1. Τὸ γεγονός, ποὺ ἔχει διαπιστωθῆ στὴν ἔρευνα τοῦ κ. G. Mialaret κατὰ τὸ ὁποῖο βρίσκομε διαφορετικὰ ποσοστὰ % στὰ ἀποτελέσματα, ποὺ δίνουν τὰ παιδιὰ ἐπὶ τῶν προβλημάτων, ποὺ ἀπαιτοῦν τὴν ἴδια πράξη ἀπὸ τοὺς ἴδιους μαθητὲς (στὴν ἴδια τάξη), μᾶς ὑποχρεώνει νὰ σκεφτοῦμε, ὅτι ἡ λύση ἑνὸς προβλήματος δὲν εἶναι καθαρὰ λογικὴ δραστηριότητα καὶ δὲν ἐξαρτᾶται παρὰ ἀπὸ ποικίλες σχολικὲς συνήθειες· ὑπάρχουν δηλαδὴ ἀκόμη καὶ ἄλλοι παράγοντες (συναισθήματα, ἐμπειρία τοῦ παιδιοῦ ἀπὸ τὴ ζωή, μηχανισμοὶ τῆς γλώσσας κλπ.), τοὺς ὁποίους ἐξετάσαμε σὲ ἄλλο κεφάλαιο (δὲν δημοσιεύεται ἐδῶ) καὶ ἀπὸ τοὺς ὁποίους οἱ παιδαγωγικὲς συνέπειες πρόκειται ἀμέσως νὰ μᾶς ἀπασχολήσουν.

β΄ *Παιδαγωγικὲς συνέπειες ἀπὸ τὰ ψυχολογικὰ δεδομένα*

Κατὰ τὴ γενικὴ ἔρευνά μας ἐπὶ τῶν δυσκολιῶν τῶν μαθητῶν στὴν ἀριθμητικὴ μελετήσαμε τὰ δεδομένα ἀπὸ τὴν ψυχολογία τοῦ παιδιοῦ. Δημοσιεύομε ἐδῶ μόνον τὶς παιδαγωγικὲς συνέπειες γιὰ τὴ διδακτικὴ τῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων, ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὰ ψυχολογικὰ δεδομένα.

1. Τὸ περιεχόμενο τῶν προβλημάτων: Κατὰ τὴ σύνταξη τῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων ἀπὸ τὴ ζωή, πρέπει νὰ λαμβάνεται ὑπόψη ἡ ἡλικία τοῦ παιδιοῦ, κατὰ τὴν ὁποία ἀποκτᾶ τὴν ἔννοια τῆς διατηρήσεως τοῦ βάρους τοῦ ὄγκου, τοῦ χρόνου καὶ τῆς ταχύτητος. Διότι ἡ χρησιμοποίηση π.χ. βαρῶν στὸ περιεχόμενο ἑνὸς προβλήματος θέτει ἕνα πρόβλημα: τὸ παιδὶ τῶν 7 ἐτῶν δὲν παραδέχεται τὴ διατήρηση τοῦ βάρους ἑνὸς σώματος στὶς διάφορες μεταβολὲς τῆς μορφῆς τοῦ σώματος, ὁπότε ἕνα βάρος π.χ. 60 γρμ. δὲν εἶναι ἀναγκαστικὰ ἰσοδύναμο γι' αὐτὸ μὲ 6 βάρη τῶν 10 γρμ. (ἀξίωμα μαθήσεως: προσαρμογὴ τῶν παιδευτικῶν ἐνεργειῶν στὸ ἐπίπεδο ὡριμάσεως τοῦ παιδιοῦ).

Ἡ ἀπόκτηση τῶν ἐννοιῶν τοῦ βάρους καὶ τοῦ ὄγκου, κατὰ τὴν ἐξελικτικὴ ψυχολογία τοῦ κ. J. Paget(1) πραγματοποιεῖται κατὰ τὰ ἑξῆς στάδια:

Πείραμα: Παρουσιάζομε στὰ παιδιὰ μιὰ σφαίρα ἀπὸ πλαστιλίνη καὶ ζητοῦμε νὰ κατασκευάσουν μὲ πλαστιλίνη μιὰ ἄλλη ἐντελῶς ὅμοια, «τὸ ἴδιο χοντρὴ καὶ τὸ ἴδιο βαρειά». Ἀφοῦ διαπιστωθῆ ὅτι οἱ δύο σφαῖρες εἶναι ὅμοιες, ἐπιμηκύνομε τὴ μιὰ ἀπ' αὐτὲς καί, ἀφοῦ τὴν κάνομε «ψωμὶ — μπαστούνι», τὴν κόβομε σὲ κομματάκια, τὰ ὁποῖα ἀραιώνομε ἢ τὴν μεταβάλλομε σὲ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια σὰν γαλέττα. Ἐρωτοῦμε τὰ παιδιά: «Ἔχουν ἀκόμη τὴν ἴδια ποσότητα πλαστιλίνης, τὸ ἴδιο βάρος ἢ τὸν ἴδιο ὄγκο οἱ δύο ἐκεῖνες σφαῖρες ἔτσι, ὅπως ἔχει μεταβληθῆ ἡ μία ἀπ' αὐτές;».

Τὰ παιδιὰ μέχρις ἡλικίας 7 ἐτῶν νομίζουν ὅτι, μ' αὐτὴ τὴν τριπλὴ σχέση, ἡ σφαίρα ἔχει ἀλλάξει, γιατὶ ἔχει μεταβληθῆ ἡ ἐμφάνισή της. Μετὰ τὸ 7ο ἔτος, τὸ ἀξίωμα τῆς «διατηρήσεως τῆς οὐσίας τῶν πραγμάτων» ἔχει ἤδη κατακτηθῆ. Ἡ διατήρηση τοῦ βάρους γίνεται δεκτὴ ἀπὸ τὸ παιδί, κατὰ μέσον ὅρον, πέραν τοῦ 10ου ἔτους, καὶ τοῦ ὄγκου κατὰ

---

1. J. Piaget - B. Inhelder : «Le developpement des quantités chez l' enfant», Paris 1941, p. 7, 83,

τὸ 11—12 ἔτος. Διαπιστώνομε τὰ ἴδια στάδια σὲ ἕνα ἄλλο πείραμα, ποὺ ἀναφέρεται στὴ διατήρηση τῆς οὐσίας, τοῦ βάρους καὶ τοῦ ὄγκου ἑνὸς τεμαχίου ἀπὸ ζάχαρη, τὸ ὁποῖο διαλύομε μέσα στὸ νερό.

Ἡ ἀπόκτηση τῆς ἐννοίας τοῦ χρόνου (1)

Πείραμα ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς γεγονότων: Ἀπὸ ἕνα μπουκάλι ἀφήνομε νὰ τρέχῃ χρωματισμένο νερὸ σὲ ἕνα ἄλλο μπουκάλι διακόπτοντας τὴ ροὴ μὲ μιὰ βρύση (προσαρμοσμένη κοντὰ στὸν πυθμένα) κατὰ κανονικὰ χρονικὰ διαστήματα. Τὸ παιδί, ποὺ παρατηρεῖ, πρέπει, σὲ ἕτοιμα σχέδια (μπουκαλιῶν), νὰ δείχνῃ μὲ μιὰ γραμμὴ σὲ κάθε στάση τῆς ροῆς τὸ ἐπίπεδο τοῦ νεροῦ στὸ ψηλότερο μπουκάλι καὶ στὸ χαμηλότερο. Κατόπιν, ἀνακατώνομε τὰ σχέδια αὐτὰ καὶ ζητοῦμε ἀπὸ τὸ παιδὶ νὰ τὰ ταξινομήσῃ κατὰ χρονολογικὴ σειρά, δηλαδὴ ν' ἀναπαραστήσῃ μὲ τὰ σχέδια τὴ ροὴ τοῦ νεροῦ στὰ διαδοχικά του στάδια.

Τὸ παιδὶ τῶν **9** ἐτῶν μπορεῖ ν' ἀντιληφθῇ τὴν ἀντιστοιχία στὴ σειρὰ τῶν σχεδίων καὶ κατὰ συνέπεια τὶς σχέσεις τῆς διαδοχῆς καὶ τοῦ συγχρονισμοῦ.

Πείραμα ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῆς χρονικῆς διαρκείας: Παρουσιάζομε στὸ παιδὶ δύο ἀνθρώπους ἀπὸ χαρτόνι καὶ θέτομε σὲ κίνηση καὶ τοὺς δύο ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο καὶ μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα. Σὲ κάποια στιγμή, ὁ ἄνθρωπος Β σταματάει, ἐνῶ ὁ Α συνεχίζει λιγάκι ἀκόμη τὴν πορεία του. Ζητοῦμε ἀπὸ τὸ παιδὶ νὰ μᾶς εἰπῇ: «ποιὸς ἐβάδισε περισσότερο χρόνο;». Τὸ παιδὶ **9** ἐτῶν μπορεῖ νὰ διανοηθῇ ἐσωτερικὰ καὶ νὰ κατανοήσῃ τὶς ποιοτικὲς διάρκειες καὶ τὴ μέτρηση τοῦ χρόνου.

Πείραμα ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῶν ἡλικιῶν: Ζητοῦμε ἀπὸ τὸ παιδὶ νὰ συγκρίνῃ τὴν ἡλικία του μὲ ἐκείνη τῶν ἀδελφῶν του (ἀρρένων ἢ θηλέων), τῶν γονέων του ἢ ἄλλων προσώπων, στὸ παρὸν καὶ στὸ μέλλον (ποιὸς εἶναι νεώτερος τώρα, ὕστερα ἀπὸ μερικὰ χρόνια, ὅταν θὰ μεγαλώσῃ κλπ.) καὶ νὰ δικαιολογήσῃ τὶς ἀπαντήσεις του. Κατὰ τὴ διάρκεια τοῦ πρώτου σταδίου (4-6 ἐτῶν), οἱ ἡλικίες γιὰ τὸ παιδὶ εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπὸ τὴ σειρὰ τῶν γεννήσεων καὶ οἱ διαφορὲς ἡλικίας μποροῦν νὰ μεταβάλλωνται μὲ τὸ χρόνο. Κατὰ τὸ δεύτερο στάδιο (7-8 ἐτῶν) ἢ οἱ ἡλικίες ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴ σειρὰ γεννήσεων, ἀλλὰ οἱ διαφορὲς ἡλικίας δὲ διατηροῦνται κατὰ τὴν πορεία τῆς ἀνθρώπινης ὑπάρξεως, ἢ οἱ διαφορὲς διατηροῦνται, ἀλλὰ δὲν ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴ σειρὰ τῶν γεννήσεων. Κατὰ τὸ τρίτο στάδιο (8-**9** ἐτῶν), οἱ διάρκειες καὶ οἱ διαδοχὲς συντονίζονται ὡς ἔννοιες στὸ πνεῦμα τοῦ παιδιοῦ καὶ οἱ σχετικὲς μερικότερες ἔννοιες διατηροῦνται χάρις σ' αὐτὸν τὸν ἴδιο τὸ συντονισμό!

Ἡ κατάκτηση τῆς ἐννοίας τῆς ταχύτητος (2)

Πείραμα: Παρουσιάζομε στὰ παιδιὰ δύο εὐθεῖες παράλληλες σὲ ἕνα φύλλο — χαρτί. Στὴν πρώτη γραμμὴ προχωρεῖ ἕνα αὐτοκίνητο, τὸ ὁποῖο, ἀπὸ τὸ πρῶτο πρωινὸ ἕως τὸ πρῶτο βραδυνό, ἔχει διανύσει κάποια ἀπόσταση, π.χ. 2 ἑκμ. Κατὰ τὸ χρόνο αὐτόν, ἕνας ἄνθρωπος (ἀπὸ

---

1. J. Piaget, «Le developpement de la nation dutemps chez l' enfant», P.U.F. 1946 p.p. 5, 37, 87, 211.

2. J. Piaget, «Les notions du mouvoment et de la vitesse chez l' enfant, P.U.F. 1946 p. 210.

πλαστιλίνη, χαρτόνι), πού ἀναχωρεῖ ἀπό τό ἴδιο σημεῖο καί τήν ἴδια ὥρα διανύει μέ μοντοσυκλέττα μιά μικρότερη διαδρομή (δέν λέγεται, φυσικά, αὐτή ἡ λέξη καί περιορίζεται κανείς νά σημειώση τίς στάσεις τοῦ αὐτοκινήτου στά 2 ἑκμ. καί τοῦ ἀνθρώπου στό 1 ἑκμ.). Θέτομε στά παιδιά τίς ἑξῆς ἐρωτήσεις: Εἰσαγωγική ἐρώτηση ἐπί τοῦ συγχρονισμοῦ τῶν ἐκκινήσεων, τῶν ἀφίξεων καί ἐπί τῆς ἰσότητος τῶν συγχρόνων διαρκειῶν τῆς πορείας. ***Ἐρώτηση I:*** Πόσο θά βαδίση τό αὐτοκίνητο τή δεύτερη, τήν τρίτη ἡμέρα, ἄν ἀναχωρῆ καί φθάνη τίς ἴδιες ὧρες καί βαδίζη μέ τήν ἴδια ταχύτητα; Ἄρα, σέ ἴσες ταχύτητες καί χρόνους εὕρεση τῆς ἰσότητος τῶν ἀποστάσεων. ***Ἐρώτησις II:*** Ποία διαδρομή θά διανύση ὁ ἄνθρωπος, ἄν συνεχίζη νά τρέχη σέ ἴσους χρόνους μέ τή δική του ταχύτητα; (διατήρηση τῆς διαφορᾶς τῶν ταχυτήτων). ***Ἐρώτηση III.*** Τήν τελευταία ἡμέρα, τό αὐτοκίνητο δέν τρέχει παρά τό ἥμισυ τῆς ἡμέρας. Ποῦ φθάνει; ***Ἐρώτηση IV:*** Ἡ ἴδια ἐρώτηση, ὅπως καί προηγουμένως, ἀλλ' αὐτή τή φορά γιά τόν ἄνθρωπο. ***Ἐρώτηση V:*** Ὅταν μᾶς δοθῆ μιά θέση τοῦ αὐτοκινήτου (π.χ. ἕβδομη ἡμέρα) καί μιά θέση τοῦ ἀνθρώπου (π.χ. τήν ἴδια ἡμέρα ἤ τήν 3η ἡμέρα), πόσες ἡμέρες θά χρειασθῆ ὁ ἄνθρωπος, γιά νά φθάση τό αὐτοκίνητο, ἐφ' ὅσον ἐκεῖνο θά μένη ἀκίνητο; ***Ἐρώτηση VI:*** Ἡ ἀπόσταση (ἡ ἀπόλυτη) μεταξύ τῶν σημείων ἀφίξεως τοῦ αὐτοκινήτου καί τοῦ ἀνθρώπου, στό τέλος κάθε ἡμέρας, παραμένει ἡ ἴδια ἤ μεγαλώνει κανονικά; Τό παιδί, κατά τό 10ο - 11ο ἔτος μπορεῖ νά λύση τά προβλήματα αὐτά νοερά μέ ἀφηρημένο συλλογισμό.

Συμπέρασμα: Σέ ὅ,τι ἀφορᾶ στό περιεχόμενο τῶν συγκεκριμένων προβλημάτων ἀπό τή ζωή, παρατηροῦμε ὅτι ὁ δάσκαλος μπορεῖ νά θέτη προβλήματα στά παιδιά, πού ἀναφέρονται:

α) Στήν ἔννοια τοῦ βάρους ἀπό τό 10 ἔτος.
β) Στήν ἔννοια τοῦ ὄγκου ἀπό τό 11-12 ἔτος.
γ) Στήν ἔννοια τοῦ χρόνου (χρονική σειρά γεγονότων, διάρκεια, ἡλικίες) ἀπό τό 9ο ἔτος.
δ) Στήν ἔννοια τῆς ταχύτητος ἀπό τό 10-11 ἔτος.

2. *Τό ἀξίωμα τῶν ἐσωτερικῶν κινήτρων.*

Ἡ μάθηση εἶναι ἀποτελεσματικότερη ὅταν τό ἄτομο διαπνέεται ἀπό ἐσωτερικά κίνητρα πρός τό ἀντικείμενο μαθήσεως. Τά κίνητρα αὐτά παρουσιάζονται, ὅταν τό ἀντικείμενο μαθήσεως σχετίζεται μέ τίς βασικές ἀνάγκες τοῦ ἀνθρώπου — παιδιοῦ (βιολογικές καί πνευματικές).

Γι' αὐτό, τά προβλήματα, πού παρουσιάζονται στά παιδιά, πρέπει ν' ἀναφέρωνται στά ἔξοδα καί στά προϊόντα τοῦ σχολικοῦ κήπου, στίς δραστηριότητες τοῦ σχολικοῦ συνεταιρισμοῦ, στά ἔσοδα τῶν γονέων καί τῶν ἀδελφῶν, πού ἐργάζονται ,στά ἔξοδα μιᾶς ἡμέρας, μιᾶς ἑβδομάδος κλπ. στήν οἰκογένεια, στά ἔξοδα τῶν γονέων γιά τή διατροφή καί τήν ἐνδυμασία τοῦ παιδιοῦ, στά ἔξοδα τοῦ Κράτους γιά κάθε μαθητή σέ ἕνα σχολικό ἔτος, στό οἰκονομικό συμφέρον αὐτῆς ἤ ἐκείνης τῆς ἐργασίας, πού γίνεται στό περιβάλλον τοῦ παιδιοῦ ἤ σέ ἄλλα μακρυνά περιβάλλοντα κλπ.

Ἐπειδή εἶναι δύσκολο, μερικές φορές, νά βρεθοῦν ψυχολογικά κίνητρα, μποροῦμε νά καταφεύγωμε στό «παντοπωλεῖο τῆς τάξης», πού ὀργανώνουν οἱ μαθητές σέ μιά γωνία τῆς αἴθουσας. Σ' αὐτό τό παντοπωλεῖο βρίσκει κανεὶς δείγματα ἀπὸ διάφορα ἐμπορεύματα μὲ ἐτικέττες, στὶς ὁποῖες ἀναγράφονται οἱ τιμές τους, τὸ βάρος τους, τὸ περιεχόμενό τους, τὸ μῆκος τους κλπ. Τὰ παιδιὰ παίζουν τὸν «παντοπώλη» καὶ ἔτσι ἐξασφαλίζονται εὐνοϊκὰ γιὰ τὰ ἀριθμητικὰ προβλήματα ψυχολογικὰ κίνητρα.

3. Τὸ ἀξίωμα τῶν συγκεκριμένων πράξεων τοῦ παιδιοῦ:

Κατὰ τὴ λύση τῶν προβλημάτων, ὁ δάσκαλος ὀφείλει νὰ καθοδηγῇ τοὺς μαθητές: α) στὴν ἐκτέλεση συγκεκριμένων πράξεων μὲ πραγματικὰ ἀντικείμενα, β) στὴ γραφικὴ παράσταση τῶν πράξεων καὶ γ) στὴ νοερὴ ἐπανάληψη τῆς πραγματικῆς πράξης (ἐσωτερικὴ ἀνασύνθεση τῶν πράξεων, ἐσωτερικοποίηση τῶν πράξεων) (1).

Παράδειγμα: Ἔχετε ἕνα οἰκόπεδο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευρᾶς 50 μ. Ἕνας δρόμος μὲ ὁμοιόμορφο πλάτος τὸ διασχίζει κατ' εὐθεῖαν καὶ λοξὰ ἀπὸ τὴν πλευρὰ ΑΔ πρὸς τὴν πλευρὰ ΒΓ. Δὲν εἶναι γνωστὸ σὲ ποιὰ ἀπόσταση ἀπὸ τὸ Α εἰσέρχεται στὸ οἰκόπεδο οὔτε σὲ ποιὰ ἀπόσταση ἀπὸ τὸ Α εἰσέρχεται στὸ οἰκόπεδο οὔτε σὲ ποιὰ ἀπόσταση ἀπὸ τὸ Β ἐξέρχεται. Ἐκεῖνο, ποὺ γνωρίζομε, εἶναι ὅτι ὁ δρόμος διακόπτει ἐπὶ 6 μέτρα τὴ γραμμὴ ΑΔ καὶ τὴ γραμμὴ ΒΓ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἡ κατάλληλη ἀκόμη γιὰ καλλιέργεια;»: Ὁ μαθητὴς ἐκτελώντας τὴν πραγματικὴ πράξη, μπορεῖ νὰ κάμη τὰ ἑξῆς: «Νά, τὸ οἰκόπεδό μου (ἕνα φύλλο — χαρτί). Διπλώνω τὸ φύλλο ἔτσι, ὥστε νὰ φέρω τὴ γραμμὴ γδ ἐπὶ τῆς γραμμῆς αβ. Κόβω καὶ καταργῶ τὸ δρόμο, ὁπότε τὸ ἀρχικὸ τετράγωνό μου γίνεται παραλληλόγραμμο μήκους 50 μ. καὶ πλάτους 50—6=44) μ. Ἡ καλλιεργήσιμη ἐπιφάνεια εἶναι τότε 50Χ44 μ., ἤτοι 2.200 τ.μ.». β) Ὁ μαθητὴς παριστάνει γραφικὰ τὶς πράξεις αὐτές. γ) Σκέπτεται νοερὰ τὴν πραγματικὴ πράξη ἀνασυνθέτοντάς την ἐσωτερικά.

4. Οἱ «σχολικοὶ συλλογισμοί», ποὺ διδάσκονται ἀπὸ τοὺς δασκάλους, δὲν εἶναι πάντοτε ἐφαρμόσιμοι, ὅπως ἔχουν, στὴ λύση τῶν συγκεκριμένων προβλημάτων ἐπὶ τοῦ πρακτικοῦ πεδίου.

1ο Παράδειγμα: Πρόβλημα: «Μιὰ κουζίνα ἔχει πλευρὲς 315 ἑκμ. Χ 400 ἑκμ. Στρώνομε τὸ πάτωμα μὲ μικρὲς τετράγωνες σανίδες πλευρᾶς 20 ἑκμ. Πόσες θὰ χρειαστοῦμε;» Στὸ πρόβλημα αὐτό, ἡ συνηθισμένη «σχολικὴ λύση» δίνει τὰ ἑξῆς ἀποτελέσματα: 315Χ400—126000 τ. ἑκμ. (= ἐπιφάνεια τοῦ δαπέδου) 20 ἑκμ. Χ 20 ἑκμ. = 400 τ. ἑκμ. (= ἐπιφάνεια μιᾶς μικρῆς σανίδας), λύση: 126000:400=315 σανίδες. Στὴν πράξη ὅμως διαπιστώνομε, ὅτι 315 σανίδες δὲν εἶναι ἀρκετές. Πράγματι, ἂς παρατηρήσωμε τὴν 1η σειρὰ κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς, ποὺ ἔχει μῆκος 315 ἑκμ. Ἂν ἐκτελέσωμε τὴν τοποθέτηση, βλέπομε, ἀμέσως, ὅτι δὲ βγαίνει ἀκέραιος ἀριθμὸς σανίδων: 315:20=15,75 σανίδες. Στὴν πράξη, παρατηροῦμε, ὅτι εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νὰ κόψωμε μιὰ σανίδα σὲ 0,75, πρᾶγμα ποὺ δὲν προβλέπει ἡ θεωρία, ἀλλὰ μπορεῖ νὰ γίνη φανερὸ μὲ τὴν πραγματικὴ πράξη τοῦ παιδιοῦ (σχέδιασμα σὲ χαρτί, δίπλωμα κλπ.).

---

1. H, Aebli, «Didactique psychologique», Neuchâtel, Paris, 1951, p. 104.
E. Michaud, «Action et pencée enfantines», Paris 1953, p. 22.

2ο Παράδειγμα: Προσφέρομε στὸ παιδὶ 20 κουτάκια μὲ σπίρτα καὶ τοῦ ζητοῦμε νὰ κάμη ἕνα πακέτο μὲ τὰ κουτάκια αὐτά. Τὸ παιδὶ μπορεῖ, θεωρητικὰ σκεπτόμενο, νὰ λύση τὸ πρόβλημα λέγοντας, ὅτι θὰ τοποθετήση τὰ κουτάκια σὲ εὐθεῖα γραμμὴ τὸ ἕνα ἐπάνω στὸ ἄλλο καὶ θὰ τὰ δέση. Ὅμως, στὴ συγκεκριμένη πράξη, θὰ διαπιστώση, ὅτι εἶναι προτιμότερο, ὕστερα ἀπὸ προσωπικὴ ἔρευνα, νὰ ταξινομήση κατὰ τετράδες τὰ κουτάκια (τὴ μιὰ ἐπάνω στὴν ἄλλη, ἤτοι 5 φορὲς τὰ 4=20).

5. ***Ἀπαραίτητη πάντοτε εἶναι ἡ ἐκτέλεση, κατὰ τὴ λύση τῶν προβλημάτων:***

α) Πράξεων κατ' εὐθεῖα φορά, β) κατ' ἀντίστροφη φορά, καὶ γ) συνδυαστικῶν πράξεων (ψυχολογία τοῦ κ. J. Piagle ἀξίωμα τῆς ὀργανώσεως συνόλων).

Παράδειγμα: «Ἡ Μαρία παίρνει ἀπὸ τὴ μητέρα της 4 νομίσματα τῶν 5 δραχμῶν, γιὰ ν' ἀγοράση ἕνα βιβλίο μὲ ἱστορίες 6 δρχ. καὶ ἕνα βιβλίο μὲ ὡραῖα τοπία 11 δρχ. Λογαριάζει, ἂν εἶναι ἀρκετὰ τὰ χρήματά της καὶ πόσα τῆς λείπουν ἢ τῆς μένουν ὑπόλοιπα, γιὰ νὰ ἐπιστρέψη στὴ μητέρα της».

α) Πράξη κατ' εὐθεῖα φορά: 5 δρχ. X4=20 δρχ. (=σύνολο ποὺ πῆρε), 6 δρχ. +11 δρχ. =17 δρχ. (=σύνολο ἐξόδων), 20 δρχ. —17 δρχ. =3 δρχ. (=ὑπόλοιπο).

α) Πράξη κατ' ἀντίστροφη φορά: «Ἡ Μαρία παίρνει ἀπὸ τὴ μητέρα της μερικὰ νομίσματα τῶν 5 δρχ., γιὰ ν' ἀγοράση ἕνα βιβλίο μὲ ἱστορίες 6 δρχ. καὶ ἕνα βιβλίο μὲ ὡραῖα τοπία 11 δρχ. Ἐπιστρέφει στὴ μητέρα της 3 δρχ. Πόσα νομίσματα τῶν 5 δρχ. πῆρε ἀπὸ τὴ μητέρα της;»: 3+6+11=20 δρχ., 20:5=4 νομίσματα τῶν 5 δρχ.

γ) Συνδυαστικὴ πράξη: (ἕνας ἄλλος συλλογισμός, ποὺ ὁδηγεῖ στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα): σύνολο χρημάτων, ποὺ ἔλαβε: 5X4=20 δρχ., ὑπόλοιπο, ὕστερα ἀπὸ τὴν πρώτη δαπάνη: 20—6=14 δρχ., ὑπόλοιπο, μετὰ τὴ δεύτερη δαπάνη : 14—11=3 δρχ.

Ἡ πράξη κατ' ἀντίστροφη φορὰ προσθέτει σπουδαῖο στοιχεῖο στὴν κατανόηση τοῦ μαθηματικοῦ συλλογισμοῦ. Μὲ τὴ συνδυαστικὴ πράξη, ὁ μαθητὴς κατανοεῖ τὶς ἀριθμητικὲς σχέσεις καὶ ἔτσι οἱ ἐπὶ μέρους ἐνέργειες δὲν γίνονται πάγιες συνήθειες, τῶν ὁποίων δὲ θὰ γνωρίση πλέον τὴ σημασία. Τὸ παιδὶ θέτει σὲ ἐνέργεια τὴν ἐπινόησή του καὶ τὴν προσωπική του ἔρευνα.

6. ***Θέτομε προβλήματα στὰ παιδιά, ποὺ παρέχουν δυνατότητα ἐκλογῆς ἐκ μέρους των:***

Παράδειγμα: «Ἡ μητέρα τοῦ συμμαθητοῦ σας Π. ἐργάζεται ὡς πωλήτρια σὲ ἕνα ἀρτοποιεῖο καὶ παίρνει 150 δρχ. κάθε ἑβδομάδα καὶ 5 κιλὰ ψωμὶ γιὰ τὴν οἰκογένειά της. Σὲ μιὰ ἐφημερίδα διαβάζει, ὅτι ζητεῖται πωλήτρια σὲ ἕνα παντοπωλεῖο μὲ ἀμοιβὴ 36 δρχ. τὴν ἡμέρα. Μήπως ἔχει οἰκονομικὸ συμφέρον ν' ἀλλάξη ἐργασία;»

Παρόμοια προβλήματα, ποὺ παρέχουν τὴ δυνατότητα ἐκλογῆς ἀπὸ τὸ παιδί, ἀποτελοῦν καλὴ ἄσκηση μαθηματικοῦ συλλογισμοῦ καὶ ὑποκινοῦν τὴν προσωπική του ἔρευνα. Μπορεῖ νὰ συναντήση κανεὶς τέτοια προβλήματα μὲ τὴ δυνατότητα ἐκλογῆς ὑλικοῦ γιὰ τὴν κατασκευὴ μιᾶς κατοικίας, γιὰ τὸ χρωμάτισμα ἑνὸς τοίχου ἢ ἐκλογῆς τῶν μέσων καλλιεργίας τοῦ σχολικοῦ κήπου ἢ τῶν ἀγροκτημάτων τῆς οἰκογενείας ἢ ἐκλογῆς τῶν προτιμητέων ἐμπορευμάτων κλπ. Αὐτά, ἄλλωστε, εἶναι πραγματικὰ προβλήματα ἀπὸ τὴ ζωή.

7. *Τὸ ἀξίωμα ποὺ ἀπαιτεῖ τὴν ἔρευνα καὶ τὴν ἐπινόηση τοῦ μαθητοῦ*

Σπάνια εἶναι τὰ προβλήματα, ποὺ ἐπικαλοῦνται πραγματικὰ τὴν ἔρευνα τοῦ παιδιοῦ. Ἂς δώσωμε ἕνα *παράδειγμα:* Συναντοῦμε συχνὰ προβλήματα τοῦ ἑξῆς τύπου: τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι **10** ἑκμ. καὶ ἡ ἐπιφάνειά του **50** τ. ἑκμ. Ποία εἶναι ἡ περίμετρός του; Τὸ πρόβλημα αὐτὸ δὲν προσφέρει καμμιὰ ἔρευνα γιὰ τὸ παιδί. Ἀντίθετα, ἂν ἀντικαταστήσωμε τὴ λέξη «ὀρθογώνιο» μὲ τὴ λέξη παραλληλόγραμμο καὶ «μῆκος» μὲ τὴ λέξη «βάση», ὑπάρχει μιὰ ἀπειρία ἀπαντήσεων, π.χ. τὸ παιδὶ μπορεῖ ν' ἀνακαλύψη, ὅτι ἡ περίμετρος εἶναι δυνατὸν νὰ περάση τὸ 1 μ. ἢ τὸ 1 χιλμ. ἢ ἀκόμη ὅτι ἡ μικρότερη περίμετρος εἶναι ἐκείνη τοῦ ὀρθογωνίου μὲ μῆκος 10 καὶ πλάτος 5.

8. *Ἡ πορεία τῆς ἐργασίας γιὰ τὴ λύση ἑνὸς προβλήματος*

α) Θέτομε τὸ πρόβλημα στοὺς μαθητὲς καὶ ὑποκινοῦμε μιὰ συζήτηση, ἕως ὅτου γίνη σαφὲς καὶ ζωντανὸ στὸ πνεῦμα τους. β) Κατόπιν, οἱ μαθητὲς ὁδηγοῦνται κατάλληλα στὴν ἀτομικὴ ἢ κοινὴ ἢ ὁμαδικὴ ἔρευνα. γ) Ἐκτελοῦν πραγματικὲς πράξεις μὲ συγκεκριμένα ἀντικείμενα (πράξεις κατ' εὐθεῖα φορά, κατ' ἀντίστροφη φορά, συνδυαστικές). δ) Παριστάνουν γραφικὰ τὶς πράξεις αὐτές. ε) Ξανασκέπτονται τὶς πράξεις, ποὺ ἔχουν ἐκτελέσει καὶ ἐκφράζουν μὲ ἀριθμητικὰ σύμβολα ὅ,τι ἔχουν κάμει ἐκτελώντας τὶς ἀντίστοιχες ἀριθμητικὲς πράξεις (μὲ σημεῖα). Οἱ ἐπεμβάσεις τοῦ δασκάλου περιορίζονται στὸ ἐλάχιστο: ὅταν κατανοηθῆ τὸ πρόβλημα ἀπὸ τὸ παιδὶ καὶ ὅταν καταστρωθῆ τὸ σχέδιο γιὰ τὴν ἔρευνα, τότε ὁ μαθητὴς θεωρεῖ τὴ συμβολὴ τοῦ δασκάλου σὰν μιὰ ἁπλὴ βοήθεια, ἀφοῦ ἡ ἐπέμβασή του δὲν εἶναι μιὰ ἐνέργεια μηχανικῆς μεταφορᾶς τῆς σκέψης τοῦ μαθητοῦ σὲ ἕνα σκοπὸ γνωστὸ μόνον ἀπὸ τὸ δάσκαλο. Τὰ ἀποτελέσματα, ὕστερα ἀπὸ τὴν περίοδο τῆς ἐλεύθερης ἔρευνας, πρέπει ν' ἀνακοινώνωνται πάντοτε ἀπὸ τὶς ὁμάδες ἢ ἀπὸ τὰ ἄτομα· τότε ἔχει τὴν εὐκαιρία ὁ δάσκαλος νὰ ἐπεμβαίνη διορθώνοντας καὶ συμπληρώνοντας τὰ δεδομένα τῶν παιδιῶν. Οἱ ἐσφαλμένες λύσεις τῶν μαθητῶν πρέπει νὰ μελετῶνται μὲ προσοχὴ στὴν τάξη, ὥστε ν' ἀντιληφθοῦν τὰ παιδιὰ τοὺς λόγους, γιὰ τοὺς ὁποίους μιὰ ἐνέργεια δὲν εἶναι ὀρθὴ καὶ νὰ συλλάβουν τὶς διαφορὲς καὶ τὶς σχέσεις μεταξὺ τῆς ὀρθῆς καὶ ἐσφαλμένης ἐνεργείας.

9. Ὁ ἐπιστημονικὸς ἔλεγχος τῶν ἀνωτέρω προτάσεών μας στὶς παιδαγωγικὲς συνέπειες ἀπαιτεῖ τὴν πειραματικὴ ἐφαρμογή τους στὶς σχολικὲς τάξεις καὶ τὴ μέτρηση τῆς ἀποδοτικότητος τῶν μαθητῶν. Αὐτὰ εἶναι ἔργο τοῦ μέλλοντος.