# ΑΘΗΝΑ

## ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ

ΤΗΣ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

---

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΑΚΟΣΤΟΣ ΠΕΜΠΤΟΣ

ΑΘΗΝΗΣΙΝ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
1923

# ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΒΥΖΑΝΤΙΝΩΝ [1]

## Α΄. Ἀπόκρυφος καὶ ἐπίσημος ἐπιστήμη.

Ἡ ἀκριβὴς καὶ δικαία ἱστορικὴ κρίσις περί τινος ἐπιστημονικοῦ θέματος ἢ περιόδου, ἀπαιτεῖ βεβαίως τὴν ἔρευναν τῶν ἀπωτέρων ἢ προσεχῶν αἰτίων, ὧν ἡ ἐξέλιξις κατήγαγεν εἰς τὸ ἐπιστημονικὸν γεγονὸς ἢ τὴν ὡρισμένην ἱστορικὴν περίοδον—τὴν γνῶσιν τοῦ κοινωνικοῦ καὶ τοῦ πολιτικοῦ περιβάλλοντος, πρὸ παντὸς δὲ τῆς διανοητικότητος τῆς ἐποχῆς, τ. ἔ. τῆς πρώτης κινούσης ἰδέας ἐν τῇ καθόλου πνευματικῇ κινήσει. Οὕτω δὲ κρινόμενα τὰ Μαθηματικὰ τῶν Βυζαντηνῶν, παρουσιάζουσιν ἡμῖν ἐξαιρετικὸν ἐνδιαφέρον, δικαιούμενα πολὺ περισσοτέρας προσοχῆς ἢ ὅσης ταῦτα ἀξιοῦσιν αἱ Ἱστορίαι τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῆς Λογοτεχνίας.

Ἡ κατὰ τὸν Μεσαίωνα ἐν γένει κυριεύουσα ἰδέα ἐν τῇ φιλοσοφίᾳ καὶ τῇ ἐπιστήμῃ, εἶναι ὁ *Μυστικισμός*, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν *Ἰδεολογίαν* τῆς ἀρχαιότητος καὶ τὸν *Φυσιοκρατικὸν* ρεαλισμὸν τῶν νεωτέρων χρόνων. [2] Ἀλλ' ἡ ἀπόκρυφος αὕτη ἐπιστημοσύνη, μία ἀληθὴς *ἀποθείωσις* τῶν Ἐπιστημῶν, ἐν τούτοις, ὡς ἔρευνα αὐτῶν τῶν θείων δυνάμεων καὶ χρησιμοποίησις τούτων εἰς τὴν πρᾶξιν, ἐθεωρήθη ὡς προσπάθεια ἐναγής, ἡ δ' ἐντεῦθεν προελθοῦσα ἀντίθεσις μεταξὺ τῆς ἀποκρύφου καὶ τῆς ἀμιγοῦς ἐπιστήμης τῆς ἀρχαίας παραδόσεως, διεμόρφωσε σαφῶς ἐκπεφρασμένον διφυῆ τὸν χαρακτῆρα τῆς Βυζαντιακῆς Ἐπιστήμης. Ἀφ' ἑνὸς μέν, τὸ μεγαλεῖον τῆς ἀρχαίας Ἑλληνικῆς Γραμματείας ἐπιβάλλει τὴν συντηρητικὴν

[1] Ἀνακοίνωσις ἐν τῇ συνεδρίᾳ τῆς 12 Φεβρ. 1923 τῆς Ἐπιστημ. Ἑταιρείας.

[2] Ἴδε τὰς πραγματείας μου: *Περὶ τῆς ἀρχῆς καὶ χρησιμότητος τῆς Ἱστορίας τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν*, σελ. 11. Ὁ *Φυσιολόγος καὶ σχέσις αὐτοῦ πρὸς τὰς ἀποκρύφους ἐπιστήμας* (ἐν τῇ «Ἐπιστημ. Ἐπετηρίδι τοῦ πανεπιστημίου» ΙΗ' σελ. 299. καὶ *Αἱ φυσικαὶ ἐπιστῆμαι τῶν Βυζαντηνῶν* (ἐν τῷ Ἡμερολ. τῆς Μεγ. Ἑλλάδος» 1924, σελ. 269 κἑξ).

ἐκ τῶν βιβλίων διδασκαλίαν τῆς ἀρχαίας καὶ τῆς Ἀλεξανδρινῆς φιλοσοφίας—ἣν ἀπεκαλέσαμεν: *Ἐπιστήμην Ἐπίσημον*, μὲ φιλολογικὸν κατ' ἐξοχὴν χαρακτῆρα, ἀφ' ἑτέρου δέ, τὸ σύγχρονον θεοφυσικὸν πνεῦμα ζητεῖ νὰ ὑπαγάγῃ τὴν ὅλην ἐπιστημονικὴν ἔρευναν εἰς τὰς μεθόδους τοῦ Μυστικισμοῦ. Διότι ὡς τοιαύτην ἀναμφιβόλως πρέπει νὰ χαρακτηρίσωμεν τὴν ἀπόκρυφον Βυζαντιακὴν Ἐπιστήμην, οὐχὶ δηλονότι ὥς τινα στείρωσιν ἐπιστημονικὴν ἢ πνευματικὸν ἐκφυλισμόν, ἀλλὰ τοὐναντίον, ὡς σοβαρὰν νεωτερίζουσαν προσπάθειαν πρὸς ἐπιστημονικὴν δημιουργίαν, ἥτις, ὡς ἡ Βυζαντιακὴ ποίησις, θὰ ἦτο κατ' ἀνάγκην θεοσοφική. Ἐντεῦθεν δέ, καὶ θεωρήσας οὐχὶ πλήρη τὸν συνήθως φερόμενον πίνακα τῶν Ἀποκρύφων Ἐπιστημῶν—Μαγείας καὶ Ἀστρολογίας καὶ Ἀλχυμείας καὶ Ἰατρικῆς τῶν φυλακτηρίων—συνεπλήρωσα τοῦτον ἐκ τῶν πραγμάτων, ὡς ἑξῆς: Μαγεία (ὥς τις ἀπόκρυφος Φυσική), Ἀστρολογία (ἡ ἀπόκρ. ἀστρονομία), Χυμευτικὴ καὶ Ἀλχυμεία (ἀπόκρ. χυμεία), Φυσιολόγος (ἀπόκρ. φυσιογραφία), Ἰατροσοφικὴ (ἀπόκρ. ἰατρικὴ) καὶ Ἀπόκρυφα Μαθηματικά. [1]) *Ἀπόκρυφα δὲ Μαθηματικὰ* πρέπει νὰ ὀνοματίσωμεν τὰ «Θεολογούμενα τῆς Ἀριθμητικῆς», ὡς τὰ Νικομάχου τοῦ Γερασηνοῦ καὶ τοῦ Ἀνατολίου καὶ τοῦ Ἰαμβλίχου, [2]) τῶν ὁποίων αὐτὸς ὁ τίτλος ἀκριβῶς μαρτυρεῖ τὴν μυστικότητα. Κατὰ ταῦτα δέ, ὑπὸ τὴν διαίρεσιν ἣν ἔδωκα τῆς Βυζαντιακῆς Ἐπιστήμης, ὡς ἐπισήμου καὶ μυστικῆς, πρέπει νὰ ὑπαγάγωμεν καὶ τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ τὴν Γεωμετρίαν, ἀλλὰ καὶ τὴν Μουσικήν, αἵτινες μετὰ τῆς Ἀστρονομίας συναποτελοῦσι τὰ εἰδικῶς «Μαθήματα» τῶν ἀρχαίων καὶ τῶν Βυζαντηνῶν. [3]) Οὐχὶ δὲ μόνον ἐντεῦθεν παρουσιάζουσιν ἡμῖν τὰ

[1]) Ἴδε τὴν πραγματείαν μου: *Ὁ Φυσιολόγος* κλπ. σελ. 300.

[2]) ***Thoelogumena arithmeticae*, ed. Frid *Astius*, *Lipsiae*, *MDCCCXII*·** πρβλ. *Τά μαγικὰ τετράγωνα* ἐν ***Histoire de mathémat*. par J. E. Montucla, Paris, au VI (1799).** 1 τ. 346–348.

[3]) Οὕτως ὁ Ψελλὸς ἔγραψε περὶ τεσσάρων μαθημάτων (ἴδ. **Krumbacher· *Gesch. d. Byz. Lit.* b** σελ. 622, μετάφρασις Σωτηριάδου II. σελ. 431) τοῦ δὲ Γ. Παχυμέρη ἡ πραγματ. ἐπιγράφεται: Μαθηματικά, ἀριθμητικά, γεωμετρικὰ καὶ ἀστρονομικά. Ὅθεν καὶ ὁ ὅρος *μαθηματικὸς* ἐσήμαινε τὸν ἀστρονόμον ἢ ἀστρολόγον (παρ' ἀρχ.)· ἴδε Διογ. Λαερτ. ἐκδ. **Hübnerus.** τ. 20,28 πρβλ. Ἀριστοτ. π. οὐρ. Β. 14. σ 297.

Μαθηματικὰ τελείως ἀπόκρυφον ἀλλοτροπίαν, ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως τὰ Μαθηματικά, καὶ πρώτη βεβαίως ἡ χορηγὸς τούτων Ἀριθμητική, συνετέλεσαν κατ᾽ ἐξοχὴν εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῆς Ἀποκρύφου Ἐπιστήμης. Καὶ νομίζω τοῦτο ὡς ἓν τῶν μᾶλλον ἐνδιαφερόντων πορισμάτων τῶν μελετῶν μου ἐπὶ τῆς ἱστορίας τῶν ἀποκρύφων ἐπιστημῶν.

## Β΄. *Μαθηματικὰ καὶ Μυστικισμός.*

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς στενῆς ταύτης σχέσεως τῶν ἰδίως μαθηματικῶν μετὰ τοῦ μυστικισμοῦ, παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις, ὅτι τοῦ ὡς ἀνωτέρω διττοῦ χαρακτῆρος τῶν Βυζαντιακῶν μαθηματικῶν, ὡς ἐπιστήμων καὶ ἀποκρύφων, εὑρίσκομεν πρωταρχικὴν ἀφετηρίαν ἐν αὐτῇ τῇ ἀρχαίᾳ φιλοσοφίᾳ. Ἐν ᾧ ἐν ταῖς Σχολαῖς τῶν Ἰώνων φιλοσόφων τὰ μαθηματικὰ ἔχουσι χαρακτῆρα θετικὸν (ὁ μὲν Θαλῆς καθορίζει τὰς ἰδιότητας τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ κύκλου, ὁ δὲ Δημόκριτος εὑρίσκει τοὺς ἀλόγους—irrationels—ἀριθμούς, καὶ ὁ Ἀναξαγόρας ἐπιλαμβάνεται τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου), τοὐναντίον τὰ μαθηματικὰ τῶν Πυθαγορείων—μία μαθηματικὴ κοσμοσοφία--παρουσιάζουσιν ἐπιστημοτροπίαν μυστικήν. Ἡ τοιαύτη δ᾽ ἐκφιλοσόφησις τῶν μαθηματικῶν κατὰ τὴν Πυθαγόρειον περίοδον, ἀπήτησε πιθανῶς καὶ τὸν χωρισμὸν τῆς Γεωμετρίας καὶ τῆς Ἀριθμητικῆς ἀπὸ τῶν ἀντιστοίχων πρακτικῶν αὐτῶν ἐφαρμογῶν, τῆς Λογιστικῆς καὶ τῆς Γεωδαισίας. Τὸν θετικὸν χαρακτῆρα τῶν Ἰώνων μαθηματικῶν ἐκληρονόμησεν ἡ Μαθηματικὴ τῶν Περιπατητικῶν, ἀποσκοποῦσα τὴν ἐπίλυσιν φυσιογνωστικῶν καὶ μηχανικῶν προβλημάτων. Τοὐναντίον δέ, τὸν μυστικισμὸν τῆς μαθηματικῆς πυθαγορείου φιλοσοφίας, καθ᾽ ἣν τὰ σχήματα τῶν πραγμάτων συναποτελοῦνται ἐξ ἀριθμητικῶν μονάδων, διετήρησεν ἡ διὰ τῶν τριγώνων (ἐπιπέδων) κοσμογονία τοῦ Πλάτωνος, ἡ ἀναπτυσσομένη ἐν τῷ Τιμαίῳ.

Ἐκ τῆς διαστολῆς δὲ ταύτης τῶν Πλατωνικῶν καὶ Περιπατητικῶν μαθημάτων δυνάμεθα, νομίζω, νὰ ἐννοήσωμεν τὴν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ διαμόρφωσιν δύο μαθηματικῶν σχολῶν: τῆς Ἀστρονομικῆς

—Μαθηματικῆς ἐπὶ Πτολεμαίων (323-283) καὶ τῆς Νεοπυθαγορείου ἢ Νεοπλατωνικῆς Μαθηματικῆς Σχολῆς. Τῆς πρώτης κυριώτατοι ἀντιπρόσωποι εἶναι ὁ Εὐκλείδης (ὁ ἑνώσας Γεωμετρίαν καὶ Ἀριθμητικήν), ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ Ἐρατοσθένης, ὁ Ἥρων, ὁ Κτησίβιος, Φίλων ὁ Βυζάντιος, ὁ Νικομήδης (ὁ ἐφευρετὴς τοῦ κογχοειδοῦς), ὁ Διοκλῆς (ἐφευρέτης τοῦ κισσοειδοῦς), ὁ Ἀπολλώνιος Περγαῖος, ὁ Ἀρίσταρχος (ὁ τῶν σφαιρικῶν καμπύλων), κτλ. Τῆς δὲ δευτέρας ἀντιπρόσωποι ὁ Μενέλαος (εἰσηγητὴς τῆς Τριγωνομετρίας), ὁ Θέων Σμυρναῖος, Θέων ὁ Ἀλεξανδρεύς, ὁ Νικόμαχος Γερασηνὸς (ὁ ἀποσπάσας τὴν Ἀριθμητικὴν ἀπὸ τῆς Γεωμετρίας), ὁ Πλωτῖνος, ὁ Πάππος, ὁ Διόφαντος (ὁ τῆς ἀλγέβρας εἰσηγητής), κλπ. Τῆς δευτέρας δὲ ταύτης μαθηματικῆς φιλοσοφίας συνέχεια εἶναι ἡ τῶν Ἀθηνῶν (τοῦ Πρόκλου 485) Μαθηματικὴ Σχολή, μεθ' ἧς στενῶς συνδέονται τὰ Μαθηματικὰ τοῦ Βυζαντίου.

Καὶ τῶν μὲν Πυθαγορείων καὶ Πλατωνικῶν μαθημάτων ἀλλοτροπικὴν ἐξέλιξιν παρουσιάζουσιν ἡμῖν τὰ *θεολογούμενα μαθηματικὰ* ἐρευνῶντα τὰς δυναμικὰς ἰδιότητας τῶν ἀριθμῶν ἐκ τῆς *ἐτυμολογίας ἢ παρετυμολογίας* τῶν ὀνομάτων αὐτῶν [1]) καὶ ἐκ τῶν σχετικῶν ἀναλογιῶν, καθ' ἃς παρουσιάζονται τὰ ἐν τῇ Φύσει πράγματα καὶ φαινόμενα — συμφώνως πάντοτε μὲ τὴν παλαιὰν ἀρχὴν τοῦ ἑνιαίου τοῦ Κόσμου, εἰς ἣν ἤγετο ἡ Ἀπόκρυφος Ἐπιστήμη *διὰ ποιητικῶν κυρίως μεταφορῶν*, [2]) καθὼς ἡ φυσιογνωστικὴ ἔρευνα ἐπιζητεῖ τὴν ἐπιστημονικὴν σύνθεσιν διὰ τῆς παρατηρήσεως καὶ τῆς ἐπαγωγῆς. [3]) Πρὸς τὴν θεολογουμένην δ' ἀφ' ἑτέρου Ἀριθμητικὴν πολλὴν παρουσιάζουσι τὴν συγγένειαν ὄχι μόνον αἱ ἀστρολογικαὶ πράξεις ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν λόγων καὶ τῶν δυναμικῶν ἀπορροῶν τῆς σελήνης καὶ τῶν ἀστέρων καὶ τῶν ζῳδίων, [4]) ἀλλὰ καὶ τῆς Χρυσοποιΐας αἱ ἀλληγο-

[1]) Ἴδε τὰ ἄρθρα μου: ***Notes sur les textes chymeutiques*** ἐν «**Revue des Études grecques**» **XXXV, nº 162 (1922)**, σελ. **20** ἑξ. καὶ *χυμευτ. ὀνοματόλ.* ἐν «Λεξικογραφικῷ Ἀρχείῳ» **4** σελ. **171-175**.

[2]) Ἴδε τὸ ἄρθρον μου: ***Ἐπιστήμη καὶ ποίησις*** ἐν «**Ἀνθρωπότητι**» **Γ.** σ. **20-22**.

[3]) Ἴδε τὴν πραγματείαν μου: ***Ὁ Φυσιολόγος*** κλπ. ἔνθ. ἀν. σ. **313**.

[4]) Πρβλ. καὶ τοὺς συνδυασμοὺς φθόγγων πρὸς πλανήτας ἐν ***Notice sur divers manuscrits grecs relatifs à la Musique*** par **A. J. H. Vincent, Paris**, MDCCCXLVII σ. 250. καὶ παρὰ Γ. Παχυμέρη αὐτόθι, σ. **406**.

ρίαι καὶ οἱ μυστικισμοί. Τὰ περὶ *μονάδος* καὶ *χύματος* λεγόμενα ἐν τῇ *Χρυσοποιΐᾳ* Στεφάνου τοῦ Ἀλεξανδρέως [1] καὶ οἱ συνδυασμοὶ χημευτικῶν πράξεων πρὸς πλανήτας καὶ θεούς, εἶναι ὅμοια πρὸς τὰς συμβολικὰς ἑρμηνείας τῶν ἀριθμητικῶν μυστικισμῶν, ἀλλὰ καὶ τὰ αὐτόθι ῥητορικὰ ἐγκώμια τῆς χρυσοποιίας ὑπενθυμίζουσι τοὺς ποιητικοὺς ἀφορισμοὺς τῶν ἀριθμῶν εἰς τὰς μυστικὰς πραγματείας τοῦ Νικομάχου καὶ Ἀνατολίου καὶ Ἰαμβλίχου

Αὐτὸ δὲ τὸ ἔργον τῆς χημευτικῆς συνδέεται ἐπίσης στενῶς οὐ μόνον πρὸς τὴν Ἀριστοτελικὴν φιλοσοφίαν τῆς γενέσεως καὶ τῆς φθορᾶς τῶν εἰδῶν, [2] ἀλλὰ καὶ πρὸς τὴν Ἀριθμητικὴν τῆς Πυθαγορείου φιλοσοφίας. Κατὰ τὴν χημευτικὴν θεωρίαν καὶ πρᾶξιν, ἣν ἐκ τῶν χημευτικῶν κειμένων ἀπεκάλυψα, [3] ἑκάστη οὐσία, ὡς ἕκαστος ἀριθμὸς χωριστά, ἔχει τὴν ἰδίαν της ἀτομικότητα. Ὅπως δ' ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν ἀριθμῶν παράγεται τὸ ἀριθμητικὸν *χύμα*, οὕτω καὶ διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν μεταλλικῶν οὐσιῶν συναποτελεῖται τὸ χυμευτικὸν *χύμα* ἢ *σύνθεμα*, ἐκ τοῦ ὁποίου διὰ μελάνσεως καὶ λευκώσεως καὶ ξανθώσεως παράγεται ἡ τελειοτάτη οὐσία τοῦ χρυσοῦ. Ἡ γένεσις δ' αὕτη εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς ἁρμονικῆς συμπλοκῆς τῶν οὐσιῶν διὰ τοῦ «μεσιτεύοντος», τοῦ παρέχοντος εἰς τὰ νεκρὰ σώματα τὴν ψυχήν, «ἀριθμὸν κινοῦντα ἑαυτόν» [4] ὡς ἡ σελήνη καὶ ὁ ἥλιος καὶ οἱ ἀστέρες, [5] καὶ προκαλοῦντα τὴν ἕνωσιν τῶν οὐσιῶν κατ' ἀναλογίας ὡρισμένας, καθ' ὃν τρόπον συνδυάζονται οἱ ἑπτὰ φθόγγοι εἰς τὰς μελῳδίας τῆς Μουσικῆς, μὲ τὴν ὑπερφυσικὴν δύναμιν τοῦ ἁρμονικοῦ χοροῦ τῶν ἑπτὰ πλανητικῶν ἀστέρων.

Πολλὰς δὲ μυστικὰς ἀναγωγὰς χυμευτικῶν πράξεων εἰς τὰς ἁρμονικὰς συνθέσεις ἀπαντῶμεν ἐν τοῖς χυμευτικοῖς κειμένοις, ἐν τῇ Χρυσοποιΐᾳ Στεφάνου τοῦ Ἀλεξανδρέως [6] μάλιστα δὲ ἔν τινι εἰδικῇ

[1] Ἔκδ. Ideler. *Phys. et med.* II. σ. 202.

[2] Ἴδε τὸ ἄρθρον μου ἐν «Ἀθηνᾷ» ΙΖ, σελ. 54 ἑξ. καὶ τὸ ἔργον μου *Συμβολαὶ εἰς τὴν Ἱστορ. τῶν φυσ. ἐπιστημῶν*, σελ. 33 ἑξ.

[3] Ἴδε τὴν πραγματείαν μου *Ψαμμουργικὴ καὶ Χυμεία*, σ. 13-26 (*Συμβολαί*, σελ. 26-35) καὶ τὸ ἄρθρον μου ***La naissance de la chimie*** ἐν «Scientia» XXXI (1922) σ. 189-196.

[4] Ἀριστοτ. *Π. ψυχ.* Α. II. 8 (Πυθαγόρ.)

[5] Αὐτόθι, Α. II. 17 (Ἀλκμαίων)

[6] Ἔκδ. Ideler. II. σ. 202, 17.

πραγματείᾳ τοῦ Βυζαντίνου χυμευτοῦ Ἀνεπιγράφου [1]) καθ' ἣν διὰ τῶν διαφόρων *ἤχων* ὑφαίνονται αἱ ἄπειροι μελῳδίαι τῶν ὕμνων ἢ θεραπειῶν ἢ ἀποκαλύψεων ἢ ἄλλου τινὸς σκέλους (=κλάδου), τ. ἔ. συντίθεται τὸ *ἁρμονικὸν χύμα*, ἐκτελούμενον διὰ τῶν μουσικῶν ὀργάνων, καθὼς διὰ τῶν οὐσιῶν παράγεται τὸ *χρυσογόνον σύνθεμα* τῇ ἀρωγῇ τῶν χυμευτικῶν ὀργάνων, κατὰ ποιήσεις πολλαπλᾶς καὶ ἀγωγὰς καὶ τάξεις καὶ συντάξεις.

Ἀλλ' ἡ ἀνωτέρω θεωρία τῆς ἑνώσεως τῶν σωμάτων κατ' ἀναλογίας ὡρισμένας, ἀνακαλεῖ τὴν μνήμην τῆς παλαιᾶς ἀληθείας τοῦ ἐν τῷ κόσμῳ δυαδικοῦ συνδυασμοῦ τῶν «ἐναντίων», ἣν πρῶτος ὁ Ἡράκλειτος [2]) ὑπέδειξε διὰ τοῦ ποιητικοῦ ἀφορισμοῦ: «Συνάψειας οὖλα καὶ οὐχὶ οὖλα, συμφερόμενον καὶ διαφερόμενον, συνᾷδον καὶ διᾷδον καὶ ἐκ πάντων ἓν καὶ ἐξ ἑνὸς πάντα», ἥτις δ' ἕνωσις ἐπιτελεῖται, κατὰ τὸν Πλάτωνα, [3]) διὰ τῆς *τρίτης* ἐνδιαμέσου οὐσίας, δεσμοῦ συνεκτικοῦ τῶν δύο ἐναντίων: Ἐντὸς μεγάλου κρατῆρος ἀνέμειξεν ὁ Θεὸς τὴν ψυχὴν καὶ τὴν ὕλην μετὰ τῆς τρίτης οὐσίας, συνθέτου ἐξ ἀμφοτέρων, καὶ ἔπλασεν τὸν κόσμον ζῷον ἑνιαῖον ἔμψυχον καὶ ἔννουν. Καὶ διῃρέθη τὸ κοσμικὸν τοῦτο σύνθεμα εἰς μοίρας ἑπτὰ μὲ τοὺς ἑπτὰ πλανήτας, καὶ πάλιν αἱ ἑπτὰ μοῖραι εἰς πολλοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἁρμονίας γεωμετρικάς, κατὰ τοὺς λόγους τῶν συμφωνιῶν τῆς Μουσικῆς καὶ τὰς περιόδους τῆς σελήνης — εἰς ψυχὰς ἀτομικάς, ἰσαρίθμους πρὸς τὰ ἄστρα καὶ ὑποκειμένας εἰς τοὺς νόμους τῆς εἱμαρμένης. Μονιμοποιεῖται δέ, κατὰ τὸν Φιλόλαον, [4]) ἡ τῶν ἐναντίων ἕνωσις διὰ τῆς «ἁρμονίας» συνισταμένης κατ' Ἐμπεδοκλῆν [5]) καὶ Ἀριστοτέλην, [6]) εἰς τὴν ὡρισμένην ποσοτικὴν ἀναλογίαν τῶν συστατικῶν στοιχείων τῆς αὐτῆς ἑνώσεως. Ἐν τῇ θεωρίᾳ δὲ ταύτῃ τῆς ἑνώσεως τῶν *ἐναντίων κατὰ λόγους ὡρισμένους ἀριθμητικούς, διὰ τῆς «τρίτης» ἐνδιαμέσου οὐσίας, πρέπει νομίζω, νὰ ζητήσωμεν τὴν πρώτην ἀφετηρίαν*

1) *Collection des Alchim. Grecs*, par Berthelot et Ruelle, σ. 433-441 πρβλ. *Coll.* σ. 437-439.

2) *Fr. Philos. Graec.* ed. Mullachius, 320, 45.

3) *Τιμ.* VII. 31 B καὶ VI—IX.

4) *Fr. Philos. Graec.* I. (48). II. 2 καὶ 4

5) *Fr. Philos. Graec.* I. σ. 48.

6) *Π. γεν. καὶ φθορ.* I. 7. 323, π. ψυχ. I. IV 407, 408.

*τοῦ «μεσιτεύοντος» τῆς ἑλληνικῆς Χρυσοποιΐας καὶ ἄρα τῆς φιλοσοφικῆς λίθου τῶν ἀλχυμιστῶν—ἀλλὰ καὶ τὴν πρώτην ἰδέαν τοῦ θεμελιώδους νόμου τῶν «ὡρισμένων ἀναλογιῶν» τῆς νεωτέρας Χυμείας.* [1])

Σαφῶς δέ, νομίζω, ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι *πρὸς τὰς Ἀποκρύφους ἐπιστήμας κατήγαγε κυρίως ἡ περὶ τῶν ἀριθμῶν, ὡς δυναμικῶν στοιχείων τοῦ κόσμου, φιλοσοφία*, δρῶσα ἐν τῷ ἱερατικῷ καὶ θρησκευτικῷ περιβάλλοντι τῆς Ἀλεξανδρείας καὶ τοῦ Βυζαντίου, πρωτότοκος δὲ τῆς φιλοσοφίας ταύτης ἀπόκρυφος βλαστὸς εἶναι ἡ *Θεολογουμένη* Ἀριθμητική. *Ὅθεν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν τὰς Ἀποκρύφους ἐπιστήμας ὥς τινα ἐφαρμογήν, ὑπὸ πνεῦμα μυστικόν, τῆς Μαθηματικῆς εἰς τὴν Ἐπιστημονικὴν ἔρευναν.*

Καὶ πιθανώτατον μὲν εἶναι, ὅτι τὰ Πυθαγόρεια ταῦτα καὶ Πλατωνικὰ διδάγματα ἔχουσι τὰς πηγὰς αὐτῶν εἰς αἰγυπτιακὰς κοσμοσοφίας, ἀλλ' ἀναμφιβόλως ὁ Βυζαντιακὸς καὶ ἐν γένει ὁ μεσαιωνικὸς Μυστικισμὸς ἤντλησεν κυρίως ἐκ τῶν ἑλληνικῶν κειμένων, ἐν ταῖς Σχολαῖς τῆς Ἀλεξανδρείας, ἔνθα, ὡς ἀλλαχοῦ ὑπέδειξα, διεμορφώθη καὶ ἡ τῶν Ἑλλήνων *χυμευτικὴ* φιλοσοφία καὶ αὐτὸ πιθανώτατα τὸ ἀπόκρυφον φυσιογραφικὸν σύστημα τοῦ «Φυσιολόγου»—ἀλλὰ βεβαίως καὶ ἡ *ἐπίσημος* Βυζαντιακὴ ἐπιστήμη. [2])

## Γ΄. Ἐπίσημα Μαθηματικά.

Τὴν λογοτεχνίαν τῶν ἐπισήμων εἰδικῶν μαθηματικῶν (Γεωμετρίας καὶ Ἀριθμητικῆς) τῶν Βυζαντίνων, ἀποτελοῦσιν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰ διδακτικὰ ἐγχειρίδια τῶν *κατωτέρων σχολῶν*, καὶ ἀφ' ἑτέρου τὰ *πανεπιστημιακὰ* ὑπομνήματα εἰς θέματα μαθηματικὰ τῆς ἀρχαίας φιλοσοφίας καὶ εἰς τοὺς μεγάλους τὴν Ἀλεξανδρείας μαθηματικούς, οἷον τὰ ὑπομνήματα τοῦ Πρόκλου καὶ τοῦ Σιμπλικίου (τῆς Ϛ' ἑκατ.) εἰς τὸν Εὐκλείδην, τοῦ Ἰω. Γραμματικοῦ ἢ Φιλοπόνου εἰς τὸν Νικόμ. Γερασηνόν, τοῦ Εὐτοκίου εἰς τὸν Ἀρχιμήδην

[1]) Περὶ τούτου γράφω ἐκτενέστερον ἀλλαχοῦ.

[2]) Ἴδε τὸ ἄρθρον μου *Αἱ φυσικ. ἐπιστήμ. τῶν Βυζαντ.* ἐν «Ἡμερολ. τῆς Μεγ. Ἑλλάδος» 1924

καὶ τὸν Ἀπολλώνιον, καὶ τοῦ Στεφάνου Ἀλεξανδρέως εἰς τὸν Θέωνα. Νέα δίδεται ὤθησις εἰς τὰς μαθηματικὰς σπουδὰς ὑπὸ Λέοντος τοῦ Σοφοῦ ἢ Μαθηματικοῦ (829—842), σχολάρχου τοῦ ὑπὸ Βάρδα ἱδρυθέντος πανεπιστημίου. Κατὰ τὴν 10ην ἑκατ. διαπρέπει Ἥρων ὁ Νεώτερος, τὴν 11ην ὁ Μιχ. Ψελλός. Ἐξαιρετικὴν δὲ παρέχει προστασίαν εἰς τὰ Μαθηματικὰ ὁ Αὐτοκράτωρ Μανουὴλ τῆς 12ης ἑκατ. Κατὰ τὸν αἰῶνα τῶν Παλαιολόγων γνωρίζονται ἐν Βυζαντίῳ τὰ μαθηματικὰ συγγράμματα τῶν Ἀράβων καὶ τῶν Περσῶν διὰ τοῦ ἰατροῦ Γρηγορίου τοῦ Χιονιάδου (13ης ἢ 14ης ἑκατ.), ὁ δὲ κληρικὸς Μανουὴλ ἐκ Τραπεζοῦντος, διδάσκαλος τοῦ Μανουὴλ Χρυσοκόκκη, καὶ ὁ Ἰσαὰκ Ἀργυρὸς φημίζονται ὡς μύσται τῆς Περσικῆς Ἐπιστήμης. Ἀλλ' ἡ Ἀραβικὴ αὕτη καὶ Περσικὴ ἐπίδρασις δὲν ὑποθέτει βεβαίως καὶ διακοπτομένην τὴν σπουδὴν τῶν ἀρχαίων προτύπων. Ὁ Θεόδωρος Μελιτινιώτης ἀντλεῖ ἐκ τῶν Ἑλληνικῶν ἀστρονομικῶν καὶ μαθηματικῶν ἔργων, ὁ δὲ Θεόδωρος Μετοχίτης, διδάσκαλος τοῦ Νικηφόρου Γρηγορᾶ, τοῦ ἀπολογητοῦ τῆς ἀστρονομίας κατὰ τῆς κληρικῆς στασιμότητος, ὑπομνηματίζει τὸν Εὐκλείδην καὶ τὸν Πτολεμαῖον καὶ Νικόμαχον τὸν Γερασηνόν. [1])

Τὰ Βυζαντικὰ ταῦτα ὑπομνήματα περιέχουσιν ἀναμφιβόλως γνωστῶν θεμάτων διασαφήσεις πρωτοτύπους πολλάς, ἀλλὰ καὶ νέας ἐνιαχοῦ παρατηρήσεις. Αὐτὴ δὲ ἡ ὑπομνημάτισις ἐφαρμόζεται ἀφ' ἑτέρου ἔνθα κυρίως πρόκειται νὰ πληρωθῇ κενὸν ἐν τῇ Μαθηματικῇ λογοτεχνίᾳ. «Ὠρέχθην (λέγει ὁ Εὐτόκιος ἐν ἀρχῇ τῶν ὑπομνημάτων αὐτοῦ εἰς τὸν Ἀρχιμήδην) [2]) κατ' ἐμὴν δύναμιν σαφῶς ἐκθέσθαι τὰ ἐν αὐτῇ δυσθεώρητα, προαχθεὶς μᾶλλον εἰς τοῦτο τῷ μηδένα πω καθεῖναι εἰς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν». Ἀλλ' ἀναμφιβόλως, ἡ περὶ τῶν μαθηματικῶν ἔργων τῶν Βυζαντηνῶν Κριτικὴ πρέπει νὰ θεωρήσῃ ταῦτα οὐχὶ κυρίως ἀπὸ καθαρῶς μαθηματικῆς ἀπόψεως, ὅσον ἀπὸ φιλολογικῆς, ὡς ἔργα δηλονότι κριτικῆς τῶν παλαιῶν κειμένων, ὡς μέρος τοῦ μεγάλου ἑρμηνευτικοῦ ἔργου τῶν Βυζαντηνῶν, ὅπερ θὰ ἐπεθύμουν νὰ χαρακτηρίσω ὥς τινα διαμόρφωσιν καινὴν εἰδικωτέρου κλάδου ἐν τῇ καθόλου Λογοτεχνίᾳ. Καὶ

[1]) Ἴδε Krumbacher, ἔνθ. ἀνωτ. σ 20 (μετάφρ. Σωτηριάδ. II 429-453).
[2]) *Archimedes opera*, ἔκδ. Heiberg, III σελ. 4.

είναι άληθώς φιλόλογοι οί μαθηματικοί του Βυζαντίου: «Ωρέχθην νά έκθέσω σαφώς τά δυσθεώρητα, κατά τήν δύναμίν μου», λέγει, ώς άνωτέρω είδομεν, ό ύπομνηματιστής του Άρχιμήδους. Καί είναι τά ύπομνήματα αύτών ώς τό πλείστον έρμηνείαι των γλωσσικώς δυσεξηγήτων χωρίων του μαθηματικου κειμένου. Ό Πρόκλος [1]) έπιγράφει τό ύπόμνημά του είς τήν Τετράβιβλον του Πτολεμαίου: «Τών *άσαφώς* εἰρημένων Πτολεμαίῳ καί *δυσπαρακολουθήτως* έν τῇ αύτῇ τετραβίβλῳ έπί τό *σαφέστερον* [2]) μεταχείρισις». Θά ήδυνάμεθα δ' έντεύθεν νά ύποπτεύσωμεν, ότι καί θά παρεσύροντο είς έπιστημονικάς άνακριβείας οί ώς τό πλείστον φιλόλογοι ούτοι ύπομνηματισταί, καί μία ύπό τήν έποψιν ταύτην λεπτομερής έξέτασις δέν θά έστερείτο βεβαίως ένδιαφέροντος. Έκ προχείρου τουλάχιστον έρεύνης τών ύπομνημάτων του Φιλοπόνου είς τήν *Άριθμητικήν Είσαγωγήν* του Γερασηνου, παρετήρησα ότι ό ύπομνηματιστής παρερμηνεύει τά ύπό του συγγραφέως περί των άριθμών πλινθίδων καί δοκίδων λεγόμενα. Ούτως, ό μέν Νικόμαχος [3]) λέγει: «Όταν δέ ή

όκτάκις ή δίς ή τρίς,

τά τοιαύτα στερεά σχήματα πλινθίδες λέγονται ίσάκις ίσοι έλαττονάκις· έάν δέ καί μείζονα τά ύψη τῷ τετραγώνῳ προσγένωνται, δοκίδες οί τοιούτοι άριθμοί λέγονται, οίον

τρίς γ έπτάκις ή όκτάκις ή έννεάκις

ή όσάκισούν μόνον ύπερβαλλόντως· έστι δέ δοκίς άριθμός ίσάκις ίσος μειζονάκις.» Δηλαδή, ό άριθμός 8 τετραγωνιζόμενος (όκτάκις όκτώ) γίνεται ό άριθμός 64, όστις πολλαπλασιαζόμενος έπί άριθμόν (ύψος) μικρότερον τής πλευράς 8 (ούχί μικρότερον του τετραγώνου 64), έπί παραδ. τόν άριθμόν 2 (όκτάκις όκτώ δίς), δίδει τόν άριθμόν 128, όστις παριστᾷ στερεόν σχήμα μέ μήκος 8, πλάτος 8 καί ύψος 2 (= μικρότερον του 8), όνομαζόμενον έντεύθεν *πλινθίδα* (ήτοι στερεόν, πεπλατυσμένον ώς αί πλίνθοι).

[1]) Έκδ. Βασιλείας, 1554.

[2]) Μετά τό: *σαφέστερον* ύπάρχει ή παρέλκουσα βεβαίως λέξις: *δυσπαρακολούθητον*, ήτις προσετέθη πιθανώτατα ύπό άντιγραφέως (σπουδαστου), είς όν καί αί έξηγήσεις του Πρόκλου έφάνησαν δυσπαρακολούθητοι.

[3]) Νικομ. Γερασηνου, *Άριθμητ. Είσαγ.* έκδ. Hoche II XVII, 57 σ. 110.

Ὅταν δ' ὅμως ὁ τετράγωνος ἀριθμός, οἷον (κατὰ τὸ δεύτερον παράδειγμα) ὁ $3 \times 3 = 9$ (τρὶς τρεῖς) πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμὸν μείζονα τῆς πλευρᾶς 3, οἷον τὸν 7 (τρὶς τρεῖς ἑπτάκις), τότε ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 63 λέγεται *δοκίς*, ὡς παριστῶν σχῆμα στερεὸν μὲ μῆκος 3, πλάτος 3 καὶ ὕψος 7, στυλοειδὲς ὡς αἱ δοκίδες.

Ἀλλ ὁ Φιλόπονος, σχολιάζων ταῦτα, λέγει τὰ ἑξῆς: « *Πλινθίδες*] Ἰσάκις ἴσοι εἰσὶν οἱ τετράγωνοι, οἷον ὁ δ, ὁ θ. ἐὰν τούτους ἐλαττονάκις πολλαπλασιάσῃς οἱ γενόμενοι πλινθίδες καλοῦνται. ἐλαττονάκις δὲ οὗ πέρ εἰσιν ἀριθμοῦ δηλονότι· θ'ς γ κζ, θ'ς δ λς· οὗτοι πλινθίδες καλοῦνται· ὅτι δὲ στερεοὶ οἱ τοιοῦτοι σαφές, καὶ ὅτι τοῦ βάθους ἐστὶν ὁ ἀριθμός, ἐφ' ὃν ὁ 6'ς γέγονεν πολλαπλασιαμὸς καὶ τοῦτο δῆλον· ὅτι δὲ τὸ βάθος ὕψος ὀνομάζουσί τινες, προλαβὼν εἴρηκεν· καὶ μὴν ἐπ' ἔλαττον, ἤπερ εἰσίν, οἱ τετράγωνοι πολλαπλασιασθῶσιν, οἱ ἐκ τούτων γενόμενοι καλοῦνται πλινθίδες, ὡς οἱ προκείμενοι ὁ η, ὁ ιβ, ὁ κζ, ὁ λς. οἱ γὰρ ἰσάκις ἴσοι τετράγωνοι ἐλαττονάκις ἐπολλαπλασιάσθησαν καὶ ἔστι τῶν τοιούτων ἀριθμῶν, ἡ μὲν βάσις ἰσάκις ἴση, τετράγωνοι γάρ, ἡ δὲ κορυφή, τουτέστι τὸ βάθος, εἰς ὅπερ ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐλάττων· τοιαύτας γὰρ εἶναί φασι τὰς πλίνθους ἀπὸ μείζονος βάθους (γρ. βάσεως) ἐπ' ἐλάττονα προϊούσας κορυφήν, ἴσως οὕτω πρότερον τῶν πλίνθων σχηματιζομένων» [1]). Ἀλλὰ διὰ νὰ δώσῃ τὸ τετράγωνον 9 πλινθίδα πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμὸν οὐχὶ μικρότερον τοῦ τετραγώνου = βάσεως (ὡς ἐκλέγει ὁ Φιλόπονος) 9, **ἀλλὰ μικρότερον** τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ 3, καὶ ἄρα οὔτε *ἴσον* πρὸς τὴν πλευρὰν (ὡς εἶναι ὁ ἀνωτέρω 3 τοῦ πρώτου παραδείγματος τοῦ Φιλοπόνου, ὅτε παράγεται ἀριθμὸς κύβος $3 \times 3 \times 3$), οὔτε *μεγαλείτερον* τῆς πλευρᾶς (ὡς εἶναι ὁ ἕτερος ἀριθμὸς 4 τοῦ δευτέρου παραδείγματος, ὅτε παράγεται δοκὶς $3 \times 3 \times 4$). Ἐπίσης δὲν εἶναι πλινθίδες οὐδὲ τὰ ἄλλα κατωτέρω παραδείγματα: $8 = 2 \times 2 \times 2$, $12 = 2 \times 2 \times 3$. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὰ περὶ *δοκίδων* παρδείγματα, ὁ Φιλόπονος φροντίζει νὰ λαμβάνῃ πάντοτε πολλαπλασιαστὰς τῶν τετραγώνων *μείζονας τῶν τετραγώνων*, ἐν ᾧ θὰ ἤρκουν καὶ ἁπλῶς *μείζονες* τῶν πλευρῶν, ἔστω καὶ τῶν τετραγώνων ἐλάσσονες, ὡς λαμ-

[1]) *Ἰω. Γραμματικοῦ Ἀλεξανδρέως, τοῦ Φιλοπόνου, εἰς τὸ Δεύτερον τῆς Νικομάχου Ἀριθμητ. εἰσαγωγῆς*, ἐκδ. R. Hoche, Berl. M. CCCCLXVII σ. 16, νζ.

βάνει τούτους ὁ Νικόμαχος. Δυνάμεθα δ' ἴσως νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ Φιλόπονος ὑπέπεσεν εἰς τὰ λάθη ταῦτα, ἐκλαβὼν ἐκ παραδρομῆς τὴν φράσιν τοῦ Νικομάχου (διὰ τὰς δοκίδας): «Ἐὰν δὲ καὶ μείζονα τὰ ὕψη τῷ τετραγώνῳ προσγένηται», ὡς σημαίνουσαν «ἐὰν τὰ ὕψη καὶ μείζονα τῶν τετραγώνων προσγένηται» [1]) ἀντὶ τοῦ ὀρθοῦ: «Ἐὰν δὲ προστεθῶσιν εἰς τὸν τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ μεγαλείτερα ὕψη» [2]).

Πρὸς τὰ μαθηματικὰ ταῦτα ὑπομνήματα ἀντιτίθενται τὰ μαθηματικὰ ἐγχειρίδια τῶν Βυζαντηνῶν, διδακτικοῦ περιεχομένου, μὴ στερούμενα ἐνιαχοῦ πρωτοτυπίας, ἔχοντα δὲ πιθανῶς συγγραφεῖς διδασκάλους, ἐντριβεῖς τῶν κατωτέρων μαθηματικῶν. Ἐκ τῶν πρακτικῶν τούτων ἐγχειριδίων, ὁποῖον ἡ Ἀριθμητικὴ Δομνίνου τοῦ Λαρισσαίου (τῆς 6ης ἑκατ.), κλπ. ἄξιον ἰδιαιτέρας προσοχῆς εἶναι ἡ Ἀριθμητικὴ τοῦ Μαξίμου Πλανούδη, λογίου μοναχοῦ, γεννηθέντος τῷ 1260 ἐν Νικομιδείᾳ, ζήσαντος δ' ἐν Κωνσταντινουπόλει ἐπὶ Μιχαὴλ Η' καὶ Ἀνδρονίκου Β' ἀποθ. δὲ τῷ 1310, ἐκ τῶν Βυζαντίνων προδρόμων τῶν κλασικῶν τῆς Δύσεως. Ἡ Ἀριθμητικὴ αὐτοῦ ἐπιγράφεται: «Ψηφοφορία [3]) κατ' Ἰνδούς, ἡ λεγομένη μεγάλη», ἐκδοθεῖσα τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Gerhardt. [4]).

Ἐν τῇ εἰσαγωγῇ αὐτοῦ ὁ συγγραφεὺς μᾶς πληροφορεῖ ὅτι τοὺς «μοναδικοὺς» ἀριθμοὺς μεταχειρίζονται οἱ *τῶν ἀστρονόμων φιλοσοφώτεροι*, ὅτι «τιθέασι δὲ καὶ ἕτερόν τι *σχῆμα* ὃ καλοῦσιν *τζίφραν* κατ' Ἰνδοὺς σημαῖνον *οὐδέν*· καὶ τὰ ἐννέα δὲ σχήματα καὶ αὐτὰ ἰνδικά ἐστιν. ἡ δὲ τζίφρα γράφεται οὕτως O», καὶ ἑρμηνεύει τὴν διὰ τῶν σχημάτων τούτων ἀρίθμησιν, ἣν ἀποκαλεῖ ἀρίθμησιν «κατὰ

[1]) Καὶ ἄρα διὰ τὰς πλινθίδας: ἐλάττονα τῶν τετραγώνων.

[2]) Μεγαλείτερα δηλ. τῆς πλευρᾶς, ἧς μικρότερα τὰ ὕψη τῶν πλινθίδων.

[3]) Ἡ λ. *ψῆφος* ἐσήμαινε καὶ τὸν νῦν ***ἀριθμόν***, ὡς εἰκάζομεν ἐκ τοῦ Ἀριστοτέλους (*Π. σοφιστ. ἐλεγχ.* 1.σ 161): «Τὸ συμβαῖνον ἐπὶ τῶν ὀνομάτων καὶ ἐπὶ τῶν πραγμάτων ἡγούμεθα συμβαίνειν, καθάπερ ἐπὶ τῶν **ψήφων** τοῖς λογιζομένοις». Πρβλ. **Anecd. graec. J A. Cramer, v. I.** σ. 352: «Κράτησον ὅσον ψῆφον ἔχει ἡ σελήνη τῇ πρώτῃ τοῦ Ἰανουαρίου μηνός», αὐτόθι, σ. 354: «Μέθοδος ψήφου, δι' ἧς εὑρίσκεται». Ὅθεν καὶ ***ψηφίζω***=ἀριθμῶ ἢ λογαριάζω (αὐτόθι, σ. 354).

[4]) ***Das Rechenbuch des Maximus Planudes***, Μαξίμου Μοναχοῦ τοῦ Πλανούδη, ***Ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς, ἡ λεγομένη μεγάλη***, **von C. I. Gerhardt, Halle,** 1865.

χώρας», ὡς ἑξῆς: Τὸ κείμενον καθ' ἑαυτὸ ἢ κατὰ τὴν *πρώτην χώραν*, τ. ἔ. εἰς τὴν πρώτην θέσιν (δεξιᾷ) λέγεται ἀριθμὸς «μοναδικὸς» (δηλ. ἀριθμὸς ὑφιστάμενος μόνος), *τὸ σχῆμα τὸ κείμενον κατὰ τὴν δευτέραν χώραν* λέγεται «δεκαδικὸς» (ἀπὸ 10-90), δηλῶν *τὰς δεκάδας*, τὸ κατὰ τὴν *τρίτην χώραν* «ἑκατονταδικὸς» (100—900) δηλῶν τὰς *ἑκατοντάδας*· ἕπεται ὁ τῶν *χιλιάδων* ἀριθμός, τῶν *μυριάδων*, τῶν *δεκάδων μυριάδων*, τῶν *ἑκατονταδικῶν μυριάδων*, κλπ. Τὰ ἀνωτέρω *ψηφία* μετὰ τῆς *τζίφρας* ἀποκαλεῖ, ὡς εἴδομεν, ὁ Πλανούδης *Ἰνδικά*. Ἀλλ' ἐξεφράσθη, ὡς γνωστόν, ἀμφιβολία, ἐὰν τὰ ὡς Ἰνδικῆς προελεύσεως φερόμενα ἔργα ἔχωσι καὶ τὴν προτεραιότητα.[1]) Πιθανώτερον δ' ὅτι τὰ καὶ σήμερον ἐν χρήσει ἀριθμητικὰ σύμβολα εἶναι ἀραβικῆς καταγωγῆς, προῆλθε δὲ τὸ *οὐδὲν* τῶν ἀριθμῶν ἐκ τῶν ἑλληνικῶν *ἐκθετῶν ἢ δεικτῶν*, δι' ὧν διεστέλλοντο αἱ μυριάδες ἀπ' ἀλλήλων, οἷον $\mathrm{M}^{\alpha} = 10000$, $\mathrm{M}^{\beta} = 20000$, $\mathrm{M}^{\gamma} = 30000$ κτλ. καὶ οἵτινες διὰ *γραμμάτων* δεικται ἀντικατεστάθησαν πρὸς διάκρισιν ὑπὸ *στιγμῶν* καὶ ἔπειτα ὑπὸ *κυκλίσκων*, ἐχρησίμευσαν δ' οἱ κυκλίσκοι βαθμηδὸν ὡς τοποτηρηταὶ τῶν ἀριθμῶν, διαμορφωθείσης οὕτω τῆς κατὰ χώραν ἀριθμητικῆς γραφῆς.[2]) Σπανίως δ' οἱ Βυζαντηνοὶ μετεχειρίζοντο τὰ ἀραβικὰ ψηφία, καὶ συνηθέστερον ἐπὶ σχημάτων γεωμετρικῶν, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν συνήθων τότε ἀλφαβητικῶν ἀριθμῶν, τ. ἔ. ἀντιστρόφως ἢ ὡς γίνεται σήμερον ἐν ταῖς Γεωμετρίαις.

Πραγματευθεὶς δὲ περαιτέρω ὁ Πλανούδης περὶ τῆς «συνθέσεως» (=προσθέσεως), τῆς «ἐκβολῆς» ἢ ἀφαιρέσεως, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τοῦ «μερισμοῦ» (=διαιρέσεως), περὶ ζωδιακοῦ κύκλου καὶ ὑποδιαιρέσεως αὐτοῦ (ἀναλογοῦντος τοῦ κεφ. τούτου πρὸς τοὺς συμμιγεῖς τῶν νεωτέρ. ἀριθμητικῶν) καὶ περὶ εὑρέσεως τῆς τετραγωνικῆς «πλευρᾶς»[3]) (=τετρ. ῥίζης) κατὰ Θέωνα καὶ διὰ τῆς Ἰνδικῆς μεθόδου, προσθέτει κατόπιν ἴδιον αὐτοῦ τρόπον ἐξα-

[1]) Hoeffer, *Hist. des mathémat.* σ. 49.

[2]) Hoeffer, ἔνθ' ἀνωτ. π.δλ. Chasles, *Hist. de l' Arithmet.* ἐν Comptes de l' Academ. Juillet, 1843.

[3]) Πρβλ. Στεφ. Ἀλεξ. (ἐκδ. Ideler, Plys. et med. gr. minor. II, σ. 202): «Πᾶσα μὲν τετραγωνικὴ πλευρὰ ἐξ ἰδιομήκους γινομένη».

γωγῆς τῆς τετραγ. ῥίζης κατὰ μείζονα προσέγγισιν: «Ῥητέον δὲ καὶ τὴν ἡμετέραν μέθοδον, ἡ δὲ καὶ ἔχει τόνδε τὸν τρόπον». Ὑποθέτει τὸν ἀριθμόν, οὗτινος ζητεῖται ἡ τετ. ῥίζα, ὡς παριστῶντα *μοίρας*, τὰς ὁποίας τρέπει εἰς δεύτερα λεπτά, τοῦ δ᾽ οὕτω προκύπτοντος μεγαλειτέρου ἀριθμοῦ ἐξάγει τὴν τετρ. ῥίζαν καὶ τὸν ῥιζικὸν τοῦτον ἀριθμὸν τρέπει ἔπειτα εἰς μοίρας, αἵτινες, ὡς ἑπόμενον, θὰ παριστῶσι τὴν ζητουμένην τετραγ. ῥίζαν. Οὕτως ἐπὶ παραδ. ὁ ἀριθμὸς 6 παρέχει εἰς δεύτερα λεπτὰ τὸν ἀριθμὸν 21600, οὗτινος ἡ τετραγ. ῥίζα εἶναι 146, ὅστις ἀναγόμενος εἰς μοίρας γίνεται ὁ ἀριθμὸς 2°46″. Εἶναι ἄρα ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 6: $2\frac{18}{60}$.

Ἡ μέθοδος δ᾽ αὕτη τοῦ Φιλοπόνου παρέχει μὲν βεβαίως μείζονά τινα προσέγγισιν εἰς τὴν ἀληθῆ τετρ. πλευρὰν τῶν μὴ ἐχόντων ἀκεραίαν ῥίζαν μικρῶν ἀριθμῶν, μαρτυρεῖ δ᾽ ὅμως πάντοτε περὶ τῆς μαθηματικῆς ἐνημερότητος τοῦ συγγραφέως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα, νομίζω, νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι ἡ Μαθηματικὴ τῶν Βυζαντηνῶν, μὴ ἔχουσα βεβαίως νὰ ἐπιδείξῃ διάνοιγμά τι νέας ἐπιστημονικῆς ὁδοῦ, δὲν δύναται ἐν τούτοις καὶ νὰ θεωρηθῇ ὡς παρακμάζουσα. Τὰ μαθηματικὰ συγγράμματα, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπέροχος αὐτῶν Μηχανική, σαφῶς μαρτυροῦσι περὶ τῆς ἰδιαιτέρας φροντίδος, τῆς ὁποίας ἠξίωσαν οἱ Βυζαντηνοὶ τὰς Μαθηματικὰς Ἐπιστήμας.

ΜΙΧΑΗΛ Κ. ΣΤΕΦΑΝΙΔΗΣ