ΕΒΔΟΜΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΤΗ ΦΥΣΗ*

Οὔτε γάρ τοῦ σμικροῦ ἔστι τό γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον ἀεί (τό γάρ ἐόν οὐκ ἔστι τό μή οὐκ εἶναι), ἀλλά καί τοῦ μεγάλου ἀεί ἐστί μεῖζον
'Αναξαγόρας

Θέσαμε ὡς τώρα πολλές φορές τό πρόβλημα τῆς συνέχειας. Τό πρόβλημα αὐτό θά ἐξετασθεῖ τώρα συνολικά, κυρίως ἀπό τήν ἄποψη τῆς σύγχρονης μικροφυσικῆς. 'Ωστόσο ἡ ἀνάλυση δέ μπορεῖ νά περιοριστεῖ σ' αὐτό τό χῶρο. 'Υποχρεωτικά θά ἐκταθεῖ καί σέ ἄλλες περιοχές τῆς φυσικῆς, καθώς καί στή μαθηματική ὄψη τοῦ ζητήματος.

Εἶναι γνωστό ὅτι στήν ἱστορία τῆς ἐπιστήμης συγκρούσθηκαν συχνά δύο ἀντίθετες ἀπόψεις: ἡ ἄποψη τῆς συνέχειας καί ἡ ἄποψη τῆς ἀσυνέχειας. Σύμφωνα μέ τή θέση αὐτοῦ τοῦ ἄρθρου, ἡ τυπική ἀντίθεση δέν ἐξαντλεῖ τήν πολυμορφία τῆς πραγματικότητας, καί μία ἀφηρημένη σύνθεση τῶν δύο ἐννοιῶν εἶναι χωρίς νόημα. Ἄν ὑπάρχει διαλεκτική ἀντίθεση - καί σύνθεση - αὐτή πρέπει νά εἶναι συγκεκριμένη. Οἱ ἔννοιες τῆς *δομῆς* καί τῆς *ποιότητας* γίνονται ἔτσι ἀπαραίτητες γιά τήν ἀντιμετώπιση τοῦ προβλήματος.

7.1. Εἰσαγωγικές παρατηρήσεις.

Τό πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς ἀφορᾶ τή δομή τῆς ὕλης, καθώς καί τά προβλήματα τοῦ χώρου, τοῦ χρόνου καί τῶν φυσικῶν διαδικασιῶν. Οἱ ὄψεις αὐτές εἶναι ἀλληλένδετες.

'Από τήν ἐμπειρία ἀποκτοῦμε μία ἐποπτική - διαισθητική ἀντίληψη γιά τή συνέχεια τοῦ χώρου: γιά τή δυνατότητα νά διαιροῦμε ἕνα τμῆμα

* Τό κεφάλαιο αὐτό συντάχθηκε μέ βάση τήν εἰσήγηση τοῦ συγγραφέα στό διεθνές Colloque, Journées Phythagoriciennes: le Continu et les Hommes, πού ὀργάνωσε ἡ Ἕδρα Γενικῶν Μαθηματικῶν στήν 'Αθήνα, τό Σεπτέμβριο τοῦ 1978.

εὐθείας ἐπ' ἄπειρο, ἤ γιά τή δυνατότητα νά διατρέξουμε τήν ἀπόσταση ἀνάμεσα σέ δυό σημεῖα Α καί Β, *περνώντας μέ τρόπο συνεχῆ ἀπ' ὅλα τά* ἐνδιάμεσα. 'Αντίστοιχα βιώνουμε στήν καθημερινή ζωή τή συνέχεια τοῦ χρόνου, πού βεβαιώνεται ἄλλωστε ἀπό τήν παρατήρηση τῶν φυσικῶν φαινομένων. 'Αλλά ἡ ἐποπτεία καί ἡ διαίσθηση δέν εἶναι ἐπαρκεῖς ὅροι γιά τή λύση τοῦ προβλήματος.

'Η ἐποπτεία ἐξάλλου εἶναι ἐξίσου ἀνίσχυρη μπροστά στό ἐρώτημα γιά τή συνέχεια τῆς ὕλης. Γιατί ἡ διαιρετότητα τῆς ὕλης στήν κλίμακα τῶν ἀντιληπτικῶν δυνατοτήτων μας δέν προεξοφλεῖ τίποτα. Ἔτσι λοιπόν ἀπό τούς πρώτους φιλόσοφους τέθηκε τό ἐρώτημα ἄν ἡ ὕλη εἶναι ἄπειρα διαιρετή, ἤ ἄν ὑπάρχει κάποιο *ὅριο* διαιρετότητας. Τό *ἄτομο* ἦταν μιά ἀπό τίς ἀπαντήσεις πού ἔδωσε ἡ 'Ελληνική Φιλοσοφία σ' αὐτό τό ἐρώτημα. Καί εἶναι γνωστό ὅτι ἡ ἀτομική ἀντίληψη μεταμορφώθηκε σέ φυσική θεωρία μέ τό Νεύτωνα, ἀλλά προπαντός μέ τή χημεία καί μέ τή φυσική τοῦ περασμένου αἰώνα. 'Αλλά ἄν ἡ ὕλη τῶν ἀτομικῶν εἶναι ἀσυνεχής, τό Ὄν τοῦ Παρμενίδη καί τοῦ Ζήνωνα εἶναι ἕνα, συνεχές καί ἀδιαίρετο. Οἱ Πυθαγόρειοι μέ τήν ἀριθμολογία τους εἰσήγαγαν τήν ἀσυνέχεια (τήν «κβάντωση») στή θεωρία τοῦ Εἶναι. 'Ωστόσο εἶναι δύσκολο νά μιλήσουμε γιά συνέχεια ἤ ἀσυνέχεια, ἀναφορικά μέ ὄντα χωρίς ὑλική ὑπόσταση. Οἱ Πυθαγόρειοι ἐξάλλου δέ μίλησαν γιά ἀσυνέχεια τοῦ χώρου ἤ τοῦ χρόνου. Εἶναι τέλος γνωστό πώς ὁ 'Αριστοτέλης ἀπέρριπτε τήν ἔννοια τοῦ κενοῦ καί ὅτι θεωροῦσε τήν ὕλη συνεχῆ, ὅπως καί τό χῶρο, τό χρόνο καί τήν κίνηση. Καί εἶναι ἐπίσης γνωστό ὅτι ἡ ἀντίληψη αὐτή ἐκφράστηκε πιό συγκεκριμένα ἀπό τόν Καρτέσιο, καί ὅτι μέσα ἀπό σειρά ἐπιστημικές μεταλλαγές ἀπόκτησε τό statut *φυσικῆς θεωρίας* μέ τόν ἠλεκτρομαγνητισμό καί τίς νεώτερες πεδιακές θεωρίες. 'Ωστόσο ἡ συνέχεια φαίνεται νά ἀποτελεῖ στίς τελευταῖες, τήν ἄλλη ὄψη τῆς ἀσυνέχειας.

Μποροῦμε νά διακρίνουμε τό φυσικό, τό γεωμετρικό καί τό ἀριθμητικό συνεχές. Τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή τῶν ἀκεραίων θετικῶν ἀριθμῶν - ἐννοιολογική ἔκφραση τῆς ἄμεσης ἐποπτικῆς ἐμπειρίας - ἀποτελεῖ ἰδανική ἔκφραση ἀσυνέχειας. 'Ο Πυθαγόρας θά ἔπρεπε νά ἦταν ἱκανοποιημένος ἀπό τήν τελειότητα τῶν *ἀκέραιων*. 'Η ἀνακάλυψη τῶν *ἀσύμμετρων* ἀριθμῶν, ἀντίθετα, προκάλεσε μιά πρώτη μαθηματική καί κοσμοθεωρητική κρίση στή σχολή τῶν Πυθαγορείων πού ἤθελε νά οἰκοδομήσει τό σύμπαν μέ τούς φυσικούς ἀριθμούς, καί προανάγγειλε, μέ προβάδισμα δυόμιση χιλιάδων χρόνων, τήν ἀριθμητική *συνέχεια*.

Στό ἀριθμητικό συνεχές ἀντιστοιχεῖ τό γεωμετρικό: ἡ συνέχεια τῆς εὐθείας γραμμῆς. 'Αλλά ἡ ἀριθμοποίηση τοῦ γεωμετρικοῦ συνεχοῦς, καθώς καί ή γεωμετρικοποίηση τοῦ ἀριθμητικοῦ, ἀπαιτοῦν ἔννοιες καί μαθηματικά ἐργαλεῖα πού δέ διέθεταν οἱ ἀρχαῖοι. Ἔτσι, παρά τίς μεγαλοφυεῖς διαισθήσεις τοῦ Εὐδοξου, τοῦ Ἀριστοτέλη, τοῦ Ἀρχιμήδη καί ἄλλων μαθηματικῶν καί φιλόσοφων, ἡ ἀρχαία σκέψη δέ μπόρεσε νά ξεπεράσει τίς ἀντιφάσεις ἀνάμεσα στό συνεχές καί τό ἀσυνεχές, καθώς κι᾿ ἀνάμεσα στό ἄπειρα μικρό, τό πεπερασμένο καί τό ἄπειρο.

Τά παράδοξα τοῦ Ζήνωνα ἀποτελοῦν μιά δραματική ἀπεικόνιση αὐτῶν τῶν ἀντιφάσεων. Ἡ κίνηση προϋποθέτει τή συνέχεια τοῦ χώρου καί τοῦ χρόνου. Ὡστόσο γιά νά λυθοῦν τά παράδοξα, χρειάζεται νά ἀρθεῖ ἡ ἀντίφαση ἀνάμεσα στό ἀπειροστό καί τό πεπερασμένο, ὅπως καί ἀνάμεσα στή χρονική στιγμή καί τήν πεπερασμένη διάρκεια. Ἡ λύση τῆς ἀντίφασης τῆς κίνησης, προϋποθέτει τή λύση αὐτῶν τῶν ἀντιφάσεων. Οἱ τελευταῖες, μέ τή σειρά τους, προϋποθέτουν τίς ἔννοιες τοῦ ἀπειροστοῦ, τοῦ ὁρίου, τῆς συνέχειας, τῆς παραγώγου καί τοῦ ὁλοκληρώματος[1].

Οἱ Προσωκρατικοί ἀσχολήθηκαν συστηματικά μέ τήν ἔννοια τοῦ συνεχοῦς. Στόν Ἀριστοτέλη βρίσκουμε μιά δυναμική ἀντίληψη γιά τό χῶρο καί τή συνέχεια τοῦ χώρου, καθώς καί γιά τό χρόνο πού συνδέεται μέ τήν κίνηση, καί ὅπου ἡ στιγμή νοεῖται σάν ὅριο: Ἡ παροῦσα στιγμή, γράφει ὁ Ἀριστοτέλης, εἶναι τέλος καί ἀρχή τοῦ χρόνου, ἀλλά ὄχι τοῦ ἴδιου χρόνου· εἶναι τέλος τοῦ παρελθόντος καί ἀρχή τοῦ μέλλοντος. Τέλος, μέ τό ἔργο τοῦ Ἀρχιμήδη ἔγινε ἕνα ἀκόμα βῆμα πρός τή διαμόρφωση τῶν ἐννοιῶν τοῦ ὁρίου καί τοῦ ἀπειροστοῦ, καθώς καί πρός τή διατύπωση τῆς ἔννοιας (καί τῆς πράξης) τῆς ὁλοκλήρωσης. Ἀλλά ἦταν ἀκόμα νωρίς: ἀντιστρέφοντας τή φράση τοῦ Hegel, θά λέγαμε πώς ἔπρεπε νά σημάνει τό λυκόφως τῆς πρώτης φιλοσοφίας, προτοῦ χαράξει τό λυκαυγές τῆς ἐπιστημονικῆς ἀνάλυσης[2].

1. Ἡ ἀντίφαση ἀνάμεσα στήν κίνηση καί τήν ἀκινησία, λύνεται χάρη στήν ἔννοια τῆς παραγώγησης. Ἡ ταχύτητα (πεπερασμένο μέγεθος) ἐμφανίζεται σάν ὁ λόγος δύο ἀπειροστῶν, καί προϋποθέτει τήν ὕπαρξη τῆς συνέχειας καί τοῦ ὁρίου: $\vec{u} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ Τό βέλος λοιπόν κινεῖται, καί ἡ κίνηση δέν εἶναι σειρά ἀπό διαδοχικές καταστάσεις ἀκινησίας, ὅπως καί ὁ χρόνος δέν ἀποτελεῖται ἀπό πεπερασμένα ἀσυνεχῆ διαστήματα. Τό βέλος ἀντίστοιχα θά βρεῖ τό στόχο του καί ὁ Ἀχιλλέας θά φτάσει τή χελώνα, γιατί ἡ ἀντίφαση ἀπειροστοῦ καί πεπερασμένου αἴρεται μέ τήν ὁλοκλήρωση: $s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon \cdot dt$ Ἡ *κινηματική* ὁδηγεῖ στόν ἀπειροστικό λογισμό, καί ὁ τελευταῖος λύνει τίς ἀντιφάσεις ἀνάμεσα στό ἀπειροστικό, τό πεπερασμένο καί τό ἄπειρο.

2. Ἐκτός ἀπό τά *Φυσικά* καί τά *Μετά τά Φυσικά* τοῦ Ἀριστοτέλη, καθώς καί *Τά*

7.2. Τό μαθηματικό συνεχές καί οἱ μεταλλαγές του.

Τά προηγούμενα μᾶς ὁδηγοῦν νά ἐξετάσουμε τό πρόβλημα τοῦ μαθηματικοῦ συνεχοῦς. Μέσα ἀπ' αὐτή τήν προσπάθεια θά ἐπιχειρήσουμε νά δείξουμε τίς διαφορές καί τίς συσχετίσεις ἀνάμεσα στό ἀριθμητικό, τό γεωμετρικό, καί τό φυσικό συνεχές.

Οἱ ἀκέραιοι θετικοί ἀριθμοί, εἶναι τό πρῶτο ἀριθμητικό σύνολο πού γνώρισε ὁ ἄνθρωπος. Ἡ ὀνομασία, *ἀκέραιοι φυσικοί ἀριθμοί*, ἐκφράζει τήν ἄμεση σχέση του μέ τά διάκριτα, ἄρα ἀριθμήσιμα ἀντικείμενα τοῦ φυσικοῦ κόσμου. Μέ συμμετρικοποίηση αὐτοῦ τοῦ συνόλου, παράγεται τό σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (θετικῶν, ἀρνητικῶν καί τοῦ μηδενός). Καί τό εὐρύτερο αὐτό σύνολο εἶναι ἀσυνεχές. Ὁρίζοντας μιά πράξη - τή διαίρεση - στό σύνολο τῶν ζευγῶν (α, α') τῶν ἀκεραίων, παράγουμε ἕνα νέο σύνολο: τό σῶμα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Τό σύνολο αὐτό εἶναι ἀκόμα «πιό μεγάλο» ἀπό τά προηγούμενα, πού ἀποτελοῦν ὑποσύνολά του, καί πού «ἐμβαπτίζονται» κατά κάποιο τρόπο μέσα του. Τό σύνολο τῶν ρητῶν εἶναι πυκνό. Ὡστόσο δέν εἶναι συνεχές, μέ τήν ἔννοια τοῦ συνεκτικοῦ, ὅπως τήν ἀντιλαμβάνονται στά μαθηματικά. Τό νέο σύνολο ἔχει «ὀπές», πού θά ἔπρεπε νά πληρωθοῦν. Ἄν πάρουμε τό σύνολο τῶν τάξεων ἰσοδυναμίας τῶν σειρῶν Cauchy τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, κατασκευάζουμε ἕνα νέο σῶμα, τό σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν[3]. *Τό σῶμα αὐτό ἔχει πλέον τή δύναμη τοῦ συνεχοῦς.* Εἶναι ἕνα σύνολο ἄπειρο μή ἀριθμήσιμο (ἔχει τήν ἴδια δύναμη μέ τό ὑποσύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πού περιλαμβάνονται ἀνάμεσα στό μηδέν καί τό 1). Τά προηγούμενα σύνολα «ἐμβαπτίζονται» στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, πού δέν ἔχει πλέον «ὀπές»: εἶναι συνεχές.

Μποροῦμε νά ὁρίσουμε διάφορες *τοπολογίες* στό προηγούμενο σύνολο: τήν εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν R. (Ἡ ἀντιστοιχία ἀνάμεσα στήν ἀριθμητική καί τή γεωμετρία εἶναι φανερή). Δέ θά εἰσέλθουμε σ' αὐτά τά ζητήματα. Ὡστόσο θά ὁρίσουμε μερικές ἔννοιες, πού εἶναι ἔκφραση *συνέχειας* στό R, καί πού θά εἶναι χρήσιμες γι' αὐτό τό κείμενο.

Θά ἀρχίσουμε ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ ἀνοιχτοῦ διαστήματος: πρόκειται γιά τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν χ, πού περιλαμβάνονται ἀνάμεσα σέ δύο σημεῖα a καί b ($\alpha < \chi < b$). Ἡ προηγούμενη ἔννοια μᾶς

'*Ἀποσπάσματα τῶν Προσωκρατικῶν*, μπορεῖ νά δεῖ κανείς στή γλώσσα μας, γιά τό πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς: Θ. Βέϊκου, Ε. Ρούσσου καί Μ. Δραγῶνα - Μονάχου, στό: *Δευκαλίων*, ἀρ. 11 (1974).

3. Μιά ἀκολουθία ρητῶν (r_n) εἶναι μία ἀκολουθία Cauchy, ἄν ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη $\lim (r_p - r_q) = 0$ Δύο ἀκολουθίες Cauchy ρητῶν ἀριθμῶν $x=(r_n)$,

δίνει τή δυνατότητα νά όρίσουμε τήν ἔννοια τῆς περιοχῆς ἑνός σημείου χ τῆς R, πού εἶναι κάθε ὑποσύνολο τοῦ R πού περιέχει ἕνα ἀνοικτό διάστημα, τό ὁποῖο περιέχει τό χ. Ἡ ἔννοια τῆς περιοχῆς προϋποθέτει τή συνέχεια τῆς εὐθείας. Ἄλλη ἔκφραση συνέχειας, εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ σημείου συσσώρευσης: Ἄν A εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τῆς R, καλοῦμε σημεῖο συσσώρευσης ἕνα σημεῖο χ_0 τοῦ A, ἄν σέ κάθε περιοχή τοῦ χ_0, ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖο τοῦ A, διαφορετικό ἀπό τό χ_0.

Ὁ ὅρος: *σημεῖο συσσώρευσης*, εἶναι εὔγλωτος. Μποροῦμε νά πάρουμε μιά περιοχή γύρω ἀπό τό χ_0, ὅσο μικρή θέλουμε. Ἡ περιοχή θά περιέχει τουλάχιστον ἕνα πραγματικό ἀριθμό. Μποροῦμε νά πάρουμε μιά ἀκόμα πιό μικρή περιοχή, καί ἀκόμα πιό μικρή, μέχρι τό ἄπειρο: δέ θά φτάσουμε ποτέ σ' ἕνα κενό σύνολο. Κατ' ἀνάλογο τρόπο θά ποῦμε ὅτι μιά ἀκολουθία (ai) σημείων τῆς R *συγκλίνει* σ' ἕνα σημεῖο a, ἤ ἀκόμα ὅτι ἔχει *ὅριο* τό a, ἄν γιά κάθε περιοχή V τοῦ a, ὑπάρχει ἕνας ἀκέραιος i_0, τέτοιος ὥστε γιά κάθε $i \geqslant i_0$, ἔχουμε $a_i \in V$. Κι' ἐδῶ μποροῦμε νά πάρουμε ὅσο μικρή θέλουμε τήν περιοχή V: Ποτέ δέ θἆναι κενή. Μιά ἀπειρία ὅρων συσσωρεύεται σ' αὐτή τήν περιοχή, ἔστω κι ἄν τή θεωρήσουμε ὅσο μικρή θέλουμε.

Οἱ προηγούμενες ἔννοιες προϋποθέτουν τήν ἔννοια τοῦ ἀριθμητικοῦ συνεχοῦς. Τό συνεχές αὐτό μᾶς δίνει τή δυνατότητα νά ἀριθμοποιήσουμε τήν εὐθεία, ἀντιστοιχώντας στά σημεῖα της πραγματικούς ἀριθμούς. Ἀντίστροφα, ἡ ὕπαρξη τῆς εὐθείας αἰσθητοποιεῖ ἤ γεωμετρικοποιεῖ τό ἀριθμητικό συνεχές. Καί ἡ εὐθεία, ὁρισμένη μ' αὐτό τόν ἀμφιμονοσήμαντο τρόπο, ἀποτελεῖ τή βάση γιά τόν ὁρισμό τῶν συνεχῶν πραγματικῶν συναρτήσεων, καί γιά τήν περιγραφή τῶν φυσικῶν φαινομένων σά συνεχῶν διαδικασιῶν στό χῶρο καί τό χρόνο.

Εἶναι γνωστό ὅτι μιά ἀριθμητική (πραγματική) συνάρτηση f(x), εἶναι μιά ἀπεικόνιση ἑνός συνόλου E στήν εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Μιά συνάρτηση ὁρισμένη σ' ἕνα διάστημα τῆς εὐθείας εἶναι συνεχής στό σημεῖο χ_0, ἄν ἡ f(x) τείνει στό $f(\chi_0)$, ὅταν τό χ τείνει στό χ_0. Ὁ ὁρισμός αὐτός εἶναι ἔκφραση διπλῆς συνέχειας: καί τῆς συνέχειας τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ, καί τῆς συνέχειας τοῦ πεδίου τιμῶν. Ἀλλά μιά συνεχής συνάρτηση μπορεῖ νά ἐκφράζει ἕνα γεωμετρικό μέγεθος, ἤ μιά φυσική διαδικασία. Τό μέγεθος εἶναι τότε συνεχές, καί ἡ φυσική διαδικασία (π.χ. ἡ κίνηση) πραγματοποιεῖται μέ τρόπο συνεχῆ, χωρίς

x= (rn') εἶναι ἰσοδύναμες, ἄν ἡ ἀκολουθία $(r_n - r_n')$ εἶναι μία ἀκολουθία Cauchy πού τείνει στό 0. Τό σύνολο τῶν τάξεων ἰσοδυναμίας τῶν σειρῶν Cauchy τῶν ρητῶν, εἶναι τό σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἀποδεικνύεται ὅτι τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πού περιλαμβάνεται ἀνάμεσα σέ δυό πραγματικούς ἀριθμούς δέν εἶναι κενό καί ὅτι τό σύνολο τῶν πραγματικῶν δέν εἶναι ἀριθμήσιμο.

ἅλματα καί χωρίς τομές. Ἡ κλασική φυσική, μηχανιστική καί πεδιακή, χρησιμοποιεῖ τέτοιες συναρτήσεις γιά νά ἐκφράσει τό συνεχῆ χαρακτήρα τῶν φαινομένων.

Τά προηγούμενα συγκεκριμενοποιοῦν τήν ἀντιστοιχία ἀνάμεσα στό ἀριθμητικό συνεχές, τό γεωμετρικό, καί τίς συνεχεῖς φυσικές διαδικασίες. Ὡστόσο δέ μᾶς δίνουν τή δυνατότητα νά κατανοήσουμε τή σχέση ἀπειροστοῦ, πεπερασμένου καί ἀπείρου. Ἡ ἀνάλυση αὐτῶν τῶν ἐννοιῶν προϋποθέτει τήν ἔννοια τοῦ *μέτρου*.

Ἡ ἔννοια τοῦ μέτρου ἀποτελεῖ τήν αὐστηρή μαθηματική διατύπωση καί ταυτόχρονα τή γενίκευση τῆς κοινῆς ἔννοιας τῆς ἀπόστασης καί τοῦ μήκους. Τό μέτρο κατά Lebesgue πάνω στήν R, π.χ., δέν εἶναι παρά ἡ αὐστηρή διατύπωση τῆς συνηθισμένης, ἐποπτικῆς ἔννοιας τοῦ μήκους. Ὡστόσο ὑπερβαίνει τίς ἁπλές ἐποπτικές ἔννοιες, καί ἀποτελεῖ ἰσχυρό μέσον γιά γενίκευση καί μαθηματική δημιουργία[4].

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα σημεῖο. Τό σημεῖο εἶναι μηδενικοῦ μέτρου. Ἄς πάρουμε σέ συνέχεια ἕνα ἀριθμήσιμο (πεπερασμένο ἤ ἄπειρο) σύνολο σημείων: πάλι τά σύνολα αὐτά εἶναι μηδενικοῦ μέτρου. Γενικότερα: ἡ ἕνωση ὁποιασδήποτε ἀριθμήσιμης οἰκογένειας συνόλων μηδενικοῦ μέτρου, ἔχει μέτρο μηδενικό. Ἡ ἀντίθεση ἀνάμεσα στό *ἀμελητέο* (ἤ μηδενικό), καί τό ἀπειροστό καί τό πεπερασμένο, δέν λύνεται. Ἄς πάρουμε τώρα τήν ἕνωση ἑνός συνόλου ἄπειρου μή ἀριθμήσιμου ἀπό ἀμελητέα (μηδενικοῦ μέτρου) σύνολα: ἡ ἕνωση αὐτή μπορεῖ νά εἶναι *πεπερασμένου* μέτρου. Μ' αὐτό τόν τρόπο λύνεται ἡ ἀντίφαση ἀμελητέου (μηδενικοῦ) καί πεπερασμένου.

Ἄς πάρουμε τώρα τήν ἕνωση ἑνός πεπερασμένου ἀριθμοῦ συνόλων πεπερασμένου μέτρου: ἡ ἕνωση θά εἶναι πεπερασμένου μέτρου. Γιά νά λύσουμε τήν ἀντίφαση πεπερασμένου - ἀπείρου, δηλαδή γιά νά περάσουμε ἀπό τό πρῶτο στό δεύτερο, πρέπει νά θεωρήσουμε τήν ἕνωση ἑνός ἄπειρου ἀριθμήσιμου πλήθους συνόλων πεπερασμένου μέτρου: ἡ

4. Γιά νά ὁρίσουμε τήν ἔννοια τοῦ μέτρου, πρέπει προηγούμενα νά ὁρίσουμε τήν ἔννοια τοῦ μετρήσιμου χώρου: Μιά σ-ἄλγεβρα Boole, μερῶν ἑνός χώρου E, εἶναι μιά τάξη α, μερῶν τοῦ E, τέτοια ὥστε:
   1) Eεα
   2) Aεα ἄν Acα (σταθερότητα στή συμπληρωματικότητα).
   3) Sup AieA καί inf AieA, γιά κάθε ἀριθμήσιμη οἰκογένεια Aieα.
   Ἕνας *χῶρος μετρήσιμος*, (E, α), εἶναι ἕνας χῶρος E ἐφοδιασμένος μέ μιά σ-ἄλγεβρα τῶν μερῶν του. Σ' ἕνα τέτοιο χῶρο, ἕνα *θετικό μέτρο* m εἶναι μιά ἀπεικόνιση τοῦ α στό $\overline{R}+ = [0,\infty]$, πού ἔχει τήν ἰδιότητα τῆς σ-ἀθροιστικότητας: m (Σ Ai)= Σ m (Ai) γιά κάθε ἀριθμήσιμη οἰκογένεια Ai(ieI) πού εἶναι ἀνά δύο διάκριτα. Τό σύνολο (E, α, m) καλεῖται *χῶρος μέ μέτρο* (espace mesuré).

ἕνωση αὐτή μπορεῖ νά εἶναι ἄπειρη. Ἀλλά τό ἄπειρο δέν πρέπει νά τό δοῦμε σά δοσμένο μέγεθος, «ὡς τόδε τι», ἀλλά σά γίγνεσθαι, σάν κάτι πού εἶναι «ἀεί ἕτερον καί ἕτερον» (Ἀριστοτέλης). Τό ἄπειρο εἶναι *όριακή* κατάσταση, κάτι πρός τό ὁποῖο τείνει ἕνα μαθηματικό μέγεθος, χωρίς ποτέ νά μποροῦμε νά ποῦμε: αὐτό τό μέγεθος *εἶναι* ἄπειρο.

Ὁ ἀπειροστικός λογισμός μᾶς δίνει μία ἄλλη ὄψη τῆς μαθηματικῆς συνέχειας, καί τῆς δυναμικῆς, γενετικῆς σχέσης ἀπειροστοῦ, πεπερασμένου καί ἀπείρου. Τό *ἀπειροστό* εἶναι μέγεθος πιό μικρό ἀπό μιά ποσότητα ὁσοδήποτε μικρή. Εἶναι καί αὐτό ἔννοια *όριακή*, καί προϋποθέτει τή συνέχεια. Ἀλλά αὐτό τό «ὁσοδήποτε μικρό», εἶναι, ὅπως γράφει ὁ Engels «ἀποτελεσματικό καί μπορεῖ νά κάνει τό πᾶν». Τό ἀποτέλεσμα μιᾶς ὁλοκλήρωσης μπορεῖ νά εἶναι ἕνα μέγεθος πεπερασμένο. Ἀλλά τό πεπερασμένο δέν προκύπτει ἀπό τήν *ἄθροιση* ἑνός πεπερασμένου ἤ ἀπείρου - ἀριθμήσιμου πλήθους ἀπειροστῶν. Γιά νά πραγματοποιηθεῖ τό πέρασμα, χρειάζεται ἡ *ὁλοκλήρωση*, δηλαδή ἡ συγχώνευση, ἡ ἐξαφάνιση τοῦ ἀπειροστοῦ, καί ἡ ἐπανεμφάνιση του σάν ὀργανικοῦ στοιχείου τοῦ πεπερασμένου. Τό ἴδιο μπορεῖ νά εἰπωθεῖ καί γιά τό πέρασμα στό ἄπειρο. Μόνο πού ἐδῶ τό ἀποτέλεσμα δέν εἶναι μετρήσιμο, καί τόσο ἡ μαθηματική, ὅσο καί ἡ φυσική του ἑρμηνεία γεννοῦν νέα προβλήματα.

Τά προηγούμενα στηρίζονται στήν ἔννοια τῆς συνέχειας τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, πού ἀπό μιά ἄλλη ἄποψη εἶναι ἡ εὐθεία τοῦ συνηθισμένου χώρου τοῦ Εὐκλείδη. Ἀλλά ὅπως ἡ ἔννοια τοῦ μέτρου δέν εἶναι μοναδική, ἔτσι καί ἡ ἔννοια τῆς *μετρικῆς* διαφοροποιήθηκε μέ τήν ἐξέλιξη τῶν μαθηματικῶν. Ἐνδιαφέρει λοιπόν νά δοῦμε τό πρόβλημα τῆς συνέχειας καί ἀπό τήν ἄποψη τῶν *μετρικῶν χώρων*.[5]

Ὁ χῶρος τοῦ Εὐκλείδη (μονοδιάστατος ἤ πολυδιάστατος) προϋποθέτει τή συνέχεια. Ἡ συνέχεια τῆς εὐθείας εἶναι ἡ γεωμετρική ἔκφραση τῆς συνέχειας τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν: σέ κάθε ἀριθμό ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖο τῆς εὐθείας. Ἡ μετρική τοῦ χώρου τοῦ

5. Ὁρίζουμε μία ἀπόσταση d, σέ ἕνα σύνολο E, ἄν σέ κάθε ζεῦγος $(x, y) \in E \times E$ ἀντιστοιχοῦμε ἕναν πραγματικό ἀριθμό, θετικό ἤ μηδέν, πού ἱκανοποιεῖ τίς ἀκόλουθες συνθῆκες:

1. $d(\chi,y)=0 \Rightarrow \chi=y$ (θετικότητα)
2. $d(\chi,y)=d(y,\chi)$ (συμμετρία)
3. $d(\chi,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ (τριγωνική ἀνισότητα)

Ἕνα σύνολο E, στό ὁποῖο ὁρίστηκε μιά ἀπόσταση, καλεῖται *μετρικός χῶρος*. Παράδειγμα, ὁ συνηθισμένος τρισδιάστατος εὐκλείδιος χῶρος μέ τή θετική μετρική του.

Εὐκλείδη εἶναι καθορισμένη - θετική. Τό μῆκος τῶν χωρικῶν διανυσμάτων εἶναι ἀπόλυτο, ἀνεξάρτητο ἀπό τό σύστημα ἀναφορᾶς καί τήν κίνησή του. Ἕνας τέτοιος χῶρος μπορεῖ νά εἶναι ἄπειρος. Εἶναι ἐπίσης ἕνας χῶρος ἐπίπεδος, *χωρίς δομή*. Ὁ ἄπειρος, ἀπόλυτος χῶρος τοῦ Νεύτωνα, εἶναι ἡ φυσική πραγμάτωση τοῦ εὐκλείδιου χώρου. Καί στό ἀδιαφοροποίητο χωρικό συνεχές ἀντιστοιχεῖ γιά τήν κλασική φυσική τό ἐξίσου ἀδιαφοροποίητο, ἀπόλυτο συνεχές τοῦ χρόνου. Ὁ χρόνος θεωρεῖται ἐδῶ ἀνεξάρτητος ἀπό τό χῶρο καί ἀπό τά γεγονότα.

Ὡστόσο ἡ ἀνεξαρτησία τοῦ χωρικοῦ ἀπό τό χρονικό συνεχές δέν εἶναι παρά ἀφαίρεση. Ἡ μελέτη λεπτῶν φαινομένων, ὅπως τά ἠλεκτρομαγνητικά, ὁδήγησε στήν ἀποκάλυψη τῆς ἑνότητας τοῦ χωρικοῦ καί τοῦ χρονικοῦ συνεχοῦς: στήν περιγραφή τῶν γεγονότων στό *χωρόχρονο* ὅπου τά δυό συνεχῆ ἑνώνονται ὀργανικά καί καθορίζονται ἀμοιβαῖα.[6] (Ἑνοποίηση δέ σημαίνει ταύτιση: ἡ διαφορά χώρου καί χρόνου ἐκφράζεται καί τυπικά στόν ὁρισμό τοῦ χωροχρονικοῦ διαστήματος καί μποροῦμε πάντα νά μιλᾶμε γιά δυό *ὑποχώρους* τοῦ τετραδιάστατου χωρόχρονου).

Ὁ χῶρος τοῦ Minkowski ἐκφράζει αὐτή τήν ἑνότητα. Μέ τό χῶρο αὐτό ἔχουμε μιά πρώτη γενίκευση τῆς ἔννοιας τῆς μετρικῆς. Ἡ νέα μετρική δέν εἶναι καθορισμένη - θετική· εἶναι *ψευδοευκλείδια*, πού σημαίνει ὅτι τά χωροχρονικά διαστήματα μπορεῖ νά εἶναι θετικά, μηδενικά ἤ καί ἀρνητικά. Ἀλλά καί ἡ νέα μετρική δέν εἶναι αὐθαίρετη, οὔτε χωρίς φυσικό ἀντίκρυσμα: τά χωροχρονικά διαστήματα ἐκφράζουν σχέσεις ἀνάμεσα στά γεγονότα. Ἡ κίνηση περιγράφεται καί ἐδῶ μέ τρόπο συνεχῆ: τά κινητά προχωροῦν πάνω σέ *κοσμικές γραμμές*, οἱ ὁποῖες ἀποτελοῦν τήν τετραδιάστατη γενίκευση τῶν καμπύλων τῆς εὐκλείδιας γεωμετρίας. Τό χαρακτηριστικό λοιπόν τῆς συνέχειας διατηρεῖται καί στό χῶρο τοῦ Minkowski, πού καί αὐτός, παρά τή δυναμική συσχέτιση τῶν χωρικῶν μέ τή χρονική συντεταγμένη, εἶναι χῶρος ἐπίπεδος, χωρίς δομή.

Ἡ παραπέρα γενίκευση τῆς ἔννοιας τῆς μετρικῆς προῆλθε ἀπό τή γεωμετρία τοῦ Riemann, καί βρῆκε τό φυσικό της ἀντίστοιχο στή ρελατιβιστική θεωρία τῆς βαρύτητας. Ἡ μετρική, τόσο τοῦ εὐκλείδιου, ὅσο καί τοῦ ψευδοευκλείδιου χώρου, εἶναι σταθερή. Ἡ ρημάνεια μετρική ἀντίθετα εἶναι μεταβλητή, καί εἶναι συνάρτηση τῆς κατανομῆς τῶν δυναμικῶν τοῦ πεδίου τῆς βαρύτητας. Ἔτσι μεταβάλλεται ἀπό σημεῖο σέ σημεῖο, ἀλλά καί γιά τό ἴδιο σημεῖο εἶναι συνάρτηση τοῦ

6. Ἔκφραση αὐτῆς τῆς ἑνότητας ἀποτελεῖ ἡ *ἀμεταβλητότητα* τοῦ χωροχρονικοῦ διαστήματος: $ds^2 = c^2dt^2 - \sum_i dx_i^2$, $i = 1, 2, 3$.

χρόνου. Ὁ χῶρος τοῦ Riemann δέν εἶναι ἐπίπεδος. Εἶναι χῶρος καμπύλος, μέ καμπυλότητα μεταβλητή, συνάρτηση τῆς κατανομῆς τῆς ὕλης στό χωρόχρονο. Ὁ χῶρος καμπυλώνεται ἔντονα ἐκεῖ ὅπου ὑπάρχει ὑψηλή συγκέντρωση ὕλης, καί εἶναι οὐσιαστικά ἐπίπεδος ἐκεῖ ὅπου ἡ ὕλη εἶναι ἐξαιρετικά ἀραιή. Ἡ δομή τοῦ χώρου γίνεται συνεπῶς περίπλοκη στίς περιοχές ὅπου ὑπάρχουν τεράστιοι ὑλικοί σχηματισμοί, ὅπως καί σέ μιά ἀντίστροφη κλίμακα, στό ἐσωτερικό τῶν στοιχειωδῶν σωματίων. Γιά πρώτη φορά ὁ χῶρος ἀποκτᾶ μορφή καί δομή, πού συνδέονται γενετικά μέ τήν ὕλη.

Ὡστόσο καί οἱ χῶροι τοῦ Ρῆμαν χαρακτηρίζονται ἀπό τή συνέχεια. Κι᾿ ἐδῶ οἱ ἰδιότητες τοῦ χωροχρονικοῦ συνεχοῦς μεταβάλλονται μέ τρόπο συνεχῆ. Καί ἐδῶ ἡ κίνηση πραγματοποιεῖται πάνω σέ γεωδεσικές γραμμές (οἱ γεωδεσικές εἶναι ἡ γενίκευση τῆς εὐκλείδιας εὐθείας). Τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τή ροή τοῦ χρόνου, πού συναρτᾶται μέ τήν κατανομή τῆς ὕλης καί μέ τήν κίνηση, ἀλλά πού δέν παρουσιάζει τυπική ἀσυνέχεια.

Θά ἔπρεπε νά διατυπωθοῦν οἱ κβαντικές θεωρίες, γιά νά τεθεῖ μέ τρόπο δραματικό τό πρόβλημα τῆς ἀσυνέχειας, τόσο στό φυσικό, ὅσο καί στό μαθηματικό ἐπίπεδο.[7]

7.3. Τό φυσικό συνεχές: μηχανιστικές καί πεδιακές θεωρίες.

Τά προηγούμενα δέν ἀποτελοῦν παρά μιά ἁπλή σκιαγραφία τοῦ προβλήματος τοῦ μαθηματικοῦ συνεχοῦς. Ἐπίσης, καθώς ἦταν ἔξω ἀπό τό θέμα, δέν ἀναφέρθηκαν καθόλου οἱ δυσκολίες τῆς ἀξιωματικῆς θεμελίωσης τῶν μαθηματικῶν (ἄρα καί τοῦ συνεχοῦς) τά παράδοξα καί οἱ ἀντιθέσεις ἀνάμεσα στίς διάφορες σχολές. Ὡστόσο, πέρα ἀπό τά

7. Ἡ βιβλιογραφία ἡ σχετική μ᾿ αὐτά τά προβλήματα, εἶναι ἀνεξάντλητη. Στή γλώσσα μας, ἐκτός ἀπό τά διδακτικά βιβλία ἀνάλυσης καί τοπολογίας, μπορεῖ νά συμβουλευθεῖ κανείς τά ἀκόλουθα βιβλία; A. Einstein, *Σχετικότης*, μετ. Γ. Βουδούρη, Ἀθήνα 1950. Τοῦ ἴδιου: *Πῶς βλέπω τόν κόσμο*, μετ. Μ. Ζωγράφου - Μεραναίου, Ἐκδόσεις Μαρῆ. A. Einstein - L. Infeld, *Ἡ ἐξέλιξη τῶν ἰδεῶν στή Φυσική*, μετ. Ε. Μπιτσάκη, Δωδώνη, 1978. Ε. Μπιτσάκη, *Διαλεκτική καί Νεώτερη Φυσική*. Ἠριδανός, 1974. Τοῦ ἴδιου: *Τό Εἶναι καί τό Γίγνεσθαι*, Δωδώνη, 1976. Τά πρωτότυπα κείμενα τῶν Einstein, Minkowski, Lorentz, Weyl, τά βρίσκει κανείς στή συλλογή: The Principle of Relativity, Dover. (Πρόκειται γιά κείμενα χωρίς πολλές μαθηματικές δυσκολίες). Δυό ἐξαιρετικά, ἀλλά δύσκολα βίβλία εἶναι: L. Janossy, Theory of Relativity based on Physical Reality, Akademiai Kiado, Budapest 1971 καί A. Papapetrou, Lectures on General Relativity, Reidel, 1974. Γιά τή μαθηματική ὄψη τοῦ προβλήματος βλ. ἀνάμεσα στ᾿ ἄλλα: Abregé d' Histoire des Mathématiques (sous la direction de J. Dieudonné) 2 τόμοι, Hermann, Paris.

ἀνοιχτά αὐτά προβλήματα, ἡ ἐξέλιξη τῶν μαθηματικῶν ὁδηγεῖ σέ μιά ὅλο καί πιό σύνθετη ἀντίληψη γιά τό φυσικό συνεχές.

Ἡ ἱστορία τῶν μαθηματικῶν δέν εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἱστορία τῶν φυσικῶν θεωριῶν. Ὑπάρχει ἀντίθετα ἕνας ἀμοιβαῖος καθορισμός, πού εἶναι ἄλλωστε κατανοητός. Ὁ χῶρος τοῦ Εὐκλείδη ὑπῆρχε, ἄν καί ὄχι σέ ὁλοκληρωμένη μαθηματική-ἔκφραση, πρίν ἀπό τήν κλασική μηχανική. Ἀλλά ὁ ἀπειροστικός λογισμός καί ἡ μηχανική, διαμορφώθηκαν μέσα ἀπό μιά σχεδόν ἑνιαία διαδικασία. Ὁ Minkowski διατύπωσε τίς ἰδιότητες τοῦ «σύμπαντος» του, τρία χρόνια μετά τήν εἰδική θεωρία τῆς Σχετικότητας. Ἡ γεωμετρία τοῦ Riemann ἀντίθετα ὑπῆρχε πρίν ἀπό τή γενική θεωρία τοῦ Einstein, ἀλλά οἱ ἔρευνες σ᾽ αὐτό τό χῶρο πῆραν νέα ὤθηση μέ τή διατύπωση τῆς ρελατιβιστικῆς θεωρίας τῆς βαρύτητας. Ἡ συγκριτική ἱστορία τῶν μαθηματικῶν καί τῆς φυσικῆς, φανερώνει ὅτι τά μαθηματικά δέν εἶναι ἁπλῶς ἐργαλεῖο στά χέρια τοῦ φυσικοῦ, ἀλλά ἡ μορφή μέ τήν ὁποίαν ἐκφράζονται οἱ φυσικοί νόμοι. Ἡ ἀντιστοιχία ἀνάμεσα στίς μαθηματικές ἔννοιες καί στίς φυσικές πραγματικότητες δέν εἶναι λοιπόν ἐξωτερική.

Ἡ κλασική φυσική θεωρεῖται σάν ἡ φυσική τοῦ *συνεχοῦς*. Ὡστόσο μιά ἀπό τίς βασικές της ἔννοιες εἶναι τό *ἄτομο*, καί ἡ ἐξιδανικευμένη ἔννοια τοῦ ὑλικοῦ σημείου. Παρά ταῦτα ἡ συνέχεια χαρακτηρίζει τά βασικά δυναμικά μεγέθη της: τή δύναμη, τήν ταχύτητα, τήν ὁρμή, τήν ἐνέργεια. Τά μεγέθη αὐτά, καθώς καί οἱ παραγωγοί τους (ὅταν ὑπάρχουν), μεταβάλλονται μέ τρόπο συνεχῆ. Ὁ φορμαλισμός τῆς κλασικῆς φυσικῆς ἀποκλείει ἀσυνεχεῖς μεταβολές τῶν δυναμικῶν καί τῶν πεδίων δυνάμεων. Ἡ συνέχεια τῶν μεγεθῶν εἶναι συνέπεια τῆς ὑποθετικῆς συνέχειας τῶν ἀλληλεπιδράσεων, ἄρα καί τῶν ἐνεργειακῶν μεταβολῶν.

Ἡ *κατάσταση* ἑνός κλασικοῦ συστήματος μεταβάλλεται λοιπόν μέ τρόπο συνεχῆ. Ἄν γνωρίζουμε τίς ἀρχικές συνθῆκες καί τίς ἐξισώσεις τῆς κίνησης, μποροῦμε νά προβλέψουμε τήν ἐξέλιξη τοῦ συστήματος στό χῶρο καί τό χρόνο. Ὁ διαφορετικός καί ὁ ὁλοκληρωτικός λογισμός, εἶναι ἡ *ἀναλυτική ἔκφραση* τῆς συνέχειας στήν κλασική φυσική.

Ἡ κίνηση περιγράφεται στό χῶρο τοῦ Εὐκλείδη. Ἡ τοπολογική δομή αὐτοῦ τοῦ χώρου μᾶς ἐπιτρέπει νά θεωρήσουμε τό διάνυσμα θέσης r(t), σά συνεχῆ συνάρτηση τοῦ χρόνου. Ἡ πρώτη παράγωγος τοῦ διανύσματος εἶναι ἡ ταχύτητα καί μεταβάλλεται καί αὐτή μέ τρόπο συνεχῆ, ὅπως καί ἡ δεύτερη παράγωγος, ἡ ἐπιτάχυνση. Οἱ προηγούμενες ἔννοιες προϋποθέτουν τή συνέχεια τοῦ χώρου καί τοῦ χρόνου καί δίδουν τά πεπερασμένα μεγέθη: ταχύτητα καί ἐπιτάχυνση, σάν τό πηλίκο ἀπειροστῶν μεγεθῶν. Τό πέρασμα στό ὅριο χαρακτηρίζει τή στιγμιαία τιμή τῶν μεγεθῶν, πού εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ χρόνου[8].

Οἱ ἰδανικές συνθῆκες συνέχειας καί ἡ διατήρηση τῆς *ταυτότητας* τοῦ συστήματος, ἐπιτρέπουν θεωρητικά τήν ἐπιστροφή τοῦ συστήματος στήν ἀρχική του κατάσταση, μέσα ἀπό μιά ἀντίστροφη συνεχῆ διαδικασία. ᾿Αλλά βέβαια ἡ *ἀντιστρεψιμότητα* προϋποθέτει ἰδανικές συνθῆκες, καί δέν εἶναι παρά μιά θεωρητική δυνατότητα: στήν πραγματικότητα τά φαινόμενα ἐξελίσσονται μέ τρόπο μή ἀντιστρεπτό, καθορίζοντας μονοσήμαντα τό βέλος τοῦ χρόνου. Οἱ ποιοτικές μεταβολές, ἄλλωστε, πού πραγματοποιοῦνται κατά τή μή ἀντιστρεπτή ἐξέλιξη, θέτουν ἀπό μιά ἄλλη ἄποψη τό πρόβλημα μιᾶς ἐσωτερικῆς σχέσης ἀνάμεσα στή συνέχεια καί τήν ἀσυνέχεια.

῾Η ἀποδοχή τῆς συνέχειας τῶν ἀλληλεπιδράσεων, ὁδηγεῖ στήν ἀντίληψη ὅτι ἡ διαταραχή πού προκύπτει ἀπό τή μέτρηση μπορεῖ νά γίνει ἀμελητέα, καί ὅτι συνεπῶς εἶναι δυνατή ἡ *πλήρης* γνώση τῆς κατάστασης τοῦ φυσικοῦ συστήματος. ῎Ετσι μποροῦμε νά προβλέψουμε μέ *βεβαιότητα* τήν ἐξέλιξή του, καί νά ἐπαληθεύσυμε τήν ἰσχύ τῆς αἰτιότητας στή φύση. ῾Η θεωρητική δυνατότητα γιά ταυτόχρονη γνώση ὅλων τῶν μεταβλητῶν τοῦ συστήματος, καθορίζει καί τό χαρακτήρα τοῦ πλέγματος τῶν προτάσεων πού ἀφοροῦν τό κλασικό σύστημα, καί πού εἶναι ἕνα πλέγμα Boole[9].

Πλέγμα Boole σημαίνει ἰσχύ τῆς αἰτιότητας. Ταυτόχρονα σημαίνει ἰσχύ τῆς τυπικῆς λογικῆς σ᾿ αὐτή τήν περιοχή, ἄρα ἰσχύ τῆς ἀρχῆς τῆς ταυτότητας. ᾿Αλλά ταυτότητα σημαίνει ἀγνόηση τῆς ποιότητας καί τῆς ποιοτικῆς μεταβολῆς. ῾Ο εὐκλείδιος χῶρος μέ τό μεταφυσικό κενό, πού

8. Χωρίς τό πέρασμα στό ὅριο, τό ξεκίνημα τῆς κίνησης εἶναι ἀκατανόητο (ἄς θυμηθοῦμε πάλι τό σχετικό παράδοξο τοῦ Ζήνωνα). Πράγματι, ἄν θέσουμε: $\bar{\upsilon} = \frac{s}{t}$ καί πάρουμε $t=0$ (ὁπότε καί $S= 0$), ἔχουμε $\upsilon = \frac{0}{0}$ πού εἶναι ἀπροσδιόριστο. ῎Αν ὅμως θέσουμε $\upsilon = \frac{ds}{dt}$ (ἤ $\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ πού εἶναι τό ἴδιο) κατανοοῦμε τή δυνατότητα γιά τό ξεκίνημα τῆς κίνησης σ᾿ ἕνα ἀπειροστό διάστημα καί τήν ἀπόκτηση μιᾶς ὁρισμένης ταχύτητας ὕστερ᾿ ἀπό ὁρισμένο χρόνο, σάν ἀποτέλεσμα μιᾶς *ὁλοκλήρωσης:* $\upsilon = \int_{t_1}^{t_2} \gamma dt$

9. ᾿Ονομάζουμε *πλέγμα*, ἕνα διατεταγμένο σύνολο ὅπου κάθε ζεῦγος στοιχείων ἔχει ἕνα ἀνώτερο καί ἕνα κατώτερο φράγμα (πού συμβολίζονται μέ τά: V καί Λ). ῞Ενα πλέγμα εἶναι *ἐπιμεριστικό*, ἄν καθένας ἀπό τούς νόμους (V, Λ) εἶναι ἐπιμεριστικός σέ σχέση μέ τόν ἄλλο. ῞Ενα πλέγμα λέγεται *συμπληρωμένο* ἄν 1) ἔχει ἕνα ἐλάχιστο καί ἕνα μέγιστο καί 2) ἄν κάθε στοιχεῖο y ἔχει ἕνα συμπλήρωμα. ῞Ενα πλέγμα ἐπιμεριστικό καί συμπληρωμένο, εἶναι πλέγμα Boole. ῾Η ἄλγεβρα Boole εἶναι ἡ ἀλγεβρική δομή τοῦ πλέγματος Boole.

ἀποκλείει τή διαφορά καί πού ἐπιβάλλει τήν ταυτότητα, καθώς καί ὁ παγκόσμιος χρόνος, ἀνταποκρίνεται σ' αὐτή τήν «ἀποστειρωμένη» ἀντίληψη τῶν φυσικῶν φαινομένων πού δέν θεωροῦνται *διαδικασίες*, ἀλλά μεταβολές ὑποκείμενες σέ κάποιο στιγμιαῖο καθορισμό χάρη στό πλάσμα τῆς στιγμιαίας ἀλληλεπίδρασης.

'Ωστόσο στήν ἰδανική αὐτή συνέχεια ὑπάρχει μιά σκιά: τό *ἄτομο*, σύμβολο ἀσυνέχειας. Καί ἡ ἐξέλιξη τῆς φυσικῆς ὁδήγησε στή γνώση φαινομένων πού προϋποθέτουν τήν ὕπαρξη στατιστικῶν συνόλων καί πού περιγράφονται μέ νόμους πιθανοκρατικούς. 'Αλλά στατιστικό σύνολο καί πιθανότητα, σημαίνει *ἀσυνέχεια*. Παρά ταῦτα, ἡ φυσική τοῦ 19ου αἰώνα ἔμεινε πιστή στό κλασικό ἰδεῶδες. Μποροῦσε νά ὑποθέτει ὅτι θά ἦταν θεωρητικά δυνατή ἡ πλήρης γνώση τῆς κατάστασης ἑνός στατιστικοῦ συνόλου, ἄρα ὅτι θά μποροῦσε νά θεωρήσει τίς πιθανότητες σάν ἔκφραση μερικῆς ἄγνοιας. Μέ τήν εἰσαγωγή τῶν *κλασικῶν λανθανουσῶν παραμέτρων*, θά μποροῦσε νά ὑπάρξει μιά δυναμική περιγραφή τοῦ συστήματος καί νά ἀποκατασταθεῖ, τόσο ἡ ἀρχή τῆς συνέχειας, ὅσο καί ἡ ἀρχή τῆς αἰτιότητας[10]. 'Αλλά προτοῦ δοῦμε τίς δυσκολίες ἑνός τέτοιου ἐπιχειρήματος, χρειάζεται νά ἀναφερθοῦμε στή δεύτερη ἐκδήλωση τοῦ συνεχοῦς: στίς κλασικές πεδιακές θεωρίες.

Τό κβάντο δράσης δέν εἶχε κάμει τήν ἐμφάνισή του στό χῶρο τῆς φυσικῆς στό δεύτερο μισό τοῦ περασμένου αἰώνα. 'Η φαινομενικότητα τῆς συνέχειας μποροῦσε λοιπόν νά ἐπικαλύπτει ἀκόμα τά μικροφυσικά φαινόμενα, γιά τά ὁποῖα ἡ σταθερά τοῦ Planck εἶναι καθοριστική. 'Ωστόσο κάτω ἀπό τήν ἐπίφαση τῆς συνέχειας, εἶχε ἤδη δημιουργηθεῖ μιά νέα κατάσταση.

Οἱ ἐξισώσεις τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ καί τῆς βαρύτητας (τοῦ Einstein) δέν περιγράφουν πλέον τήν κίνηση ὑλικῶν σημείων πού ἀλληλεπιδροῦν μέ ἄπειρη ταχύτητα. Ἔχουμε τώρα φαινόμενα ἐκπομπῆς καί ἀπορρόφησης, δηλαδή *γένεση καί καταστροφή* φυσικῶν συστημάτων, μέ συγκεκριμένες φυσικές ἰδιότητες. Πλάι στήν ποσότητα ἀρχίζει λοιπόν νά ἐμφανίζεται ἡ ἔννοια τῆς *ποιότητας* καί τῆς φυσικῆς *διαδικασίας*. Καί τά φαινόμενα αὐτά, ὅπως καί ἡ διάδοση τῶν φυσικῶν ἀλληλεπιδράσεων, δέν εἶναι στιγμιαία: εἶναι φυσικές διαδικασίες πού γίνονται στό χῶρο καί τό χρόνο. Οἱ αἰτιακές συσχετίσεις καί ὁ καθορισμός προϋποθέτουν τή μεσολάβηση τοῦ χρόνου: ἡ χρονική ὑστέρηση αἰτίας - ἀποτελέσματος, προκύπτει ἀπό τήν πεπερασμένη

10. Γιά τά προβλήματα αὐτά βλ: 1) J. M. Jauch, Foundations of Quantum Mechanics, Addison-Wesley, 1968. 2) N.S. Kronfli, Int. J. Th. Phys. *3*,3-5 (1970) καί *4*, 141 (1971).

ταχύτητα τῶν φυσικῶν ἀλληλεπιδράσεων. Ἔτσι τά φαινόμενα *γίνονται*, καί ἡ σχέση αἰτίας - ἀποτελέσματος παρουσιάζεται φυσική καί κατανοητή. Ὁ χρόνος μέ τή σειρά του παύει νά εἶναι παγκόσμιος. Συνδέεται μέ τά γεγονότα καί τήν κίνηση, εἶναι χρόνος τοπικός καί ἀποκτᾶ μονοσήμαντη κατεύθυνση: ἀπό τό παρελθόν πρός τό μέλλον. Στή φυσική εἰσέρχεται λοιπόν ἡ ἔννοια τοῦ *γίγνεσθαι*. Στό ἐπίπεδο τῶν κλασικῶν πεδιακῶν θεωριῶν τό γίγνεσθαι θεωρεῖται συνεχές. Ἀντίστοιχα ἡ μαθηματική ἔκφραση τῶν νέων σχέσεων (γεωμετρικές πολλαπλότητες, κυματικές ἐξισώσεις, τανυστές), προϋποθέτουν καί βεβαιώνουν τή συνέχεια.

Γιά τούς θετικιστές, ἡ συνέχεια τῆς φύσης εἶναι ἡ συνέχεια τῶν συμβάντων. Ἀλλά τά συμβάντα στίς φιλοσοφίες αὐτές εἶναι κενά ἀπό περιεχόμενο. Ἡ συνέχεια πού μελετᾶμε, ἀντίστροφα, σχετίζεται μέ ριζικές ἀνατροπές στή φυσική κοσμοεικόνα. Ἡ ἐκπομπή καί ἡ ἀπορρόφηση ἠλεκτρομαγνητικῆς ἤ βαρυτικῆς ἀκτινοβολίας προϋποθέτει σχέσεις γενετικές, καί συγκεκριμένες δομές καί ποιότητες τῶν φυσικῶν συστημάτων. Ἡ ἔννοια τοῦ πεδίου ἐπικαλύπτει ἀκόμα τόν ἀσυνεχῆ χαρακτήρα αὐτῶν τῶν φαινομένων, καί ἡ γλώσσα καί οἱ τεχνικές ἐφαρμογές τῆς *κυματικῆς ὀπτικῆς* ὑπῆρξαν ἰσχυρά ἐπιχειρήματα ὑπέρ τῆς συνέχειας. Ὡστόσο οἱ νέες θεωρίες, ἀνοίγοντας ἕνα παράθυρο πρός τό μικρόκοσμο, προετοίμασαν τή μεγάλη ἐπιστημονική ἀνατροπή πού θά εἰσήγαγε τήν ἀσυνέχεια.

Οἱ ρελατιβιστικές θεωρίες ἀποκάλυψαν ἀπό τήν ἄλλη πλευρά τό δυναμικό χαρακτήρα τοῦ μήκους καί τοῦ χρόνου, τή σχέση ἀνάμεσα στή μάζα καί τήν ἐνέργεια, τή διαμόρφωση τῆς τετραδιάστατης χωροχρονικῆς πολλαπλότητας ἀπό τήν κατανομή τῆς ὕλης, ὁδήγησαν δηλαδή σέ μιά εὔπλαστη καί αἰτιοκρατημένη ἀντίληψη γιά τό σύμπαν. Τό μέρος καί τό ὅλον συνδέονται ἐδῶ μέ τρόπο συνεχῆ. Ὡστόσο ἡ ἀσυνέχεια βρισκόταν ἤδη στό κατώφλι τῆς φυσικῆς.

7.4. Ἡ κβαντική φυσική: συνέχεια ἤ ἀσυνέχεια;

Ἡ συνέχεια τῆς κλασικῆς ἐπικαλύπτει τήν ἀσυνέχεια τῶν μικροσκοπικῶν συστατικῶν τῆς ὕλης. Ἡ κβαντική φυσική, ἀντίστροφα, θεωρήθηκε ἡ φυσική τοῦ ἀσυνεχοῦς. Θά δοῦμε ὅτι κι' ἐδῶ οἱ τυπικές ἀντιθέσεις εἶναι ἀνεπαρκεῖς, προκειμένου νά ἐκφράσουν τήν ἀντιφατικότητα τῶν φυσικῶν μεγεθῶν.

Ἡ κβαντική μηχανική δέν ἦταν βέβαια ἡ πρώτη φυσική θεωρία τοῦ ἀσυνεχοῦς. Ἡ κινητική θεωρία τῶν ἀερίων, ἡ στατιστική μηχανική, ἡ κλασική θερμοδυναμική, θεωροῦν στατιστικά σύνολα καί χρησιμοποιοῦν τό λογισμό τῶν πιθανοτήτων. Ἀλλά οἱ θεωρίες αὐτές δέχονται τό