ποψιν ὡς πρὸς τὰς δυσκολίας αὐτῶν τῶν προβλημάτων, διότι χρησιμοποιεῖ καὶ συγχέει π.χ. τοὺς ὅρους «Ideenzahlen» καί «Idealzahlen», χωρὶς νὰ διασαφηνίζῃ εἴς τι σημεῖον, τὶ εἶναι δυνατὸν νὰ νοηθῇ κατὰ τὴν γνώμην του ἀπὸ φιλοσοφικῆς πλευρᾶς ὑπὸ τοὺς ὅρους αὐτούς. Εἷς τοιοῦτος ἀδιαφοροποίητος λόγος περὶ εἰδητικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἄνευ σημασίας, καθ' ὃν χρόνον δὲν ἐξηγεῖ τις, πῶς πρέπει νὰ ἐννοηθοῦν αἱ φράσεις «αἱ ἰδέαι ὡς ἀριθμοὶ» καί «αἱ ἰδέαι τῶν ἀριθμῶν» καὶ ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ αὐτῶν.

4.6 Ἡ ἄποψις τοῦ H. Cherniss, ὅτι δὲν δύναται νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὸν Πλάτωνα ὅ,τι δὲν εὑρίσκεται εἰς τοὺς διαλόγους. Κριτικαὶ παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς

Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ ἀφήσωμεν ἐκτὸς τοῦ κύκλου τῆς ἐρεύνης μας τὸ εἰδικὸν αὐτὸ πρόβλημα τοῦ χαρακτηρισμοῦ τῶν εἰδητικῶν ἀριθμῶν τοῦ Πλάτωνος μνείαν ποιούμενοι ἑνὸς ἀκόμη σταθμοῦ τῆς ἐρεύνης, ὁ ὁποῖος ἀφορᾷ εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ὡς καὶ εἰς τὸ γενικώτερον πρόβλημα τῆς κριτικῆς τοῦ Ἀριστοτέλους εἰς τὸν Πλάτωνα. Πρόκειται διὰ τὰς δύο ἐργασίας ἑνὸς ἰσαξίου πρὸς τὸν Robin ἐρευνητοῦ, τοῦ H. Cherniss: *1. Aristotle's Criticism of Plato and the Academy*, Baltimore 1944/New York 1962 καὶ *2. The Riddle of the early Academy*, University of California Press 1945, αἱ ὁποῖαι ἐκκινοῦν ἀπὸ ἐντελῶς ἀντιθέτους πρὸς τὸν Robin ἀρχάς.

Ἡ ἄποψις τοῦ Cherniss εἶναι, ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὸν Πλάτωνα ὅ,τι δὲν εὑρίσκεται εἰς τοὺς διαλόγους. Κατὰ συνέπειαν ἡ ἀριστοτελικὴ μαρτυρία, ἡ ὁποία λέγει ὅτι αἱ ἰδέαι κατὰ τὸν Πλάτωνα εἶναι ἀριθμοί, δὲν δύναται νὰ ἀποδοθῇ ὡς θεωρία τοῦ Πλάτωνος, διότι αὐτὴ δὲν εὑρίσκεται εἰς τοὺς διαλόγους, εἶναι δὲ αὐτὴ κατὰ τὴν ἄποψιν τοῦ Cherniss τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἰδίας λανθασμένης[12] ἑρμηνείας τοῦ Ἀριστοτέλους. Αἱ δύο ἀνωτέρω ἐργασίαι τοῦ Cherniss δημιουργοῦν καλὰς προϋποθέσεις διὰ μίαν ἐρευνητικὴν συζήτησιν ἐπὶ τῶν προβλημάτων αὐτῶν, διότι περιέχουν σωρείαν ἀπὸ ἐπιτυχεῖς εἰδικὰς παρατηρήσεις. Ἡ προσπάθειά του ὅμως νὰ ἐξασθενίσῃ τὰς ἀριστοτελικὰς μαρτυρίας καὶ νὰ ἀποδώσῃ εἰς αὐτὰς λανθασμένας ἑρμηνείας[13], ὥστε νὰ καταδείξῃ τὴν κυρίαν

---

[12] Πβ. *Die ältere Akademie*, μετάφρ. ὑπὸ J. Derbolav, Heidelberg 1966, σ. 16-17, 20-21, 27,42, 73-74. Παραπέμπομεν ἐδῶ εἰς τὴν γερμανικὴν μετάφρασιν τοῦ ὑπ' ἀριθμ. 2 ἔργου τοῦ Cherniss.

[13] Ἤδη ὁ É. de Strycker, ὁ ὁποῖος συζητεῖ διεξοδικῶς τὸ βιβλίον τοῦ Cherniss *Aristotle's Criticism of Plato* ... καὶ παραδέχεται τὴν ἀξίαν καὶ τὴν σημασίαν του (σ. 195 εἰς τὴν μελέτην του *Aristote, critique de Platon*, εἰς: *L'Antiquité classique* 18, 1949, σ. 95-107, ἐσχάτως εἰς: *Aristoteles in der neueren Forschung* (WB, Wege der Forschung 61, Darmstadt

του θέσιν, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ πείσῃ, διότι ἡ διαπίστωσις, ὅτι τοιαῦται θεωρίαι δὲν ὑπάρχουν εἰς τοὺς διαλόγους, δὲν εἶναι ἐπιχείρημα, ὥστε νὰ ἀποκλείσωμεν ἀπὸ τὴν πλατωνικὴν φιλοσοφίαν ἕν «πλέον», τὸ ὁποῖον προφορικῶς νὰ ἐδιδάχθη ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος καὶ νὰ διεσώθη γραπτῶς ἀπὸ τοὺς μαθητάς του. Τό «πλέον» αὐτὸ τὸ ἔχομεν ἀπὸ κείμενα τῆς ἐμμέσου παραδόσεως περὶ Πλάτωνος[14]. Βεβαίως εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τίθεται ἓν πρόβλημα βασικῆς σημασίας, τὸ ὁποῖον περιέχει πλείστας δυσκολίας, πῶς δηλαδὴ πρέπει νὰ ἐκτιμηθῇ αὐτὸ τό «πλέον». Τὸ πρόβλημα ὅμως αὐτὸ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ λυθῇ, ἂν δὲν ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν, αὐτὸ τὸ ὁποῖον ὁ Cherniss ἐκάλεσε «τὸ αἴνιγμα τῆς ἀρχαίας Ἀκαδημίας»[15]. Ἐκτὸς αὐτοῦ δὲν ἔχει διασωθῇ τίποτε π.χ. ἀπὸ τὰς σημειώσεις, τὰς ὁποίας θὰ εἶχε ὁ Πλάτων ἔμπροσθέν του, ὅταν ἐδίδασκε, ἐνῶ ἔχουν διασωθῇ αἱ μαρτυρίαι τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ ἄλλων μαθητῶν τῆς Ἀκαδημίας περὶ ἀγράφων δογμάτων[16]. Ἡ ἄγραφος διαλεκτικὴ εἶναι σήμερον μία ὑπόθεσις καὶ δὲν σημαίνει τίποτε ἄλλο παρὰ τὴν προφορικὴν διδασκαλίαν τοῦ Πλάτωνος. Νομίζομεν δὲ ὅτι εἶναι τολμηρὸν βῆμα καὶ ὄχι ἀσφαλὲς ἡ ὑπὸ τοῦ Cherniss ἄρνησις τῆς ὑποθέσεως τῆς προφορικῆς διδασκαλίας τοῦ Πλάτωνος[17]. Θὰ ἦτο ὅμως κατὰ μέγα μέρος καὶ ματαιοπονία νὰ θέλωμεν νὰ ἑρμηνεύσωμεν τὸν Πλάτωνα ἀπὸ τὰς μαρτυρίας τῆς ἐμμέσου παραδόσεως περὶ Πλάτωνος καὶ κυρίως ἀπὸ τὸν Ἀριστοτέλη, ὁ ὁποῖος ἦτο ἐξ ἰδιοσυγκρασίας διαφορετικὸν πνεῦμα ἀπὸ τὸν Πλάτωνα. Ἐκτὸς αὐτοῦ πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ φαντασθῇ κανεὶς ἕνα Πλάτωνα μὲ δύο εἴδη διαλεκτικῆς; Ἡ Σχολὴ τῆς Τυβίγγης (Krämer, Gaiser) ἔφθασε καὶ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εἰς τολμηρὰς ὑπερβολάς, διότι μᾶς ἀνέπτυξε μίαν φιλολογικὴν ἑρμη-

---

1968, σ. 193-211), ἀσκεῖ ὀρθῶς κατόπιν ὀξεῖαν κριτικήν (σ. 196-198) καὶ χαρακτηρίζει τὴν προσπάθειαν καὶ τὴν θέσιν τοῦ Cherniss, νὰ ἀμφισβητήσῃ τὴν ἀριστοτελικὴν εἰκόνα περὶ Πλάτωνος, ὡς πεπλανημένην (σ. 209). Ὁμοίως καὶ ὁ J. N. Findlay εἰς τὸ ἔργον του *Plato, The Written and Unwritten Doctrines*, London 1974 μεταφράζει εἰς τὸ τέλος τὰ ἄγραφα δόγματα (σσ. 413-454) καὶ ἀναιρεῖ τὰς ἀπόψεις τοῦ Cherniss ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰ ἄγραφα δόγματα (σσ. 455-473). Ὁ Findlay δέχεται, ὅτι ἡ ἄγραφος διδασκαλία τοῦ Πλάτωνος ἦτο παροῦσα εἰς τὸ βάθος ὅλου τοῦ ὡρίμου γραπτοῦ ἔργου τοῦ φιλοσόφου.

[14] Τὰ κείμενα αὐτὰ συνελέχθησαν κατὰ μέγα μέρος ἀπὸ τὸν K. Gaiser εἰς μίαν εἰδικὴν συλλογὴν ὑπὸ τὸν τίτλον *Testimonia Platonica* εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου του *Plat. ungeschr. Lehre*, σ. 443-557.

[15] Πβ. *Die ältere Akademie*, σ. 17, 44: «Aristoteles habe Platos Lehre in Richtung auf die Theorien anderer Platoniker, besonders auf die des Xenokrates hin, verzerrt ... Aristoteles'ganze Behandlung dessen, was angeblich Platos mündliche Lehre gewesen ist, könnte von seiner Beschäftigung mit den Theorien dieser Platoniker bestimmt worden sein».

[16] Πβ. D. Ross, *Aristotelis Fragmenta* selecta σ. 112 (ἔκδ. 1955/1958, 1964, Oxford).

[17] Πβ. *Die ält. Akad.*, σ. 42.

νείαν τῶν ἀποσπασματικῶν μαρτυριῶν τῆς ἐμμέσου παραδόσεως περὶ Πλάτωνος, μὲ τὴν ἀπαίτησιν συνάμα νὰ γίνῃ ἡ φιλολογικὴ αὐτὴ ἑρμηνεία δεκτὴ καὶ ὡς φιλοσοφικὴ ἑρμηνεία.

Διὰ τὴν θεωρίαν τέλος ὅτι αἱ ἰδέαι κατὰ τὸν Πλάτωνα εἶναι ἀριθμοί, τὴν ὁποίαν ἐκλαμβάνει ὁ Cherniss ὡς ἀποτέλεσμα τῆς ἰδίας λανθασμένης ἑρμηνείας τοῦ Ἀριστοτέλους, δὲν ἀνοίγει μίαν κριτικὴν συζήτησιν μὲ τὰ χωρία *Φίληβος*, 16d-e, 17a-d[18], 18a-c, 18e-19a, διὰ τὰ ὁποῖα ἤδη ἀπὸ τὸν Stenzel ἐξεφράσθη ἡ ὑποψία, ὅτι συναντῶμεν εἰς αὐτὰ τὴν θεωρίαν περὶ τῶν ἰδεῶν ὡς ἀριθμῶν εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν ἰδεῶν[19], ἡ ὁποία δύναται νὰ ἔχῃ σχέσιν μὲ τὴν παραδεδομένην μαρτυρίαν ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους, ὅτι αἱ ἰδέαι εἶναι ἀριθμοί.

Δι' ὅλων τῶν ἀνωτέρω πιστεύομεν, ὅτι ἐσκιαγραφήσαμεν ἀρκούντως τὰ γενικώτερα πλαίσια τοῦ προβλήματός μας, ὅπως τὰ διεμόρφωσε ἡ πλέον ἀντιπροσωπευτικὴ ἔρευνα μὲ τὰς λύσεις, τὰς ὁποίας ἔδωκε, καὶ τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα δι' αὐτῶν τῶν λύσεων περαιτέρω μᾶς ἐκληροδότησε. Πιστεύομεν, ὅτι ἐντὸς τῶν γενικωτέρων αὐτῶν πλαισίων φωτίζεται ἤδη καλύτερον καὶ ἐννοεῖται ὡς πρὸς τὴν σημασίαν του τὸ συγκεκριμένον πρόβλημα τῆς ἐρεύνης μας, τὸ ὁποῖον εἰσηγάγομεν ἀνωτέρω ὡς τὸ ὑπ' ἀριθμ. 3 εἰδικὸν πρόβλημα: Ὁ τρόπος τοῦ εἶναι τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων κατὰ τὸν Πλάτωνα καὶ τὸν Ἀριστοτέλη.

4.7 Ἡ ἔρευνα τοῦ O. Becker καὶ κριτικαὶ παρατηρήσεις ἐπ' αὐτῆς

Γενικώτερον ἠρεύνησε τὸ πρόβλημα αὐτὸ ὁ O. Becker εἰς τὸ βιβλίον του *Mathematische Existenz*, Halle 1927[20], ὁ ὁποῖος ἐξέθεσε διεξοδικῶς σὺν τοῖς ἄλλοις καὶ τὰς συγχρόνους θεωρίας τῶν Μαθηματικῶν ὡς πρὸς τὸ πρόβλημα τῶν θεμελιωδῶν ἀρχῶν. Τὴν ὀντολογίαν τῶν Μαθηματικῶν κα-

---

[18] Διὰ τὴν σημασίαν τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὰ μουσικὰ διαστήματα, ὅπως ἐκτίθεται εἰς τὸ ἀνωτέρω χωρίον τοῦ «*Φιλήβου*», βλ. E. Moutsopoulos, *La musique dans l'oeuvre de Platon* (P.U.F.), Paris 1959, σ. 58-60.

[19] Πβ. *Zahl und Gestalt* .... σ. 11-16, 120. Πβ. ὡσαύτως O. Becker, *Versuch einer neuen Interpretation der platonischen Ideenzahlen* (= *Archiv für Gesch. der Philos.* 45,1 (1963) 119-124)· τοῦ αὐτοῦ: *Zum Problem der platonischen Idealzahlen* (= *Klassisch-Philol. Studien* 17 (1957) 1-22)· τοῦ αὐτοῦ: *Die diairetische Erzeugung der platonischen Idealzahlen* (= *Quellen u. Stud. zur Gesch. der Math. B* 1, 4 (1931) 464-501).

[20] Ὁ ὅρος «mathematische Existenz» δὲν εἶναι εἰς τὴν νεωτέραν καὶ νεωτάτην βιβλιογραφίαν ἐν χρήσει. Παρ' ἡμῖν ὁ Κ. Γεωργούλης (*Ἀριστοτέλους τὰ μετὰ τὰ φυσικά*, μετάφρασις, Θεσ/νίκη 1935/Ἀθῆναι 1973, σ. 284 κ. ἑξ. ὡς καὶ εἰς τὴν εἰσαγωγήν) ἐχρησιμοποίησε τὴν φράσιν «τρόπος ὕπαρξης μαθηματικῶν ἀντικειμένων» καὶ ὁ Φ. Βασιλείου (*Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν*, Ἀθῆναι 1971, σ. 21, 23, 50) τὴν φράσιν «τὸ πρόβλημα ὑπάρξεως τῶν μαθηματικῶν ὄντων» ἢ τὸν ὅρον «ἡ μαθηματικὴ ὕπαρξις».

τὰ τὸν Πλάτωνα ἀνέπτυξεν ὅμως μερικῶς (σ. 239-243) περιορισθεὶς μόνον εἰς τὰ ἀνάλογα χωρία τοῦ *Μένωνος* καὶ μὴ λαβὼν ὑπ' ὄψιν ἄλλα πλατωνικὰ κείμενα ὡς π.χ. τὸ κείμενον εἰς τὸ τέλος τοῦ ζ βιβλίου τῆς *Πολιτείας*. Τὴν ἀριστοτελικὴν θεωρίαν περὶ τῆς ὀντολογίας τῶν Μαθηματικῶν ἀνέπτυξεν ἐπίσης ὄχι πλήρως (σ. 243-246), χωρὶς νὰ ἐξηγήσῃ τοὺς λόγους, διὰ τοὺς ὁποίους ὁ Ἀριστοτέλης ἤχθη εἰς τὸν μετασχηματισμὸν τῆς πλατωνικῆς θεωρίας περὶ τοῦ τρόπου τοῦ εἶναι τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων (σ. 254-255).

Ὡς πρὸς τὸ πρόβλημα τῆς πλατωνικῆς καὶ ἀριστοτελικῆς ἀπόψεως περὶ ἀριθμοῦ ὁ O. Becker δέχεται, ὅτι ἡ μετάβασις ἀπὸ τῆς πλατωνικῆς ἀπόψεως εἰς τὴν ἀριστοτελικὴν ἄποψιν περὶ ἀριθμοῦ σημαίνει τὴν ἐξέλιξιν τῆς σημασίας τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ ὡς μορφῆς εἰς τὸν συνήθη ἀριθμὸν (σ. 199-201). Ἡ ἄποψις αὐτὴ περὶ τῆς ἀλλαγῆς τῆς σημασίας τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τῆς μορφῆς εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειράν, ἡ ὁποία προηγουμένως ἀπαντᾶται καὶ εἰς τὸν Stenzel[21], δὲν φαίνεται νὰ εἶναι ἐπιτυχής, διότι ὁ Πλάτων γνωρίζει ἐπίσης καλῶς ὡς καὶ ὁ Ἀριστοτέλης τὴν σημασίαν τοῦ ἀριθμοῦ ὡς ἀριθμοῦ τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς, δηλαδὴ ὡς συμβλητοῦ ἀριθμοῦ. Τοῦτο εἶναι κατὰ τὴν γνώμην μας ἓν βασικὸν ἐπιχείρημα ἐναντίον τῆς ἀπόψεως τοῦ O. Becker. Δὲν πρέπει νὰ παραπλανηθῇ κανεὶς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, ὅτι ὁ Πλάτων ἐγνώριζε μόνον τὸν ἀριθμὸν ὡς μορφήν. Ὁ διαχωρισμὸς τῶν Μαθηματικῶν εἰς θεωρητικὰ καὶ ἐφηρμοσμένα ἀπαντᾶται εἰς αὐτοὺς τοὺς διαλόγους τοῦ Πλάτωνος. Εἰς τὸν *Θεαίτ.* 198c ἔχομεν τὴν μαρτυρίαν, ὅτι ὁ Πλάτων ἐννοεῖ τὸν ἀριθμὸν ὡς ποσὸν ἐντὸς τῆς συνήθους ἀριθμητικῆς. Εἰς τὴν *Πολιτ.* 525d ἀναφέρονται ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι δηλώνουν *«ὁρατὰ ἢ ἁπτὰ σώματα»* (πρακτικὴ ἀριθμητική), ὀνομάζεται δὲ λογιστικὴ ἡ τέχνη, ἡ ὁποία ἀσχολεῖται μὲ αὐτοῦ τοῦ εἴδους τοὺς ἀριθμοὺς (525a,c) καὶ εἶναι ἀγωγὸς πρὸς τὴν *«θέαν τῆς τῶν ἀριθμῶν φύσεως»* (καθαρὰ Μαθηματικά). Εἰς τὸν *Φίληβ.* 56d,e ἔχομεν τὴν σημαντικὴν διάκρισιν μεταξὺ καθαρῶν θεωρητικῶν καὶ πρακτικῶν Μαθηματικῶν, τὴν ὁποίαν συναντῶμεν καὶ εἰς τὸν *Πολιτικ.* 258d,e. Καθαρὰ Μαθηματικά, ἄνευ δηλαδὴ συγκεκριμένου πρακτικοῦ σκοποῦ, ἔχομεν, ὅταν σκέπτεται κανεὶς τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἀριθμοὺς πέρα τῆς μετρήσεως τῶν πραγμάτων καὶ τὰ σχήματα ὡς σχήματα πέρα τῆς ὑλικῆς μορφῆς των. Ἐπίσης εἰς τὸ χωρίον *Γοργ.* 451b μαρτυρεῖται, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ ἀσχολεῖται μὲ τὸ ποσὸν τοῦ ἀρτίου καὶ τοῦ περιττοῦ, εἰς δὲ τοὺς *Νόμ.* 819c-820a τονίζεται ἡ ἀξία τῶν πρακτικῶν Μαθηματικῶν, ἡ ὁποία ἔγκειται εἰς τὰς μετρήσεις τῶν διαφόρων ἀντικειμένων. Ἑπομένως δὲν πρόκειται εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο περὶ μιᾶς ἀλλαγῆς τῆς σημασίας τοῦ ἀριθμοῦ, ὡς ὑποστηρίζει ὁ O. Becker, ἀλλὰ διὰ

[21] Πβ. *Zahl und Gestalt* .... σ. 35, 123, 132.

δύο διαφορετικὰ σημεῖα ἀπόψεων, τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους, τὰ ὁποῖα ἐκκινοῦντα ἐκ διαφόρων προϋποθέσεων καταλήγουν εἰς διάφορα συμπεράσματα. Τὴν ἄποψιν αὐτὴν θὰ ἀναπτύξωμεν διεξοδικώτερον κατὰ τὴν περαιτέρω ἔρευνάν μας, διότι αὐτὴ ἀκριβῶς θὰ μᾶς βοηθήσῃ νὰ ἐννοήσωμεν καὶ τὴν κυρίαν θέσιν τῆς ἐργασίας μας.

4.8 Αἱ ἐργασίαι τῶν Th. Heath, A. Wedberg, Ch. Mugler, van der Waerden A. Szabó καὶ κριτικαὶ παρατηρήσεις ἐπ' αὐτῶν

Εἰς τὸν τομέα τῆς ἀγγλικῆς ἐρεύνης ἀξιόλογον διὰ τὴν ἱστορίαν τῶν προβλημάτων τῶν ἀρχαίων ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν παραμένει ἀκόμη τὸ ἔργον τοῦ Th. Heath *A History of Greek Mathematics*, I, II, Oxford 1921/1960. Ὁ Th. Heath χαρακτηρίζει ὀρθῶς τὰς ἀναλύσεις τοῦ Πλάτωνος περὶ τῶν Μαθηματικῶν ὡς συμβολὰς εἰς μίαν φιλοσοφίαν τῶν Μαθηματικῶν (I, σ. 288 κ. ἑξ.), δὲν ἐπιμένει ὅμως ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸν Πλάτωνα καὶ τὸν Ἀριστοτέλη εἰς τὴν ἐξέτασιν τοῦ προβλήματος τοῦ τρόπου τοῦ εἶναι τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων, διότι τὸ ἐνδιαφέρον του περιορίζεται εἰς καθαρῶς εἰδικὰ μαθηματικὰ προβλήματα καὶ εἰς τὰς λύσεις αὐτῶν.

Εἰς ἕτερον χρήσιμον διὰ τὴν ἔρευναν βιβλίον του *Mathematics in Aristotle*, Oxford 1949, ἀναλύει καὶ ἐξετάζει ὁ Th. Heath ὅλα ἐκεῖνα τὰ χωρία τῶν ἔργων τοῦ Ἀριστοτέλους, τὰ ὁποῖα ὁμιλοῦν περὶ τῶν Μαθηματικῶν. Τὸ βιβλίον αὐτὸ παραμένει μέχρι καὶ σήμερον ἓν ἐκ τῶν ἀρίστων εἰς τὴν ἐπιστήμην καὶ διὰ τὸν πρωτότυπον τρόπον ἐκθέσεως τοῦ θέματος καὶ διὰ τὴν θαυμαστὴν ἀκρίβειαν τῶν ἀναπτύξεών του. Διὰ τοῦ ἔργου αὐτοῦ δεικνύεται, ὅτι ὁ Ἀριστοτέλης εἶναι βαθὺς κάτοχος τῶν Μαθηματικῶν.

Τὰς δύο ἀνωτέρω ἐργασίας τοῦ Th. Heath προϋποθέτει μία ἐπίσης χρήσιμος ἐργασία τοῦ A. Wedberg *Plato's Philosophy of Mathematics*, Stockholm 1955. Ἡ βασικὴ ἀξία τῆς ἐργασίας αὐτῆς ἔγκειται εἰς τὸ σημεῖον, ὅτι παρέχει ἀναλύσεις καὶ τῶν ἀναλόγων πλατωνικῶν κειμένων καὶ τῶν ἀριστοτελικῶν μαρτυριῶν περὶ τῆς φιλοσοφίας τῶν Μαθηματικῶν καὶ περὶ τοῦ τρόπου τοῦ εἶναι τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων κατὰ τὸν Πλάτωνα. Δὲν εὑρίσκομεν ὅμως εἰς τὴν ἐργασίαν αὐτὴν μίαν κριτικὴν συζήτησιν τοῦ συγγραφέως μὲ τὰς ἐργασίας τοῦ J. Stenzel, τοῦ E. Frank, τοῦ L. Robin, οἱ ὁποῖοι ἠρεύνησαν ἐπίσης τὸ αὐτὸ θέμα ἔστω καὶ ὑπὸ ἄλλην ἄποψιν.

Εἰς τὸν τομέα τῆς γαλλικῆς ἐρεύνης ἔχομεν τὸ ἔργον τοῦ Ch. Mugler *Platon et la recherche mathématique de son époque*, Strasbourg 1948. Ὁ Ch. Mugler ἀναπτύσσει μεταξὺ ἄλλων καὶ τὴν θέσιν, ὅτι ὁ Πλάτων διεδραμάτησε πρόσωπον εἰς τὴν ἐξέλιξιν τῶν ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν ὡς πρόδρομος τοῦ Εὐκλείδου, διότι συνεδέθη μὲ μαθηματικοὺς ὅπως ὁ Θεόδωρος, ὁ Θεαίτητος, ὁ Εὔδοξος, ἡ ἔρευνα δὲ τῶν Μαθηματικῶν εἶχεν ἀποκτήσει με-

γάλην σημασίαν εἰς τὴν ἀρχαίαν Ἀκαδημίαν, ὥστε νὰ καταστῇ ἡ κυρία ὁδὸς πρὸς τὴν φιλοσοφίαν[22].

Χρήσιμον παραμένει ἀκόμη τὸ βιβλίον τοῦ Ὁλλανδοῦ B.L. van der Waerden *Ontwakende Wetenschap*, 1950 (γερμανικὴ μετάφρασις ὑπὸ H. Habicht: *Erwachende Wissenschaft*, Basel 1956) διὰ τὴν ἱστορίαν τῶν προβλημάτων τῶν ἀρχαίων ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν. Ὡς ἔλλειψις δύναται νὰ θεωρηθῇ εἰς τὸ βιβλίον αὐτό, τὸ ὁποῖον ἀναμφιβόλως ἀνεγνώσθη καὶ ὀρθῶς ἐξετιμήθη πολύ, ὅτι ὁ van der Waerden δὲν ἐπραγματεύθη τὰ Μαθηματικὰ κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη, θέμα διὰ τὸ ὁποῖον ὁ Th. Heath ἔγραψε πρὸ αὐτοῦ εἰδικὴν μελέτην, τὴν ὁποίαν ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω.

Ἄνευ τῆς ἐργασίας αὐτῆς τοῦ van der Waerden δὲν δύναται νὰ νοηθῇ περαιτέρω ἡ ἐργασία τοῦ A. Szabó *Anfänge der griechischen Mathematik*, Budapest/Wien 1969, ὡς καὶ ὁ ἴδιος ὁ Szabó ὁμολογεῖ εἰς τὴν εἰσαγωγήν του (σ. 12). Ἡ κυρία ὅμως ἀξία τῆς μελέτης αὐτῆς τοῦ Szabó ἔγκειται εἰς τὸ μεθοδικὸν σημεῖον, ὅτι ὁ Szabó ἐξαίρει τὴν σημασίαν τῆς γλώσσης διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν ἀρχαίων μαθηματικῶν ἐκφράσεων καὶ θεωριῶν (σ. 23-25) καὶ κατὰ τοῦτο ἡ εἰκών, τὴν ὁποίαν δίδει, περὶ τῶν θεμελιωδῶν ἀρχῶν τῶν ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν-μία εἰκὼν προσανατολισμένη κατὰ μέγα μέρος εἰς τὸν Πλάτωνα-εἶναι διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν εἰκόνα προηγουμένων ἐργασιῶν ἐπὶ τῶν ἰδίων θεμάτων. Καὶ ὁ van der Waerden καὶ ὁ Szabó ὅμως, οἱ ὁποῖοι ἐτόνισαν τὴν ἐκτίμησιν τοῦ Πλάτωνος διὰ τὴν μαθηματικὴν μέθοδον, δὲν ἀνέλαβον νὰ ἐξετάσουν τὸ πρόβλημα τῆς ὀντολογίας τῶν Μαθηματικῶν κατὰ τὸν Πλάτωνα καὶ τὸν Ἀριστοτέλη, ἀλλ' ἐκινήθησαν περισσότερον εἰς τὴν ἱστορικὴν γραμμήν, τὴν ὁποίαν ἐχάραξε διὰ τὴν ἔρευναν τῶν ἀρχαίων Μαθηματικῶν ὁ Th. Heath διὰ τοῦ ἔργου του *A History of Greek Mathematics*, εἰς τὸ ὁποῖον παρεπέμψαμεν ἀνωτέρω.

Προτιθέμεθα εἰς τὸ πρῶτον μέρος τῆς ἐργασίας μας, τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὸν Πλάτωνα, ὅπου θὰ ἀναπτύξωμεν ἀκριβῶς τὴν σχέσιν τῶν Μαθηματικῶν πρὸς τὴν φιλοσοφίαν καὶ τὴν ὀντολογικὴν μεταξὺ-παρεμβολὴν τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων, ὅπως αὐτὴ καθορίζεται ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος εἰς τὴν *Πολιτείαν*, νὰ μνημονεύσωμεν καὶ νὰ ἔλθωμεν εἰς κριτικὴν συζήτησιν καὶ μὲ ὡρισμένας ἄλλας ἀντιπροσωπευτικὰς μελέτας καὶ ἀπόψεις, ἤτοι τῶν K.v. Fritz, A. Szabó, R.M. Hare, H. Cherniss, D. Ross, A. Wedberg, H.J. Krämer, K. Gaiser καὶ J. Annas, τὰς ὁποίας δὲν κρίνομεν σκόπιμον, ὅπως ἀναφέρωμεν καὶ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τῆς Εἰσαγωγῆς.

---

[22] Ὁ κριτικὸς E.M. Manasse εἰς τὸ διεξοδικώτατον ἔργον του περὶ τῆς γαλλικῆς πλατωνικῆς βιβλιογραφίας (Πβ. τὸ ἰδιαίτερον τεῦχος τῆς *Philosophische Rundschau «Platonliteratur III. Bücher über Platon. Werke in französischer Sprache»*, Tübingen 1976, σ. 540-541) ἀναπτύσσει τὸ περιεχόμενον τοῦ ἔργου τοῦ Ch. Mugler, ἐκφράζει ὅμως τὰς ἐπιφυλάξεις του διὰ τὴν μεθοδικότητα καὶ τὴν κριτικότητα τῆς ἐρεύνης αὐτῆς.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Ἡ ὀντολογία τῶν Μαθηματικῶν κατὰ τοὺς Πυθαγορείους. Ἡ μαθηματικὴ δομὴ τοῦ κόσμου. Πρῶται εἰσαγωγικαὶ παρατηρήσεις

Ὁ σκοπὸς τοῦ συντόμου αὐτοῦ κεφαλαίου εἶναι νὰ δώσωμεν μίαν μικρὰν ἱστορικὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὴν προϊστορίαν τοῦ προβλήματος τῆς ἐρεύνης μας. Πρὸς τοῦτο θὰ περιορισθῶμεν κυρίως μόνον εἰς μαρτυρίας τοῦ Ἀριστοτέλους ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ὀντολογίαν τῶν Μαθηματικῶν κατὰ τοὺς Πυθαγορείους.

Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη οἱ Πυθαγόρειοι ἐθεώρησαν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς τὴν μόνην πραγματικότητα. Εἰς τὸ χωρίον *μετὰ τὰ φυσ.* 987b 27-28 μαρτυρεῖται, ὅτι τὰ πράγματα εἶναι ἀριθμοί, εἰς τὸ χωρίον 1083b 11-12 μαρτυρεῖται, ὅτι τὰ σώματα εἶναι συγκείμενα ἐξ ἀριθμῶν, εἰς δὲ τὸ χωρίον 987 a19, ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἡ οὐσία ὅλων τῶν πραγμάτων. Ἤδη εὑρισκόμεθα εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο πρὸ μιᾶς συνειδητοτέρας γνώσεως ἀπὸ ὅτι εἰς τοὺς Ἴωνας φιλοσόφους, ὅτι δηλαδὴ τὸ ὂν δὲν ὑφίσταται ἀπὸ μίαν εἰδικὴν ὕλην, ἀλλὰ ἀπὸ ἀριθμοὺς ἢ ἀπὸ σχέσεις ἀριθμῶν (985b 26-29). Ἡ ὀντολογικὴ σημασία αὐτῶν τῶν ἰσχυρισμῶν τῶν Πυθαγορείων εἶναι, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι συνδεδεμένοι μὲ τὰ πράγματα τοῦ κόσμου καὶ δὲν νοοῦνται ἐκτὸς αὐτῶν («*ὡς ὕλην τοῖς οὖσι*»): 986a 17)[1]. Ἡ ἄποψις, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ[2] εἶναι ἡ οὐσία τῶν πραγμάτων, πρέπει νὰ σημαίνῃ, ὅτι τὰ Μαθηματικὰ εἶναι ἡ ἔκ-

---

[1] Πβ. καὶ 1080 b 16-18: «*καὶ οἱ Πυθαγόρειοι δ' ἕνα, τὸν μαθηματικόν, πλὴν οὐ κεχωρισμένον ἀλλ' ἐκ τούτου τὰς αἰσθητὰς οὐσίας συνεστάναι φασίν*».

[2] Ἡ λέξις ἀριθμὸς ἔχει τὴν σημασίαν «εἰδικὴ συναρμογή», καθ' ὅσον σχετίζεται μὲ τὸ ρῆμα ἀραρίσκω = συνάπτω, θέτω κατὰ τάξιν, σημαίνει ἑπομένως κατὰ λέξιν «συναρμογή». Τοῦτο ἔδειξε κατὰ τρόπον πειστικὸν ὁ O. Becker εἰς τὴν μελέτην του *Die Aktualität des pythagoreischen Gedankens* εἰς τόμον: *Die Gegenwart der Griechen im neueren Denken* (Festschrift für H. — G. Gadamer), Tübingen 1960, σ. 13-15. Βλ. καὶ Frisk, *Griech. etym. Wörterbuch*, σ. 128, 129).

φρασις τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ἐνυπάρχουν εἰς τὰ συγκεκριμένα πράγματα.

Εἶναι λίαν πιθανὴ ἡ εἰκασία τῶν H. Hasse καὶ H. Scholz, ὅτι ἡ θέσις τῶν Πυθαγορείων περὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ χαρακτῆρος ὅλων τῶν πραγμάτων προῆλθε ἀπὸ τὴν εὕρεσιν τοῦ δυνατοῦ τῆς ἀριθμητικοποιήσεως τῶν μουσικῶν διαστημάτων[3] ὡς καὶ ἀπὸ τὴν θέσιν περὶ τῆς διαρκοῦς ἁρμονίας τῶν σφαιρῶν (985b 31-32, 986a 3-6). Ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους ἀναφέρεται ἀκόμη, ὅτι κατὰ τοὺς Πυθαγορείους ὁ οὐρανὸς εἶναι ἁρμονία καὶ διέπεται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν (986a 3, 21). Αὐτὸ πρέπει νὰ σημαίνῃ, ὅτι αἱ περιφοραὶ τῶν πλανητῶν ὡς καὶ αἱ ἀποστάσεις των εἶναι ἀνάλογοι πρὸς ἀριθμοὺς καὶ εἰς αὐτοὺς τοὺς λόγους ἀριθμῶν ἀντιστοιχοῦν μουσικὰ διαστήματα. Ὡς βλέπομεν, οἱ Πυθαγόρειοι λαμβάνουν σοβαρῶς ὑπ᾽ ὄψιν τὴν ἰδέαν τῆς ἁρμονίας τοῦ κόσμου, ἡ ὁποία ἐρευνᾶται καὶ ἐκφράζεται διὰ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν[4].

1. Ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀσυμμετρίας

Ἡ ἰδέα ὅμως αὐτὴ τῶν Πυθαγορείων περὶ τῆς ἀριθμητικοποιήσεως τῶν πάντων καὶ τῆς ἁρμονίας τοῦ κόσμου ἔμελλε ταχέως νὰ τεθῇ ὑπὸ ἀμφιβολίαν, διότι προσέκρουσε εἰς ἀδιέξοδον λόγῳ τῶν δυσκολιῶν, αἱ ὁποῖαι ἠγέρθησαν πρὸ μιᾶς ἐπινοήσεως, ἡ ὁποία προῆλθε ἀπ᾽ αὐτὸν τοῦτον τὸν κύκλον τῶν Πυθαγορείων, τῆς ἐπινοήσεως τῆς ἀσυμμετρίας. Ἡ ἔννοια τοῦ ἀσυμμέτρου διεπιστώθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων κατὰ τὴν μελέτην τοῦ λόγου τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου. Οἱ Πυθαγόρειοι ἀπέδειξαν, ὅτι ἡ διαγώνιος πρὸς τὴν πλευρὰν ἑνὸς τετραγώνου εἶναι μεγέθη ἀσύμμετρα[5], ἤτοι δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον, ἢ ὅτι ἡ ὑποτείνου-

---

[3] Πβ. H. Hasse - H. Scholz, *Ἡ κρίσις τῶν ἀρχῶν τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης* (ἑλλ. μετάφρ. ὑπὸ Φ. Βασιλείου - Χρ. Καπνουκάγια), Ἀθῆναι 1934, σ. 6.

[4] Πβ. σχετικῶς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο B.L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft* (γερμ. μετάφρ.), Basel 1956, σ. 156 κ. ἑξ. Εἰς τὴν νεωτέραν ἐποχήν, κατὰ τὸν 17ον αἰῶνα, ὁ Kepler βασιζόμενος ἐπὶ τῶν ἐργασιῶν τοῦ Κοπερνίκου καὶ τοῦ Πτολεμαίου εὗρε τοὺς ἀληθεῖς νόμους τῆς κινήσεως τῶν πλανητῶν καὶ ἦτο ὁ τελευταῖος, ὁ ὁποῖος ἔλαβε σοβαρῶς ὑπ᾽ ὄψιν τὴν πυθαγόρειον αὐτὴν ἰδέαν περὶ τῆς ἁρμονίας τοῦ κόσμου, καθ᾽ ὅσον ἔφερεν εἰς σχέσιν τὰς κινήσεις τῶν πλανητῶν πρὸς τὴν κλίμακα τῶν τόνων καὶ ἡμιτόνων οὐρανίας μουσικῆς. Πβ. E. Frank, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, σ. 31-32, 34 καὶ J. Lohmann, *Ptolemaios und Kepler*, εἰς τόμ. *Convivium Cosmologicum*, (ἐκδ. A. Giannarás), σ. 152, 155, 159-164.

[5] Πβ. καὶ *Εὐκλείδου Στοιχεῖα*, βιβλ. ι΄ (Περὶ ἀσυμμέτρων), παράρτ. 27 (ἐκδ. Ε. Σταμάτης, Ἀθῆναι 1975, σ. 236-240): «*Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει*». Τοῦτο εὑρίσκομεν νὰ ἀναφέρεται ἤδη καὶ εἰς *Ἀναλ. πρότ.* A 23, 41a 23-32, εἰς μίαν προσπάθειαν νὰ δειχθῇ τὸ «διὰ τοῦ ἀδυνάτου συλλογίζεσθαι».

σα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ἴσας καθέτους δὲν ἔχει ἀκέραιον λόγον πρὸς τὰς καθέτους, ἤτοι ἀπέδειξαν οὗτοι τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{2}$, ἡ ὁποία δὲν δίδει ἐξαγόμενον ρητὸν ἀριθμὸν[6]. Τὸ ἐνοχλητικὸν αὐτὸ εὕρημα ἦτο ἓν νέον εἶδος ἀριθμῶν — σήμερον τοὺς ὀνομάζομεν ἀσυμμέτρους ἢ ἀρρήτους — οἱ ὁποῖοι παραμένουν πεισματικὰ ἀνολοκλήρωτοι, ὅ,τι καὶ ἂν συμβῇ, τὰ νέα δὲ δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἀναγκαζόμεθα νὰ προσθέτωμεν εἰς τὸ πηλίκον, δὲν ἀκολουθοῦν ὡρισμένην τάξιν καὶ δὲν ἔχουν τέρμα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ μέγεθος Α εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ μέγεθος Β. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ τετραγώνου ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὸ πλῆθος τῶν μονάδων μήκους τῆς διαγωνίου πρὸς τὸν ἀριθμὸν τὸν δηλοῦντα τὸ πλῆθος τῶν μονάδων μήκους τῆς πλευρᾶς εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Ἡ ἀνακάλυψις αὐτὴ ἦτο συγκλονιστικὴ διὰ τὴν πορείαν τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς σκέψεως καὶ ὡδήγησε εἰς μίαν βαρεῖαν κρίσιν, ἡ ὁποία οὐσιαστικῶς ἐξακολουθεῖ — καὶ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν — νὰ ὑφίσταται μέχρι σήμερον καὶ νὰ θέτῃ διαρκῶς εἰς τὴν ἐπιστήμην καὶ τὴν φιλοσοφίαν ζητήματα ἐξόχως δυσχερῆ, ὅπως εἶναι π.χ. τὰ ἀναγόμενα εἰς τὴν συνέχειαν ἢ ἀσυνέχειαν τῆς δομῆς τοῦ κόσμου.

Λόγῳ ἐλλείψεως τῶν ἀναγκαίων πηγῶν ἀναγινώσκομεν μὲ ἐπιφύλαξιν, ὅτι ὁ Ἵππασος ὁ Μεταποντῖνος φέρεται ὡς πρῶτος ἀνακαλύψας τὴν ἀσυμμετρίαν. Κατὰ τὸν Ἰάμβλιχον ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀσυμμετρίας ἐγένετο εἰς τὴν Πυθαγόρειον Σχολήν[7], κατὰ δὲ τὸν Πρόκλον ἡ ἀνακάλυψις αὐτὴ ἀποδίδεται προσωπικῶς εἰς τὸν Πυθαγόραν[8]. Εἰς ἀντίθεσιν πρὸς τὰ ἀνωτέρω ὁ K. v. Fritz ἀμφιβάλλει κατὰ τρόπον μὴ πειστικὸν διὰ τὴν γνησιότητα τοῦ συναφοῦς χωρίου τοῦ Πρόκλου εἰς τὴν κατὰ τὰ ἄλλα ἐνδιαφέρουσαν με-

---

[6] Ὁ Πλάτων εἰς *Θεαίτ.* 147 d μᾶς πληροφορεῖ, ὅτι ὁ Θεόδωρος (ὁ Κυρηναῖος μαθηματικὸς) ἀπέδειξεν τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{3}$ καὶ $\sqrt{5}$ μέχρι καὶ τῆς $\sqrt{17}$. Δὲν εἶναι βεβαίως θέμα τῆς παρούσης ἐρεύνης νὰ ἀσχοληθῶμεν ἐδῶ μὲ τὰς πυθαγορείους ἀποδείξεις περὶ τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{2}$ ἢ τὰς τοῦ Θεοδώρου, αἱ ὁποῖαι δὲν σώζονται. Σώζεται ὅμως χωρίον τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου (ἔκδ. E. Hiller, Lipsiae 1878, σ. 43-45), ἐκ τοῦ ὁποίου φαίνεται κατὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν νεωτέρων, ὅτι πρόκειται περὶ τῆς ἀποδείξεως τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{2}$ (βλ. Ε. Σταμάτη ἔκδ. *Εὐκλείδου Στοιχεῖα*, τόμ. II (1953), σ. 7-13, καὶ F. Hultsch, *Exkurs II* εἰς: Πρόκλου, *Εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος ὑπόμνημα*, II, Lipsiae 1901/Amsterdam 1965, σσ. 393-400 *Kroll*). Χρήσιμοι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι αἱ ἀναπτύξεις περὶ τοῦ Θεοδώρου τοῦ van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, ἔνθ. ἀν. σ. 234-240 καὶ τοῦ A. Szabó, *Anfänge d. griech. Math.*, ἔνθ. ἀν. σ. 69-79 καὶ Ε. Σταμάτη, *Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος*, ΠΑΑ 31 (1956), σ. 315 κ. ἑξ., 32 (1957), σ. 325 κ. ἑξ.

[7] Ἰαμβλίχου, *Περὶ τοῦ πυθαγορικοῦ βίου λόγος*, 1884/Amsterdam 1965, 246 *Nauck*.

[8] Πρόκλου Διαδόχου, *εἰς τὸ πρῶτον τῶν Εὐκλείδου στοιχείων βιβλίον*, Lipsiae 1873 *G. Friedlein*, ἀνατύπ. G. Olms, Hildesheim 1967, σ. 65, 15-21.

λέτην του καὶ ἀποδίδει τὴν ἀνακάλυψιν τῆς ἀσυμμετρίας ἄνευ οὐδενὸς ἀποδεικτικοῦ ἐπιχειρήματος εἰς τὸν Ἵππασον[9]. Τὰς ἀπόψεις αὐτὰς τοῦ K.v. Fritz, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς πιθανολογικοὶ συνδυασμοὶ καὶ εἰκασίαι, υἱοθετεῖ καὶ ὁ S. Heller[10].

Αἱ μαρτυρίαι *«τὸν γοῦν πρῶτον ἐκφήναντα τὴν τῆς συμμετρίας καὶ ἀσυμμετρίας φύσιν ...»* (Ἰάμβλ. *Πυθαγ. βίου λόγος*, ἔνθ' ἀν. 246) καὶ *«ἔνιοι δὲ τὸν περὶ τῆς ἀλογίας καὶ τῆς ἀσυμμετρίας ἐξειπόντα τοῦτο παθεῖν ἔλεξαν»* (Ἰάμβλ. ἔνθ. ἀν. 247), δηλοῦν, ὅτι ἡ ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου ἀνακάλυψις τῆς ἀσυμμετρίας ἐμαρτυρήθη ὑπό τινος εἰς τοὺς ἐκτὸς τῆς Σχολῆς, ὁ ὁποῖος ὅμως ἐνταῦθα δὲν ὀνομάζεται, ὡς ἐκ τούτου δὲ καθίσταται προβληματικὴ ἡ συμπερίληψις τῶν ἀνωτέρω μαρτυριῶν ὑπὸ τοῦ Diels εἰς τὰ ἀποσπάσματα τοῦ Ἱππάσου[11].

Ὁ W.K.C. Guthrie παρατηρεῖ, ὅτι ἡ πυθαγόρειος Σχολὴ εἶχε θρησκευτικὸν χαρακτῆρα καὶ ὡς ἐκ τούτου οἱ μαθηταὶ ἀπέδιδον ὅλας τὰς διδασκαλίας τῆς Σχολῆς προσωπικῶς εἰς τὸν Διδάσκαλον. Περὶ τοῦ Ἱππάσου ἀναφέρει ὁ Guthrie, ὅτι αὐτὸς ἐτιμωρήθη, εἴτε διότι ἐμαρτύρησε κάτι εἰς τοὺς ἐκτὸς τῆς Σχολῆς εἴτε διότι ἤθελε νὰ διεκδικήσῃ τὴν τιμὴν διὰ μίαν γεωμετρικὴν ἀνακάλυψιν, ἀντὶ νὰ ἀποδώσῃ αὐτὴν εἰς τὸν Πυθαγόραν. Φαίνεται ὅμως δύσκολον νὰ δεχθῶμεν κατὰ τὸν Guthrie, ὅτι ἡ ἀνακάλυψις αὐτὴ ἦτο ἡ ἀσυμμετρία, ἂν καὶ τοῦτο εἶναι δυνατὸν νὰ ὑποτεθῇ[12]. Ὁ Ἰάμβλιχος ἀναφέρει, ὅτι ὁ Ἵππασος παρώτρυνε μὲ ἄλλους τὴν υἱοθέτησιν δημοκρατικῶν μέτρων κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τὴν ὀλιγαρχικὴν γραμμὴν τῆς Σχολῆς. Συγκεκριμένως ὁ Ἵππασος μετὰ δύο ἄλλων διεδραμάτιζε πρόσωπον-κλειδὶ εἰς τὴν δημοκρατικὴν ἀντίδρασιν ἐναντίον τῆς ὀλιγαρχικῆς παρατάξεως τῆς Σχολῆς τοῦ Πυθαγόρου ὡς πρὸς τὸ θέμα τῆς πολιτείας καὶ τῶν ἀρχόντων, διότι ὑπεστήριζε τὴν συμμετοχὴν πάντων εἰς τὰς ἀρχὰς καὶ τὴν ἐκκλησίαν, ἐνῶ ἡ ὀλιγαρχικὴ παράταξις ἠμπόδιζε νὰ καταλυθῇ ἡ πάτριος πολιτεία[13]. Ὁ Ἵππασος ὁ Μεταποντῖνος ἀνῆκε εἰς ἐκεῖνον τὸν κύκλον τῶν μαθητῶν τοῦ Πυθαγόρα, οἱ ὁποῖοι ἐχαρακτηρίζοντο ὡς μαθηματικοὶ καὶ ἠσχολοῦντο ἐπιστημονικῶς μὲ τὴν διδασκαλίαν τοῦ Πυθαγόρα καὶ τὴν πε-

---

[9] Πβ. *Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont* (= *Zur Gesch. d. griech. Mathem.* W B. Wege der Forschung 33, ἔκδ. ὑπὸ O. Becker, Darmstadt 1965, σ. 275, 295, 298, ἡ ὁποία μελέτη ἐδημοσιεύθη τὸ πρῶτον εἰς: *Annals of Mathematics* 46 (1945).

[10] Πβ. *Die Entdeckung der stetigen Teilung*, εἰς τὸν ἀνωτέρω τόμον *Zur Gesch. d. gr. Mathem.*, σ. 320-323, 330.

[11] *Die Fragm. d. Vorsokr.* I (Berlin 1964[11]) σ. 108.

[12] *A History of Greek Philosophy*, I, Cambridge 1962, σ. 149.

[13] Ἰαμβλ. *Πυθαγ. βίου λόγος*, ἔνθ' ἀν. 257.

ραιτέρω συμπλήρωσιν αὐτῆς κατ᾽ἀντίθεσιν πρὸς τὸν ἄλλον κύκλον τῶν μαθητῶν, τοὺς ἀκουσματικούς, οἱ ὁποῖοι ἦσαν ὀπαδοὶ τῆς παλαιᾶς πυθαγορικῆς διδασκαλίας καὶ ὡρκίζοντο εἰς τοὺς λόγους τοῦ Διδασκάλου[14].

2. Ἡ ἀξία τῆς πυθαγορείου ἀπόψεως καὶ μετάβασις εἰς τὸ θέμα τῆς ἐρεύνης μας

Παρὰ τὴν ἐπινόησιν τῆς ἀσυμμετρίας ἡ σημασία τῆς ἀπόψεως τῶν Πυθαγορείων, ὅτι ἐντὸς ὅλων τῶν πραγμάτων ἐμφωλεύουν ἀριθμοὶ καὶ ἀριθμητικαὶ σχέσεις καὶ ὅτι αὐτὰ τὰ πράγματα εἶναι κεκαλυμμένοι ἀριθμοί, ὑπῆρξε μεγάλη καὶ ἤσκησεν ἐπίδρασιν ἐπὶ τὴν μετέπειτα ἐπιστημονικὴν σκέψιν μέχρι καὶ σήμερον. Ἡ ἄποψις αὐτὴ ἔγινε ἡ ἀρχὴ μιᾶς ἐξελίξεως, ἡ ὁποία φθάνει μέχρι καὶ τὴν σύγχρονον μαθηματικοποίησιν τοῦ φυσικοῦ κόσμου[15], καὶ προκαταλαμβάνει βασικῶς τὴν καντιανὴν πρότασιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἕκαστος κλάδος τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν περιέχει μόνον τόσον πολὺ ἐπιστήμην, ὅσα Μαθηματικὰ περιέχονται εἰς αὐτὸν[16]. Ἡ ἄποψις ὅμως αὐτή, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον βάρους ἐμπίπτει εἰς τὴν φράσιν «*τὸν μαθηματικὸν* (ἀριθμὸν) *οὐ κεχωρισμένον* (τῶν αἰσθητῶν)» (1080b 16-17)[17], ἔγινε καὶ εἰς τὴν ἀρχαιότητα ἡ ἀπαρχὴ μιᾶς μεγάλης συζητήσεως, ἡ ὁποία ἀπεκορυφώθη εἰς τὴν σκέψιν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους διὰ τῶν ἀναλόγων θέσεων.

---

[14] Πβ. Ἰαμβλίχου, *Περὶ τῆς κοινῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης* XXV, ed. *N. Festa*, Lipsiae 1891. Περὶ τῶν δύο κύκλων τῶν μαθητῶν τοῦ Πυθαγόρα βλ. διεξοδικώτερον εἰς K. v. Fritz, *Mathematiker und Akusmatiker bei den alten Pythagoreern*, München 1960.

[15] Τοῦτο ἔδειξε κατὰ τρόπον πειστικὸν ὁ O. Becker εἰς τὴν μελέτην του *Die Aktualität des pythagoreischen Gedankens*, ἔνθ. ἀν. σ. 7-30.

[16] Πβ. I. Kant, *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, Vorrede, σ. 4 (= *Kants Werke, Akademie-Ausgabe* 1968, IV σ. 470): «Ich behaupte aber, daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist».

[17] Πβ. ἐπίσης 1090a 23: «*οὐ χωριστοὺς δὲ*» (τοὺς ἀριθμούς).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

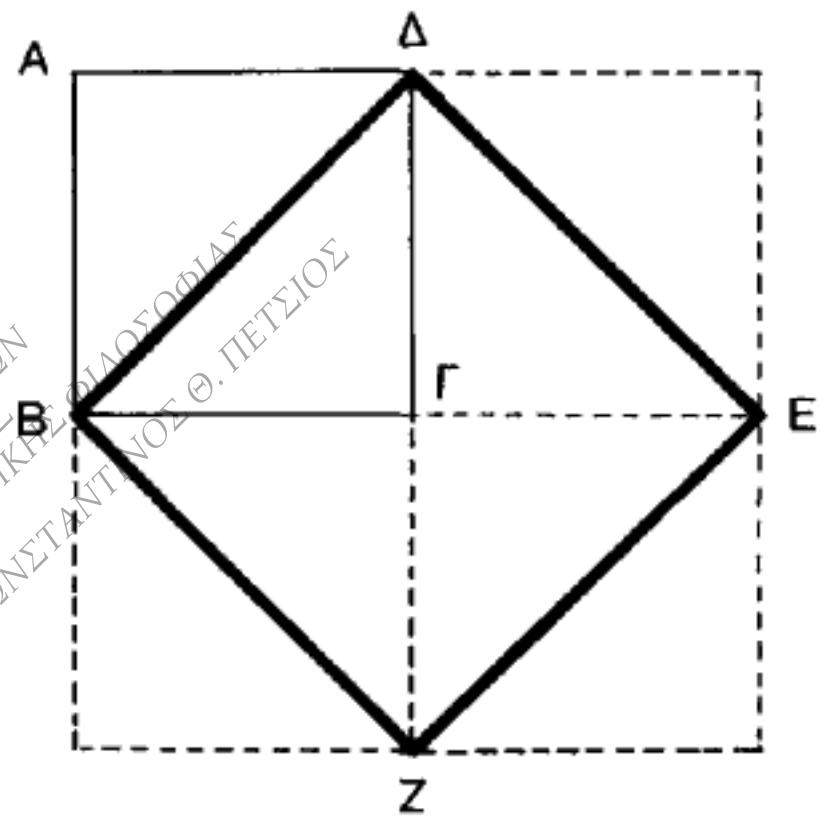
Ἡ διδασκαλία τοῦ Πλάτωνος περὶ τῆς ὀντολογικῆς ὑποστάσεως τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων ὡς ἀπόκλισις ἀπὸ τοὺς Πυθαγορείους

Ἡ μεγάλη συμβολὴ τοῦ Πλάτωνος ἔναντι τῶν Πυθαγορείων ἔγκειται εἰς τὴν προσπάθειάν του νὰ δείξῃ, ὅτι ὑπάρχουν καθαροὶ ἀριθμοὶ καὶ καθαρὰ γεωμετρικὰ σχήματα, τὰ ὁποῖα δὲν ἐπιτρέπεται νὰ συγχέωνται μὲ αὐτὰ τὰ ὁποῖα σημειοῦμεν καὶ βλέπομεν. Ὁ Πλάτων ἤθελε μὲ τὴν προσπάθειάν του αὐτὴν νὰ δείξῃ, ὅτι ὑπάρχει κατ' ἀναγκαιότητα ἓν «εἶναι», τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι αἰσθητὸν καὶ ταυτοχρόνως νὰ ἀπαντήσῃ εἰς τοὺς Πυθαγορείους, οἱ ὁποῖοι ὑπεστήριζον, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ ἐνυπάρχουν εἰς τὰ πράγματα ὡς ἡ οὐσία αὐτῶν.

Ἡ πλατωνικὴ θέσις τοῦ χωρισμοῦ, ἡ ὁποία εἶναι κατ' οὐσίαν χωρισμὸς τῶν δύο τόπων, τοῦ αἰσθητοῦ καὶ τοῦ νοητοῦ, εὑρίσκει ἰσχυρὸν ἔρεισμα εἰς τὰ Μαθηματικά. Παρατηροῦμεν, ὅτι μεταξὺ ἄλλων κατὰ τὴν παρουσίασιν τῆς γενέσεως τῆς θεωρίας τῶν ἰδεῶν ἐξαίρεται ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος καὶ ἡ σημασία τῶν Μαθηματικῶν διὰ τὴν κατανόησίν της. Τὸ πρόβλημα ἐδῶ εἶναι, πῶς ἔφθασε ὁ Πλάτων εἰς αὐτὴν τὴν ἄποψιν.

1. Ἡ ὀντολογικὴ σημασία τῆς θεωρίας τῆς ἀναμνήσεως καὶ ἡ σχέσις της πρὸς τὰ Μαθηματικὰ («Μένων», 82b-86a)

Μία μελέτη τῶν χωρίων τοῦ *Μένωνος*, 82b-86a, ὅπου γίνεται ὑπὸ τοῦ Σωκράτους κατὰ ζωντανὸν τρόπον ἓν στοιχειῶδες μάθημα γεωμετρίας, δύναται νὰ μᾶς ὁδηγήσῃ εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ ἔννοια τῆς ἀναμνήσεως ἦτο ἀκριβῶς ἡ αἰτία, ἡ ὁποία ὡδήγησε τὸν Πλάτωνα νὰ δεχθῇ, ὅτι τὰ Μαθηματικὰ εἶναι βασικώτατον παράδειγμα πρὸς ὑποστήριξιν τῆς θεωρίας τῶν ἰδεῶν. Ἡ ἀπόδειξις εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο γίνεται μὲ μίαν μεταφυσικὴν πρότασιν, ἡ ὁποία λέγει, ὅτι ἡ ἀναζήτησις καὶ ἡ μάθησις εἶναι ἀνάμνησις (81d) καὶ τῆς ὁποίας προτάσεως τὸ νόημα εὑρίσκεται κατὰ τὴν συζήτησιν τοῦ Σωκράτους μὲ τὸν παῖδα, ὁ ὁποῖος ἔχει νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς ἑνὸς τετραγώνου διπλασίου δοθέντος τετραγώνου ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ ἴσας πλευρὰς ὅπως καὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον (82d). Τὸ πρόβλημα εἶναι, ποία θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη πλευρὰ τοῦ νέου τετραγώνου.



Μένων 85a-b

«τὸ ὅλον τόδε ποσαπλάσιον τοῦδε γίγνεται; – Τετραπλάσιον. – Ἔδει δέ γε διπλάσιον ἡμῖν γενέσθαι»

(Μένων 84d-e)

Θὰ χρειασθῇ ἡ βοήθεια τοῦ Σωκράτους ἔπειτα ἀπὸ τὰς πρώτας ἀνεπιτυχεῖς ἀπαντήσεις (82c, e-83a, d, e), ὥστε νὰ ἀνακαλύψῃ ὁ παῖς, ὅτι ἡ ζητουμένη πλευρὰ τοῦ νέου τετραγώνου εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ δοθέντος τετραγώνου ΑΒΓΔ (84e-85a, b). Ἡ βοηθητικὴ αὐτὴ γραμμὴ ΒΔ, ἤτοι ἡ διαγώνιος τοῦ δοθέντος τετραγώνου, ἡ ὁποία σύρεται ὑπὸ τοῦ Σωκράτους (85a) εἶναι ἡ δημιουργικὴ σκέψις διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Τὶ ἐπιδιώκει ὅμως ὁ Πλάτων νὰ δείξῃ μὲ αὐτὴν τὴν συζήτησιν; Πρῶτον, ὅτι ἐνῶ ὁ παῖς πρὸ τῆς συζητήσεως οὐδὲν ἐγνώριζεν, ἐν τούτοις ὑπῆρχον εἰς τὴν ψυχήν του ἀληθεῖς δόξαι (85c) ὡς κεκρυμμένα ἔμφυτα κατάλοιπα μιᾶς γνώσεως, τὴν ὁποίαν ἀπέκτησεν ἡ ψυχή του εἰς μίαν κατάστασιν προϋπάρξεώς της, αἱ ὁποῖαι διὰ καταλλήλων καὶ συχνῶν ἐρωτήσεων καὶ ὄχι διὰ διδασκαλίας ἀφυπνίζονται καὶ γίνονται ἐπιστῆμαι (85c, d). Ἡ φράσις *«ἀναλαβὼν αὐτὸς ἐξ αὐτοῦ τὴν ἐπιστήμην»* σημαίνει *«ἀναμιμνήσκεσθαι»* (85d). Πρόκειται ἐδῶ περὶ μιᾶς καταστάσεως, ὅπου δὲν ἦτο ἀκόμη ἄνθρωπος (86a), ἡ ὁποία κατάστασις εἶναι διὰ τὸν Πλάτωνα πάλιν χρονικὴ (*«ἐν ἄλλῳ τινὶ χρόνῳ εἶχε καὶ ἐμεμαθήκει»*, 85e-86a), πλὴν ὅμως ἔχει τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ἀπολύτου καὶ τοῦ ἰδεατοῦ ἐν σχέσει μὲ τὴν σχετικότητα τῆς παρούσης ζωῆς. Τὴν ἱκανότητα τῆς ἀναμνήσεως αὐτῆς τῆς προϋπαρκτικῆς καταστάσεως φέρει μεθ' ἑαυτῆς ἡ ἀθάνατος ψυχή. Οὕτω ἡ ἀνάμνησις εἶναι διὰ τὸν Πλάτωνα μία ἔκφρασις καὶ ἴσως ἡ καλυτέρα διὰ νὰ ὑποδηλωθῇ μεταξὺ ἄλλων καὶ ἡ ἀντικειμενικότης τῶν ἰδεῶν τῶν μαθηματικῶν

ἀντικειμένων καὶ συγχρόνως νὰ διαχωρισθῇ τὸ ἀπόλυτον ἀπὸ τὸ σχετικόν. Ἔχει ἑπομένως ὀντολογικὴν σημασίαν. Συγχρόνως ὅμως γίνεται ἡ ἔκφρασις αὐτὴ τῆς ἀναμνήσεως ἔκφρασις μιᾶς διαιτησίας μεταξὺ ἐκείνου τοῦ ἀδυνάτου σημείου νὰ πλησιάσωμεν τὴν ἰδέαν καὶ τῶν πραγματικῶν δυνατοτήτων μας. Δεύτερον, ἐπιδιώκει ἐδῶ ὁ Πλάτων νὰ δείξῃ ὅτι ὁ παῖς, ὁ ὁποῖος ὀρθῶς ἐρωτᾶται περὶ μαθηματικῶν προβλημάτων, δίδει ὀρθὰς ἀπαντήσεις, ἂν καὶ οὐδόλως πρὶν ἠσχολήθη μὲ τὰ προβλήματα αὐτὰ οὔτε τὰ ἐδιδάχθη ποτέ. Βεβαίως δὲν εὑρίσκει τὸ ὀρθὸν μὲ τὴν πρώτην του προσπάθειαν, διὰ τῆς καταλλήλου ὅμως συζητήσεως ἀπορρίπτει τὰς ἐσφαλμένας προϋποθέσεις καὶ ἀποφασίζει εἰς τὸ τέλος μετὰ πλήρους βεβαιότητος περὶ τοῦ ὀρθοῦ. Ἡ ἀνάμνησις ἑπομένως ὑπάρχει λανθάνουσα εἰς τὸν παῖδα, ἔχει δὲ ἀνάγκην τῆς αὐστηρᾶς καὶ διερευνητικῆς σκέψεως καὶ δὴ καὶ τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος, ὥστε νὰ ἐμφανισθῇ. Διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ ἐπιζητεῖ ὁ Πλάτων νὰ ἀποδείξῃ τὸν *a priori*, ὡς λέγομεν εἰς τὴν νεωτέραν ὁρολογίαν, χαρακτῆρα τῶν Μαθηματικῶν συγχρόνως ὅμως καὶ τὴν μεταφυσικὴν θεμελίωσιν τῆς μαθηματικῆς γνώσεως. Ἤδη εὑρισκόμεθα εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο πρὸ μιᾶς φιλοσοφικῆς ἀνακαλύψεως πρώτου μεγέθους, τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ *a priori* χαρακτῆρος τῆς μαθηματικῆς γνώσεως[1]. Πρέπει νὰ παρατηρηθῇ, ὅτι εἰς τὸ κείμενον αὐτὸ τοῦ *Μένωνος* οὐδὲν λέγεται περὶ τοῦ τρόπου τοῦ εἶναι τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων. Τοῦτο ὅμως γίνεται, διότι ὁ σκοπὸς τῶν ἀναλύσεων αὐτῶν εἶναι νὰ δημιουργηθοῦν αἱ προϋποθέσεις καὶ νὰ ἐξετασθοῦν αἱ δυνατότητες, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ θέσουν τὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ νὰ συμβάλλουν εἰς τὴν λύσιν του. Ὁ *a priori* χαρακτὴρ τῆς μαθηματικῆς γνώσεως εἶναι εἰς τὸν *Μένωνα* ὁ ἀναγκαῖος ὅρος τῆς δυνατότητος τῆς μεταφυσικῆς ὑποστάσεως τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων. Τοῦτο ὅμως δὲν σημαίνει, ὅτι ὁ *a priori* χαρακτὴρ τῶν Μαθηματικῶν δημιουργεῖ τὰ ἀντικείμενα τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ προσπαθείᾳ του νὰ ὁρίσῃ αὐτά. Τὸ διαφέρον τοῦ Πλάτωνος εἶναι εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ-ὅσον καὶ ἐὰν δὲν φαίνεται-ὀντολογικόν. Ὁ Πλάτων ἐπιδιώκει νὰ σύρῃ τὴν διαχωριστικὴν γραμμὴν καὶ νὰ χωρίσῃ αὐτό, τὸ ὁποῖον κατ' αὐτὸν ὑπάρχει αὐτοτελῶς. Διὰ τοῦτο καὶ ἡ ὑποδηλουμένη αὐτὴ ὀντολογία τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων δὲν δύναται εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς αἴτημα. Παραμένει ὅμως κατὰ τοῦτο μεταφυσική, καθ' ὅσον ἀποδεικνύεται μὲ τὸν μυθικὸν τρόπον τῆς ἀναμνήσεως τῆς ψυχῆς.

Ἐδῶ διακρίνεται κατὰ τρόπον ἐκφραστικὸν μία βασικὴ τοποθέτησις τοῦ Πλάτωνος. Τὰ Μαθηματικὰ εἶναι κατ' αὐτὸν βασικώτατον παράδειγμα

---

[1] Βλ. O. Becker, *Mathematische Existenz*, σ. 240. Ὀρθῶς γράφει ὁ J. Moreau, *Le sens du Platonisme*, Paris 1967, σ. 107: «La théorie de la Réminiscence est avant tout, chez Platon, une façon d'exprimer le caractère a priori de la connaissance mathématique».

καὶ κίνητρον, διὰ νὰ ἀποδειχθῇ ὁ τρόπος τοῦ εἶναι ἀντικειμένων, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸν αἰσθητὸν κόσμον.

Ὁ Πλάτων ἐκλαμβάνει πάντοτε τὸ ὀντολογικὸν καὶ τὸ γνωσιολογικὸν πεδίον ὡς δύο ἀχωρίστους ὄψεις τῆς μιᾶς οὐσίας τῶν πραγμάτων. Διὰ τοῦτο σχετίζεται πάντοτε ἐκφραστικῶς τὸ λόγον διδόναι τῆς πλατωνικῆς γνωσιολογίας μὲ *«αὐτὴν τὴν οὐσίαν»*. Τὴν κυριωτέραν μαρτυρίαν περὶ αὐτοῦ ἔχομεν εἰς τὴν φράσιν τοῦ *Φαίδωνος*, 78c: *«αὐτὴ ἡ οὐσία ἧς λόγον δίδομεν τοῦ εἶναι»*.

2. Ἄλλα πλατωνικὰ χωρία μαρτυροῦντα τὴν ὕπαρξιν τῶν ἰδεῶν τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων καὶ συζήτησις τῶν ἀνακυπτουσῶν δυσχερειῶν

Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἀναφέρομεν ὡρισμένα χωρία τοῦ Πλάτωνος, εἰς τὰ ὁποῖα γίνεται λόγος περὶ τῆς ὀντολογικῆς ὑποστάσεως τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων, ὥστε νὰ δείξωμεν τὰς δυσκολίας, αἱ ὁποῖαι ἐγείρονται ἀπὸ τὴν παραδοχὴν αὐτῆς τῆς θέσεως. Ὁ Πλάτων χρησιμοποιεῖ εἰς τὸν *Φαίδωνα* τὴν φράσιν *«ἡ τῶν τριῶν ἰδέα»* (104d) καὶ ὁμιλεῖ περὶ τῆς ἰδέας τοῦ ἀρτίου ἀριθμοῦ (104e). Εἰς τὴν *Ἐπιστολὴν Ζ*, 342a κ. ἑξ., ὅπου γίνεται λόγος διὰ τὴν γνῶσιν τοῦ εἴδους καὶ τῶν ἀναβαθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἀπαιτοῦνται διὰ νὰ φθάσῃ τις εἰς αὐτήν, ὡς πέμπτος ἀναβαθμὸς μετὰ *1.* τὸ *«ὄνομα»* (τὴν λέξιν π.χ. κύκλος), *2.* τὸν *«λόγον»* (ὁρισμόν: ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον), *3.* τὸ αἰσθητὸν πρᾶγμα ἐν χρόνῳ καὶ χώρῳ ὑπάρχον (*«εἴδωλον»*), τὸ ὁποῖον δύναταί τις νὰ ἐξαλείψῃ ἢ νὰ καταστρέψῃ, *4.* τὴν *«ἐπιστήμην»* ἐν σχέσει μὲ αὐτὸ τὸ πρᾶγμα, ἀναφέρεται ἡ ἰδέα τοῦ κύκλου (*«αὐτὸς ὁ κύκλος»*), ἡ ὁποία κατὰ τὸν Πλάτωνα δὲν εἶναι κάτι ἀφηρημένον, ἀλλὰ ὀντολογικῶς αὐτόνομος οὐσία εἰς τὸ πλῆρες νόημα τῆς πλατωνικῆς λέξεως «οὐσία», δηλαδὴ κάτι ἀληθές, ἀκριβὲς καὶ ἀεὶ ὄν. Οὕτω δύναται νὰ κατανοηθῇ ἤδη ἡ πλατωνικὴ φράσις εἰς τὴν *Πολιτείαν* 527b, ὅτι ἡ γεωμετρικὴ γνῶσις ἀναφέρεται εἰς τὸ ἀεὶ ὄν (*«τοῦ γὰρ ἀεὶ ὄντος ἡ γεωμετρικὴ γνῶσις ἐστιν»*), διότι εἰς τὰ αἰσθητὰ πράγματα δὲν ὑπάρχουν ἀκριβῆ σημεῖα, ἀκριβεῖς εὐθεῖαι, ἀκριβῆ ἐπίπεδα, ἀκριβὴς κύκλος. Κατανοεῖ τις εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, ὅτι ὁ γεωμέτρης κατὰ τὸν Πλάτωνα μὲ τὴν ἀνωτέρω ἀντίληψιν περὶ ἀκριβείας προωθεῖ τὴν ἔρευναν τῆς γεωμετρίας ὡς μίαν καθαρὰν ἐπιστήμην καὶ εἶναι ἠναγκασμένος νὰ προχωρῇ οὕτω, χωρὶς νὰ λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν τὰς ἐφαρμογὰς καὶ τὰς ποσοτικὰς μετρήσεις.

> *«Ἀναγκαῖον ἄρα ἡμᾶς προειδέναι τὸ ἴσον πρὸ ἐκείνου τοῦ χρόνου, ὅτε τὸ πρῶτον ἰδόντες τὰ ἴσα ἐνενοήσαμεν ὅτι ὀρέγεται μὲν πάντα ταῦτα εἶναι οἷον τὸ ἴσον, ἔχει δὲ ἐνδεεστέρως»*.
>
> *(Φαίδων 74e-75a)*

Ἡ θεωρία ὅμως αὐτὴ τῶν ἰδεῶν τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων περιέχει πολλὰς δυσκολίας. Δυσκολίαι ἐγείρονται εὐθὺς ἀμέσως, ἂν θελήσῃ τις νὰ ἐρωτήσῃ, πῶς ὁ Πλάτων ἀντιμετώπισε τὸ πρόβλημα περὶ τοῦ ἂν ὑπάρχῃ ἡ ἰδέα τοῦ ἀριθμοῦ γενικῶς ἢ μία γενικὴ ἰδέα τοῦ σχήματος. Μία τοιαύτη ἀντιμετώπισις τοῦ προβλήματος δὲν συναντᾶται εἰς τὰ πλατωνικὰ κείμενα. Ἔπειτα τὸ πρόβλημα, ἂν ὑπάρχουν ἰδέαι ὅλων τῶν καθέκαστα φυσικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἄπειροι, ἢ ὑπάρχουν ἰδέαι τῶν πρώτων δέκα ἀριθμῶν, δὲν τίθεται εἰς τοὺς διαλόγους ὑπὸ ἔρευναν καὶ ἔχομεν ἔλλειψιν μαρτυριῶν περὶ αὐτοῦ[2]. Μία ἀπάντησις εἰς αὐτὴν τὴν ἐρώτησιν δὲν θὰ ἦτο εὔκολος διὰ τὸν Πλάτωνα. Ἐὰν θὰ ἐδέχετο ὁ Πλάτων ἀνάλογον ἰδέαν δι᾽ ἕκαστον φυσικὸν ἀριθμόν, τότε θὰ εἶχε νὰ κάμῃ μὲ μίαν ἀτελείωτον (ἄπειρον) σειρὰν ἰδεῶν καὶ τοῦτο θὰ ἦτο δι᾽ αὐτὸν μία ἀνεπιθύμητος ἀκολουθία. Εἰς τὰ πλατωνικὰ κείμενα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν παραδείγματα μὲ ἰδέας τῶν ἀριθμῶν, ὡς εἴδομεν εἰς *Φαίδ.* 104d, πλὴν ὅμως οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ δὲν εἶναι μεγάλοι ἀριθμοὶ π.χ. μεγαλύτεροι τοῦ 3. Ὁπωσδήποτε δὲν ὑπάρχει εἰς τὰ πλατωνικὰ κείμενα ἐπίσης χωρίον, τὸ ὁποῖον νὰ μαρτυρῇ, ὅτι ἔχομεν ἰδέας τῶν πρώτων δέκα ἀριθμῶν. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἀκριβῶς πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι διὰ τὴν μαρτυρίαν τοῦ Ἀριστοτέλους, ὅτι ὁ Πλάτων ἐδέχθη ὡς εἴδη τοὺς πρώτους δέκα ἀριθμοὺς[3], δὲν δύναται νὰ εὑρεθῇ εἰς τοὺς διαλόγους ἓν θετικὸν χωρίον.

Τὸ πρόβλημα ὅμως καθίσταται περαιτέρω ἔτι δυσκολώτερον, ὅταν προσπαθήσωμεν νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ ἐρώτημα, διατὶ ἐδέχθη ὁ Πλάτων ἰδέας τῶν ἀριθμῶν. Ἤδη τὸ ἐρώτημα τοῦτο ἐτόνισεν ἰδιαιτέρως καὶ ἐξῆρεν ὁ L. Robin: «Pourquoi Platon a-t-il admis des Nombres idéaux?[4]». Ἐλέχθη

---

[2] Ὁ G. Martin, ὁ ὁποῖος δέχεται τὴν διαπίστωσιν αὐτὴν (σ. 10-11 τοῦ βιβλίου του), ἄγεται κατόπιν εἰς ἓν πιθανολογικὸν συμπέρασμα, ὅταν λέγῃ: «Ich selbst halte es aus den Grundsätzen der Ideenlehre für wahrscheinlich, daß es Ideen nur für endlich viele Zahlen gibt» (Πβ. *Platons Lehre von der Zahl und ihre Darstellung durch Aristoteles*, Ges. Abh. I, Köln 1961, *Kant-Studien*, Erg. Heft 81, σ. 12-13).

[3] Πβ. *μετὰ τὰ φυσ.* 1084a 15-17, 29-32. Ὁ ἰσχυρισμὸς τοῦ K. Gaiser (*Plat. ungeschr. Lehre*, σ. 542, Test. Plat. Anm. Nr. 61/62 ὅτι εἰς τὴν *Φυσικὴν ἀκρόασιν* τοῦ Ἀριστοτέλους, Γ 6, 206b 32, «μαρτυρεῖται ἐκφραστικῶς» ὁ περιορισμὸς τῶν εἰδητικῶν ἀριθμῶν μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ 10 ὡς διδασκαλία τοῦ Πλάτωνος, δὲν συνάγεται ἀπὸ τὸ κείμενον, τὸ ὁποῖον ὁμιλεῖ ἁπλῶς περὶ φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀναπτύσσει ἄλλην προβληματικήν. Ὁ K. Bärthlein (*Die Transzendentalienlehre der alten Ontologie*, σ. 402-403) ἐδέχθη ἴσως ἐπὶ τὸ ὀρθότερον, ὅτι ὁ περιορισμὸς τῶν εἰδητικῶν ἀριθμῶν μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ 10 ἔχει σχέσιν μὲ τὴν ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ 10 ὡς ἱεροῦ καὶ τελείου (986a 8). Περὶ τοῦ 10 ὡς τελείου ἀριθμοῦ παρὰ τοῖς Πυθαγορείοις βλ. E. Frank, *Plato und die sog. pyth.*, ἔνθ. ἀν., σ. 310, 316.

[4] Πβ. *La théorie platonicienne* ... σ. 450-451.

ἐπίσης ὀρθῶς ἀπὸ τὸν Robin, ὅτι ὁ Ἀριστοτέλης οὔτε εἰς τὴν παρουσίασιν οὔτε εἰς τὴν κριτικὴν τῆς θεωρίας αὐτῆς τοῦ Πλάτωνος, τὴν ὁποίαν ἐπιχειρεῖ νὰ κάμῃ, δίδει μίαν συγκεκριμένην ἀπάντησιν εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο[5]. Ὁ Robin προσπαθεῖ ἐν συνεχείᾳ εἰς τὰς σελίδας 450-451 τοῦ βιβλίου του νὰ δώσῃ μίαν ἱκανοποιητικὴν ἀπάντησιν καὶ λέγει ὀρθῶς, ὅτι ἡ ἰδέα ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἓν κεχωρισμένον ὑπόδειγμα, πρὸς τὸ ὁποῖον κατευθύνονται ὅλοι οἱ ἴσοι μεταξύ των ἀριθμοί: «qu'il faut bien qu'il y ait un Deux qui soit l'Idée de tous les «deux», un Trois sur lequel se modèlent tous les «trois» etc. et ce modèle est un modèle ideal parce qu'il est l'unité d'une multiplicité et que, à ce titre, il se sépare de cette multiplicité». Ἐν συνεχείᾳ παρατηρεῖ ὁ Robin, ὅτι ὑπάρχουν τοιαῦτα ὑποδείγματα κατ' ἀναγκαιότητα μόνον διὰ τοὺς πρώτους δέκα ἀριθμοὺς[6], προφανῶς ἔχων ὡς ἔρεισμα τὸ χωρίον *μετὰ τὰ φυσ.* 1084a 29-32 καὶ ὄχι πλατωνικόν τι χωρίον. Ἡ ὀρθὴ ὅμως ἀπάντησις, τὴν ὁποίαν ἔδωκεν ὁ Robin εἰς τὸ ἐρώτημα, διατὶ ἐδέχθη ὁ Πλάτων ἰδέας τῶν ἀριθμῶν, εἶναι κατὰ τὴν γνώμην μας παλαιοτάτη καὶ εὑρίσκεται ἤδη εἰς τὸν Συριανόν. Κατὰ τὸν Συριανὸν αἱ ἰδέαι καὶ οἱ εἰδητικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ παραδείγματος. «*Κατὰ τὸ παραδειγματικὸν ἰδίωμα καὶ ὁ ἀριθμὸς κέκληται καὶ μάλιστα πάντων ὁ εἰδητικός*»[7]. Ἔχομεν δηλαδὴ ἐδῶ τὴν σχέσιν π.χ. τῆς ἰδέας τοῦ δύο πρὸς τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα εἶναι δύο, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν σχέσιν π.χ. τῆς ἰδέας τῆς ὡραιότητος πρὸς τὰ ὡραῖα πράγματα. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁμιλεῖ ὁ Πλάτων καὶ διὰ τὴν ἐπιστήμην τῆς ἀστρονομίας, τῆς ὁποίας τὸ ἔργον χαρακτηρίζεται ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ χωρίον *Πολιτεία*, 529c-d, ὅτι εἶναι ἡ εὕρεσις τῶν ἀληθινῶν κινήσεων τῶν ἀστέρων, ἀπὸ τὰς ὁποίας αἱ ὁραταὶ κινήσεις αὐτῶν ἀποκλίνουν κατὰ πολὺ («*τῶν δὲ ἀληθινῶν πολὺ ἐνδεῖν*»). Ὑπάρχουν κατὰ τὸν Πλάτωνα κινήσεις, ἐντὸς τῶν ὁποίων ὑπάρχει ἡ ἀληθινὴ ταχύτης καὶ ἡ ἀληθινὴ βραδύτης μὲ τὰς ἀληθινὰς ἀριθμητικάς των σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ἐννοοῦνται «*λόγῳ καὶ διανοίᾳ .... ὄψει δ' οὔ*», καθὼς καὶ ὅλα τὰ ἀληθινὰ σχήματα (529d). Βλέπομεν ἐδῶ ὅτι ὁ Πλάτων ἐκλαμβάνει τὴν φύσιν ὄχι ὡς καθαρὸν ἐμπειρικὸν φαινόμενον, ἀλλ' ἀναζητεῖ ὄπισθεν τῶν φαινομένων τὰς ἀληθινὰς ἀριθμητικὰς σχέσεις τῶν κινήσεων καὶ τὰ ἀληθινὰ σχήματα, ἤτοι θέτει τὸ ἀεὶ ὂν εἰς ὑψηλότερον ἐπίπεδον ἀπὸ τὸ γιγνόμενον ὄν.

---

[5] Πβ. ἔνθ. ἀν. σ. 450: «Or ni les expositions, ni les critiques d'Aristote ne nous apportent de réponse directe à cette question».

[6] Πβ. ἐνθ. ἀν. σ. 451: Il n'y a pas besoin en effet d'autres modèles que de ceux qui composent la série décadique» καὶ σ. 274: «C'est à la Décade que s'arrête la série des Nombres idéaux et, quand on est arrivé à la Décade, on a obtenu le nombre parfait».

[7] Πβ. Συριανοῦ *ὑπόμν. εἰς μετὰ τὰ φυσ.* = *Comm. in Aristot. Gr. VI 1, σ. 103, 22-23 Kroll.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Ἡ ὀντολογικὴ ὑπόστασις τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων εἰς τὴν *Πολιτείαν*. Μεθοδολογικὴ διαφορὰ τῆς διαλεκτικῆς πρὸς τὴν εἰδικὴν ἐπιστήμην τῶν Μαθηματικῶν

Ι. Ἡ σχέσις μεταξὺ Μαθηματικῶν καὶ Ὀντολογίας εἰς τὴν «Πολιτείαν»

Εἰς τὴν *Πολιτείαν* ἀναλαμβάνει ὁ Πλάτων μίαν νέαν προσπάθειαν ἐκθέτων τὸν τρόπον ἐρεύνης τῆς εἰδικῆς ἐπιστήμης τῶν Μαθηματικῶν καὶ ἀντιπαραθέτων πρὸς αὐτὸν τὴν βασικὴν μέθοδον τῆς φιλοσοφικῆς του σκέψεως, τὴν διαλεκτικήν, ἡ ὁποία γίνεται ἐδῶ τὸ βασικὸν κριτήριον, διὰ νὰ κατατάξῃ ὁ Πλάτων ὀντολογικῶς τὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα εἰς τὸ γενικὸν πλαίσιον τῶν ὁρατῶν καὶ τῶν νοητῶν ἀντικειμένων (509d).

Εἰς τὸ σημεῖον ἀκριβῶς, ὅπου ὁ Πλάτων εἰς τὴν *Πολιτείαν* θέτει τὴν ἐρώτησιν εἰς τὴν εἰδικὴν ἐπιστήμην τῶν Μαθηματικῶν, κατὰ πόσον αὐτὴ περικλείει τὰς προϋποθέσεις δι᾽ ἕνα σχηματισμὸν μιᾶς θεωρίας τῶν ἰδεῶν, ἐπιτυγχάνεται ἡ θέσις ἑνὸς δυσκόλου προβλήματος, τὸ ὁποῖον ἀφορᾷ εἰς τὴν σχέσιν μεταξὺ Μαθηματικῶν καὶ Ὀντολογίας. Ὁ Πλάτων ἔθεσε κατὰ τρόπον συνειδητὸν τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἰς τὰ χωρία τῆς *Πολιτείας* 510c-e, 525b,d, 526b, 527b,e καὶ διεῖδε τὸ γνωσιολογικὸν καὶ ὀντολογικὸν διαφέρον, τὸ ὁποῖον ἔχουν τὰ Μαθηματικά. Ὅ,τι ἐζήτει νὰ δείξῃ, ἦτο ὅτι τὰ ἀντικείμενα τῶν Μαθηματικῶν ἔχουν κάτι ἀνάλογον πρὸς τὰς ἰδέας. Εἰς πολλὰ χωρία ἀφήνεται νὰ δειχθῇ ἡ πεποίθησις αὐτὴ τοῦ Πλάτωνος, π.χ. ὅταν χαρακτηρίζωνται τὰ Μαθηματικὰ ὡς *«ἀγωγὸς πρὸς ἀλήθειαν»* (*Πολιτ.* 525b). Ἔπειτα εἰς τὸ χωρίον 525d, τὸ ὁποῖον τονίζει, ὅτι *«τὸ περὶ τοὺς λογισμοὺς μάθημα»* (τὰ Μαθηματικὰ) *«σφόδρα ἄνω ποι ἄγει τὴν ψυχὴν καὶ περὶ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν ἀναγκάζει διαλέγεσθαι, οὐδαμῇ ἀποδεχόμενον ἐάν τις αὐτῇ ὁρατὰ ἢ ἁπτὰ σώματα ἔχοντας ἀριθμοὺς προτεινόμενος διαλέγηται,»* ἔχομεν μνείαν τῶν καθαρῶν Μαθηματικῶν (*«περὶ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν»*). Ἡ ἔννοια τῆς καθαρᾶς μονάδος ἀπαντᾶται εἰς τὸ 526a καὶ *Φίληβ.* 56d,e. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύναται νὰ ἐννοηθῇ καὶ τὸ χωρίον 527b, τὸ ὁποῖον τονίζει ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ καὶ ἡ γεωμετρία εἶναι ἐπιστῆμαι αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον πάντοτε εἶναι, καὶ ὄχι αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον γίγνεται καὶ παρέρχεται. Καὶ δι᾽ αὐτὸ εἶναι αὐ-

ταὶ ἓν μέσον, διὰ τοῦ ὁποίου ὁδηγεῖται τις *«τῇ νοήσει αὐτῇ»* (525c) εἰς τὴν καθαρὰν γνῶσιν καὶ τὴν θέαν τῆς ἀληθείας (527d,e). Ἐπειδὴ εἰς τὸν *Θεαίτ.* 195e γίνεται λόγος περὶ ἀριθμῶν *«ὧν διανοηθῆναι μόνον ἐγχωρεῖ»*, θέτομεν ἐδῶ τὸ πρόβλημα, ἂν τὰ Μαθηματικὰ ἀντιστοιχοῦν κατὰ τὸν Πλάτωνα πρὸς τὴν γνωστικὴν δύναμιν τοῦ νοῦ ἢ τῆς διανοίας.

Τὸ βασικὸν κείμενον, τοῦ ὁποίου ἡ σημασία καὶ αἱ δυσκολίαι θὰ μᾶς ἀπασχολήσουν εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο τῆς ἐρεύνης μας, εὑρίσκεται εἰς τὸ ς βιβλίον τῆς *Πολιτείας*, 510c-511e. Ὁ Πρόκλος εἰς τὸ ὑπόμνημά του διὰ τὴν *Πολιτείαν*[1] ἀναλύει ὀρθῶς τὸ σπουδαῖον αὐτὸ κείμενον εἰς ὡρισμένα προβλήματα, ὡς π.χ. εἰς τὸ τῶν ἀνίσων τομῶν, χωρὶς ὅμως νὰ εἰσέρχεται εἰς ἄλλα λεπτομερῆ προβλήματα, τὰ ὁποῖα δημιουργεῖ τὸ κείμενον αὐτὸ καὶ τὰ ὁποῖα θὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἐκθέσωμεν εἰς τὸ παρὸν καὶ τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον τῆς ἐρεύνης μας. Λίαν ἐπιτυχῶς δεικνύει ὁ Πρόκλος, ὅτι αἱ τομαὶ τῶν γραμμῶν δὲν σημαίνουν χωρισμόν, ἀλλὰ δηλώνουν μίαν συνέχειαν καὶ ὅτι ὁ Πλάτων δὲν νοεῖ ἐνταῦθα κεχωρισμένα τμήματα: *«Τὴν μὲν οὖν ἀφ' ἑνὸς πρόοδον τῶν ὄντων συνεχῆ καὶ ἡνωμένην οὖσαν ἐνδείξασθαι βουλόμενος γραμμῇ μιᾷ τὴν συνέχειαν ταύτην ἀπείκασεν, δι' ὁμοιότητος καὶ ἀλληλουχίας τῶν δευτέρων ἀπὸ τῶν πρώτων ἀεὶ προϊόντων, κενοῦ δὲ οὐδενὸς τὰ ὄντα διείργοντος*[2].

2. Ἡ ἔννοια τῆς ὑποθέσεως κατὰ Πλάτωνα εἰς τὸ ὑπὸ συζήτησιν κείμενον

Εἰς 510c-511a τῆς *Πολιτείας* προσπαθεῖ ὁ Πλάτων νὰ ἐκθέσῃ τὸν τρόπον ἐρεύνης τῶν μαθηματικῶν:

> *«οἶμαι γάρ σε εἰδέναι ὅτι οἱ περὶ τὰς γεωμετρίας τε καὶ λογισμοὺς καὶ τὰ τοιαῦτα πραγματευόμενοι, ὑποθέμενοι τό τε περιττὸν καὶ τὸ ἄρτιον καὶ τὰ σχήματα καὶ γωνιῶν τριττὰ εἴδη καὶ ἄλλα τούτων ἀδελφὰ καθ' ἑκάστην μέθοδον, ταῦτα μὲν ὡς εἰδότες, ποιησάμενοι ὑποθέσεις αὐτά, οὐδένα λόγον οὔτε αὐτοῖς οὔτε ἄλλοις ἔτι ἀξιοῦσι περὶ αὐτῶν διδόναι ὡς παντὶ φανερῶν, ἐκ τούτων δ' ἀρχόμενοι τὰ λοιπὰ ἤδη διεξιόντες τελευτῶσιν ὁμολογουμένως ἐπὶ τοῦτο οὗ ἂν ἐπὶ σκέψιν ὁρμήσωσι».*
>
> *(Πολιτείας ς. 510c-d)*

---

[1] Πρόκλου, *Εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος ὑπόμνημα* I, Lipsiae 1899/Amsterdam 1965, σ. 288, 1 κ.ἑξ. *Kroll.*

[2] Πρόκλου, ἔνθ' ἀν., σ. 288, 6-11.

Οἱ μαθηματικοὶ χρησιμοποιοῦν κατὰ τὸν Πλάτωνα ὑποθέσεις χωρὶς νὰ δίδουν λόγον δι᾽αὐτάς, μὲ τὴν πεποίθησιν ὅτι αὐταὶ εἶναι εἰς ὅλους σαφεῖς καὶ γνωσταὶ (*«ὡς εἰδότες»*). Τὸ κῦρος αὐτῶν τῶν προϋποθέσεων εἶναι δι᾽ αὐτοὺς δεδομένον καὶ ὄχι πρόβλημα (510c). Ἤδη διακρίνομεν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τὴν ὑφισταμένην διαφορὰν ἀπὸ τὰς συγχρόνους ὑποθέσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ἀνακλητοῦ. Αἱ ὑποθέσεις αὐταὶ εἶναι διὰ τοὺς μαθηματικοὺς σημεῖα ἐκκινήσεως, ὥστε νὰ δυνηθοῦν νὰ ἀποδείξουν κατόπιν κατὰ τρόπον μὴ ἐπιδεχόμενον ἀντίφασιν (*«ὁμολογουμένως»*) τὸ πρόβλημα τῆς ἐρεύνης των (*«ἐπὶ τοῦτο οὖ ἂν ἐπὶ σκέψιν ὁρμήσωσι»* 510d). Τοιαύτας ὑποθέσεις ὀνομάζει ὁ Πλάτων τὸ περιττόν, τὸ ἄρτιον, τὰ σχήματα καὶ τὰ τρία εἴδη τῶν γωνιῶν (510c). Ἤδη τὸ δύσκολον πρόβλημα εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ σημασία τῆς ὑποθέσεως κατὰ τοὺς μαθηματικοὺς καὶ κατὰ τὸν Πλάτωνα. Ὑπόθεσις κατὰ λέξιν σημαίνει,ὅ,τι ὑποτίθεται (ὑπὸ καὶ τίθεσθαι), ὅ,τι δύναται νὰ ἰσχύῃ ὡς βάσις διὰ κάτι ἄλλο. Γνωρίζομεν σήμερον, ὅτι τὰ Μαθηματικὰ εἶναι μία «εἰ-οὕτω-ἐπιστήμη», τῆς ὁποίας αἱ προϋποθέσεις δὲν ἀποδεικνύονται καὶ μὲ τὰς ὁποίας προσωρινῶς ἐργαζόμεθα μέχρις ἐκείνου τοῦ σημείου, κατὰ τὸ ὁποῖον αὐταὶ ἢ θὰ ἐπιβεβαιωθοῦν ἢ θὰ ἀναιρεθοῦν. Ἐκ τοῦ κειμένου 510c-511e συνάγεται, ὅτι ὁ τρόπος ἐρεύνης εἰς τὰ Μαθηματικὰ διὰ τῶν ὑποθέσεων εἶχε ἐπικρατήσει καὶ ἔπαιζε βασικὸν ρόλον, καθ᾽ὃν χρόνον ἐδίδασκε ὁ Πλάτων. Πρέπει βεβαίως νὰ τονισθῇ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, ὅτι μία ὑπόθεσις ἤδη μὲ τὴν συγκατάθεσιν τοῦ ἀναλόγου συζητητοῦ γίνεται βάσις καὶ θεμέλιον μιᾶς ἀπὸ κοινοῦ διεξαγομένης ἐρεύνης. Δι᾽αὐτὸ ὀνομάζονται αἱ ὑποθέσεις εἰς τὴν πλατωνικὴν διαλεκτικὴν καὶ *«ὁμολογήματα»*, διὰ τὰ ὁποῖα οἱ συζητηταὶ-ἐρευνηταὶ πρέπει νὰ εἶναι σύμφωνοι (*Θεαίτ.* 155a-b)[3]. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἀνακύπτει ἓν ἐρώτημα, ἐὰν δηλαδὴ αἱ ὑποθέσεις, τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν κατὰ τὸν Πλάτωνα οἱ μαθηματικοί, εἶναι ἀκριβῶς αἱ ἀναπόδεικτοι ἀρχαί, ἐκ τῶν ὁποίων παράγονται (=ἀποδεικνύονται) αἱ μαθηματικαὶ προτάσεις κατὰ λογικὴν αὐστηρότητα. Ὁ K. v. Fritz ὁ ὁποῖος ὀρθῶς λέγει, ὅτι μία ἀξιωματικὴ ἐποικοδόμησις τῶν Μαθηματικῶν ἐπεχειρήθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων[4], προσπαθεῖ νὰ ἀποδώσῃ τὴν ἄποψιν περὶ τῶν Μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης ἀρχομένης ἀπὸ ἀναποδείκτους ἀρχὰς ὄχι τὸ πρῶτον εἰς τὸν Πλάτωνα ἀλλὰ εἰς τὸν Ἀριστο-

---

[3] Διὰ τὴν ἔννοιαν καὶ τὴν μέθοδον τῆς ὑποθέσεως βλ. K. Gaiser, *Platons Menon und die Akademie* εἰς τόμον: *Das Problem der ungeschr. Lehre Platons*, σ. 358-365, 379-383, 389-390.

[4] Βλ. *Die ἀρχαὶ in der griechischen Mathematik*, εἰς: *Archiv für Begriffsgeschichte*, 1, Bonn 1955, σ. 14.

τέλη[5]. Τοῦτο ἠρευνήθη ὑπὸ τοῦ A. Szabó, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ χωρίον 510c-d καθιστᾷ ἀδύνατον τὴν ἐκδοχὴν αὐτὴν τοῦ K. v. Fritz[6]. Τὶς ἐκ τῶν δύο ἔχει δίκαιον; Ὁ Ἀριστοτέλης ὁμιλεῖ περὶ ἀναποδείκτων ἀρχῶν καὶ ἐξ αὐτῶν παραγομένων προτάσεων (*Ἀναλ. ὕστ.* A 10, 76a, 31-34). Οὐδεὶς ἀριθμητικὸς ἢ γεωμέτρης ἀναλαμβάνει κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη νὰ εἴπῃ κάτι περὶ τῆς ἀληθείας ἢ μὴ τῶν ἀξιωμάτων (*μετὰ τὰ φυσ.* Γ 3, 1005a 29-31). Ἐκτὸς αὐτοῦ χωρεῖ ὁ Ἀριστοτέλης εἰς κριτικὸν ἔλεγχον μὲ δύο ἀπόψεις εἰς τὰ *Ἀναλ. ὕστ.* A 3, 72b 5 καὶ ἑξ., ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ὑποστηρίζει, ὅτι δὲν δύναται γενικῶς νὰ ὑπάρξῃ μία ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη, ἡ δὲ ἄλλη, ὅτι ὅλα δύνανται νὰ ἀποδειχθοῦν, προσπαθεῖ δὲ νὰ δείξῃ, ὅτι πᾶσα ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη πρέπει νὰ ἀνάγεται εἰς ἀναποδείκτους ἀρχὰς (*Ἀναλ. ὕστ.* A 3, 72b, 18 καὶ ἑξ.). Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι αἱ ἀνωτέρω ἀπόψεις τοῦ Ἀριστοτέλους εἶναι δυνατὸν νὰ ἀπηχοῦν τὰς ἀπόψεις τοῦ πλατωνικοῦ χωρίου τῆς *Πολιτείας*, 510c-d, τὸ ὁποῖον ὅμως ἀναφέρεται εἰδικῶς εἰς τοὺς μαθηματικούς.

Προσεκτικωτέρα ὅμως ἔρευνα τοῦ προβλήματος δεικνύει, ὅτι ὁ Ἀριστοτέλης διακρίνει μεταξὺ ἀρχῆς καὶ «*ὑποθέσεως*» (*Ἀναλ. ὕστ.* A 10, 76b 23-24), ὅπου ἐδῶ αἱ ἀρχαὶ ἑκάστου γένους πάσης ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης ἐννοοῦνται ὡς ἀναπόδεικτοι (76a 31-32), καὶ λέγει ὅτι μία ἀρχὴ δὲν εἶναι ὑπόθεσις: «*Οὐκ ἔστι δ' ὑπόθεσις ὃ ἀνάγκη εἶναι δι' αὐτὸ καὶ δοκεῖν ἀνάγκη*». Ἡ διάκρισις αὐτὴ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκληφθῇ ὡς μία κριτικὴ εἰς τὴν πλατωνικὴν περιγραφὴν τοῦ τρόπου ἐρεύνης τῶν μαθηματικῶν, ὅπως αὐτὴ γίνεται εἰς τὸ χωρίον *Πολιτεία* 510c-d[7]. Ἐὰν ὅμως λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι «*ὑπόθεσις*» κατὰ τὸν Πλάτωνα εἰς τὰ Μαθηματικὰ σημαίνει καὶ ἀναπόδεικτον ἀρχὴν (Πβ. *Πολιτεία*, 533c, ὅπου τοῦτο λέγεται εἰδικῶς περὶ τῆς γεωμετρίας), τότε γίνεται μὴ πειστικὴ ἡ ἐκδοχὴ τοῦ K. v. Fritz, ὅτι τὰ Μαθηματικὰ ὡς ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη ἐξ ἀναποδείκτων ἀρχῶν χρεωστοῦν αὐτὴν τὴν ἰδιότητά των εἰς τὸν Ἀριστοτέλη, ἡ δὲ ἄποψις τοῦ A. Szabó, ὁ ὁποῖος ἐκλαμβάνει εἰς τὸ χωρίον 510c-d τὰς ὑποθέσεις ὡς ἀναποδείκτους ἀρχὰς τῆς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης τῶν Μαθηματικῶν, πρέπει νὰ ἐκληφθῇ ὡς ὀρθή.

---

[5] Ἔνθ. ἀν. σ. 34, 35, 43.

[6] Βλ. *Die Philosophie der Eleaten und der Aufbau von Euklids Elementen. Φιλοσοφία* I, Athen 1971, σ. 198-199.

[7] Τοῦτο παρετηρήθη ὀρθῶς καὶ διηρευνήθη τὸ πρῶτον ἀπὸ τὸν K. v. Fritz, βλ. *Die ἀρχαί in der griech. Math.* σ. 38-42, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸν Ross, ὁ ὁποῖος εἰς τὸ ὑπόμνημά του (*Aristotle's prior and posterior Analytics*, Oxford 1949, σ. 538-541) δὲν παρετήρησε τὴν σχέσιν τοῦ 10 κεφαλαίου του 1ου βιβλίου τῶν *Ἀναλ. ὑστ.* πρὸς τὸ πλατωνικὸν χωρίον τῆς *Πολιτείας* 510c-d.