερασιοναλιστική* ἑρμηνεία: ἡ μέτρηση τῆς μιᾶς μεταβλητῆς διαταράσσει τήν τιμή τῆς ἄλλης· ἔτσι γίνεται ἀνέφικτη ἡ ταυτόχρονη μέτρηση καί τῶν δυό. Ἡ προηγούμενη ἑρμηνεία προϋποθέτει -σιωπηρά ἔστω-, ὅτι οἱ δυό ἀσύμβατες μεταβλητές ἔχουν κάποια τιμή πρίν ἀπό τή μέτρηση. Ἀλλά μιά ἐξίσου διαδεδομένη ἑρμηνεία, πού θά τήν ὀνομάσουμε *ὀντολογική*, ἰσχυρίζεται ὅτι οἱ συζυγεῖς παράμετροι δέν μποροῦν νά ἔχουν τήν ἴδια στιγμή, καθορισμένες τιμές. Ἕνα σωμάτιο, π.χ., δέν μπορεῖ νά ἔχει ταυτόχρονα ὁρισμένη θέση καί ὁρισμένη ὁρμή. Γιά τούς μέν, ἡ βεβαίωση αὐτή δέν ἐπιδέχεται παραπέρα ἑρμηνεία. Γιά ἄλλους, ὑπάρχει φυσική ἐξήγηση: Τό κβαντικό σωμάτιο εἶναι σωμάτιο - κύμα, εἶναι *κυματοδέσμη*, καί ἔτσι ἔχει μιά ἔκταση τόσο στό φυσικό χῶρο, ὅσο καί στό χῶρο τῆς ὁρμῆς. Ὑπάρχει τέλος ἡ *ἀναγνωστικιστική* θέση, κατά τήν ὁποία πρέπει νά ἀρκούμαστε στά πειραματικά δεδομένα, χωρίς νά ἀναζητοῦμε κάποια βαθύτερη ἐξήγηση.

Ἡ τελευταία αὐτή ἀντίληψη ἀποτελεῖ τό γνωσιολογικό πυρήνα τῆς ἀρχῆς τῆς *συμπληρωματικότητας* (Bohr). Σύμφωνα μ' αὐτή τήν ἀρχή, στίς μικροφυσικές μετρήσεις χρησιμοποιοῦμε ὄργανα πού μᾶς δίδουν συμπληρωματικές καί ἀμοιβαῖα ἀποκλειόμενες ὄψεις τῆς πραγματικότητας. Ἡ κβαντομηχανική περιγραφή εἶναι, κατά τόν Bohr, πλήρης καί ὁριστική. Ἡ ἀρχή αὐτή θεωρήθηκε ὁρόσημο στήν ἑρμηνεία τῆς κβαντικῆς μηχανικῆς. Ὡστόσο ἡ ἀρχή δέν ἀπαντᾶ στό κεντρικό ἐρώτημα γιά τή φύση τῶν μικροφυσικῶν ὀντοτήτων. Ἡ ἀσάφειά της ἐπέτρεψε ἄλλωστε ἀλληλοσυγκρουόμενες αἰτιολογήσεις.

Ὡστόσο ἡ ἀρχή αὐτή στηρίχθηκε, καί στήριξε μέ τή σειρά της, μιά ἄλλη, πού αὐτή εἶναι *σαφής: τήν ἀρχή τῆς ἀνυπαρξίας τῶν μή παρατηρήσιμων μεγεθῶν* (Heisenberg). Κατά τήν ἀρχή αὐτή, δυό συζυγεῖς μεταβλητές δέν μποροῦν νά ἔχουν ταυτόχρονη ὕπαρξη (ἄν π.χ. τό σωμάτιο ἔχει καθορισμένη ὁρμή, τότε ἡ θέση του εἶναι ἐντελῶς ἀπροσδιόριστη, καί ἀντίστροφα). Ἄρα τά συμπληρωματικά ζεύγη τοῦ Bohr δέν μποροῦν νά συνυπάρχουν γιά τό ἴδιο φυσικό σύστημα.

Ἡ προηγούμενη κατάσταση ἐκφράζεται στό ἐπίπεδο τῆς λογικῆς, ἀπό τό γεγονός ὅτι τό πλέγμα τῶν προτάσεων τῆς κβαντικῆς μηχανικῆς δέν εἶναι πλέγμα Boole. Τό τελευταῖο αὐτό εἶναι ἕνα *δεδομένο*. Ἀλλά τό βασικό ἐπιστημολογικό καί φυσικό ἐρώτημα πού προκύπτει, εἶναι τό ἀκόλουθο: Ἡ κβαντομηχανική περιγραφή εἶναι πλήρης; Ἄρα ἡ τωρινή δομή εἶναι ὁριστική; Ἤ μήπως εἶναι δυνατόν νά ὑπάρξει μιά πληρέστερη περιγραφή, πού θά σημαίνει μερική ἤ ὁλική ἐνσωμάτωση τοῦ τωρινοῦ κβαντικοῦ πλέγματος σέ ἕνα κλασικό πλέγμα;

Ὁ πιθανοκρατικός χαρακτήρας τῆς κβαντικῆς μηχανικῆς συνδέεται ὀργανικά μέ τήν προηγούμενη προβληματική. Θά μᾶς ἀπασχολήσει λοιπόν καί αὐτός στή συνέχεια τοῦ κειμένου.

A_2. Τά φυσικά συστήματα καί ἡ ἔννοια τῆς κατάστασης.

Καλοῦμε φυσικό σύστημα, S, ἕνα μέρος τῆς πραγματικότητας γιά τό ὁποῖο ἔχει νόημα νά μιλᾶμε, χωρίς νά ἀναφερόμαστε στόν ὑπόλοιπο κόσμο.

῾Ο ὁρισμός αὐτός προϋποθέτει:

1)῞Οτι τό σύστημα εἶναι ἐξωτερικό σέ σχέση μέ τόν ἐρευνητή (ρεαλιστικό ἀξίωμα).

2)῞Οτι ἔχει ἰδιότητες καί χαρακτηρίζεται ἀπό μεγέθη ἀνεξάρτητα ἀπό τή μέτρηση. (Σέ ὁρισμένες περιπτώσεις τά φυσικά μεγέθη δημιουργοῦνται ἀπό τή μέτρηση, ἀλλά αὐτό εἶναι μιά ἄλλη ὄψη τοῦ ζητήματος, πού θά μᾶς ἀπασχολήσει παρακάτω).

3)῞Οτι τό σύστημα S εἶναι διαχωρίσιμο ἀπό τήν ὑπόλοιπη πραγματικότητα.

῾Ο ὁρισμός ἑνός φυσικοῦ συστήματος εἶναι σχετικός μέ τό ἐπίπεδο τῆς φυσικῆς θεωρίας, καί μέ τήν ἄποψη πού ἐπιλέγει ὁ φυσικός.

῾Η *κατάσταση* ἑνός συστήματος ὁρίζεται μέ τή βοήθεια ἑνός συνόλου μεταβλητῶν (παρατηρήσιμων) πού ἐπιλέγουμε μέ ὁρισμένα κριτήρια. Εἰδικά ἡ κατάσταση ἑνός κβαντικοῦ συστήματος ὁρίζεται ἀπό ἕνα σύνολο παρατηρήσιμων, πού οἱ τελεστές τους ἀντιμετατίθενται. ῾Η ἔννοια τῆς κατάστασης εἶναι λοιπόν σχετική: ἀφορᾶ τό σύνολο τῶν μεγεθῶν πού ἐπιλέξαμε.

Στήν κλασική περίπτωση ὅλα τά παρατηρήσιμα θεωροῦνται συμβατά, ἀπ᾿ ὅπου ἡ δυνατότητα γιά πλήρη ὁρισμό τῆς κατάστασης καί γιά ἐπαλήθευση τῆς ἀρχῆς τῆς αἰτιότητας. Στήν κβαντική μηχανική ἀντίθετα, ἡ ἀσυμβότητα τῶν συζυγῶν μεταβλητῶν συνεπάγεται τόν ὁρισμό τῆς κατάστασης ἀπό ἕνα ἐπί μέρους σύνολο συμβατῶν μεγεθῶν. Τό ἰδανικό πείραμα - πού ὑποτίθεται ὅτι δέν διαταράσσει τό μετρούμενο μέγεθος - ἐπιτρέπει τόν προσδιορισμό τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν.

Τό βασικό ἐρώτημα πού προκύπτει ἀπό τά προηγούμενα εἶναι - καθώς σημειώσαμε - τό ἀκόλουθο: ἡ τωρινή κβαντομηχανική περιγραφή εἶναι πλήρης ἤ μπορεῖ νά ἀναχθεῖ σέ δυναμική περιγραφή: Αὐτό, ἀπό λογική ἄποψη σημαίνει: τό τωρινό πλέγμα εἶναι σταθερό (μή ἀναγώγιμο), ἤ μπορεῖ νά ἀναχθεῖ - μερικά ἤ ὁλικά - σέ κλασικό;

A_3.᾿Ερωτήσεις, μετρήσεις καί προτάσεις

Προσδιορίζουμε τίς τιμές τῶν παρατηρήσιμων μεγεθῶν μέ τή βοήθεια μιᾶς *μέτρησης*. ῾Η μέτρηση προϋποθέτει τό σύστημα S, τό ὄργανο, A, τούς κανόνες χρήσης καί τήν ἑρμηνεία τῶν ἀποτελεσμάτων. Φυσικά ὑπάρχουν μετρήσεις ἄμεσες καί μετρήσεις ἔμμεσες.

Μιά μέτρηση ἀπαντᾶ σέ μιά ἐρώτηση α, πού ἀφορᾶ τό S. Ἡ ἀπάντηση εἶναι ναί ἤ ὄχι. Μέ ἀντιμετάθεση τῶν ὅρων, διατυπώνουμε τήν *ἀντίστροφη* ἐρώτηση α. Στήν *κοινότοπη* ἐρώτηση I, ἀντιστοιχεῖ πάντα ἡ ἀπάντηση ναί. Στήν παράλογη ἐρώτηση Φ , ἀντίστροφη τῆς I, ἀντιστοιχεῖ πάντα ἡ ἀπάντηση ὄχι (ἤ ποτέ ναί).

Ἀληθής λέγεται μιά ἐρώτηση, ὅταν ἡ σχετική ἀπάντηση εἶναι *ναί*. Στήν ἀντίθετη περίπτωση, ἡ πρόταση λέγεται *ψευδής*. Ἡ ἐρώτηση α εἶναι *ἰσχυρότερη* ἀπό τήν β (συμβολίζουμε: α $<$ β), ἄν ἡ β εἶναι ἀληθινή κάθε φορά πού ἡ α εἶναι ἀληθινή.

Ἡ σχέση: α ἀληθινή $\Rightarrow$ β ἀληθινή (α→β) εἶναι μεταβατική καί ἐπιτρέπει νά ὁρίσουμε μιά τάξη *ἰσοδυναμίας:* α$\sim$β, ἄν καί μόνο ἄν α$<$β καί β$<$α. Ἄν ἡ α εἶναι ἀληθής, ὅλες οἱ ἐρωτήσεις τῆς τάξης ἰσοδυναμίας στήν ὁποίαν ἀνήκει, εἶναι ἐπίσης ἀληθεῖς (γιά τό θεωρούμενο σύστημα).

A_4. Προτάσεις καί πλέγματα προτάσεων

Ἡ ἀπάντηση σέ μιά ἐρώτηση, μᾶς δίνει τή δυνατότητα νά διατυπώσουμε μιά *πρόταση* πού ἀφορᾶ τό S, καί πού σχετίζεται μέ τό μέγεθος A. Μιά πρόταση δέχεται μιά ἀπό τίς δυό τιμές: ναί ἤ ὄχι. Δηλαδή εἶναι ἀληθής ἤ ψευδής.

Ἡ πρόταση α *συνεπάγεται* τή β (α → β), ἄν ἡ β εἶναι ἀληθής κάθε φορά πού ἡ α εἶναι ἀληθής. Ἡ συνεπαγωγή ἐπιτρέπει νά ὁρίσουμε μιά *τάξη ἰσοδυναμίας*. Καλοῦμε πρόταση a, τήν τάξη ἰσοδυναμίας στήν ὁποίαν ἀνήκει ἡ α. Ἡ πρόταση a ταυτίζεται συνεπῶς μέ τήν τάξη ἰσοδυναμίας πού περιέχει τήν α. Ἡ πρόταση a καλεῖται *ἀτομική*, ἄν δέν ὑπάρχει πρόταση b πού νά ἀφορᾶ τό S, νά εἶναι διαφορετική ἀπό τήν Φ καί νά συνεπάγεται τήν a, χωρίς νά ταυτίζεται μ' αὐτήν.

Καλοῦμε πλέγμα Z, τό σύνολο τῶν προτάσεων πού ἀφοροῦν ἕνα δοσμένο φυσικό σύστημα. Στό Z ὁρίζουμε μιά *σχέση διατάξεως:*

α) $a < a$ *(αὐτοπαθής)*.

β) $a < b$ καί $b < c \Rightarrow a < c$ *(μεταβατική)*

γ) $a < b$ καί $b < a \Rightarrow a = b$ *(ἀντισυμμετρική)*.

Γιά δυό προτάσεις a καί b, ὁρίζουμε ἕνα *ἀνώτερο* καί ἕνα *κατώτερο φράγμα*.

:$a \vee b$: a ἀληθής ἤ b ἀληθής (ἀνώτερο φράγμα).

:$a \wedge b$: a ἀληθής καί b ἀληθής (κατώτερο φράγμα).

Γιά μιά μή κενή οἰκογένεια προτάσεων { ai }, ὁρίζουμε:

$\bigvee_i$ ai: ἀνώτερο φράγμα (τό πιό μικρό ἀπό τά ἀνώτερα φράγματα) ai: κατώτερο φράγμα (τό πιό μεγάλο ἀπό τά κατώτερα φράγματα)

Ὁρισμός: Καλοῦμε *πλῆρες πλέγμα*, ἕνα σύνολο στό ὁποῖο ἔχουμε ὁρίσει μιά σχέση διατάξεως καί πού κάθε ὑποσύνολό του δέχεται ἕνα ἀνώτερο καί ἕνα κατώτερο φράγμα.

Τό σύνολο τῶν προτάσεων πού ἀφοροῦν ἕνα φυσικό σύστημα S, ἀποτελεῖ πλῆρες πλέγμα.

Ἐπιμεριστικότητα. Ἕνα πλέγμα λέγεται *ἐπιμεριστικό*, ἄν καθεμιά ἀπό τίς πράξεις ($\vee$, $\wedge$) εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν ἄλλη:

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge c)$ καί $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Παράδειγμα: Τό πλέγμα τῶν προτάσεων πού ἀφοροῦν ἕνα κλασικό σύστημα εἶναι ἐπιμεριστικό.

Συμπλήρωση καί συμπλήρωμα. Ἡ συμπλήρωση ὁρίζεται σέ μερικῶς διαταγμένα σύνολα. Ἡ πρόταση a καλεῖται συμπλήρωμα τοῦ a, ἄν $a \wedge a' = \emptyset$ καί $\alpha \vee \alpha' = I$. Ἀπό τήν ἄποψη τῆς μέτρησης, αὐτό σημαίνει ὅτι:

a ἀληθής $\Rightarrow$ a′ ψευδής, καί ἀντίστροφα.

Ἕνα πλέγμα λέγεται *συμπληρωμένο*, ἄν κάθε στοιχεῖο α ἔχει ἕνα συμπλήρωμα a′.

Ἄν τό Z εἶναι ἐπιμεριστικό, τό συμπλήρωμά του εἶναι μοναδικό. *Ἕνα πλέγμα ἐπιμεριστικό καί συμπληρωμένο εἶναι ἕνα πλέγμα* Boole.

Στήν περίπτωση τῶν κβαντικῶν συστημάτων, πού δέν εἶναι ἐπιμεριστικά, τό συμπλήρωμα δέν εἶναι γενικά μοναδικό. Στήν περίπτωση αὐτή ὁρίζουμε τό συμβατό συμπλήρωμα.

Συμβατό συμπλήρωμα τοῦ a εἶναι ἕνα συμπλήρωμα b, γιά τό ὁποῖο ὑπάρχει μία μέτρηση τοῦ τύπου ὄχι - ναί, $\alpha \in \alpha$, τέτοια ὥστε $\alpha \in b$

Ἀξίωμα. Γιά κάθε πρόταση $\alpha \in Z$, ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα συμβατό συμπλήρωμα.

Ὀρθοσυμπλήρωμα. Ἕνα πλέγμα Z λέγεται ὀρθοσυμπληρωμένο, ἄν σέ κάθε στοιχεῖο $a \in Z$, ἀντιστοιχεῖ ἕνα στοιχεῖο $\alpha' \in Z$, καλούμενο ὀρθοσυμπλήρωμα καί τέτοιο ὥστε:

α) $(a')' = a$

β) $a \wedge a' =$ καί $a \vee a' = I$

γ) $a < b \Leftrightarrow b' < a'$ (νόμος τοῦ Morgan τῆς τυπικῆς λογικῆς).

Γιά τά πλέγματα πού εἶναι ἰσόμορφα μέ ἕνα «πεδίο» συνόλων ἡ συμπλήρωση ἀντιστοιχεῖ στή συμπλήρωση μέ τήν ἔννοια τῶν συνόλων. Γιά τούς κλειστούς γραμμικούς ὑποχώρους τοῦ χώρου τοῦ Hilbert (κβαντική μηχανική) ἡ συμπλήρωση ἀντιστοιχεῖ στήν ὀρθοσυμπλήρωση.

Σύστημα προτάσεων. Καλεῖται τό σύστημα προτάσεων, ἕνα μερικά *διατεταγμένο σύνολο μέ πρῶτο καί τελευταῖο στοιχεῖο τό ϕ καί τό I, καί τοῦ ὁποίου τό κάθε στοιχεῖο δέχεται ἕνα ὀρθοσυμπλήρωμα.*

A_5. Τό πρόβλημα τῆς συμβατότητας

Ἡ κατάσταση ἑνός συστήματος S ὁρίζεται ἀπό τίς τιμές τοῦ συνόλου τῶν μεταβλητῶν πού τό χαρακτηρίζουν. Συνεπῶς ἡ κατάσταση ἑνός *κβαντικοῦ* συστήματος, ὁρίζεται ἀπό τίς τιμές τοῦ συνόλου τῶν μεταβλητῶν πού μποροῦν νά μετρηθοῦν ταυτόχρονα, δηλαδή ἀπό τίς τιμές τοῦ συνόλου τῶν μεταβλητῶν πού οἱ τελεστές τους ἀντιμετατίθενται:

Ἡ κατάσταση ἑνός κβαντικοῦ συνόλου ὁρίζεται πάνω στό σύνολο Z τῶν προτάσεων, σάν μιά πραγματική συνάρτηση p(a) μέ τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

α) $0 \leqq p(a) \leqq 1$

β) $p(\phi) = 0, \ p(I) = 1$

γ) Γιά κάθε {ai} πού ἱκανοποιεῖ τή σχέση $a_i < a'_\kappa$, γιά κάθε ζεῦγος ($\iota \neq \kappa$) ἔχουμε $\Sigma\, p(a_i) = P(\cup a_i)$.

Δυό προτάσεις εἶναι ταυτόχρονα ἀληθεῖς (ἤ ψευδεῖς), ἄν τά ἀντίστοιχα παρατηρήσιμα μποροῦν νά μετρηθοῦν ταυτόχρονα (ἤ διαδοχικά). Στήν κατάσταση συνεπῶς ἀντιστοιχεῖ ἕνα σύνολο προτάσεων {ai}, πού εἶναι ταυτόχρονα ἀληθεῖς γιά τό σύστημα.

Στίς μετρήσεις συμβατῶν μεγεθῶν ἀντιστοιχοῦν συμβατές προτάσεις: $a \leftrightarrow b$. Ἡ σχέση $a \leftrightarrow b$ εἶναι συμμετρική, ὄχι ὅμως καί μεταβατική. Κριτήριο συμβατότητας: $\alpha \leftrightarrow b = \alpha \wedge (b \vee \alpha') = \alpha \wedge b$

Ἄν ἡ πρόταση a εἶναι συμβατή μέ τήν πρόταση b, τότε τό ὑποπλέγμα πού γεννοῦν εἶναι ἐπιμεριστικό.

Παράδειγμα: Τό πλέγμα τῶν προτάσεων πού ἀφοροῦν ἕνα *κλασικό* σύστημα, εἶναι ἐπιμεριστικό.

A_6. Ἡ ἔννοια τοῦ κέντρου ἑνός συστήματος προτάσεων

Ὑπάρχουν δύο προτάσεις πού ἔχουν τήν ἰδιότητα νά ἀντιμετατίθενται μέ κάθε πρόταση: οἱ Φ καί I. Τό σύνολο τῶν προτάσεων πού εἶναι συμβατές μέ ὅλες τίς προτάσεις ἑνός συστήματος Z, καλεῖται *κέντρο* τοῦ Z:

$\bar{z} = \{ z \in Z \mid z \leftrightarrow \alpha, \ \forall \alpha \in Z \}$

Τό κέντρο Z εἶναι ἕνα ὑποσύνολο Boole.

Σ' ἕνα καθαρά *κλασικό* σύστημα προτάσεων, τό κέντρο τοῦ συστήματος ταυτόσημο μέ τό ἴδιο τό σύστημα. Ἀλλοιῶς: σ' ἕνα πλέγμα Boole, τό κέντρο ταυτίζεται μέ τό Z. Ἄν τό κέντρο ἀποτελεῖται μόνον ἀπό τά στοιχεῖα Φ καί I, τότε καλεῖται *κοινότοπο* καί τό πλέγμα *μή ἀναγώγιμο.* Σ' ἕνα καθαρά κβαντικό σύστημα προτάσεων, τό κέντρο περιλαμβάνει μόνο τά στοιχεῖα Φ καί I. Ὑπάρχουν τέλος συστήματα, πού ἀντιστοιχοῦν σέ ἐνδιάμεσες περιπτώσεις. Τέτοια συστήματα κατέχουν κανόνες *ὑπερεπιλογῆς.*[1]

Β΄ ΤΑ ΚΛΑΣΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ Η ΤΥΠΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Θά ἐξετάσουμε τώρα τήν περίπτωση τῶν κλασικῶν συστημάτων, τίς κλασικές ἐξιδανικεύσεις καί τό χαρακτήρα τῶν προτάσεων πού ἀφοροῦν αὐτά τά συστήματα.

B_1. Ἡ δομή τῶν προτάσεων πού ἀφοροῦν κλασικά συστήματα

Σημειώσαμε ὅτι ἕνα σύστημα προτάσεων Z εἶναι καθαρά κλασικό, ἄν ζ Z. Ἡ ἰδιότητα αὐτή ἐκφράζει τό γεγονός ὅτι γιά ἕνα κλασικό σύστημα, ὅλες οἱ προτάσεις εἶναι συμβατές. Ἡ συμβατότητα, μέ τή σειρά της, εἶναι ἔκφραση τῆς ἀποδοχῆς ὅτι τό ὄργανο τῆς μέτρησης δέν διαταράσσει τό σύστημα, καί ὅτι συνεπῶς μποροῦμε νά μετρήσουμε διαδοχικά τίς μεταβλητές του, χωρίς τό ἀποτέλεσμα νά ἐξαρτᾶται ἀπό τή σειρά τῆς μέτρησης.

Ἀπό τά προηγούμενα συνεπάγεται ὅτι γιά ἕνα κλασικό σύστημα μποροῦμε νά μετρήσουμε τήν $a \wedge b$, πού σημαίνει a καί b. Γιά τό σκοπό αὐτό μετροῦμε πρῶτα τήν a καί σέ συνέχεια τήν b (ἤ ἀντίστροφα).

Τό πλέγμα τῶν προτάσεων πού ἀφοροῦν ἕνα κλασικό σύστημα εἶναι ἐπιμεριστικό. Ἐδῶ τό $\vee$ παίζει τό ρόλο του ἤ τῆς τυπικῆς λογικῆς: a b a ἀληθής ἤ b ἀληθής*.

Ἔτσι ἡ δομή τοῦ πλέγματος τῶν προτάσεων πού ἀφοροῦν ἕνα κλασικό σύστημα ταυτίζεται μέ τή δομή τῶν προτάσεων τῆς τυπικῆς λογικῆς (δομή

1. J. Bub, The intepretation of Quantum Mechanics, Reidel, 1974. 2) J. M. Jauch, *Foundations of Quantum Mechanics*, *Addison - Wesley, 1968.* 3) G. Mackey, The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Benjamin, 1963. 4) G. Piron, Foundations of Quantum Mechanics, Benjamin, 1976.

* *Θεώρημα:* Ἄν a V b ἀληθής a ἀληθής ἤ b ἀληθής, γιά κάθε a, b e Z, τότε τό Z εἶναι ἐπιμεριστικό.
Ἀπόδειξη: a V (b V c) ἀληθής a ἀληθής καί (b ἀληθής ἤ c ἀληθής) (a ἀληθής καί b ἀληθής) ἤ (a ἀληθής καί c ἀληθής) (a V b) V (a V c) ἀληθής. Ἄρα: a V (b V c) = (a V B) V (a V c) ο.ε.δ.

Boole). Ἐδῶ βρίσκεται ἡ θεμελιακή διαφορά ἀπό τό πλέγμα τῶν προτάσεων τῆς κβαντικῆς μηχανικῆς.

Θά πρέπει τώρα νά ἀναζητήσουμε τίς φυσικές αἰτίες αὐτῆς τῆς ταύτισης.

B_2. Οἱ κλασικές ἐξιδανικεύσεις

Ἡ δομή τῶν προτάσεων πού ἀφοροῦν ἕνα κλασικό σύστημα, προϋποθέτει μιά σειρά ἐξιδανικεύσεις: Τό φυσικό σύστημα ταυτίζεται μέ τό *ὑλικό σημεῖο*, τό ὁποῖο, στερημένο ἀπό ὁποιαδήποτε ποιότητα, διατηρεῖ τήν ταυτότητά του κατά τήν κίνηση. Ἡ διαταραχή τῆς μέτρησης θεωρεῖται ἀμελητέα (τό κβάντο δράσης ἀγνοεῖται σ' αὐτό τό ἐπίπεδο τῆς θεωρίας). Ἡ μέτρηση συνεπῶς δέ μεταβάλλει τήν κατάσταση τοῦ συστήματος. Ἔτσι μποροῦμε νά ἀποκτήσουμε *πλήρη γνώση* τῆς κατάστασης, μέ τή μέτρηση *ὅλων* τῶν μεταβλητῶν τοῦ συστήματος.

Συνέπεια τῶν προηγούμενων ἐξιδανικεύσεων εἶναι, ὅτι ἡ κίνηση ἑνός κλασικοῦ συστήματος μπορεῖ νά περιγραφεῖ στό *χῶρο τῶν φάσεων*, ἕνα χῶρο εὐκλείδειο, πού περιλαμβάνει τίς θέσεις καί τίς ὁρμές τοῦ σωματίου**. Ἡ *κατάσταση* τοῦ συστήματος ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα ζεῦγος τιμῶν αὐτῶν τῶν μεταβλητῶν καί καθορίζει ἕνα σημεῖο τοῦ χώρου τῶν φάσεων Γ.

Τά κλασικά φυσικά μεγέθη ἀντιπροσωπεύονται ἀπό πραγματικές συναρτήσεις στό Γ, οἱ ὁποῖες ἀποτελοῦν μιά *ἀντιμεταθετική ἄλγεβρα.* Ἐπίσης οἱ προτάσεις πού ἀφοροῦν ἕνα κλασικό σύστημα ἀντιστοιχοῦν σέ ὑποσύνολα τοῦ χώρου τῶν φάσεων. Σέ κάθε κατάσταση ἀντιστοιχεῖ μιά τάξη προτάσεων πού εἶναι ταυτόχρονα ἀληθεῖς (δομή πλέγματος Boole).

Στίς πειραματικές προτάσεις ἀντιστοιχοῦν ὑποσύνολα τοῦ χώρου τῶν φάσεων, μετρήσιμα κατά Lebesgue. Δυό ὑποσύνολα θεωροῦνται ταυτόσημα, ἄν ἡ διαφορά τους εἶναι μηδενικοῦ μέτρου (κατά Lebesgue) (Birkhoff - Neumann).

Οἱ κλασικές στατιστικές καταστάσεις μέ τή σειρά τους, ἀντιπροσω-

** Ὁ χῶρος τῶν φάσεων Γ εἶναι ἕνας χῶρος 2S διαστάσεων, πού στούς ἄξονές του ἀντιστοιχοῦμε τίς γενικευμένες θέσεις καί ὁρμές τοῦ συστήματος. Ἡ κατάσταση τοῦ συστήματος ἀντιστοιχεῖ συνεπῶς σ' ἕνα ὁρισμένο σημεῖο αὐτοῦ τοῦ χώρου, πού διαγράφει κατά τήν κίνηση μιά τροχιά στό χῶρο τῶν φάσεων. Κατά τή μετατόπιση σύμφωνα μέ τούς νόμους τῆς κίνησης, τό στοιχεῖο ὄγκου $d\Gamma = dq_1 \ldots dq_s$. $dp_1 \ldots dp_s$ παραμένει ἀμετάβλητο (θεώρημα τοῦ *Liouville*).

πεύονται ἀπο *μέτρα πιθανοτήτων* στό χῶρο τῶν φάσεων. Μιά κλασική κατάσταση, ἀντιπροσωπεύεται ἀπό ἕνα μέτρο πιθανότητας χωρίς διασπορά. Μιά κατάσταση μέ στατιστικές διασπορές, μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν μιά *μή πλήρης* περιγραφή τοῦ S. Μποροῦμε συνεπῶς (κατ' ἀρχήν) νά εἰσαγάγουμε συμπληρωματικές παραμέτρους (κλασικές λανθάνουσες παραμέτρους) καί νά ὁρίσουμε μιά κατάσταση χωρίς διασπορά (ἕνα σημεῖο τοῦ Γ). Ἔτσι ὑποθέτουμε ὅτι μποροῦμε νά ὁρίσουμε *πλήρως* τήν κατάσταση τοῦ S, καί νά ἐπιβεβαιώσουμε τήν *κλασική αἰτιοκρατία.*

Ἀπό τυπική ἄποψη, μιά θεωρία εἶναι αἰτιοκρατική, ἄν καί μόνον ἄν ἡ λογική της εἶναι μιά σ-ἄλγεβρα Boole. Ἀντίστοιχα, μιά θεωρία πιθανοκρατική πού ἡ λογική της εἶναι μπούλεια, μπορεῖ νά ἀναχθεῖ σέ αἰτιοκρατική. (Ἐδῶ βρίσκεται ἡ οὐσιαστική διαφορά ἀνάμεσα στά κλασικά καί τά κβαντικά συστήματα).

Ἀλλά ἕνα σύστημα μέ πλέγμα Boole δέν εἶναι ὑποχρεωτικά αἰτιοκρατικό. Μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γι' αὐτό, εἶναι ἡ *ἀτομικότητα.* Ἡ ἀτομικότητα τοῦ πλέγματος συνεπάγεται ὅτι ἡ θεωρία τοῦ συστήματος εἶναι αἰτιοκρατική (Kronfli)[2].

Τά προηγούμενα εἶναι μερικά οὐσιαστικά σημεῖα τῆς κλασικῆς ἐξιδανίκευσης. Θά κάνουμε τώρα μερικές κριτικές παρατηρήσεις σχετικά μ' αὐτές τίς ἐξιδανικεύσεις.

Β$_3$. Κριτική τῶν κλασικῶν ἐξιδανικεύσεων

Κάθ πραγματικό συμβάν, εἶναι μοναδικό. Ὁποιοδήποτε σύνολο γεγονότων παρουσιάζει διαφορές, καί ὁποιαδήποτε σειρά μετρήσεων παρουσιάζει μιά ὁρισμένη στατιστική διασπορά. Ἡ ταυτότητα τῶν γεγονότων εἶναι ἀφαίρεση.

Τόσο τά γεγονότα στή φύση, ὅσο καί τά ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων παρουσιάζουν στατιστικές διασπορές, πού ὀφείλονται στίς ἀλληλεπιδράσεις τοῦ συστήματος μέ τό περιβάλλον ἤ μέ τό ὄργανο τῆς μέτρησης. Οἱ φυσικές θεωρίες πραγματεύονται στήν πραγματικότητα στατιστικά σύνολα, δηλαδή τάξεις ὅμοιων συμβάντων. Ἐν τούτοις, οἱ κλασικές ἐξιδανικεύσεις ἐπιτρέπουν τή *δυναμική* περιγραφή σ' ἕνα ὁρισμένο ἐπίπεδο θεωρητικῆς ἀφαίρεσης.

Ὁ χῶρος τῶν φάσεων προϋποθέτει ὄχι μόνο τήν ταυτόχρονη ὕπαρξη θέσης καί ὁρμῆς, ἀλλά καί τή δυνατότητα γιά ταυτόχρονη μέτρηση

2. N. S. Kronfli, Int. J. of Th. Phys., 3, 395 (1970), καί 4, 141 (1971).

αὐτῶν τῶν μεγεθῶν. Ἀλλά καθώς ἔδειξε ὁ Born (1955), ἀκόμα καί στά κλασικά συστήματα δέν εἶναι δυνατόν νά μετρήσουμε μέ ἀκρίβεια τή θέση ἑνός σωματίου στό χῶρο τῶν φάσεων. Καί κατά τόν Bopp, τό δυνάμει *σύνολο τῶν σωματίων πού ἀντιπροσωπεύει* τίς δυνατές καταστάσεις ἑνός σωματίου, εἶναι ἕνα στατιστικό σύνολο.

Ἡ πραγματική κίνηση τῶν σωματίων χαρακτηρίζεται συνεπῶς ἀπό στατιστικές διασπορές. Ἡ στατιστική μορφή νόμου παρουσιάζεται σάν ἡ πιό γενική μορφή φυσικοῦ νόμου. Ὡστόσο μέ βάση τίς κλασικές ἐξιδανικευτικές παραδοχές, θεμελιώνεται θεωρητικά ἡ περιγραφή τῆς κίνησης στό χῶρο τῶν φάσεων καί ἡ κλασική, δυναμική μορφή αἰτιοκρατίας. Ὁ χῶρος τῶν φάσεων εἶναι πράγματι τυπική ἔκφραση τῆς ἰσχύος τῆς αἰτιότητας. Οἱ κλασικές λανθάνουσες παράμετροι ἐπιτρέπουν, κατ' ἀρχή τουλάχιστον, τήν *ἀναγωγή* τῶν κλασικῶν πιθανοτήτων σέ δυναμικές κατανομές, καί τή βεβαίωση τῆς αἰτιοκρατίας ἀκόμα καί γιά φαινόμενα στατιστικοῦ χαρακτήρα.

Οἱ προηγούμενες βεβαιώσεις δέν ἰσχύουν - καθώς θά δοῦμε - γιά τήν κβαντική μηχανική. Ὡστόσο δέ θά πάρουμε σά δεδομένη ἀλήθεια τήν ἐπίσημη ἑρμηνεία καί θά ἐπιχειρήσουμε μιά περισσότερο συγκεκριμένη ἀνάλυση τοῦ προβλήματος. Καί θά πρέπει νά σημειώσουμε ἀπό τώρα, μιά βασική διαφορά ἀνάμεσα στίς δύο κατηγορίες συστημάτων, πού περνᾶ ἀπαρατήρητη στίς τρέχουσες ἐπιστημολογικές ἀναλύσεις.

Τό βασικό χαρακτηριστικό τῶν κλασικῶν συστημάτων εἶναι ὅτι διατηροῦν τήν *ταυτότητά τους*, τόσο κατά τήν κίνηση, ὅσο κατά τή μέτρηση. Ἡ κίνηση ἐδῶ θεωρεῖται σάν ἁπλή μετατόπιση, καί ἡ ἀλληλεπίδραση μέ τό ὄργανο, τό πολύ νά μεταβάλει ὁρισμένα ποσοτικά χαρακτηριστικά τῆς κατάστασης. Ἡ ἰσχύς τῆς τυπικῆς λογικῆς, πού εἶναι ἡ *λογική τῆς ταυτότητας*, σ' αὐτή τήν περιοχή, βρίσκεται σέ πλήρη ἁρμονία μέ τό προηγούμενο χαρακτηριστικό. Τά κβαντικά συστήματα, ἀντίθετα, μποροῦν νά ὑποστοῦν *ποιοτικές* μεταβολές κατά τήν ἀλληλεπίδρασή τους μέ τό ὄργανο, καί οἱ καθαυτό κβαντικές στατιστικές κατανομές ἀφοροῦν τέτοιες ποιοτικές μεταβολές (τή λεγόμενη ἀναγωγή τῆς κυματοδέσμης). Ἡ κβαντική περιγραφή δέν μπορεῖ λοιπόν νά ἀναχθεῖ στήν κλασική ἐξιδανίκευση. Αὐτό ὡστόσο δέ σημαίνει ὅτι ἡ ἀντίθεση ἀνάμεσα στίς δυό περιγραφές εἶναι τυπική καί ἀφηρημένη: χωρίς ἰδιομορφίες καί χωρίς κοινά φαινόμενα.

Γ΄ ΤΑ ΚΒΑΝΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Τό ὑπόλοιπο μέρος αὐτῆς τῆς μελέτης θά ἀφιερωθεῖ στίς ἰδιομορφίες τῶν κβαντικῶν συστημάτων.