ΕΝΩΣΕΩΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΩΝ
& ΨΥΧΟΛΟΓΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ
&
ΨΥΧΟΛΟΓΙΚΗ
ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΙΣ

ΤΟΜΟΣ Β'

1965 - 1966

ΕΚΔΟΤΗΣ
ΙΩ. ΚΑΜΠΑΝΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΙΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ Β' ΤΟΜΟΥ

Ἰανουάριος 1965-Δεκέμβριος 1966

Τεύχη 11 - 20

Ἐπιστημονικὸν ὄργανον τοῦ Συλλόγου Παιδαγωγῶν - Ψυχολόγων Πτυχιούχων Πανεπιστημίων Ἐξωτερικοῦ

ΕΚΔΟΤΗΣ ΙΩ. ΚΑΜΠΑΝΑΣ ΑΘΗΝΑΙ

I. ΑΡΘΡΑ (Λησμονημένες σελίδες)

II. ΜΕΛΕΤΕΣ

ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ - ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ

ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ

III. ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ - ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΜΟΙ

IV. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΑΙΔΙΚΗΣ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑΣ

V. ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΕΣ ΟΜΙΛΙΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΣΥΝΕΔΡΙΩΝ - ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ

VI. ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΟΝΟΜΙΑ - ΑΠΟΔΕΛΤΙΩΣΗ - ΒΙΒΛΙΟΚΡΙΣΙΑ

ΟΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ
ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

(Πορίσματα ἀπὸ εἰδικὴ ἔρευνα)

ΚΩΝ. Ι. ΚΙΤΣΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μὲ τὶς προόδους τῆς ἐπιστημονικῆς παιδαγωγικῆς, τὰ προβλήματα τῆς Διδακτικῆς στὸ σχολεῖο ἀντιμετωπίζονται σήμερα μὲ ἐπιστημονικὲς μεθόδους (μετρήσεις, πειραματισμοὺς καὶ ὑπολογισμοὺς ἀποτελεσμάτων).

Ἕνα ἀπὸ τὰ σοβαρὰ ζητήματα τῆς Διδακτικῆς εἶναι οἱ δυσκολίες τῶν μαθητῶν στὴν Ἀριθμητική. Γιὰ τὸ πρόβλημα αὐτό, τὸ **1959-1960**, ἐνεργήσαμε εἰδικὴ ἔρευνα σὲ **800** μαθητὲς τῶν σχολείων τῶν Ἰωαννίνων. Μετρήσαμε τὶς δυσκολίες τῶν μαθητῶν στὴν ἐκμάθηση τοῦ πίνακος ἁπλῶν προσθέσεων, ἀφαιρέσεων, πολλαπλασιασμῶν καὶ διαιρέσεων, στὴν ἐκτέλεση τῶν τεσσάρων βασικῶν πράξεων (μὲ πολυψηφίους ἀριθμούς), στὴ λύση ἀριθμητικῶν προβλημάτων ἀπὸ τὴ συγκεκριμένη ζωὴ καὶ συγκρίναμε τὰ δικά μας δεδομένα μὲ δεδομένα ἄλλων ἐρευνῶν, ποὺ ἔγιναν στὴ χώρα μας καὶ σ' ἄλλες χῶρες. Διερευνήσαμε τοὺς παράγοντες τῶν δυσκολιῶν (πρόγραμμα, βιβλία καὶ νοημοσύνη τῶν παιδιῶν κατὰ ἡλικίες). Τέλος διατυπώσαμε παιδαγωγικὰ πορίσματα γιὰ τὴν ἀντιμετώπιση τῶν δυσκολιῶν τῶν μαθητῶν.

Ἡ τεχνική, ποὺ ἀκολουθήσαμε στὴν ἔρευνά μας, τὰ πορίσματα καὶ οἱ σχετικὲς προτάσεις εἶχαν ὑποβληθῆ (γαλλιστί) στὴν κρίση τοῦ Ἰνστιτούτου τῶν ἐπιστημῶν τῆς ἀγωγῆς τῆς Γενεύης, τὸ **1960**. Ἡ εἰδικὴ ἐπιτροπὴ ἀπὸ καθηγητὲς τοῦ Πανεπιστημίου ἐνέκρινε καὶ δέχτηκε τὴν ὅλη ἐργασία μας ὡς διδακτορικὴ διατριβή, ποὺ κυκλοφόρησε στὰ γαλλικά.

Ἀπὸ τὴ διατριβὴ αὐτὴ ἀποσποῦμε τὸ μέρος ποὺ ἀναφέρεται στὶς δυσκολίες τῶν μαθητῶν γιὰ τὴ λύση τῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων (1).

---

1. C. Kitsos : L' enseignement du calcul dans les écoles primaires de la Grèce. Genève 1960, p.p. 69-91, 128-133.

Α΄ ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ ΜΑΣ

1. Ὁ σκοπὸς στὴν ἔρευνά μας

Ἡ ἔρευνα αὐτὴ ἔχει ὡς σκοπὸ τὴ μελέτη τῶν δυσκολιῶν, ποὺ συναντοῦν οἱ μαθητὲς τῶν Δημοτ. Σχολείων γιὰ τὴ λύση τῶν συγκεκριμένων προβλημάτων ἀπὸ τὴ ζωὴ ἐπὶ τῶν τεσσάρων βασικῶν πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς. Ἡ ἔρευνά μας αὐτὴ ἐκτείνεται: α) στὴν ὁμαδικὴ ἐξέταση καὶ β) στὴν ἀτομικὴ προφορικὴ ἐξέταση.

Ι. Η ΟΜΑΔΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

1. Τὰ πειραματικὰ μέσα:

Πρόθεσή μας νὰ μελετήσωμε τὸ συλλογισμὸ τῶν παιδιῶν, ὅταν λύουν τὰ προβλήματα τῆς ἀριθμητικῆς, καὶ τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο χρησιμοποιοῦν τὶς τέσσερεις ἀριθμητικὲς πράξεις στὴ λύση αὐτῶν τῶν προβλημάτων. Συντάξαμε γι' αὐτὸ δέκα μικρὰ συγκεκριμένα προβλήματα ἀπὸ τὴ ζωὴ τῶν παιδιῶν. Ἑφτὰ ἀπὸ τὰ προβλήματα αὐτὰ περιέχουν ἀπὸ μιὰ ἀπὸ τὶς ἑφτὰ βασικὲς πράξεις (πρόσθεση, ἀφαίρεση — ὑπόλοιπο, ἀφαίρεση, συμπλήρωμα, ἀφαίρεση διαφορά, πολλαπλασιασμός, διαίρεση μερισμοῦ, διαίρεση μετρήσεως). Τὰ τρία τελευταῖα προβλήματα περιέχουν δυὸ ἢ τρεῖς ἀπ' αὐτὲς τὶς πράξεις. Τὸ λεξιλόγιο γιὰ τὴ σύνταξη κάθε προβλήματος εἶναι ἁπλό. Οἱ ἀριθμοί, ποὺ χρησιμοποιοῦνται, εἶναι μονοψήφιοι, διψήφιοι. Ἔτσι, ἁπλοποιήσαμε τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα, ὥστε ὅλοι οἱ λογαριασμοὶ νὰ μποροῦν νὰ λυθοῦν καὶ νοερὰ ἀπὸ τὸ μαθητή, γιατὶ ἡ πραγματικὴ δυσκολία ἔπρεπε ν' ἀναφέρεται στὴν κατανόηση τοῦ κειμένου τοῦ προβλήματος καὶ τῶν λογικῶν σχέσεων, ποὺ ἑνώνουν τὰ στοιχεῖα του.

Γιὰ νὰ μείνωμε, ὅσο τὸ δυνατόν, πλησιέστερα στὰ συνήθη καθήκοντα καὶ ἀσκήσεις, ποὺ δίνουν οἱ δάσκαλοι στὸ παιδί, συμβουλευτήκαμε διάφορα σχολικὰ βιβλία καὶ χρησιμοποιήσαμε σχετικὰ δεδομένα ἀπὸ ἄλλες ἔρευνες. Ὕστερα ἀπὸ πολλὲς δοκιμές, καταλήξαμε στὴν ὁριστικὴ σύνταξη τῶν δέκα προβλημάτων μας.

Γιὰ νὰ εὐκολύνωμε τὴ συνεχῆ ἐντατικὴ ἐργασία τῶν μαθητῶν καὶ γιὰ ν' ἀποφευχθοῦν, στὸ τέλος τῆς προσπαθείας, ποὺ ἐκδηλώνεται κάποια πνευματικὴ κόπωση, τὰ δυσκολώτερα προβλήματα, διατάξαμε κατὰ τὴν ἐπίδοσή των τὰ προβλήματα αὐτὰ μὲ τέτοια σειρά, ὥστε ὁ μαθητὴς νὰ βρίσκεται διαδοχικὰ σὲ εὔκολα καὶ δύσκολα προβλήματα. Παρουσιάσαμε τὰ προβλήματα αὐτὰ σὲ δυὸ φύλλα πολυγραφημένα (μὲ πέντε προβλήματα στὸ καθένα). Ἡ ἐξέταση ἔγινε σὲ δυὸ ἡμέρες: ἕνα φύλλο κάθε ἡμέρα. Παραθέτομε τὰ δέκα προβλήματα:

Τὸ πρῶτο φύλλο (πολυγραφημένο)

1. Ὁ Πέτρος ἀγόρασε ἕνα μικρὸ ποδήλατο καὶ ἔδωσε τὶς 40 δραχμές, ποὺ τοῦ ἔδωσε ὁ θεῖός του, τὶς 54 δραχμὲς ποὺ τοῦ ἔδωσε ὁ πατέρας του καὶ τὶς 35 δραχμές, ποὺ τοῦ ἔδωσε ὁ μεγαλύτερος ἀδελφός του. Πόσα χρήματα πλήρωσε γιὰ τὸ ποδήλατο;
2. Σὲ κάθε τάξη ἑνὸς σχολείου φοιτοῦν 42 μαθητές. Πόσοι εἶναι ὅλοι οἱ μαθητὲς ἀπὸ τὶς 6 τάξεις τοῦ σχολείου;

3. Ἡ Βάσω ἀγόρασε ἕνα βιβλίο καὶ πλήρωσε 16 δραχμές. Ἡ μητέρα τῆς εἶχε δώσει 50 δραχμές. Πόσες δραχμὲς τῆς μένουν;

4. Ὁ παντοπώλης ἔχει 120 σαπουνάκια στὸ τραπέζι. Πρέπει νὰ τὰ βάλη μέσα σὲ κουτάκια. Σὲ κάθε κουτάκι βάζει 3 σειρὲς ἀπὸ 4 σαπουνάκια σὲ κάθε σειρά. Πόσα κουτάκια θὰ χρειασθῆ;

5. Ὁ πατέρας ἔφερε ἕνα κουτὶ μὲ 48 καραμέλες καὶ τὶς μοίρασε στὰ 4 παιδιά του. Πόσες καραμέλες πῆρε τὸ κάθε παιδί;

Τὸ δεύτερο φύλλο (πολυγραφημένο):

6. Ὁ κὺρ-Γιώργης πρέπει νὰ σκάψη ἕνα λάκκο, ποὺ θὰ ἔχη μῆκος 74 μέτρα. Ἔσκαψε μέχρι τώρα 32 μέτρα. Πόσα μέτρα θέλει ἀκόμη, γιὰ νὰ τὸν τελειώση;

7. Γιὰ ἕνα δέμα, ποὺ ἔχει βιβλία μὲ ἱστορίες, δώσαμε 96 δραχμές. Κάθε βιβλίο ἀξίζει 6 δραχμές. Πόσα βιβλία περιέχει τὸ δέμα;

8. Ἡ Μαρία εἶχε 75 ἀμύγδαλα. Ἔφαγε τὰ 15. Θέλει νὰ δώση στὶς 5 φίλες της ἀπὸ 12 ἀμύγδαλα. Θὰ τῆς φθάσουν;

9. Ὁ Πάνος, παίζοντας μὲ τοὺς φίλους του, κέρδισε 24 μπίλλιες. Ὁ Κώστας ἐκέρδισε 32. Ποιὸς κέρδισε περισσότερες καὶ πόσες;

10. Ἕνας ταξιδιώτης μένει 7 ἡμέρες στὸ ξενοδοχεῖο. Ὁ λογαριασμὸς τῶν ἐξόδων του εἶναι: 205 δραχμὲς γιὰ τὸ δωμάτιο, 285 δραχμὲς γιὰ τὸ φαγητὸ του καὶ 42 δραχμὲς γιὰ ἄλλα μικροέξοδα (καφέδες κλπ.). Πόσα εἶναι τὰ ἔξοδά του γιὰ κάθε ἡμέρα;

Τὰ προβλήματα αὐτὰ εἶχαν πολυγραφηθῆ ἔτσι, ὥστε οἱ μαθητὲς νὰ μποροῦν, στὸ κενὸ μεταξύ τους διάστημα, νὰ σημειώνουν τὴ λύση καὶ νὰ κάνουν τοὺς σχετικοὺς λογαριασμούς των. Ἡ χρήση προχείρου δὲν εἶχεν ἐπιτραπῆ.

2. *Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ὁμαδικῆς ἐξετάσεως:*

Ἡ ὁμαδικὴ ἐξέταση ἐφαρμόστηκε ἀπὸ νεαροὺς δασκάλους (ἀδιορίστους), ὕστερα ἀπὸ σχετικὲς ὁδηγίες μας.

Τὰ προβλήματα παρουσιάστηκαν δυὸ συνεχεῖς ἡμέρες, στὶς 7 π.μ., στὸ τέλος Μαρτίου 1959, στοὺς μαθητὲς τῶν 4ης, 5ης καὶ 6ης τάξεων τῶν Δημ. Σχολείων Ἰωαννίνων καὶ σὲ μιὰ ὁμάδα ἐνηλίκων (νεοσυλλέκτων στρατιωτῶν), ποὺ εἶχαν μόρφωση Δημοτικοῦ σχολείου, γιὰ νὰ καταφανῆ τί κρατοῦν ἀπὸ τὶς σχολικὲς γνώσεις οἱ Νέοι, ὕστερα ἀπὸ ὀχτὼ χρόνια μετὰ τὸ Δημ. Σχολεῖο.

Τὴν 1η ἡμέρα: Μοιραζόταν τὰ φύλλα μὲ τὰ προβλήματα ἔτσι, ὥστε οἱ μαθητὲς νὰ βλέπουν τὴν πίσω πλευρὰ τοῦ φύλλου (γιὰ νὰ μὴ διαβάζουν τὰ προβλήματα, ποὺ εἶχαν νὰ λύσουν). Ἐδιδόταν ἡ ἑξῆς παραγγελία: «Γράψατε τὸ ἐπώνυμο, τὸ ὄνομα, τὸ σχολεῖο, τὴν τάξη καὶ τὴν ἡμερομηνία γεννήσεώς σας». Κατόπιν, ἡ ἑξῆς πληροφορία: «Στὸ πίσω μέρος τοῦ φύλλου σας ὑπάρχουν πέντε μικρὰ συγκεκριμένα προβλήματα ἀπὸ τὴ ζωή. Πρέπει νὰ τὰ λύσετε, ὅσο τὸ δυνατόν, ὀρθά. Μὲ τὸ σύνθημά μου θ' ἀρχίσετε. Ὁ χρόνος δὲν εἶναι περιορισμένος». Προσοχή: «Ἀρχίσετε!».

Τὴν ἐπόμενη ἡμέρα: Ἡ αὐτὴ διαδικασία, ὅπως καὶ τὴν πρώτην ἡμέρα. Κάθε φορά, σημειωνόταν στὴ γωνία τοῦ κάθε φύλλου ὁ χρόνος, ποὺ χρησιμοποιήθηκε ἀπὸ τὸ μαθητὴ γιὰ τὴ λύση τῶν πέντε προβλημάτων.

3. *Ἀποτελέσματα ἀπὸ τὴν ὁμαδικὴ γραπτὴ ἐξέταση.*

Τὰ ἀποτελέσματα ἀπ' αὐτὴ τὴν ἔρευνα ἀναφέρονται στὰ λάθη τῶν μαθητῶν σὲ κάθε πρόβλημα. Ἀναζητήσαμε τὸν ἀριθμὸ τῶν μαθητῶν κατὰ τάξη καὶ φῦλο, ποὺ ἔδωσαν λανθασμένες ἀπαντήσεις σὲ κάθε πρόβλημα. Τὴν προσοχή μας στρέψαμε στὸν ἀπαιτούμενο λογισμὸ ἀπὸ κάθε πρόβλημα, χωρὶς νὰ ὑπολογίζωμε τὴν ἀκρίβεια τῶν πράξεων, ἀφοῦ τὸ θέμα τοῦτο τῆς σχολικῆς ἐργασίας εἶχε ἐρευνηθῆ σὲ ἄλλη ἔρευνά μας. Ὁ ἑπόμενος πίνακας μᾶς φανερώνει τὸ ποσοστὸ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸ τῶν ἀτόμων, ποὺ ἔδωσαν λανθασμένες ἀπαντήσεις (ἀριθμητικὸ λογισμὸ) σὲ κάθε εἶδος προβλήματος:

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι.

Πόσοι μαθητὲς στοὺς **100** δίνουν λανθασμένες ἀπαντήσεις (λανθασμένος μαθητικὸς λογισμὸς) ἐπὶ τῶν συγκεκριμένων προβλημάτων ἀπὸ τὴ ζωή:

Ἐξετασθέντες			1ο πρόσθεση °/ₒ	2ο πο:)σμὸς °/ₒ	3ο ἀφαιρ. ὑπολ. °/ₒ	4ο πολλ. διαιρ. μετρ. °/ₒ	5ο διαιρ. μερισμ. °/ₒ	6ο ἀφαιρ. συμπ. °/ₒ	7ο διαιρ. μετρ. °/ₒ	8ο ἀφαιρ. πολλ. ἀφ. °/ₒ	9ο ἀφαιρ. διαιρ. °/ₒ	10ο προσθ. διαιρ. μερισ. °/ₒ
	Α.	Θ.	Α. Θ.	Α. Θ.	Α. Θ.	Α. Θ.	Α. Θ.	Α. Θ.	Α. Θ.	Α. Θ.	Α. Θ.	Α. Θ.
4η	81	103	17 22	28 18	25 42	75 75	28 28	32 41	58 78	62 55	49 54	79 80
5η	103	95	11 4	21 18	15 10	51 44	16 18	10 15	35 39	36 28	20 11	44 37
6η	97	92	8 5	5 13	9 6	27 30	2 2	6 5	23 46	27 22	13 16	48 33
Σύνολα			67	103	107	302	94	109	279	230	166	321
Ἐνήλικοι 20 ἐτῶν		56	11	34	9	70	11	7	32	34	39	61

Παρατηρήσεις:

1. Παρατηρεῖται σαφὴς πρόοδος ἀπὸ τὴν 4η πρὸς τὴν 6η τάξη.
2. Ἡ σύγκριση μεταξὺ ἀρρένων καὶ θηλέων μᾶς δίνει τὸν ἑξῆς πίνακα:

Σημεῖα: + οἱ ἄρρενες ὑπερέχουν τῶν θηλέων
= ἰσότητα ἀποδόσεως μεταξὺ ἀρρένων καὶ θηλέων
— οἱ θήλεις ὑπερέχουν τῶν ἀρρένων

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4η	+	—	+	=	=	+	+	—	+	+
5η	—	—	—	—	—	+	+	—	—	—
6η	—	+	—	+	=	—	+	—	+	—

Πόρισμα:				
Στὴν	4η:	6+	2=	2—
»	5η:	2+		8—
»	6η:	4+	1=	5—
Σύνολα		12+	3=	15—

Τὰ κορίτσια (15—) φαίνεται ὅτι ὑπερέχουν τῶν ἀγοριῶν (12+). Τοῦτο ἔρχεται σ' ἀντίθεση μὲ τὴν ἄποψη ὅτι τὰ ἀγόρια στὸ μαθηματικὸ συλλογισμὸ εἶναι ἀνώτερα ἀπὸ τὰ κορίτσια. Ἂν ἐξετάσωμε τὴν ἀπόδοση στὰ τρία προβλήματα, ποὺ περιέχουν πολλὲς πράξεις (προβλήματα 4, 8, 10), βλέπομε ὅτι τὰ κορίτσια εἶναι ἀνώτερα ἀπὸ τὰ ἀγόρια σὲ ἕξ ἐπὶ ἐννέα περιπτώσεων.

3. Οἱ ἐνήλικοι (20 ἐτῶν νεοσύλλεκτοι) μποροῦν νὰ τοποθετηθοῦν στὸ ἐπίπεδο τῶν μαθητῶν τῆς 5ης τάξης Δημοτ. Σχολείου.

4. Παρατηρήσαμε ἐπίσης διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν διαφόρων σχολείων καὶ τῶν τάξεων μὲ περιορισμένο ἀριθμὸ μαθητῶν.

5. Παρέχομε τὴν πειραματικὴ διάταξη τῶν δέκα προβλημάτων κατὰ σειρὰ αὐξανόμενης δυσκολίας (μὲ βάση τὰ σύνολα τοῦ ποσοστοῦ % τῶν μαθητῶν, ποὺ κάνουν λάθη):

α) τὸ 1ο + (πρόσθεση)	67	στ) τὸ 9ο — (διαφορὰ)	166
β) τὸ 5ο : (μερισμοῦ)	94	ζ) τὸ 8ο — (ὑπόλ.) Χ, — (συμπ.)	230
γ) τὸ 2ο Χ (πολ)μὸς)	103	η) τὸ 7ο : (μετρήσεως)	279
δ) τὸ 3ο — (ὑπόλοιπο)	107	θ) τὸ 4ο Χ, : (μετρησ.)	302
ε) τὸ 6ο — (συμπληρ.)	109	ι) τὸ 10ο +, : (μερισμοῦ)	321

Διαπιστώνομε ὅτι: 1) τὰ προβλήματα, ποὺ περιέχουν μιὰ πρόσθεση, μιὰ διαίρεση (μερισμοῦ) ἢ ἕναν πολλαπλασιασμό, φαίνεται ὅτι εἶναι εὐκολώτερα ἀπὸ τὰ προβλήματα, ποὺ περιέχουν μιὰ ἀφαίρεση (ὑπόλοιπο, συμπλήρωμα ἢ διαφορά), 2) οἱ ἀφαιρέσεις: ὑπόλοιπο καὶ συμπλήρωμα εἶναι ἴσης δυσκολίας· καὶ οἱ δύο εἶναι εὐκολώτερες ἀπὸ τὴν ἀφαίρεση — διαφορά, 3) τὰ προβλήματα, ποὺ ἀπαιτοῦν μιὰ διαίρεση — μετρήσεως ἢ πολλὲς πράξεις ἀποδεικνύονται ὡς τὰ δυσκολώτερα προβλήματα.

6. Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν κατεχομένων γνώσεων: Ἂν δεχτοῦμε, ὅτι μία γνώση ἔχει γίνει κτῆμα, ὅταν τὰ 75% τῶν παιδιῶν δίνουν ὀρθὲς ἀπαντήσεις, μποροῦμε νὰ ἔχωμε τὸν ἑξῆς πίνακα (+ σημαίνει γνώση ἀποκτηθεῖσα):

	Πρόσθεση 1	Πολ)σμὸς 2	Ἀφαίρεση ὑπολοίπ. 3	Πολ) σμὸς διαιρ. μετρ. 4	Διαίρεση μερισμ. 5	Ἀφαίρ. συμπληρ. 6	Διαίρεση μετρησ. 7	Ἀφαίρε.: πολ) σμὸς ἀφαίρεσ. 8	Ἀφαίρεση διαφορ. 9	Πρόσθεση διαίρεση μερισμοῦ 10
4η	Α+	—	+	—	—	—	—	—	—	—
	Θ+	+	—	—	—	—	—	—	—	—
5η	Α+	+	+	—	+	+	—	—	+	—
	Θ+	+	+	—	+	+	—	—	+	—
6η	Α+	+	+	—	+	+	+	—	+	—
	Θ+	+	+	—	+	+	—	+	+	—

Στὴν 4η τάξη, τὸ ὑπ' ἀριθ. 1 πρόβλημα (πρόσθεση) εἶναι κτῆμα τῶν ἀρρένων καὶ τῶν θηλέων. Στὴν 5η τάξη, τὰ ὑπ' ἀριθ. 4, 8, 10 προβλήματα δὲν εἶναι ἀκόμη κτῆμα τῶν μαθητῶν· πρόκειται γιὰ τὰ τρία προβλήματα, ποὺ περιέχουν πολλὲς πράξεις· τὸ ὑπ' ἀριθ. 7 πρόβλημα (διαίρεση — μετρήσεως) δὲν εἶναι ἐπίσης κτῆμα τῶν μαθητῶν. Στὴν 6η τάξη τὰ ὑπ' ἀριθ. 4, 10 προβλήματα δὲν ἔχουν γίνει κτῆμα τῶν παιδιῶν· τὸ ὑπ' ἀριθ. 8 πρόβλημα ἔγινε κτῆμα μόνον ἀπὸ τὰ κορίτσια καὶ τὸ ὑπ' ἀριθ. 7 ἀπὸ τὰ ἀγόρια. Ἡ πρόοδος ἀπὸ τὴν 5η πρὸς τὴν 6η τάξη εἶναι σχετικὰ μικρή.

7. Ἀφοῦ, κατὰ τὸ Ἐπίσημο Ἀναλυτικὸ Πρόγραμμα διδακτέας ὕλης, οἱ μαθητὲς τῶν Δημ. Σχολείων ἀσκοῦνται στὰ συγκεκριμένα προβλήματα ἀπὸ τὴ ζωὴ στὴ 2α καὶ 3η τάξη, μποροῦμε νὰ συμπεράνωμε, ὅτι τὰ ἀποτελέσματα εἶναι πολὺ πενιχρά. Ἡ χαμηλὴ αὐτὴ ἀπόδοση πρέπει νὰ ἐξεταστῆ μὲ προσοχή. Ὀφείλει νὰ μᾶς ὑποκινήση νὰ μελετήσωμε τὶς αἰτίες ψυχολογικῆς ὑφῆς καὶ κυρίως νὰ ἐπεξεργαστοῦμε ἀποτελεσματικοὺς διδακτικοὺς κανόνες.

II. Η ΑΤΟΜΙΚΗ ΠΡΟΦΟΡΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

1. Τὰ πειραματικὰ μέσα καὶ ἡ ἐφαρμογή τους.

Γιὰ ν' ἀναλύσωμε σὲ βάθος τὶς δυσκολίες, ποὺ συναντοῦν οἱ μαθητές, κατὰ τὴ λύση τῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων, ἐφαρμόσαμε ἀτομικὴ προφορικὴ ἐξέταση μὲ τὴ μέθοδο καταγραφῆς τοῦ «ὁμιλούμενου συλλογισμοῦ», ὅπως εἶχεν ἐφαρμοσθῆ, τὸ 1954, στὴ Λουβαίνη (Βέλγιον) ἀπὸ τὴν Anna M. de Moraes (1) Μὲ τὴ μέθοδο αὐτὴ μπορέσαμε νὰ παρακολουθήσωμε τὸ μαθητή, ὅταν ἀντιμετώπιζε τὰ ἴδια τὰ προβλήματα καὶ νὰ σημειώσωμε τὴ διαδικασία τῶν ἐρευνῶν του γιὰ τὴ λύση τους, τὶς λεκτικές του ἐκφράσεις, τοὺς δισταγμούς του, τὶς αὐτοδιορθώσεις του, ὅλα τὰ δεδομένα, ποὺ διαφωτίζουν τὴ γραπτὴ ἐργασία (στὸ πρῶτο μέρος αὐτῆς τῆς ἔρευνας) καὶ ἐπιτρέπουν ν' ἀνασυνθέτωμε κάπως τὴν πνευματικὴ ἐνέργεια τοῦ παιδιοῦ.

Τὰ κριτήρια ἐκλογῆς τῶν προβλημάτων ἦταν ἀνάλογα μὲ ἐκεῖνα, ποὺ ἀναφέραμε στὴν ὁμαδικὴ γραπτὴ ἐξέταση. Συντάξαμε ἐννέα προβλήματα μὲ ἁπλοποιημένα τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα ἔτσι, ὥστε οἱ πράξεις νὰ γίνωνται ἀπὸ μνήμης. Πρόθεσή μας ἦταν μόνον νὰ μελετήσωμε τὴν κατανόηση ἀπὸ τὸ παιδὶ τοῦ κειμένου τοῦ προβλήματος καὶ τῶν λογικῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν δεδομένων.

Ἀπὸ τὰ ἐννέα μικρὰ προβλήματα, τὰ ἑφτὰ ἀναφέρονται σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς ἑφτὰ βασικὲς πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς, δύο περιέχουν δύο ἢ τρεῖς πράξεις. Τὰ δύο τελευταῖα προβλήματα παρουσιάζουν ἀπὸ μιὰ εἰδικὴ δυσκολία: τὸ ἕνα τελικὸ ὑπόλοιπο, ποὺ δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς (πρόκειται γιὰ διαίρεση ἀκεραίων), καὶ τὸ ἄλλο ἕνα στοιχεῖο (ἀριθμό) ἄχρηστο.

Τὰ προβλήματα, δακτυλογραφημένα σὲ δελτία (καρτέλλες), παρουσιάστηκαν ἀπὸ ἕνα σὲ κάθε μαθητή. Καλούσαμε τὸ μαθητὴ νὰ λέγη μὲ δυνατὴ φωνὴ ὅ,τι εἶχε στὸ πνεῦμα του, καθὼς ἀναζητοῦσε τὴ λύση. Μὲ ἕνα μαγνητόφωνο, κρυμμένο κάτω ἀπὸ τὸ τραπέζι μας, μπορέσαμε νὰ καταγράψωμε τὰ ἐπὶ μέρους πνευματικὰ βήματα τοῦ παιδιοῦ, τοὺς συλλογισμούς του, τὶς σιωπές του, τοὺς δισταγμούς του. Ὕστερα

1. «Recherches psychopédagogiques sur la solution des problèmes d' arithmétique», Louvain, E. Nauwelaaris, 1954.

ἀπὸ κάθε ἀτομικὴ ἐξέταση, ἀντιγράφαμε τὸ ἠχογραφημένο κείμενο καὶ συντάξαμε ἔτσι τὸ «πρωτόκολλο» κάθε παιδιοῦ.

Ἡ ἐξέταση ἔγινε ἀπὸ μᾶς, στὴν ἀτμόσφαιρα τοῦ σχολείου, στὶς ..ἀρχὲς Ἀπριλίου τοῦ 1959.

Ἡ ὁμαδικὴ γραπτὴ ἐξέταση (πρῶτο μέρος τῆς ἔρευνας) μᾶς ἐπέτρεψε νὰ ἔχωμε τοὺς ἀντιπροσωπευτικοὺς μαθητὲς ἀπὸ κάθε τάξη, δηλαδὴ ἀπὸ πέντε ἀγόρια καὶ πέντε κορίτσια ἀπὸ τὴν 4η, 5η καὶ 6η τάξη. Ἔτσι, ἐξετάστηκαν 30 μαθητές.

Παραθέτομε τὰ ἐννέα προβλήματα:

1. Ἕνας χωρικὸς εἶχε 23 ἄσπρες κότες καὶ **9** μαῦρες. Πόσες κότες εἶχεν ὅλες μαζί; (πρόσθεση).
2. Ὁ Γιῶργος ἔφερε στὴν ἀγορὰ 36 αὐγά. Ἔσπασε τὰ 4. Πόσα αὐγὰ ἔχει τώρα νὰ πωλήση; (ἀφαίρεση — ὑπόλοιπο).
3. Ἕνα βαρέλι χωράει **100** κιλὰ λάδι. Τώρα ἔχει μέσα 75 κιλά. Πόσα κιλὰ λάδι πρέπει νὰ ρίξωμε ἀκόμη γιὰ νὰ γεμίση τὸ βαρέλι; (ἀφαίρεση — συμπλήρωμα).
4. Ἔχομε δύο τοίχους: Ὁ ἕνας ἔχει μῆκος 45 μέτρα, ὁ ἄλλος 39 μέτρα. Ποιὸς ἀπὸ τοὺς δυὸ τοίχους εἶναι μακρύτερος καὶ πόσα μέτρα; (ἀφαίρεση — διαφορά).
5. Πόσες δραχμὲς στοιχίζουν 15 βιβλία, ὅταν τὸ κάθε βιβλίο στοιχίζη 6 δραχμές. (πολλαπλασιασμός).
6. Γιὰ ἕνα σακκὶ ἀλεύρι πλήρωσα 145 δραχμές. Κάθε κιλὸ ἀλεύρι στοιχίζει 5 δραχμές. Πόσα κιλὰ ἀλεύρι ἔχω στὸ σακκί μου; (διαίρεση —μετρήσεως).
7. Τὰ 12 μέτρα ὑφάσματος στοιχίζουν 120 δραχμές. Πόσο στοιχίζει τὸ μέτρο; (διαίρεση — μερισμοῦ).
8. Ἡ Μαρία εἶχε ἕνα πάκο μὲ **30** καραμέλες. Ἔφαγε τὶς 5, ἔδωσε ἀπὸ 3 στὶς φίλες της καὶ μοιράζει τὶς ὑπόλοιπες στὰ 3 ἀδέλφια της. Πόσες καραμέλες ἔδωσε σὲ κάθε ἀδελφάκι της; (πολλὲς πράξεις).
9. Ἕνας ἐργάτης πῆρε **360** δραχμὲς γιὰ 6 μέρες μὲ 8 ὧρες ἐργασίας κάθε μέρα. Πόσες δραχμὲς θὰ ἔπαιρνε, ἂν εἶχε ἐργασθῆ 4 μέρες ἀκόμη; (πολλὲς πράξεις καὶ ἕνα στοιχεῖο ἄχρηστο).

2. Ἀνάλυση τῶν λύσεων τῶν μαθητῶν.

Τὸ ὑπ' ἀριθ. 1 πρόβλημα:

1. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ περιέχει μιὰ μόνον πρόσθεση. Εἶναι εὔκολο γιὰ τοὺς μαθητὲς τῶν 4ης 5ης καὶ 6ης τάξεων. Στοὺς 30 μαθητές: 28 σκέπτονται ὀρθά. Οἱ δυὸ ἀπέτυχαν: ἕνα κορίτσι τῆς 4ης (ἡ τελευταία) προτείνει ὡς πράξη τὴ διαίρεση, ἕνα ἀγόρι τῆς 6ης (ὁ τελευταῖς) προτείνει: πρόσθεση ἢ πολλαπλασιασμό. Στοὺς 28 μαθητὲς ποὺ σκέπτονται ὀρθὰ τὴ λύση: οἱ 15 λογαριάζουν ἀμέσως καὶ δίνουν ὀρθὸ ἀποτέλεσμα, ἐνῶ οἱ 13 δὲ βρῆκαν τὸ ἀριθμητικὸ ἀποτέλεσμα: οἱ 5 ἔκαναν λάθη πράξεων, οἱ 8 διατύπωσαν μόνο τὸ συλλογισμό: «χρειάζεται μιὰ πρόσθεση».

2. Στοὺς 28 μαθητές, ποὺ συλλογίζονται ὀρθά, διακρίνομε δύο ὁμάδες: ἐκείνους ποὺ σκέπτονται μὲ διαισθητικὸ τρόπο καὶ δὲ μποροῦν νὰ δικαιολογήσουν τὸν τρόπο ἐνεργείας των στὴ λύση (11 μαθητές:

δύο ἄρρενες (κατωτ. τεταρτ., τελευτ.) (1) καὶ τρεῖς θήλεις (ἀνωτ. τεταρ., Με, κατ. τεταρ.) τῆς 4ης τάξης, δύο ἀρρ. (κατ. τεταρ., τελευτ.: καὶ δύο θηλ. (κατ. τεταρ., τελευτ.) τῆς 5ης τάξης καὶ δύο θηλ. (κατ. τεταρ., τελευτ.) τῆς 6ης καὶ ἐκείνους, ποὺ εἶναι ἱκανοὶ νὰ ἑρμηνεύσουν τὸ συλλογισμό τους (17 μαθητ.).

Τὸ ὑπ' ἀριθ. 2 πρόβλημα:

1. Τὸ πρόβλημα τοῦτο περιέχει μιὰ ἀφαίρεση — ὑπόλοιπο. Στοὺς 30 μαθητές: οἱ 24 σκέπτονται ὀρθὰ γιὰ τὴ λύση του, οἱ 6 ἀπέτυχαν καὶ εἶναι: ἕνας ἀρρ. (ὁ κατ. τεταρ.) τῆς 4ης: προτείνει πρόσθεση, μία θηλ. (ἡ τελευτ.) τῆς 4ης προτείνει διαίρεση, ἕνας ἀρρ. (τελευτ.) τῆς 5ης προτείνει πολλαπλασιασμὸ ἢ ἀφαίρεση ἢ διαίρεση, μία θηλ. (ἡ τελευτ.) τῆς 5ης προτείνει πολλαπλασιασμὸ ἢ ἀφαίρεση ἢ διαίρεση, ἕνας ἀρρ. (τελευτ.) καὶ μία θηλ. (τελευτ.) τῆς 6ης προτείνουν διαίρεση. Στοὺς 24 μαθητές, ποὺ διατυπώνουν ὀρθοὺς συλλογισμούς: οἱ 22 ὑπολόγισαν καὶ ἔδωσαν σωστὸ ἀποτέλεσμα καὶ οἱ 2 διατύπωσαν τὴ φράση: «πρέπει νὰ κάνωμε ἀφαίρεση».

2. Στοὺς 24 μαθητὲς ποὺ συλλογίζονται ὀρθά: οἱ 8 σκέπτονται διαισθητικὰ καὶ οἱ 16 εἶναι ἱκανοὶ νὰ ἐξηγήσουν τὸ συλλογισμό τους μὲ φράσεις ὅπως: «εἴχαμε 36 αὐγά, 4 ἔσπασαν, ἔχομε... εἶναι λιγότερα, κάνομε πάντοτε ἀφαίρεση», «...γιατὶ ἔσπασαν, θὰ μείνουν... γιατὶ ἔσπασαν 4 καὶ δὲν τὰ ἔχει πιά, καὶ θὰ κάνωμε ἀφαίρεση», διότι τὰ 4 ποὺ ἔσπασαν δὲν πωλήθηκαν...». Οἱ περισσότεροι μαθητὲς τῶν 4ης καὶ 5ης τάξεων δὲ μποροῦν νὰ δώσουν μιὰ ἐξήγηση γιὰ τὴν πράξη ποὺ προτείνουν.

3. Οἱ μαθητές, ποὺ ἀποτυγχάνουν, προτείνουν μιὰ πράξη, ποὺ δὲν ταιριάζει, ἢ δυό - τρεῖς μαζί, πού, κατ' αὐτούς, ταιριάζουν. Παραθέτομε τοὺς συλλογισμοὺς των: Ὁ Β.Π., 4η τάξη, 9 - 10 ἐτῶν (κατωτ. τεταρτ.) λέγει: «Μποροῦμε νὰ κάνωμε πρόσθεση: 36+4, εἶναι τὰ αὐγά... ἕ!... ναί... (πῶς μπορεῖς νὰ τὸ δικαιολογήσῃς;). Μᾶς λέγουν πόσα αὐγά... ναί, νά!... (διαβάζει τὸ πρόβλημα), ἕ!... ἔσπασαν καὶ γι' αὐτὸ λέω νὰ κάνωμε μιὰ πρόσθεση (εἶσαι βέβαιος;) ἕ!... ναί!...»

Τὸ ὑπ' ἀριθ. 3 πρόβλημα:

1. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ πρέπει νὰ λυθῆ μὲ μιὰ ἀφαίρεση — συμπλήρωμα. Ἀπὸ τοὺς 30 μαθητές: οἱ 20 σκέπτονται ὀρθὰ γιὰ τὴ λύση του· οἱ 10 ἀπέτυχαν: 5 τῆς 4ης, 3 τῆς 5ης καὶ 2 τῆς 6ης. Ἀπὸ τοὺς 20 μαθητές, ποὺ σκέπτονται ὀρθά, οἱ 15 ἔδωσαν ὀρθὸ ἀποτέλεσμα, οἱ 2 ἔκαναν λάθη πράξεων καὶ οἱ 3 διατύπωσαν τὴν ἀπάντηση: «πρέπει νὰ κάνωμε ἀφαίρεση».

2. Ἀπὸ τοὺς 20 μαθητές, ποὺ δίνουν ὀρθοὺς συλλογισμούς: οἱ 10 σκέπτονται διαισθητικὰ καὶ οἱ ἄλλοι 10 εἶναι ἱκανοὶ νὰ ἐξηγήσουν τὸ συλλογισμό τους.

3. Παρατηρήσαμε ἀρκετὰ δύσκολα βήματα τοῦ παιδικοῦ συλλογισμοῦ γιὰ νὰ φθάση στὴ λύση τοῦ προβλήματος.

1· Τελευτ. = τελευταῖος ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα τῶν γραπτῶν ἐξετάσεων, καταλ. τεταρτ. = ὁ ἐκπρόσωπος τοῦ κατωτέρου τεταρτημορίου, Με = ὁ ἐκπρόσωπος τῆς Μεσαίας Ἀξίας, Ἀνωτ. τεταρτ. = ὁ ἐκπρόσωπος τοῦ ἀνωτέρου τεταρτημορίου, 1ος = ὁ πρῶτος.

4. Ὅσοι ἀποτυγχάνουν, φθάνουν, ὕστερα ἀπὸ συζήτηση γεμάτη ἀμφιβολία, νὰ εἶναι βέβαιοι γιὰ μιὰ πράξη ποὺ δὲν ταιριάζει στὴ λύση τοῦ προβλήματος. Ἡ Ε.Κ., 4η τάξη, λέγει: «Θὰ κάνωμε... θὰ κάνωμε... 100, τὸ 100 μὲ τὸ 25, διαίρεση. Θὰ κάνωμε διαίρεση: 100 μὲ 75 (εἶσαι βεβαία;) Θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό. (γιατὶ ἔτσι; καὶ πῶς;) Διότι βλέπομε ὅτι... 100 κιλὰ λάδι σ' ἕνα βαρέλι, χωράει 100 κιλὰ λάδι, τώρα ἔχει 75 κιλά... Πόσα κιλὰ πρέπει νὰ ρίξωμε, γιὰ νὰ τὸ γεμίσωμε; θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό. (εἶσαι βεβαία;), ὄχι, διαίρεση. (Εἶσαι, τώρα, βεβαία;) Μάλιστα!...

Τὸ ὑπ' ἀριθ. 4 πρόβλημα:

1. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύεται μὲ ἀφαίρεση — διαφορά. Στοὺς 30 μαθητὲς οἱ 19 σκέπτονται ὀρθὰ γιὰ τὴ λύση του, ἐνῶ οἱ 11 ἀπέτυχαν: 5 τῆς 4ης προτείνουν πρόσθεση, διαίρεση, καμμιὰ ἀπάντηση, 4 τῆς 5ης προτείνουν διαίρεση, πολλαπλασιασμὸ καὶ 2 τῆς 6ης προτείνουν διαίρεση. Στοὺς 19, ποὺ σκέπτονται ὀρθά, οἱ 14 δίνουν ὀρθὸ ἀριθμητικὸ ἀποτέλεσμα, οἱ 3 κάνουν λάθη πράξεων καὶ οἱ 2 δίνουν τὴν ἀπάντηση «πρέπει νὰ κάνωμε ἀφαίρεση».

2. Στοὺς 19, ποὺ δίνουν ὀρθοὺς συλλογισμούς: οἱ 9 σκέπτονται διαισθητικὰ καὶ οἱ 10 εἶναι ἱκανοὶ νὰ δώσουν ἐξηγήσεις στοὺς συλλογισμούς των μὲ φράσεις, ὅπως: «γιατὶ ξέρομε, ὅτι ὁ ἕνας εἶναι μακρύτερος ἀπὸ τὸν ἄλλον, τότε κάνομε ἀφαίρεση, νὰ βροῦμε πόσο εἶναι μακρύτερος», «γιατὶ ὁ ἄλλος τοῖχος εἶναι λιγότερο μακρὺς καὶ σκέπτομαι, ὅτι τὸ πρόβλημα μᾶς λέγει νὰ καταλάβωμε, ὅτι λείπει κάτι». Κανένας μαθητὴς δὲν χρησιμοποίησε στοὺς συλλογισμούς του τὶς λέξεις: «ὁ ἕνας διαφέρει ἀπὸ τὸν ἄλλον», «ὑπάρχει διαφορά», «πρέπει νὰ κάνωμε ἀφαίρεση — διαφορά».

3. Οἱ μαθητές, ποὺ ἀπέτυχαν, εἶναι ἀνίκανοι νὰ καταλάβουν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος καὶ νὰ συλλάβουν τὶς λογικὲς μεταξύ των σχέσεις. Γι' αὐτὸ προτείνουν ὡς κατάλληλη πράξη ἢ τὴν πρόσθεση ἢ τὴ διαίρεση ἢ τὸν πολλαπλασιασμό. Τρεῖς μαθητὲς τῆς 4ης σταματοῦν, χωρὶς νὰ προτείνουν καμμιὰ λύση.

Τὸ ὑπ' ἀριθ. 5 πρόβλημα:

1. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται μὲ πολλαπλασιασμό. Στοὺς 30 μαθητές: οἱ 25 σκέπτονται ὀρθὰ γιὰ τὴ λύση του, οἱ 5 ἀπέτυχαν (4 τῆς 4ης προτείνουν πρόσθεση, διαίρεση, καὶ 1 τῆς 5ης προτείνει πολλαπλασιασμό, πρόσθεση, διαίρεση). Στοὺς 25, ποὺ σκέπτονται ὀρθά, οἱ 16 δίνουν σωστὸ ἀποτέλεσμα, οἱ 4 παρουσιάζουν λάθη πράξεων καὶ οἱ 5 διατυπώνουν: «πρέπει νὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό».

2. Ἀπὸ τοὺς 25 μαθητές, ποὺ δίνουν ὀρθὲς ἀπαντήσεις, οἱ 6 σκέπτονται διαισθητικὰ (4 τῆς 4ης καὶ 2 τῆς 5ης) καὶ οἱ 19 εἶναι σὲ θέση νὰ ἑρμηνεύσουν τὸ συλλογισμό τους μὲ φράσεις, ὅπως: «ἐδῶ κάνομε πολλαπλασιασμό, γιατὶ ξέρομε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε πόσο στοιχίζουν οἱ πολλὲς μονάδες».

3. Οἱ μαθητές, ποὺ ἀποτυγχάνουν, παρουσιάζουν πλήρη ἀνικανότητα νὰ ἐφαρμόσουν τὴν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σὲ ἕνα συγκεκριμένο πρόβλημα ἀπὸ τὴ ζωὴ ἢ δίνουν ταὐτόχρονα πολλὲς λύσεις, ποὺ δὲν ταιριάζουν στὴ λύση αὐτοῦ τοῦ προβλήματος (παντελὴς ἔλλει-

ψη κατανοήσεως αὐθαίρετη ἐκλογὴ μιᾶς ὁποιασδήποτε πράξης, ὑποκινήσεις ἀπὸ τὶς ἐρωτήσεις τοῦ ἐρευνητοῦ, ἔλλειψη βεβαιότητος).

Τὸ ὑπ' ἀριθ. 6 πρόβλημα:

1. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύεται μὲ διαίρεση μετρήσεως. Στοὺς 30 μαθητὲς οἱ 15 δίνουν ὀρθοὺς συλλογισμοὺς καὶ οἱ ἄλλοι 15 ἀποτυγχάνουν (8 τῆς 4ης, προτείνουν πολλαπλασιασμό, 4 τῆς 5ης προτείνουν ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμό, καὶ 3 τῆς 6ης προτείνουν πολλαπλασιασμό, ἀφαίρεση, πρόσθεση. Στοὺς 15 μαθητές, ποὺ σκέπτονται ὀρθὰ οἱ 10 δίνουν σωστὸ ἀποτέλεσμα, οἱ 3 κάνουν λάθη πράξεων καὶ οἱ 2 διατυπώνουν: «πρέπει νὰ κάνωμε διαίρεση».

2. Ἀπὸ τοὺς 15 μαθητές, ποὺ δίνουν ὀρθοὺς συλλογισμούς: οἱ 8 σκέπτονται διαισθητικὰ (1 τῆς 4ης, 4 τῆς 5ης καὶ 3 τῆς 6ης) καὶ οἱ 7 εἶναι ἱκανοὶ νὰ ἑρμηνεύσουν τὸ συλλογισμό τους μὲ φράσεις ,ὅπως: «γιατὶ ξέρομε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν ὁμοίων μονάδων καὶ θέλομε νὰ μάθωμε πόσες εἶναι αὐτὲς οἱ μονάδες», «145 κιλὰ στὸ γεμᾶτο σακκί, 1 κιλὸ στοιχίζει 5 δρχ.... πόσο χωρεῖ τὸ 5 στὸ 145, θὰ εἶναι τὰ κιλά», «...ξέρομε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ γι' αὐτὸ κάνομε διαίρεση μετρήσεως». Τρεῖς μαθητὲς μόνον χαρακτήρισαν τὴν πράξη ὡς διαίρεση μετρήσεως.

3. Οἱ μαθητές, ποὺ ἀπέτυχαν, κατανέμονται σὲ δυὸ κατηγορίες: α) σ' ἐκείνους ποὺ προτείνουν ὡς κατάλληλη πράξη τὸν πολλαπλασιασμό, ἐξ αἰτίας τοῦ δεδομένου τῆς τιμῆς τῆς μιᾶς μονάδος, καὶ β) σ' ἐκείνους, ποὺ προτείνουν ὡς κατάλληλη ὁποιαδήποτε πράξη χωρὶς κανένα μαθηματικὸ συλλογισμό. Ἕνα παράδειγμα: Ὁ Α.Σ., 4η τάξη, λέγει: «... λέμε 145 φορὲς 5, κάνομε πολλαπλασιασμό. (Γιατί;) ... κάνομε..., ἔχομε... ενα σακκὶ ἀλεύρι, ξέρομε πόσο στοιχίζει ἕνα κιλὸ καὶ θὰ πολλαπλασιάσωμε, γιὰ νὰ βροῦμε πόσα κιλὰ εἶναι μέσα... καὶ αὐτὸ κάνει..., θὰ ποῦμε... 5 φορὲς 5 ἴσον 25, γράφομε 5 καὶ κρατοῦμε 2, ... 4 φορὲς 5 ἴσον 20, καὶ 2, ἴσον 22, ὕστερα 1 φορὰ 5, ἴσον 7, καὶ ἔτσι θὰ ἔχωμε 725. (Μποροῦμε νὰ κάνωμε μιὰ ἄλλη πράξη;), ὄχι (εἶσαι βέβαιος;) ... ἔ!... ναί!...».

Τὸ ὑπ' ἀριθ. 7 πρόβλημα:

1. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύεται μὲ διαίρεση μερισμοῦ. Στοὺς 30 μαθητές: οἱ 21 σκέπτονται ὀρθὰ γιὰ τὴ λύση του, ἐνῶ οἱ 9 ἀποτυγχάνουν (4 τῆς 4ης προτείνουν πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμό, 3 τῆς 5ης προτείνουν πολλαπλασιασμὸ ἢ ἀφαίρεση καὶ 2 τῆς 6ης προτείνουν πολλαπλασιασμὸ ἢ διαίρεση. Στοὺς 21 μαθητές, ποὺ δίνουν ὀρθοὺς συλλογισμούς: οἱ 15 παρουσιάζουν σωστὸ ἀποτέλεσμα, οἱ 6 διατυπώνουν τὴ φράση: «πρέπει νὰ κάνωμε διαίρεση».

2. Ἀπὸ τοὺς 21 μαθητὲς μὲ τοὺς ὀρθοὺς συλλογισμούς: οἱ 3 σκέπτονται διαισθητικὰ (3 τῆς 4ης) καὶ οἱ 18 εἶναι σὲ θέση νὰ ἐξηγήσουν τὸ συλλογισμό τους μὲ φράσεις, ὅπως «...γιατὶ ξέρομε πόσο στοιχίζουν τὰ πολλὰ καὶ ζητοῦμε νὰ μάθωμε πόσο στοιχίζει τὸ ἕνα» .Οἱ περισσότερες ὀρθὲς ἀπαντήσεις δικαιολογοῦνται κάπως ἀπὸ τὰ παιδιά.

3. Οἱ μαθητές, ποὺ ἀπέτυχαν, μποροῦν νὰ διαιρεθοῦν σὲ δύο κα-

τηγορίες α) σ' ἐκείνους, ποὺ προτείνουν δύο κατάλληλες πράξεις, καὶ β) σ' ἐκείνους, ποὺ προτείνουν ὁποιαδήποτε πράξη καὶ καταλήγουν νὰ δεχθοῦν τὴν τελευταία ἀπὸ τὶς προτεινόμενες.

Τὸ ὑπ' ἀριθ. 8 πρόβλημα:

1. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύεται μὲ πολλὲς πράξεις. Στοὺς 30 μαθητές: οἱ 18 βρῆκαν τὶς κατάλληλες πράξεις, ἐνῶ οἱ 12 ἀπέτυχαν (6 τῆς 4ης, 4 τῆς 5ης καὶ 2 τῆς 6ης). Τὸ πρόβλημα φαίνεται δύσκολο στὰ παιδιὰ τῶν 4ης καὶ 5ης τάξεων.

2. Οἱ συλλογισμοὶ τῶν παιδιῶν ἐμφανίζονται μὲ δύο τύπους:

α) — τὸ ὑπόλοιπο, ὕστερα ἀπὸ ὅσες καραμέλες ἔφαγε ἡ Μαρία: 30—5 =25
— ὅ,τι ἔδωσε στὶς 5 φίλες της: 3Χ5 =15
— τελικὸ ὑπόλοιπο: 25—15=10
— ὅ,τι ἔδωσε σὲ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ἀδέλφια της: 10: 3 = 3 ὑπολ. 1.

Ἕντεκα παιδιὰ μᾶς δίνουν αὐτὸν τὸν τύπο συλλογισμοῦ (4 τῆς 4ης, 4 τῆς 5ης καὶ 3 τῆς 6ης).

β) — Ὅ,τι ἔδωσε στὶς φίλες της: 3Χ5 =15
— ὅ,τι ἔφαγε καὶ ὅ,τι ἔδωσε στὶς φίλες της: 15+5 =20
— τὸ ὑπόλοιπο: 30—20=10
— ὅ,τι ἔδωσε σὲ κάθε ἀδελφάκι της: 10: 3 = 3 ὑπολ. 1.

Ἑφτὰ παιδιὰ μᾶς δίνουν αὐτὸ τὸν τρόπο συλλογισμοῦ (2 τῆς 5ης καὶ 5 τῆς 6ης).

Ὁ πρῶτος τύπος συλλογισμοῦ ἀπαντᾶται συχνότερα στὴν 4η καὶ 5η τάξη, ἐνῶ ὁ δεύτερος τύπος στὴν 6η τάξη.

3. Οἱ μαθητὲς ποὺ ἀπέτυχαν, χάνονται σὲ ἀτέλειωτα βήματα σκέψεων.

Τὸ ὑπ' ἀριθ. 9 πρόβλημα:

1. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύεται μὲ πολλὲς πράξεις καὶ περιέχει ἕνα ἄχρηστο δεδομένο (8 ὧρες ἐργασίας τὴν ἡμέρα). Στοὺς 30 μαθητές: Οἱ 6 μόνον βρῆκαν τὶς κατάλληλες πράξεις ποὺ πρέπει νὰ γίνουν γιὰ τὴ λύση του (1 τῆς 4ης, 2 τῆς 5ης καὶ 3 τῆς 6ης) καὶ οἱ 24 ἀπέτυχαν. Τὸ πρόβλημα ἐμφανίζεται πολὺ δύσκολο γιὰ τὰ παιδιὰ ὅλων τῶν τάξεων τοῦ Δημοτ. Σχολείου.

2. Οἱ συλλογισμοὶ τῶν παιδιῶν κατανέμονται σὲ δύο ὁμάδες:

α) — Πόσα ἔπαιρνε τὴν ἡμέρα: 360:6=60
— Πόσα θὰ πάρη γιὰ τὶς 4 ἡμέρες: 4Χ60=240
— Πόσα θὰ πάρη γιὰ τὶς 6+4 ἡμέρες: 360+240=600

β) — Πόσα ἔπαιρνε τὴν ἡμέρα: 360:6=60
— Πόσες γίνονται οἱ 6 καὶ οἱ 4 ἡμέρες: 6+4=10
— Πόσα θὰ πάρη γιὰ τὶς 10 ἡμέρες: 10Χ60=600

Συναντήσαμε 4 μαθητές, ποὺ ἔκαναν τὸν πρῶτο τύπο συλλογισμοῦ (1 τῆς 4ης, 1 τῆς 5ης καὶ 2 τῆς 6ης) καὶ 2 μόνον ποὺ ἔκαναν τὸ δεύτερο τύπο συλλογισμοῦ (1 τῆς 5ης καὶ 1 τῆς 6ης). Τὸ πρόβλημα μπορεῖ νὰ λυθῆ καὶ μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν. Πέντε μαθητές, 2 τῆς 5ης καὶ 3 τῆς 6ης, μᾶς ζήτησαν νὰ τὸ λύσουν μ' αὐτὴ τὴ μέθοδο. Ἐπιμείναμε νὰ λύσουν μόνον μὲ τὶς τέσσερες βασικὲς πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς.

3. Οἱ μαθητές, ποὺ δὲν ἔλυσαν τὸ πρόβλημα, συναντοῦσαν ἀνυπέρβλητες δυσκολίες α) ἐπὶ τοῦ ἀχρήστου δεδομένου (8 ὧρες ἐργασίας τὴν ἡμέρα), β) ἐπὶ τῆς ἐννοίας: «4 ἡμέρες ἀκόμη» καὶ ἐπὶ τῶν συνεπειῶν της στὸ μαθηματικὸ συλλογισμό, καὶ γ) ξεχνοῦσαν τὴ σημασία καθενὸς ἀπὸ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος. Ἀναφέρομε ἕνα παράδειγμα:

Ὁ Α. Β., 6η τάξη, ἔκανε τοὺς ἑξῆς συλλογισμούς: «Θὰ κάνω ἕναν πολ)σμὸ... 6 φορὲς 360 ἴσον... 2120, ὕστερα ἀκόμα ἕναν πολ)σμό, 8 φορὲς 360, ἴσον... 2360, καί... ὕστερα μιὰ πρόσθεση... 2360 καὶ 2120, ἴσον... 4700, αὐτὸ ποὺ βρήκαμε, πρέπει νὰ τὸ πολλαπλασιάσωμε μὲ 4 καὶ τότε... 4700 φορὲς 4, ἴσον... 6100, νά... αὐτὰ εἶναι οἱ δραχμές, ποὺ θὰ ἔπαιρνε, ἂν ἐργαζόταν 4 ἡμέρες ἀκόμα. (Εἶσαι βέβαιος;), μάλιστα... (Μήπως μποροῦμε νὰ τὸ λύσωμε μὲ ἄλλο τρόπο;), ὄχι δὲ μποροῦμε».

3. *Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν δεδομένων ἀπὸ τὴν ἀτομικὴ προφορικὴ ἐξέταση:*

1. Διαπιστώνεται, ὕστερα ἀπὸ σχετικοὺς ὑπολογισμούς, ὅτι δὲ μποροῦν νὰ κάνουν ὀρθοὺς συλλογισμοὺς γιὰ τὴ λύση ἐννέα προβλημάτων:

Στὴν	4η	τάξη:	ἀρρ. 47%,	θηλ.	51%
»	5η	» :	» 29%,	»	35%
»	6η	» :	» 22%,	»	24%

2. — Οἱ μαθητὲς ποὺ ἀντιπροσωπεύουν τὸ κατώτερο Τεταρτημόριο (χαμηλὴ ἐπίδοση στὴ γραπτὴ ἐξέταση) σὲ κάθε τάξη καὶ οἱ τελευταῖοι δὲ μποροῦν γενικὰ νὰ σκεφτοῦν ὀρθὰ γιὰ τὴ λύση τῶν προβλημάτων. Οἱ μαθητὲς ἐκπρόσωποι τοῦ Ἀνωτέρου Τεταρτημορίου καὶ οἱ Πρῶτοι σὲ κάθε τάξη δίνουν ὀρθοὺς συλλογισμοὺς σ' ὅλα σχεδὸν τὰ προβλήματα. Γιὰ ἕξ προβλήματα (3ο, 4ο, 5ο, 6ο, 8ο, 9ο) βρίσκομε ἐσφαλμένους συλλογισμοὺς ἀπὸ τοὺς μαθητὲς ἐκπροσώπους τῆς Μεσαίας Ἀξίας.

3. Παρατηρεῖται σαφὴς πρόοδος ἀπὸ τὴν 4η πρὸς τὴν 6η τάξη. Τὰ ἀγόρια φαίνονται ἐλαφρῶς ἀνώτερα ἀπὸ τὰ κορίτσια.

4. Οἱ μαθητές, ὡς πρὸς τοὺς συλλογισμούς των, ἐντάσσονται σὲ δύο κατηγορίες: α) σ' ἐκείνους, ποὺ σκέπτονται κατὰ διαισθητικὸ τρόπο καὶ δὲ μποροῦν νὰ δικαιολογήσουν τὶς ἐνέργειές των, καὶ β) σ' ἐκείνους, ποὺ μποροῦν νὰ δικαιολογήσουν τὶς ἐνέργειές των, καὶ β) σ' ἐκείνους, ποὺ μποροῦν νὰ δικαιολογήσουν μὲ μαθηματικὸ λογισμὸ τὶς ἐπὶ μέρους ἐνέργειές των. Παρατηρεῖται, ὕστερα ἀπὸ τοὺς σχετικοὺς ὑπολογισμούς, ὅτι σκέπτονται διαισθητικά, χωρὶς νὰ δικαιολογοῦν τὶς λύσεις των:

Στὴν	4η	τάξη:	ἀρρ. 50%,	θηλ.	68%
»	5η	» :	» 36 ,	»	40
»	6η	» :	» 14 ,	»	27

Διαπιστώνεται, ὡς πρὸς τὸ σημεῖο τοῦτο (διαισθητικὸς ἢ αἰτιολογημένος συλλογισμός), πρόοδος ἀπὸ τὴν 4η πρὸς τὴν 6η τάξη. Τὰ ἀγόρια ἐμφανίζονται ἀνώτερα ἀπὸ τὰ κορίτσια. Οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς μαθητὲς τῶν 4ης καὶ 5ης τάξεων σκέπτονται κατὰ διαισθητικὸ τρόπο.

5. — Τὰ ποσοστὰ ἐπὶ τοῖς 100 τῶν μαθητῶν, ποὺ γιὰ κάθε πρόβλημα σκέπτονται διαισθητικά, ἔχουν ὡς ἑξῆς:

Τὰ προβλήματα:	1ο	2ο	3ο	4ο	5ο	6ο	7ο
Ἀριθ. μαθητ. σκέπτονται διαισθητικά:	11	8	10	9	6	8	3
Σύνολ. ἀριθ. μαθητ.: ὀρθὲς ἀπαντήσεις:	28	24	20	19	25	15	21
Πόσοι στοὺς 100 ὀρθὲς ἀπαντήσ. διαισθητ.	39	33	50	47	24	53	14

6. Ἡ ταξινόμηση τῶν προβλημάτων, μὲ βάση τὸ ποσοστὸ τῶν σκεπτομένων γι' αὐτὰ διαισθητικὰ μαθητῶν, ἔχει ὡς ἑξῆς:

α) τὸ 7ο : 14% (διαιρ. μερισμοῦ)
β) τὸ 5ο : 24% (πολ)σμὸς)
γ) τὸ 2ο : 33% (ἀφαιρ. ὑπόλοιπο)
δ) τὸ 1ο : 39% (πρόσθεση)
ε) τὸ 4ο : 47% (ἀφαιρ. διαφορά)
στ) τὸ 3ο : 50% (ἀφαίρ. - συμπλήρ.)
ζ) τὸ 6ο : 53% (διαίρ. — μετρήσ.)

Οἱ ἑξῆς πράξεις στὰ προβλήματα δὲ δικαιολογοῦνται μαθηματικῶς ἀπὸ περισσοτέρους τῶν 25% μαθητές: ἀφαίρεση — ὑπόλοιπο, πρόσθεση, ἀφαίρεση — διαφορά, ἀφαίρεση — συμπλήρωμα, διαίρεση — μετρήσεως.

7. — Ὅταν ὁ μαθητὴς δὲν εἶναι βέβαιος γιὰ τὴ λύση, ποὺ δίνει, α) ἀναμένει τὶς ἐκφράσεις καὶ ἐρωτήσεις τοῦ ἐρευνητῆ, γιὰ νὰ ἐπιτύχῃ μιὰ ὑποκίνηση, ἕνα σημεῖο ὁδηγητικὸ στὴ λύση, καὶ προσπαθεῖ νὰ προσαρμοστῆ στὶς ἐρωτήσεις αὐτές, χωρὶς νὰ ὑπολογίζῃ τὶς ἀντιθέσεις του μὲ προηγούμενες σκέψεις του, β) προτιμᾶ νὰ δώσῃ ὁποιαδήποτε ἀπάντηση, παρὰ νὰ ὁμολογήσῃ τὴν ἄγνοιά του ἐλπίζοντας στὴν εὔνοια τῆς τύχης.

8. — Οἱ ἰδιαίτεροι τρόποι, μὲ τοὺς ὁποίους σκέπτονται οἱ μαθητές, προέρχονται ἄραγε ἀπὸ τὴ δομὴ τοῦ ψυχισμοῦ τους ἢ ἀποτελοῦν προϊὸν τῆς διδασκαλίας, ποὺ ἔλαβαν; Θὰ ἦταν ἐνδιαφέρον νὰ γίνουν σχετικὲς ἔρευνες, γιὰ νὰ δοθῆ ἀπάντηση σ' αὐτὴ τὴν ἐρώτηση.

(Συνεχίζεται)