ΚΕΦ. ΚΓ΄.

Περὶ τῆς τῶν Ἐκκρεμῶν Περιαγωγῆς.

§. 354. Ἐκκρεμὲς λέγεται πᾶν Νῆμα Μεταλλῶδες, ἢ Λίνιον θάτερον μὲν τῶν Περάτων αὐτῦ ἀφ' Ἥλυ, ἢ Πασσαλίσκυ προσηρτημένον ἔχον· τὸ δ' ἕτερον Σώματι βαρεῖ προσδεδεμένον. ὅπερ ὕτως ἀπηρτημένον ἐςὶν ἐκ τῦ Ἥλυ, ἢ τῦ Πασσαλίσκυ, ὥςε περιάγεσθαι περὶ αὐτά. διαιρεῖται δὲ τὸ Ἐκκρεμὲς εἰς Ἁπλῦν, καὶ Σιωύθετον. καὶ ἁπλῦν μὲν ἐςιν,
Πιν. ιέ. ᾧ ἓν Σῶμα μόνον προσδέδεται, οἷον τὸ ΑΚ· Σιωύθε-
χ. 5. 6. τον δὲ ᾧ πολλά, οἷον τὸ ΓΑ.

§. 355. Ἐὰν τὸ Ἐκκρεμὲς ἐκ τῆς Καθέτυ τῷ
Πιν. ιέ. Ὁρίζοντι Θέσεως ΑΚ εἰς ἄλλιω ὁποιανῦν ἀρθῇ, οἷον
χ. 5. τιὼ ΑΒ, εἶθ' ὕτως ἀφεθῇ, περιενεχθὲν Τόξον Κύκλυ καταγράψει, Κέντρον μὲν τὸν Ἧλον, ἡμιδιάμετρον δὲ τὸ Νῆμα ἔχοντος. δῆλον γὰρ ἐκ τῆς Πείρας, ὅτι ἀρθὲν εἰς τὸ Β καὶ ἀφεθὲν, εἰς τὸ Λ ἐλεύσεται, καὶ πάλιν ἀπὸ τῦ Λ εἰς τὸ Β. τὰς τοιαύτας δὲ ἀγωγὰς, καὶ ἐπαναγωγὰς, Περιαγωγὰς, ἢ Περιςροφὰς καλῦμεν. τὸ δὲ Σημεῖον Α περὶ ὃ περιςρέφεται, Κέντρον Κινήσεως.

§. 356. Ἵνα δὲ τὸν λόγον τῆς τοιαύτης τῦ Ἐκκρεμῦς Κινήσεως σιωοήσωμεν, Θέσις αὐτῦ ἔςω ἡ ΒΑ. τοιγαρῦν τὸ Σῶμα Β ὑπὸ δύω Διωάμεων ἕλκεται· ὧν ἡ μὲν, ἡ Βαρύτης τῦ Σώματός ἐςιν· ἡ δὲ, ἡ Διώαμις τῦ Νήματος, κατέχυσα τὸ Σῶμα διὰ τῆς ΒΑ Φορᾶς. ἐμφαινέτω ὖν τιὼ μὲν τῆς Βαρύτητος Διώαμιν, ἡ ΒΓ, τιὼ δὲ τῦ Νήματος, ἡ ΒΔ. καὶ ἐπειδὴ τὸ Σῶμα Β ὑπὸ δύω Διωάμεων ἕλκεται τῶν ΒΓ, ΒΔ, ἄρα τιὼ Διαγώνιον ΒΕ φέρεται τῦ Παραλληλογράμμυ ΔΒΓΕ. §. 317. ὅταν δὲ ἀφίκηται ἐπὶ τὸ Ε, ἡ μὲν Διώαμις τῆς Βαρύτητος αὐτῦ

μείζων

μείζων γίνεται· (αἱ γὰρ Δυνάμεις τῆς Βαρύτητος ἀνάλογοί εἰσι τοῖς Χωρίοις, §. 187. τὰ δὲ χωρία αὔξουσι κατὰ τὸν λόγον τῶν Ἀριθμῶν 1, 3, 5, κτ. §. 163.) ἡ δὲ τοῦ Νήματος, ἡ αὐτὴ μένει. διὸ ἐὰν ἡ μὲν ΕΖ τὴν Δύναμιν τῆς Βαρύτητος, ἡ δὲ ΕΘ τὴν τοῦ Νήματος ἐμφαίνῃ, τὸ Σῶμα καταγράψει τοῦ Παραλληλογράμμου ΘΕΖΗ τὴν Διαγώνιον ΕΗ, ἥτις προσνεύει, καὶ προσπελάζει τῇ ΕΖ μᾶλλον, ἢ ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ. (μείζων γὰρ ἔστω ἡ ΕΖ τῆς ΒΓ, μᾶλλον ἕλκει) καὶ τὰ αὐτὰ συνεχῶς γενήσονται, ἕως οὗ τὸ Νῆμα εἰς τὴν Κάθετον τῷ Ὁρίζοντι Θέσιν ἀφίκηται, οἷον εἰς τὴν ΑΚ. τότε γὰρ ὅλην τὴν τῆς Βαρύτητος αὐτοῦ Δύναμιν κατέχει τὸ Νῆμα. διὸ ἐξωθεῖται μὲν τὸ Σῶμα εἰς τὴν Φορὰν ΚΜ ὑπὸ τῆς Δυνάμεως, (ἣν ἐκτήσατο διὰ τὴν Κίνησιν) ἀναλόγου ἔσης τῷ ΒΚ Χωρίῳ §. 187. ἀλλὰ κατεχόμενον ὑπὸ τοῦ Νήματος τὴν Διαγώνιον φέρεται ΚΟ τοῦ Παραλληλογράμμου ΚΝΟΜ· γίνεται δὲ τοῦτο ἕως οὗ ἂν τὸ Σῶμα διελθὸν τὸ ΚΛ ἴσον τῷ ΒΚ, τὴν Δύναμιν ἣν ἐκτήσατο, ὅλην προσδαπανήσῃ. ἀνελθὸν οὖν εἰς τὸ Λ, καὶ μὴ ἔχον Δύναμιν τοῦ ἀναβαίνειν, διὰ τὸ κατηναλωμένην εἶναι πᾶσαν τὴν Δύναμιν αὐτοῦ, πάλιν ὑπὸ τῆς Βαρύτητος πρὸς τὰ κάτω φέρεται, καὶ εἰς τὸ Κ κατέρχεται· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ εἰς τὸ Β ἀνέρχεται, καὶ πάλιν ἐξ αὐτοῦ κατέρχεται. ἐπειδὴ δὲ ἡ Δύναμις τῆς Βαρύτητος τοῦ Σώματος κατὰ συνέχειαν αὔξάνει ἀναλόγως τοῖς Χωρίοις, §. 187. διὰ τοῦτο αἱ Φοραὶ τοῦ Σώματος ἀπὸ τοῦ Β ἄχρι τοῦ Κ ἐνδελεχῶς μεταβάλλονται, ἀπὸ τοῦ Λ Σημείου ἀφιστάμεναι. καὶ ἐκ τούτου φανερὸν, ὅτι αἱ τοιαῦται Φοραὶ Τόξον Κύκλου συνιστᾶσι τὸ ΒΚ, Κέντρον ἔχοντος τὸ Α. πάλιν ἐπειδὴ ἀπὸ τοῦ Κ μέχρι τοῦ Λ αἱ Δυνάμεις τοῦ Σώματος συνεχῶς ἐλαττοῦνται, §. 189. ἡ Δύναμις ἄρα τοῦ Νήματος μᾶλλον ἕλκει. διὸ τῶν Φορῶν τοῦ Σώματος ἀδιακόπως ἀλλοιουμένων, καὶ

τῷ

τῷ Α Σημείῳ προσπελαζουσῶν, τὸ Τόξον ΚΛ καταγράφεται.

§. 357. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἓν δύω περαίνομεν. α΄. ὅτι εἰ μὴ ἡ τοῦ Ἀέρος ἀνθίστασις, καὶ ἀντέρεισις, καὶ ἡ ἐκ τῆς Κινήσεως τοῦ Νήματος γινομένη Τριβὴ τὰς τοῦ Ἐκκρεμοῦς Δυνάμεις ἀφῄρει, καὶ τὴν Κίνησιν αὐτοῦ διεκώλυε, περιήγετο ἂν διηνεκῶς τὸ Ἐκκρεμές. β΄. ὅτι Πᾶν Σῶμα ἔκ τινος Ὕψους πεσὸν Δύναμιν κτήσεται, ἀνάγεσθαι αὐτὸ εἰς Ὕψος ἴσον τῷ ἐξ οὗ πέπτωκεν. ἐστὶ μὲν γὰρ ΒΚ = ΚΛ· δείκνυσι δὲ ἡ Πεῖρα ὅτι τὸ Ἐκκρεμὲς ἐκ τοῦ Β πίπτον, εἰς τὸ Δ ἀνέρχεται.

§. 358. Πᾶν ἐπιμήκιστον Ἐκκρεμὲς ἴσοις Χρόνοις διέρχεται Τόξον ἐλάχιστον, καὶ ὅλην τὴν αὐτοῦ Διάμετρον.

Ἐπειδὴ τὸ Ἐκκρεμὲς ΑΒ ἐπιμήκιστόν ἐστιν ἐξ Ὑ-
Πυ. ιέ. ποθ. ἄρα καὶ ὅλη ἡ Περιφέρεια τοῦ Τόξου ΒΖ ὑπερ-
χ. 7. μέγιστός ἐστιν· ἀλλὰ τὸ ΒΖ Τόξον ἐλάχιστόν ἐστιν ἐξ Ὑποθ. ἄρα βραχύτατόν τι διαφέρει τῆς Χορδῆς ΒΖ. ἄρα τὸ Ἐκκρεμὲς ΑΒ ἴσοις Χρόνοις διέρχεται τό, τε ἐλάχιστον Τόξον ΒΖ, καὶ ὅλην τὴν Διάμετρον αὐτοῦ. §. 340. ἤτοι τοσοῦτον Χρόνον καταναλίσκει τὸ Ἐκκρεμὲς εἰς τὴν διέλευσιν τοῦ Τόξου ΒΖ, ὅσον κατεδαπάνει ἄν, εἰ ἔπιπτεν ἐξ Ὕψους ἴσου τῇ Διαμέτρῳ τοῦ Τόξου ΒΖ.

§. 359. Αἱ Περιαγωγαὶ τοῦ ἄνισα ἐλάχιστα Τόξα καταγράφοντος μεγάλου Ἐκκρεμοῦς σχεδὸν ἰσόχρονοι εἰσίν.

Ἐπειδὴ μέγα τὸ Ἐκκρεμὲς ἐξ Ὑποθ. μεγάλαι ἄρα καὶ αἱ Περιφέρειαι τῶν παρ' αὐτοῦ καταγραφομένων ἐλαχίστων Τόξων. ἀλλὰ τὰ ἐλάχιστα τῶν μεγάλων Περιφερειῶν Τόξα σχεδὸν οὐ διαφέρουσι τῶν ἑαυτῶν Χορδῶν. πάσας δὲ τὰς τοῦ αὐτοῦ Κύκλου Χορδὰς ἴσοις Χρόνοις τὸ Σῶμα διέρχεται. §. 346. ἄρα χεδὸν ἰσόχρονοί εἰσιν αἱ Περιαγωγαὶ τοῦ εἰρημένου Ἐκκρεμοῦς. δείκνυσι δὲ τὸ προκείμενον καὶ ἡ Πεῖρα. ἐὰν γὰρ Περιαγωγὰς παρατηρήσῃς μεγάλου Ἐκκρεμοῦς Τόξα Κύκλου ἄνισα, καὶ ἐλάχιστα τῇ ἑαυτοῦ Κινήσει καταγράφοντος, μόλις μετὰ ἑκατὸν Περιαγωγὰς ἡ διαφορὰ τοῦ Χρόνου αἰσθητή σοι γενήσεται.

§. 360. Τὰ Ἐκκρεμῆ ἐν τοῖς δι' Ἐκκρεμῶν πρωτοκατασκευασθεῖσιν Ὡρολογίοις Τόξα Κύκλου κατέγραφον, καὶ ὡς ἰσόχρονοι αἱ Περιαγωγαὶ αὐτῶν ἐνομίζοντο, ἀνίσων πολλάκις ὄντων τῶν καταγραφομένων Τόξων. ψυχροῦ μὲν γὰρ, καὶ ξηροῦ τοῦ Ἀέρος καθισταμένου, ξηρανθέντων τε τῶν τοῦ Ὡρολογίου Τροχῶν, τὸ Ἐκκρεμὲς ὀλίγῃ Δυνάμει ὠθούμενον, μικρὰ Τόξα Κύκλου καταγράφει· Ὑγροῦ δὲ, καὶ θερμοῦ τοῦ Ἀέρος, ὑγρανθέντων τε τῶν Τροχῶν, καὶ ὀλισθηρῶν γεγονότων, μᾶλλον ὠθούμενον τὸ Ἐκκρεμὲς, μείζονα Τόξα τῶν προτέρων περιγράφει. καὶ ἐπειδὴ πᾶσαι ὁμοῦ αἱ μικραὶ τοῦ Χρόνου διαφοραὶ μεγάλην τινὰ τὴν διαφορὰν συγκροτοῦσι, διὰ τοῦτο ἀτελῆ τὰ τοιαῦτα Ὡρολόγια. Πρῶτος οὖν ὁ Οὐγένιος ἐπέγνω τὴν ἔλλειψιν αὐτῶν πρὸς τὸ ἐντελὲς τοῦ Χρόνου μέτρον, καὶ τρόπον διορθώσεως ἐφευρὼν, τοιαῦτα κατεσκεύασε τὰ ἐν τοῖς Ὡρολογίοις Ἐκκρεμῆ, ὥστε τῇ ἑαυτῶν Κινήσει Τόξα Κυκλοειδοῦς καταγράφειν. ἴσοις γὰρ Χρόνοις, ὡς κατωτέρω δείξομεν, τά τε ἴσα καὶ ἄνισα Τόξα τῆς Κυκλοειδοῦς παρὰ τοῦ Ἐκκρεμοῦς καταγράφονται. ἔκτοτε οὖν τὰ Ἐκκρεμῆ πάντων τῶν ἐντελῶν Ὡρολογίων οὕτως ἐκτεχνουργοῦνται, ὥστε τῇ ἑαυτῶν Περιαγωγῇ Τόξα Κυκλοειδοῦς καταγράφειν.

§. 361. Οἱ Χρόνοι τῆς Περιαγωγῆς δύω Ἐκκρεμῶν ἰσοβαρῶν, καὶ ἀνισομηκῶν, καὶ ὅμοια Τόξα Κύκλου καταγραφόντων ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν Μηκῶν τῶν Ἐκκρεμῶν.

Ὁ Χρό-

Πιν. ιέ. Ὁ Χρόνος δηλ: καθ' ὃν ἅπαξ περιαγόμενον τὸ
Σχ. 7. ΑΒ, καταγράφει τὸ ΕΖ Τόξον, πρὸς τὸν Χρόνον, καθ' ὃν ἅπαξ περιαγόμενον τὸ ΓΔ, καταγράφει τὸ ϚΗ Τόξον ὅμοιον τῷ ΕΖ, ὑποδιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Μῆκος ΑΒ, πρὸς τὸ Μῆκος ΓΔ· ἤτοι ὀνομασθέντων τῶν τοιούτων Χρόνων Χ, χ ἔσεται $X : \chi :: \sqrt{AB} : \sqrt{\Gamma\Delta}$. ὁ Χρόνος γὰρ καθ' ὃν ὁποιονοῦν Σῶμα φέρεται ἀπὸ τοῦ Ε εἰς τὸ Ζ, πρὸς τὸν Χρόνον, καθ' ὃν ἀπὸ τοῦ Ϛ εἰς τὸ Η λόγον ἔχει, ὃν $\sqrt{EZ} : \sqrt{\text{Ϛ}H}$. §. 353. (ὅμοια γὰρ ἐξ Ὑποθ. τὰ Τόξα ΕΖ, ϚΗ) ἄρα καὶ ὁ Χρόνος καθ' ὃν τὸ Ἐκκρεμὲς ΑΒ καταγράφει τὸ ΕΖ, πρὸς τὸν Χρόνον, καθ' ὃν τὸ ΓΔ διαγράφει τὸ ϚΗ $:: \sqrt{EZ} : \sqrt{\text{Ϛ}H}$. (ἰσοβαρῆ γὰρ τὰ Ἐκκρεμῆ ἐξ Ὑποθ.) διὸ $X : \chi :: \sqrt{EZ} : \sqrt{\text{Ϛ}H}$. ἀλλ' ὡς $EZ : \text{Ϛ}H :: AB : \Gamma\Delta$ (τὰ γὰρ ὅμοια Τόξα ἀνάλογον ταῖς Ἡμιδιαμέτροις) καὶ ἑπομένως $\sqrt{EZ} : \sqrt{\text{Ϛ}H} :: \sqrt{AB} : \sqrt{\Gamma\Delta}$. ἄρα καὶ $X : \chi :: \sqrt{AB} : \sqrt{\Gamma\Delta}$.

Ἐὰν ἄρα τὸ μὲν ΑΒ Μῆκος ᾖ ὡς 4, τὸ δὲ ΓΔ ὡς 1, ἔσεται $X : \chi :: 2 : 1$. ὥστε ἵνα τὸ Ἐκκρεμὲς ΑΒ ἅπαξ περιενεχθῇ, διπλασίου δεῖται Χρόνου τοῦ οὗ τὸ ΓΔ. ἐπειδὴ δὲ $X : \chi :: \sqrt{AB} : \sqrt{\Gamma\Delta}$, ἔσεται καὶ $X^2 : \chi^2 :: AB : \Gamma\Delta$, ἤτοι τὰ Μήκη τῶν τοιούτων Ἐκκρεμῶν ἀνάλογόν εἰσι τοῖς Τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν Χρόνων, καθ' οὓς ἅπαξ περιάγονται.

§. 362. Οἱ Ἀριθμοὶ τῶν κατὰ τὸν αὐτὸν Χρόνον γινομένων Περιαγωγῶν ὑπὸ Ἐκκρεμῶν ἀνισοβαρῶν, καὶ ἀνισομηκῶν, καὶ ὅμοια Τόξα Κύκλων καταγραφόντων ἐν ἀντιστρόφῳ ὑποδιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν Μηκῶν τῶν Ἐκκρεμῶν.

Τουτέστι τοῦ Μήκους ΑΒ ὡς 4 ὄντος, καὶ τοῦ ΓΔ ὡς 1. ὁ Ἀριθμὸς τῶν Περιαγωγῶν τῶν γινομένων καθ' ἓν Λεπτὸν ὑπὸ τοῦ ΑΒ καταγράφοντος τὸ ΕΖ, πρὸς τὸν Ἀριθμὸν τῶν Περιαγωγῶν τῶν γινομένων κατὰ τὸ αὐτὸ Λεπτὸν ὑπὸ τοῦ ΓΔ καταγράφοντος

τὸ

τὸ CH ὅμοιον τῷ EZ λόγον ἔχει, ὃν ἡ Τετραγ. Ῥίζ. τοῦ ΓΔ, πρὸς τὴν Τετραγ. Ῥίζ. τοῦ AB, εἴτουν 1:2. ἐὰν γὰρ δύω Ἐκκρεμῆ ἰσοβαρῆ, καὶ ἀνισομήκη καταγράφωσι Τόξα ὅμοια οἷον τὰ EZ, CH, ἐν τῷ αὐτῷ Χρόνῳ, οἷον ἐν Λεπτῷ, ὁ Χρόνος μιᾶς Περιαγωγῆς τοῦ AB, πρὸς τὸν Χρόνον μιᾶς τοῦ ΓΔ λόγον ἕξει, ὃν ὁ Ἀριθμὸς τῶν Περιαγωγῶν τοῦ ΓΔ, πρὸς τὸν Ἀριθμὸν τῶν τοῦ AB. ἤτοι ἐὰν ἑνὶ Λεπτῷ τὸ μὲν AB ἅπαξ, τὸ δὲ ΓΔ δὶς περιενεχθῇ, ὁ Χρόνος οὗ δεῖται τὸ AB εἰς τὸ διανύσαι μίαν περιαγωγὴν, πρὸς τὸν Χρόνον, οὗ δεῖται τὸ ΓΔ εἰς τὸ μίαν διανύσαι, ἐστὶν ὡς 2:1. ἀλλ᾽ οἱ Χρόνοι μιᾶς Περιαγωγῆς τῶν AB, ΓΔ ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν Μηκῶν τῶν AB, ΓΔ. §. 361. ἄρα οἱ Ἀριθμοὶ τῶν Περιαγωγῶν ἐν ἀντιστρόφῳ ὑποδιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν Μηκῶν τῶν Ἐκκρεμῶν. δείξει δέ σοι τὸ προκείμενον καὶ ἡ Πεῖρα.

§. 363. Δοθέντων οὖν τῶν Μηκῶν δύω Ἐκκρεμῶν Ἰσοβαρῶν, καὶ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν Περιαγωγῶν, τῶν κατά τινα Χρόνον παρὰ τοῦ ἑνὸς τελουμένων, εὑρεθήσεται ὁ Ἀριθμὸς τῶν Περιαγωγῶν τῶν κατὰ τὸν αὐτὸν Χρόνον γινομένων παρὰ τοῦ ἑτέρου.

Ἔστω γὰρ τοῦ μὲν ἑνὸς τὸ Μῆκος ὡς 25· τοῦ δὲ ἑτέρου ὡς 16, καὶ ὁ Ἀριθμὸς τῶν Περιαγωγῶν τοῦ πρώτου ἐν ἑνὶ Λεπτῷ τῆς Ὥρας, 60· καὶ γεγονέτω ὡς 4 : 5 :: 60 πρὸς τὴν τετάρτην 75. ἥτις ἔσται ὁ Ἀριθμὸς τῶν Περιαγωγῶν τῶν ἐν ἑνὶ Λεπτῷ τῆς Ὥρας γινομένων ὑπὸ τοῦ Ἐκκρεμοῦς τοῦ Μῆκος ἔχοντος ὡς 16. §. 362. διὰ τὰ αὐτὰ οὖν δοθέντων τῶν Ἀριθμῶν τῶν περιαγωγῶν ἑκατέρων, καὶ τοῦ Μήκους τοῦ ἑνὸς τῶν Ἐκκρεμῶν, εὑρεθήσεται τὸ Μῆκος τοῦ ἑτέρου.

§. 364. Αἱ Ταχύτητες, ἃς ἕξει τὸ Ἐκκρεμὲς εἰς τὸ Πέρας τῶν παρ᾽ αὐτοῦ καταγραφομένων Τόξων ἀφικόμενον, ἀνάλογον ἔσονται ταῖς τῶν Τόξων Χορδαῖς.

Κατα-

Πιν. ιέ. χ. 8. Καταγραφέτω γὰρ τὸ Ἐκκρεμὲς ΑΒ Τόξα τὰ ΔΒ, ΓΒ, ὧν Χορδαὶ εἰσὶν αἱ ΔΒ, ΓΒ· φημὶ δὴ, ὅτι ἔσεται ἡ Ταχυτὴς, ἣν ἕξει διελθὸν τὸ Τόξον ΔΒ, πρὸς ἣν ἕξει διελθὸν τὸ ΓΒ, ὡς ἡ Χορδὴ ΔΒ, πρὸς τὴν ΓΒ. πεπληρώσθω γὰρ ὁ Κύκλος ΓΔΒC, ȣ̃ Κέντρον τὸ Α, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ, καὶ συμβαλλέτω τῇ Περιφερείᾳ κατὰ τὸ C, κ̀ ἀπὸ τῶν Δ, κ̀ Γ Σημείων ἤχθωσαν αἱ ΔΕ, ΓΖ πρὸς Ὀρθὰς τῇ Διαμέτρῳ ΒC· καὶ ἡ μὲν Ταχυτὴς, ἣν ἕξει τὸ Ἐκκρεμὲς διελθὸν τὸ Τόξον ΔΒ ἴση ἔσεται τῇ, ἣν ἕξει μετὰ τὸ διελθεῖν τὴν ΒΕ· ἡ δὲ, ἣν ἕξει μετὰ τὸ διανύσαι τὸ ΓΒ, ἴση τῇ μετὰ τὴν διέλευσιν τῆς ΒΖ §. 351. ἀλλ' ἡ Ταχυτὴς ἣν ἔχει διελθὸν τὴν ΒΕ, πρὸς ἣν ἔχει διελθὸν τὴν ΒC :: $\sqrt{}$ΒΕ : $\sqrt{}$ΒC. §. 164. καὶ $\sqrt{}$ΒΕ : $\sqrt{}$ΒC :: ΒΔ : ΒC. (ἐστὶ γὰρ ΒΕ : ΒΔ :: ΒΔ : ΒC) ἄρα καὶ ἡ Ταχυτὴς, ἣν ἕξει διελθὸν τὸ Τόξον ΔΒ, πρὸς ἣν ἕξει διελθὸν τὴν CΒ :: ΒΔ : CΒ· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ Ταχυτὴς, ἣν ἕξει διελθὸν τὸ Τόξον ΓΒ, πρὸς ἣν ἕξει διελθὸν τὴν CΒ :: ΓΒ : CΒ. ἄρα καὶ ἡ Ταχυτὴς, ἣν ἕξει διελθὸν τὸ ΔΒ, πρὸς ἣν ἕξει διελθὸν τὸ ΓΒ, ὡς ἡ Χορδὴ ΔΒ, πρὸς τὴν ΓΒ.

§. 365. Ληφθεισῶν ȣ̃ν Εὐθειῶν, λόγον πρὸς ἀλλήλας ἐχουσῶν, ὃν οἱ Ἀριθμοὶ τῆς Φυσικῆς Σειρᾶς 1, 2, 3, 4, 5, κτ. καὶ ἐναρμοσθεισῶν εἰς Κύκλον, καὶ Τόξα ἀπολαβουσῶν τὰ Β1, Β2, Β3, Β4, Β5, κτ. τὸ Ἐκκρεμὲς ἀπὸ μὲν τȣ̃ Σημείȣ 5 ἀφεθὲν, εἰς τὸ Β κατελθὸν, Ταχυτῆτα ἕξει ὡς 5. ἀπὸ δὲ τȣ̃ 4, ὡς 4· ἀπὸ δὲ τȣ̃ 3, ὡς 3· καὶ ȣ̃τω καθεξῆς. ἐκ τȣ́τȣ ȣ̃ν ἐξετεχνηέρθη ἡ λεγομένη Μηχανὴ Πληκτικὴ, δι' ἧς τοσȣ́τȣς Βαθμȣ̀ς Ταχυτῆτος τὸ Ἐκκρεμὲς κτᾶται, ὅσȣς ἄν τις βȣ́ληται. ȣ̓δὲν δὲ ἕτερόν ἐστιν ἡ τοιαύτη Μηχανὴ, εἰ μὴ Περιφέρεια Κύκλȣ ξυλίνȣ, ἢ Μεταλλικȣ̃, ᾗ ἐπιγέγλυπται Σημεῖα 1, 2, 3, 4, κτ. κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον.

§. 366.

§. 366. Αἱ Περιαγωγαὶ δύω Ἐκκρεμῶν ἰσοβαρῶν, καὶ ὅμοια Τόξα καταγραφόντων, καὶ ἀνάλογα τὰ Μήκη ἐχόντων ταῖς Δυνάμεσι τῶν Βαρυτήτων ἰσόχρονοι εἰσίν.

Σημειωτέον δὲ ὅτι Βαρύτητα λέγοντες, οὐκ ἐννοοῦμεν τὸ τῶν Ἐκκρεμῶν Βάρος, (ἀμφότερα γὰρ ἰσοβαρῆ τίθενται) ἀλλὰ τὰς Δυνάμεις τῆς Βαρύτητος, τὰς διαφόρως ἐν τοῖς διαφόροις μέρεσι τῆς Γῆς ἐνεργούσας. §. 112. οἷον ἐὰν τὸ ΓΠ Μῆκος διπλάσιον ᾖ Πιν. ιι. τοῦ ΗΘ, κεῖται ἐν μέρει Γῆς, ὅπου ἡ ἐνέργεια τῆς Σχ. 9. Βαρύτητος διπλασία ἐστὶ τῆς ὅπου τὸ ΗΘ.

Τὰ μὲν τῶν Ἐκκρεμῶν Μήκη ὀνομασθήτωσαν Μ, μ· αἱ δὲ ἐν τοῖς Ἐκκρεμέσιν ἐνεργοῦσαι Βαρύτητες Β, β· αἱ δὲ Ταχύτητες αὐτῶν Τ, τ· καὶ τὰ παρ᾽ αὐτῶν καταγραφόμενα Τόξα Δ, δ, ἃ ἐν μέρεσιν ἐλαχίστοις διῃρημένα ἐννοείσθωσαν. ἐπειδὴ οὖν ἐν ἑκάστῳ ἐλαχίστῳ τμήματι Τόξου αἱ Βαρύτητες τῶν Ἐκκρεμῶν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας τὸν λόγον τῶν Μηκῶν ἐξ Ὑποθ. ἄρα ἔσεται Β : β :: Μ : μ. καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος οὗτος σταθερὸς, καὶ ἀεὶ ὁ αὐτὸς, διὰ τοῦτο καὶ αἱ Ταχύτητες, ἃς κτῶνται τὰ Ἐκκρεμῆ διερχόμενα τὰ τῶν Τόξων ἐλάχιστα τμήματα, ἀνάλογον ἔσονται ταῖς Βαρύτησιν, ἤτοι Τ:τ :: Β:β. διὸ καὶ Τ:τ :: Μ:μ. ἀλλὰ τὰ Μήκη ἀνάλογά εἰσι τοῖς παρ᾽ αὐτῶν καταγραφομένοις ὁμοίοις Τόξοις, ἤτοι Μ : μ :: Δ:δ. ἄρα καὶ Τ:τ :: Δ:δ. ἀλλὰ τὰ Τόξα εἰσὶ τὰ Διαστήματα, ἅπερ διέρχονται τὰ Ἐκκρεμῆ. αἱ Ταχύτητες ἄρα τῶν Ἐκκρεμῶν ἀνάλογοί εἰσι τοῖς Διαστήμασιν. οἱ Χρόνοι ἄρα καθ᾽ οὓς αὐτὰ διέρχονται ἴσοι, ὡς ἀπὸ τοῦ §. 158. ῥᾷον περαίνεται. ἰσόχρονοι ἄρα αἱ τῶν Ἐκκρεμῶν Περιαγωγαί.

§. 367. Ἐὰν δὲ τὰ μὲν Ἐκκρεμῆ ἰσομήκη, καὶ ἰσοβαρῆ ὦσι, καὶ ὅμοια Τόξα καταγράφωσιν, αἱ δὲ ἐν αὐτοῖς ἐνεργοῦσαι Βαρύτητες ἄνισοι, ἔσονται οἱ Χρόνοι τῶν Περιαγωγῶν αὐτῶν ἐν ἀντιστρόφῳ ὑποδιπλασίονι λόγῳ τῶν Βαρυτήτων.

Πιν. ιε. χ. 10. Ὁ μὲν Χρόνος τῆς Περιαγωγῆς τοῦ AB ὀνομαθήτω χAB, καὶ ἡ ἐν αὐτῷ ἐνεργοῦσα Βαρύτης B· ὁ δὲ τῆς τοῦ ΓΔ Περιαγωγῆς Χρόνος χΓΔ, καὶ ἡ ἐν αὐτῷ ἐνεργοῦσα Βαρύτης β. λέγω δή, ὅτι ἔσεται $\chi AB : \chi \Gamma\Delta :: \sqrt{\beta} : \sqrt{B}$.

Ἐχέτω γὰρ ἡ ἐν τῷ AB ἐνέργεια τῆς Βαρύτητος, πρὸς τὴν ἐν τῷ ΓΔ λόγον, ὃν τὸ Μῆκος AB, πρὸς τὸ Μῆκος ἄλλου τινὸς Ἐκκρεμοῦς, οἷον τοῦ EZ. ἔστω δηλ: $B : \beta :: AB : EZ$. καὶ ἐπειδὴ $\chi\Gamma\Delta : \chi EZ :: \sqrt{\Gamma\Delta} : \sqrt{EZ}$. §. 361. καὶ ὁ Χρόνος τῆς Περιαγωγῆς τοῦ EZ ἴσος τῷ τῆς Περιαγωγῆς τοῦ AB. §. 366. ἄρα $\chi\Gamma\Delta : \chi AB :: \sqrt{\Gamma\Delta} : \sqrt{EZ}$. ἀλλὰ $\Gamma\Delta = AB$ ἐξ Ὑποθ. ἄρα $\chi\Gamma\Delta : \chi AB :: \sqrt{AB} : \sqrt{EZ}$. ἀλλὰ γέγονε $B : \beta :: AB : EZ$. ἄρα καὶ $\sqrt{B} : \sqrt{\beta} :: \sqrt{AB} : \sqrt{EZ}$. ἄρα καὶ $\chi\Gamma\Delta : \chi AB :: \sqrt{B} : \sqrt{\beta}$. καὶ ἀνάπαλιν $\chi AB : \chi\Gamma\Delta :: \sqrt{\beta} : \sqrt{B}$. ὃ ἦν τὸ προκείμενον.

Ἐὰν οὖν ἡ μὲν ἐν τῷ AB ἐνέργεια τῆς Βαρύτητος ᾖ ὡς 4, ἡ δὲ ἐν τῷ ΓΔ ὡς 1. ἔσεται $\chi AB : \chi\Gamma\Delta :: 1 : 2$. ἤτοι ἐὰν τὸ AB ἐν ἑνὶ Λεπτῷ ἅπαξ περιάγηται, καὶ τὸ ΓΔ ἐν δυσὶν ἅπαξ περιενεχθήσεται.

§. 368. Ἐκ τῶν ἄρτι εἰρημένων φανερὰ ἔστω περὶ τῶν Ἐκκρεμῶν εἴπομεν ἐν τῷ §. 112. αὐξανούσης γὰρ ἐν τῷ Ἐκκρεμεῖ τῆς ἐνεργείας τῆς Βαρύτητος, αἱ Περιαγωγαὶ αὐτοῦ ταχύτεραι γίνονται· καὶ ἵνα ἰσόχρονοι ταῖς προτέραις ἀποκατασταθῶσιν, ἐπιμηκυνθῆναι δεῖ τὸ Ἐκκρεμές. καὶ ἀνάπαλιν ὅταν ἡ ἐν τῷ Ἐκκρεμεῖ τῆς Βαρύτητος Ἐνέργεια μειῶται, αἱ Περιαγωγαὶ αὐτοῦ βραδύτεραι καθίστανται· καὶ εἰκὸς ἀποβραχυνθῆναι τὸ Ἐκκρεμές, ὅπως ἐπιταχυνθῶσιν. ἐπειδὴ οὖν ἡ Πεῖρα ἔδειξεν, ὅτι ἀποβραχυνθῆναι χρὴ τὸ Ἐκκρεμὲς ἐν τοῖς πλησίον τοῦ Ἐξισωτοῦ Τόποις, ὅπως αἱ Περιαγωγαὶ αὐτοῦ ἰσόχρονοι ἀποκατασταθῶσι ταῖς γενομέναις ἐν τοῖς Πόρρω, δῆλον ἄρα, ὅτι ἐλάσσων ἡ ἐνέργεια τῆς Βαρύτητος

τητος ἐν τοῖς πλησίον τοῦ Ἐξισωτοῦ Τόποις, ἢ ἐν τοῖς Πόῤῥω.

§. 369. Ἔφημεν §. 360. ὅτι τότε ἴσα καὶ ἄνισα Τόξα τῆς Κυκλοειδοῦς ἴσοις Χρόνοις παρὰ τοῦ Ἐκκρεμοῦς καταγράφονται. ἔιτουν ἰσόχρονοί εἰσιν αἱ Περιαγωγαὶ τοῦ Ἐκκρεμοῦς τοῦ ἐν ὁποιοισοῦν Τόξοις Κυκλοειδοῦς περιαγομένε. ἵνα γοῦν τοῦτο εὔδηλον γένηται, ἀναγκαῖον ἡμῖν ἔδοξε τλιύ τε Γένεσιν, καὶ τινα τῶν Ἰδιωμάτων τῆς Κυκλοειδοῦς προθεῖναι.

Ὅταν περικυλισθῇ ὁ Κύκλος ΒΖΗΘ ἐπὶ τῆς ἐφαπλομένης αὐτοῦ ΑΒ ἴσης οὔσης τῇ Περιφερείᾳ αὐτοῦ, ἄχρις οὗ τὸ τῆς ἐπαφῆς Σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ Πέρατος τῆς ΑΒ ἀφίκηται, ἡ μὲν ΒΔΑ Καμπύλη ἡ ὑπὸ τοῦ Σημείου Β καταγραφομένη διὰ τὸ περικύλισμα τοῦ Κύκλου, **Κυκλοειδὴς** λέγεται· ὁ δὲ ΒΖΗΘ Κύκλος, Κύκλος **Γεννήτωρ**· τὸ δὲ Σημεῖον Β, **Καταγραφεύς**· ἡ δὲ ΑΒ, **Βάσις**· ἡ δὲ ΓΔ ἡ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς Βάσεως ἀγομένη Κάθετος αὐτῇ τῇ Βάσει, **Ἄξων**, ἢ **Ὕψος** τῆς Κυκλοειδοῦς ὀνομάζεται. σημειωτέον δὲ, ὅτι ὁ Ἄξων τῆς Κυκλοειδοῦς ἐστὶν ἡ Διάμετρος τοῦ Γεννήτορος Κύκλου. ἰστέον προσέτι, ὅτι ἡ τοιαύτη τοῦ Κύκλου Περικύλισις ὁμοία ἐστὶ τῇ τῶν Τροχῶν τῆς Ἁμάξης. περικυλιομένων γὰρ αὐτῶν ἐπὶ τῶν ὑποκειμένων Ἐπιπέδων, τὰ Σημεῖα τῆς Ἁψῖδος αὐτῶν Κυκλοειδεῖς καταγράφουσι. Πιν. ιϛ. χ. 1.

§. 370. Τὸ μέρος τῆς ἀπὸ τοῦ τυχόντος τῆς Κυκλοειδοῦς Σημείου ἀχθείσης ἡμιπεταγμένης, τὸ μεταξὺ τοῦ εἰρημένου Σημείου, καὶ τῆς Περιφερείας τοῦ Γεννήτορος Κύκλου τοῦ εἰς τὸ μέσον τῆς Κυκλοειδοῦς ὄντος, ἴσον ἐστὶ τῷ Κύκλου Τόξῳ τῷ ἀπολαμβανομένῳ ὑπ' αὐτῆς, καὶ τοῦ Ἄξονος τοῦ τέμνοντος αὐτήν.

Ἐστακέτω γὰρ ὁ Γεννήτωρ Κύκλος ΓΝΔ εἰς τὸ μέσον τῆς Κυκλοειδοῦς. καὶ ταυτιζέσθω ἡ Διάμετρος αὐτοῦ.

αὐτοῦ τῷ Ἄξονι ΓΔ. καὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος Σημείου τῆς Κυκλοειδοῦς Ι ἤχθω ἡ ἡμιτεταγμένη ΙΡ. Φημὶ δὴ, ὅτι τὸ μέρος αὐτῆς ΙΚ τὸ μεταξὺ τοῦ Σημείου Ι, καὶ τῆς Περιφερείας ΓΔ ἴσον ἔσεται τῷ ΚΔ Τόξῳ τῷ ἀπολαμβανομένῳ ὑπὸ τῆς ΙΚ, καὶ τοῦ Ἄξονος ΓΔ. διελθέτω γὰρ ὁ Γεννήτωρ Κύκλος καὶ διὰ τοῦ Ι Σημείου· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΙΕ, ΚΓ. καὶ ἐπειδὴ αἱ ΙΡ, ΑΓ Παράλληλοί εἰσιν, ὡσαύτως καὶ αἱ ΔΓ, CE. ἄρα ἡ ΡΓ ἴση τῇ ΦΕ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΓ = CE. ἄρα καὶ ΔΡ = CΦ. ἄρα καὶ ΔΡ. ΡΓ = CΦ. ΦΕ. ἀλλὰ ΔΡ. ΡΓ = $\overline{\text{ΡΚ}}^2$, καὶ CΦ. ΦΕ = $\overline{\text{ΦΙ}}^2$. ἄρα $\overline{\text{ΡΚ}}^2$ = $\overline{\text{ΦΙ}}^2$. διὸ ΡΚ = ΦΙ. ἄρα καὶ ΦΡ = ΙΚ. ἀλλὰ ΦΡ = ΕΓ. ἄρα καὶ ΙΚ = ΕΓ. ἀλλ' αἱ ΙΚ, ΕΓ εἰσὶ καὶ Παράλληλοι. ἄρα καὶ ΙΕ = ΚΓ. καὶ τὸ Τόξον ἄρα ΙΕ ἴσον τῷ ΚΓ. ἀλλ' ὅλον τὸ ΕΙC ἴσον ὅλῳ τῷ ΓΚΔ. ἄρα καὶ ΙC = ΚΔ. ἀλλ' ὃν λόγον ἔχει ἡ ΑΓ τὸ ἥμισυ δηλ: τῆς Εὐθείας ΑΒ, πρὸς τὸ μέρος αὐτῆς ΑΕ, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὸ ἥμισυ τῆς Περιφερείας ΕΙC, πρὸς τὸ μέρος τῆς Περιφερείας ΕΙ. ἤτοι ΑΓ : ΑΕ :: ΕΙC : ΕΙ. (ὁσαπλάσιον γὰρ μέρος τῆς Περιφερείας περιεκυλίσθη, τοσαυταπλάσιον μέρος τῆς Εὐθείας ὁ Κύκλος διήνυσεν, ὡς ἐκ τῆς Γενέσεως τῆς Κυκλοειδοῦς δῆλον) ἄρα καὶ κατ' Ἀναστροφὴν λόγου ΑΓ : ΕΓ :: ΕΙC : ΙC. ἀλλὰ ΑΓ = ΕΙC (τὸ ἥμισυ γὰρ τῆς Εὐθείας ἴσον τῷ ἡμίσει τῆς Περιφερείας, ὡς καὶ τὸ ὅλον ἴσον τῷ ὅλῳ.) ἄρα καὶ ΕΓ = ΙC. ἀλλ. ΕΓ = ΙΚ, καὶ ΙC = ΚΔ. ἄρα καὶ ΙΚ = ΚΔ.

§. 371. Ἡ Ἐφαπτομένη τῆς Κυκλοειδοῦς, καὶ ἡ ὑποτείνουσα τὸ Κύκλου Τόξον τὸ περατούμενον ὑπό τε τῆς κοινῆς τομῆς τοῦ Ἄξονος, καὶ τῆς Κυκλοειδοῦς· καὶ ὑπὸ τῆς Τεταγμένης τῆς ἀπὸ τοῦ Σημείου τῆς ἐπαφῆς ἀγομένης, Παράλληλοί εἰσιν. εἴτουν ἡ Ἐφαπτομένη τῆς Κυκλοειδοῦς ΛΟ Παράλληλός ἐστι τῇ ΝΔ τῇ ὑποτεινούσῃ τὸ Τόξον ΝΔ τὸ περατούμενον ὑπὸ τῆς Δ τομῆς, καὶ τῆς Τεταγμένης ΛΝΜ.

Ἤχθω

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῦ Ν ἡ ἐφαπτομένη τῦ Κύκλυ ΝΤΠ· καὶ ὀνομασθήτω ἡ μὲν ΛΝ, y, τὸ δὲ Τόξον ΝΔ, χ, (ἡ μὲν γὰρ ΛΝ ὡς Τεταγμένη, τὸ δὲ ΝΔ Τόξον, ὡς ἀποτετμημένη νομίζεται.) ἡ δὲ Περιφέρεια ΓΝΔ, β, καὶ ἡ ΑΓ, α. καὶ ἐπειδὴ ΑΓ : ΓΝΔ :: ΛΝ : ΝΔ. (ὡς ἀνωτέρω εἴρηται) ἤτοι $\alpha : \beta :: y : \chi$. ἄρα καὶ $\beta . y = \alpha . \chi$. καὶ ληφθέντων τῶν ἀπειράκις ἐλαχίστων μερῶν τῆς ἐξισώσεως, ἔσεται $\beta .\, dy = \alpha .\, d\chi$. (α) διὸ $d\chi = \frac{\beta dy}{\alpha}$. ἐὰν ὖν ἐν τῷ γραμματιδίῳ $\frac{y d\chi}{dy}$ τῷ ἐμφαίνοντι τὴν Ὑφαπτομένην πάσης Καμπύλης ἀντὶ τῦ $d\chi$ τεθῇ τὸ $\frac{\beta dy}{\alpha}$, ἔσεται ἡ Ὑφαπτομένη τῆς Κυκλοειδῦς ἴση $\frac{\beta . y . dy}{\alpha . dy} = \frac{\beta y}{\alpha}$. ἀλλὰ $\frac{\beta y}{\alpha} = \chi$, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. ἄρα ἡ Ὑφαπτομένη τῆς Κυκλοειδῦς ἴση χ. ἀλλ' αὕτη ἐστὶν ἡ ΝΤ. (περατῦται γὰρ ὑπό τε τῆς Τεταγμένης ΛΝ, καὶ τῆς Ἐφαπτομένης ΛΟ) ἄρα ΝΤ = χ. ἀλλὰ $\chi = y$ (ἴσον γὰρ τὸ ΝΔ Τόξον τῇ ΛΝ Εὐθείᾳ. §. 370.) ἄρα καὶ ΝΤ = ΝΛ. καὶ Γωνία ἄρα ἡ ΝΛΤ = ΝΤΛ. ἄρα ἡ ΤΝΜ διπλασία ἐστὶ τῆς ΤΛΝ. ἀλλ' ἡ ΤΝΜ διπλασία ἐστὶ καὶ τῆς ΔΝΜ (ἴσαι γὰρ ἀλλήλαις αἱ ΠΝΔ, ΔΝΜ, διότι ἑκατέρα αὐτῶν ἴση τῇ ΝΓΔ) ἄρα ἡ ΛΝΜ = ΤΛΜ. Παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΛΟ, ΝΔ.

§. 372. Τὸ Τόξον τῆς Κυκλοειδῦς τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπό τινος Τεταγμένης, καὶ τῦ Ἄξονος διπλάσιόν ἐστι τῆς ὑποτεινύσης τὸ Τόξον τὸ Περατούμενον ὑπό τε τῆς εἰρημένης Τεταγμένης, καὶ τῆς κοι-

(α) Τὸ d στοιχεῖον ἐμφαίνει μέρος ἐλάχιστον ὁποιασῦν [illegible]. οἷον τὸ dχ, ἐλάχιστον μέρος τῦ χ.

ἧς διατομῆς τοῦ Ἄξονος, καὶ τῆς Κυκλοειδοῦς. εἴτουν τὸ ΛΔ Τόξον διπλάσιον τῆς ΝΔ χορδῆς.

Εἰλήφθω ἡ ΜΩ ἴση ἐλαχίςῳ μέρει τῆς ΔΜ. καὶ ἀπὸ τοῦ Ω ἤχθω ἡ ΩΙ παράλληλος τῇ ΜΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἡ ΛΞ παράλληλος τῇ ΔΓ. καὶ ἔςω ἡ μὲν $ΔΓ = α$, ἡ δὲ $ΔΜ = χ$, ἡ δὲ $ΜΛ = y$. ἄρα ἔσεται ἡ μὲν $ΓΜ = α - χ$, ἡ δὲ $ΜΩ = ΛΞ = dχ$, καὶ $ΙΞ = dy$. καὶ ἐπειδὴ ὡς ΓΜ : ΜΝ :: ΜΝ : ΜΔ. εἴτουν $α - χ : ΜΝ :: ΜΝ : χ$, ἔσεται $ΜΝ = \sqrt{αχ - χχ}$. καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΙξΛ, ΓΝΜ ὅμοια ἀλλήλοις εἰσὶν, ἄρα $dy : dχ :: α - χ : \sqrt{αχ - χχ}$. ὅθεν $dy = \frac{α dχ - χ dχ}{\sqrt{αχ - χχ}}$. ἤτοι $dy = \frac{dχ \sqrt{α - χ}}{\sqrt{χ}}$. ἄρα καὶ $dy^2 = \frac{dχ^2 . \overline{α - χ}}{χ}$. ἐὰν οὖν ληφθῇ τὸ γραμματίδιον $\sqrt{dχ^2 + dy^2}$ τὸ ἐμφαῖνον τὸ ςοιχεῖον Πάσης Καμπύλης, καὶ ἀντὶ τοῦ dy^2 τεθῇ τὸ $\frac{dχ^2 . \overline{α - χ}}{χ}$, ἔσεται τὸ ΙΛ, ὅπερ ἐςὶ τὸ ςοιχεῖον τοῦ Τόξου ΛΔ τῆς Κυκλοειδοῦς, ἴσον $\frac{dχ \sqrt{α}}{\sqrt{χ}}$. ἀλλὰ τὸ ὁλόκληρον τοῦ $\frac{dχ \sqrt{α}}{\sqrt{χ}}$ ἐςὶν $2\sqrt{αχ}$. ἄρα $ΛΔ = 2\sqrt{αχ}$. ἐπεὶ δὲ ὡς ΓΔ : ΔΝ :: ΔΝ : ΔΜ. ἤτοι $α : ΔΝ :: ΔΝ : χ$, ἄρα ἡ $ΔΝ = \sqrt{αχ}$. τὸ Τόξον ἄρα τῆς Κυκλοειδοῦς ΛΔ διπλάσιόν ἐςι τῆς Χορδῆς ΝΔ· ἐὰν δὲ τὸ ΔΜ, εἴτουν τὸ χ ληφθῇ ἴσον ΔΓ, εἴτουν α, ἡ ἡμικυκλοειδὴς ΛΔ ἔσεται ἴση $2\sqrt{αα} = 2α$, ἤτοι διπλασία τῆς Διαμέτρου ΓΔ.

§. 373. Πᾶν Σῶμα ἐπί τι Σημεῖον φερόμενον Δυνάμεσιν ἀναλόγοις τοῖς ἀπ' αὐτοῦ Διαςήμασιν, ἴσοις Χρόνοις ἀφικνεῖται εἰς τὸ Σημεῖον. ἐὰν δὴ τὸ
Πιν. ΙΓ. Σῶμα Α ἔχον Δύναμιν ὡς ΑΓ μετὰ μίαν Ὥραν ἥξει
σχ. 2. ἀπὸ τοῦ Α εἰς τὸ Γ, μετὰ μίαν ἥξει καὶ ἀπὸ τοῦ Β εἰς τὸ Γ, ἔχον Δύναμιν ὡς ΒΓ.

Ἐλή-

Εἰλήφθωσαν αἱ δύω ἐξισώσεις $\Delta\upsilon . \Delta = B . T^2$, καὶ $\delta\upsilon . \delta = \beta . \tau^2$. §. 188. καὶ ἐπειδὴ ἐξ Ὑποθ. αἱ Δυνάμεις ἀνάλογον εἰσὶ τοῖς Διαστήμασι, διὰ τοῦτο ἀντὶ τῶν Δυ, καὶ δυ τεθήτωσαν ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τὰ Δ, καὶ δ στοιχεῖα, ἐμφαίνοντα τὰ Διαστήματα ΑΓ, ΒΓ. ἔσεται ἄρα $\Delta^2 = B . T^2$, καὶ $\delta^2 = \beta . \tau^2$. καὶ πάλιν ἐπειδὴ τὰ Βάρη ἴσα, (ἓν γὰρ καὶ τὸ αὐτὸ Σῶμά ἐστιν ἐξ Ὑποθ. τὸ κινούμενον) ἄρα ἀρθέντων ἀπὸ τῶν ἐξισώσεων τῶν Β καὶ β, ἔσεται $\Delta^2 = T^2$, καὶ $\delta^2 = \tau^2$. καὶ ληφθέντων τῶν ἐλαχίστων μερῶν τῶν ἐξισώσεων, ἔσεται $- \Delta . d\Delta = T . dT$, καὶ $- \delta . d\delta = \tau . d\tau$. καὶ ληφθέντων τῶν ὁλοκλήρων, προστεθεισῶν ἅμα καὶ τῶν σταθερῶν ποσοτήτων Α, καὶ Γ, ἔσεται $A - \Delta^2 = T^2$, καὶ $\Gamma - \delta^2 = \tau^2$. καὶ ἐπειδὴ τὸ Σῶμα εἰς τὸ Σημεῖον Γ ἀφικόμενον, οὐδεμίαν Δύναμιν ἔτι ἔχει ἐξ Ὑποθ. ἄρα οὐδὲ Ταχυτῆτα ὅλως ἕξει. διὸ $T^2 = 0$, καὶ $\tau^2 = 0$. ἄρα $A = \Delta^2$, καὶ $\Gamma = \delta^2$. ἔστω οὖν τὸ μὲν Δ^2 τὸ ἐμφαῖνον τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ Διαστήματος ΑΓ, ἴσον α^2. τὸ δὲ δ^2 τὸ ἐμφαῖνον τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ΒΓ, ἴσον β^2. καὶ ἔσεται $A = \alpha^2$, καὶ $\Gamma = \beta^2$. καὶ τεθέντων ἐν ταῖς ἐξισώσεσι $A - \Delta^2 = T^2$, καὶ $\Gamma - \delta^2 = \tau^2$ ἀντὶ τῶν Α, καὶ Γ, τῶν α^2, β^2, ἔσεται $\alpha^2 - \Delta^2 = T^2$, καὶ $\beta^2 - \delta^2 = \tau^2$. διὸ $T = \sqrt{\alpha^2 - \Delta\Delta}$, καὶ $\tau = \sqrt{\beta^2 - \delta\delta}$. καὶ ἐπειδὴ $T : \tau :: \Delta . \chi : \delta . X$, §. 161. ἄρα τὸ μὲν $T = \frac{\Delta}{X}$, τὸ δὲ $\tau = \frac{\delta}{\chi}$. ἔσονται οὖν τὰ ἐλάχιστα μέρη τῶν ἐξισώσεων τούτων $T = \frac{d\Delta}{dX}$, καὶ $\tau = \frac{d\delta}{d\chi}$, σταθερῶν τῶν Ταχυτήτων Τ, τ νομιζομένων. ἄρα καὶ $\frac{d\Delta}{dX} = \sqrt{\alpha^2 - \Delta\Delta}$, καὶ $\frac{d\delta}{d\chi} = \sqrt{\beta^2 - \delta\delta}$. διὸ $dX = \frac{d\Delta}{\sqrt{\alpha^2 - \Delta\Delta}}$; καὶ $d\chi =$

$\frac{d\delta}{\sqrt{\beta^2 - \delta\delta}}$. ἀλλὰ τὰ γραμματίδια $\frac{d\Delta}{\sqrt{\alpha^2 - \Delta\Delta}}$, $\frac{d\delta}{\sqrt{\beta^2 - \delta\delta}}$ στοιχεῖά εἰσι Γωνιῶν Ὀρθῶν, (ὡς κατωτέρω δειχθήσεται) αἵτινες πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἄρα καὶ τὰ ἑαυτῶν στοιχεῖα ἴσα ἀλλήλοις. διὸ καὶ $dX = d\chi$. ἄρα καὶ $X = \chi$. ἀλλὰ τὸ μὲν X ἐμφαίνει τὸν Χρόνον, οὗ δεῖται τὸ Σῶμα, ἵνα ἀπὸ τοῦ Α εἰς τὸ Γ ἀφίκηται· τὸ δὲ χ τὸν Χρόνον, οὗ δεῖται, ὅπως ἀπὸ τοῦ Β εἰς τὸ αὐτὸ Γ φθάσῃ. ἴσοις ἄρα Χρόνοις τὸ τοιοῦτον Σῶμα διέρχεται τὰ Διαστήματα ΑΓ, ΒΓ.

§. 374. Τὰ γραμματίδια $\frac{d\Delta}{\sqrt{\alpha^2 - \Delta\Delta}}$, $\frac{d\delta}{\sqrt{\beta^2 - \delta\delta}}$ στοιχεῖά εἰσι Γωνιῶν Ὀρθῶν.

Πιν. ΙϚ. Σχ. 3. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἡμικύκλιον τὸ ΑΜΕ ἡμιδιάμετρον ἔχον τὴν ΑΒ = α. καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἤχθω ἡ ΒΜ πρὸς Ὀρθὰς τῇ ΑΕ. καὶ εἰλήφθω ἡ ΒΔ = Δ, καὶ ἡ ΓΔ ἐλάχιστον μέρος οὖσα τῆς ΒΔ ἴση $d\Delta$. καὶ ἤχθωσαν αἱ ΓΖ, ΔΦ παράλληλοι τῇ ΒΜ. καὶ ἀπὸ τοῦ Φ ἤχθω ἡ ΦΗ παράλληλος τῇ ΒΕ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΒΦ. ἔσεται οὖν ἡ μὲν $\text{ΑΓ} = \alpha + \Delta$· ἡ δὲ $\text{ΕΓ} = \alpha - \Delta$. καὶ ἐπεὶ ὡς ΑΓ : ΓΖ :: ΓΖ : ΓΕ, ἄρα ἡ $\text{ΓΖ} = \sqrt{\alpha^2 - \Delta\Delta}$. διὸ τὸ ἐλάχιστον μέρος τῆς ΓΖ, ἤτοι τὸ $\text{ΖΗ} = \frac{-\Delta d\Delta}{\sqrt{\alpha^2 - \Delta\Delta}}$.

ἀλλὰ $\overline{\text{ΖΦ}}^2 = \overline{\text{ΖΗ}}^2 + \overline{\text{ΗΦ}}^2$. ἄρα $\text{ΖΦ} = \frac{\alpha d\Delta}{\sqrt{\alpha^2 - \Delta\Delta}}$.

ἀλλὰ τὸ Πηλίκον τοῦ Τόξου ΖΦ, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΒΖ ἐμφαίνει τὴν Γωνίαν ΒΖΦ. (ἔχουσι γὰρ αἱ Γωνίαι, ὡς ῥᾷον περαίνεται ἐκ τῶν Ἀρχιμηδείων Θεωρημάτων, λόγον συγκείμενον ἐκ τοῦ ὃν ἔχουσι τὰ Τόξα ἐφ' ὧν βεβήκασι, καὶ ἐκ τοῦ ἀντιστρόφως τῶν ἡμιδιαμέτρων τῶν Κύκλων) ἄρα ἡ Γωνία ΖΒΦ =

$d\Delta$

$\frac{d\Delta}{\sqrt{\alpha^2 - \Delta\Delta}}$. ἀλλ' αὕτη ἐστὶ τὸ ἐλάχιστον μέρος τῆς Ὀρθῆς ΜΒΕ· ἄρα τὸ γραμματίδιον $\frac{d\Delta}{\sqrt{\alpha^2 - \Delta\Delta}}$ στοιχεῖον Ὀρθῆς Γωνίας ἐμφαίνει. ληφθείσης δὲ τῆς ΑΒ = ϐ, καὶ τῆς ΒΔ = δ, ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι τὸ Γραμματίδιον $\frac{d\delta}{\sqrt{\beta^2 - \delta\delta}}$ στοιχεῖον Ὀρθῆς Γωνίας παρίστησι.

§. 375. Τούτων οὖν κειμένων, ἀπὸ τῆς Κορυφῆς τῆς Κυκλοειδοῦς ΗΒΓ, τῆς ἐπὶ τὰ κάτω ἐπιβλεπούσης, ἤχθω ὁ Ἄξων ΒΑ. καὶ γεγράφθω περὶ αὐτὸν ὁ Γεννήτωρ Κύκλος ΒΦΑ. καὶ ἀπὸ τῶν τυχόντων Σημείων τῆς Κυκλοειδοῦς Η, Ι τετάχθωσαν αἱ ΗΔ, ΙΕ. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Β ἤχθω ἡ Ὁριζόντιος ΒΘ. ἀπὸ δὲ τῶν Η, καὶ Ι αἱ ΗΘ, ΙΚ παράλληλοι τῷ Ἄξονι ΒΑ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΦΒ, ϹΒ. τοιγαροῦν τὸ Σῶμα διελθὸν τὸ ΗΒ Τόξον, τοσαύτην ἕξει Ταχυτῆτα, ὅσην ἔσχεν ἄν, διελθὸν καὶ τὴν ΗΘ, ἴσην οὖσαν τῇ ΔΒ· διανύσαν δὲ τὸ ΙΒ, τοσαύτην ὅσην καὶ τὴν ΙΚ=ΕΒ. §. 351. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν Ταχυτήτων Τετράγωνα ἀνάλογά εἰσι ταῖς Δυνάμεσι. §. 184. ἄρα αἱ Δυνάμεις τοῦ Σώματος διανύσαντος τὰ ΗΒ, ΙΒ ἴσαι ταῖς Δυνάμεσι ταῖς ὑπ' αὐτοῦ κεκτημέναις, διελθόντος τὰς ΔΒ, ΕΒ ἀπολύτῳ Δυνάμει τῆς ἑαυτοῦ Βαρύτητος. ἀλλὰ λόγον ἔχει ἡ ἀπόλυτος, (διιόντος τοῦ Σώματος τὴν ΒΔ) πρὸς τὴν σχετικὴν, ὃν ΒΦ : ΒΔ, ἤτοι ὃν ΑΒ : ΒΦ. (ἔστι γὰρ διὰ τὸ ἰδίωμα τοῦ Κύκλου ὡς ΒΔ : ΒΦ :: ΒΦ : ΒΑ) καὶ ὅτε πάλιν τὸ Σῶμα διανύει τὴν ΒΕ, ἡ ἀπόλυτος Δύναμις αὐτοῦ, πρὸς τὴν σχετικὴν λόγον ἔχει, ὃν ΒϹ : ΒΕ. §. 275. ἢ ὡς ΑΒ : ΒϹ. ἄρα ἡ σχετικὴ, πρὸς τὴν σχετικὴν λόγον ἔχει, ὃν ΒΦ : ΒϹ, ἢ ὃν 2ΒΦ : 2ΒϹ. ἀλλὰ τὸ Σῶμα φέρεται ἐπὶ τὰ ΗΒ, ΙΒ Δυνάμει σχετικῇ, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων §. 356. δῆλον. ἄρα ἡ Δύναμις ἡ τὸ Πιν. ις. σχ. 4.

τὸ Σῶμα διανύει τὸ ΗΒ, πρὸς τὴν Δύναμιν ᾗ διέρχεται τὸ ΙΒ :: 2ΦΒ : 2CB. ἀλλὰ 2ΦΒ = ΗΒ, καὶ 2CB = ΙΒ. §. 372. ἄρα αἱ Δυνάμεις, αἷς τὸ Σῶμα ἐπὶ τῆς Κυκλοειδῦς κινεῖται ἀνάλογόν εἰσι τοῖς Τόξοις τῆς Κυκλοειδῦς, ἤτοι τοῖς Διαστήμασι τοῖς μεταξὺ αὐτῦ, καὶ τῦ Σημείου εἰς ὃ φέρεται. ἴσοις ἄρα Χρόνοις τὰ ἄνισα τῆς Κυκλοειδῦς Τόξα διέρχεται. §. 373. τοιγαρῦν τὰ Ἐκκρεμῆ καταγράφοντα Τόξα Κυκλοειδῦς διὰ τῆς ἑαυτῶν Κινήσεως, ἰσοχρόνους ἔχουσι τὰς ἑαυτῶν Περιαγωγάς.

Πιν.ΙΓ. σχ.5. §. 376. Ἐὰν τὸ ἐντετυλιγμένον Νῆμα τῇ Κυρτῇ Περιμέτρῳ τῆς Ἡμικυκλοειδῦς ΒΔ, οὕτως αὐτῆς ἐκτυλίγηται, ὥστε τὸ ἐκτυλιχθὲν αὐτῦ μέρος ΓC ἐκτεταμένον ἀεὶ εἶναι, καὶ ἁπτόμενον τῆς ΒΔ, τὸ Σημεῖον Γ ἄλλην ἡμικυκλοειδῆ καταγράψει τὴν ΔΓΑ, ὁμοίαν κατὰ πάντα, καὶ ἴσην τῇ ΒΔ. ὡσαύτως, ἐὰν τὸ αὐτὸ Νῆμα μετὰ τὸ ἐκτυλιχθῆναι ἀπὸ τῆς ΒΔ, κινούμενον ἔτι ἐντυλίγηται ἄλλῃ ἡμικυκλοειδεῖ τῇ ΒΕ ὁμοίᾳ, καὶ ἴσῃ τῇ ΒΔ, καὶ συμβαλλούσῃ αὐτῇ κατὰ τὸ Β, διαγράψει καὶ τὴν λοιπὴν ἡμικυκλοειδῆ ΑΕ ἴσην, καὶ ὁμοίαν τῇ ΒΞ. (α) ἐκ τούτων ἐν φανερὸν, ὅτι ἐὰν ληφθῶσι δύω μεταλλικὰ Πέταλα, οἷον, τὰ ΒCΔ, ΒΗΕ, τὴν αὐτὴν ἔχοντα Καμπυλότητα, ἣν ἡ ἡμικυκλοειδὴς ΔΑ, καὶ τὰ μὲν δύω πέρατα αὐτῶν συμβάλλῃ ἀλλήλοις κατὰ τὸ Β, τὰ δὲ ἕτερα δύω ἀπέχῃ ἀπ᾽ ἀλλήλων διαστήματι ἴσῳ τῇ Βάσει ΔΕ τῆς Κυκλοειδῦς ΔΑΕ, αἰωρηθῇ δὲ ἀπὸ τῦ Β Σημείου τὸ ΒΑ Ἐκκρεμὲς Μῆκος ἔχον ἴσον τῇ τῆς ἡμικυκλοειδῦς ΒCΔ περιμέτρῳ, ἢ τῷ διπλασίῳ τῆς Διαμέτρου τῦ Γεννήτορος Κύκλου, §. 372. τὸ τοιῦτον Ἐκκρεμὲς κινούμενον, καὶ

πᾶν

(α) Ὅρα τὴν Δεῖξιν ἐν τῷ τρίτῳ μέρει τῦ Πινακοτίου, ὃ συνέθετο ὁ Οὐγένιος περὶ τῦ δι᾽ Ἐκκρεμῶν κινουμένου Ὡρολογίου.

ταῖς ἡμικυκλοειδέσι ΒΔ, ΒΕ ἐνειλεμένόν τε καὶ ἐξειλέμενον, Κυκλοειδῆ καταγράφει.

§. 377. Πρόβλημα περίπυστον παρὰ τοῖς Νεωτέροις τῶν Φιλοσόφων καὶ τὸ προσευρεῖν τὸ Κέντρον τῆς περιαγωγῆς τοῦ συνθέτου Ἐκκρεμοῦς. εἴτουν τὸ προσδιορίσαι τὸ Μῆκος ἁπλοῦ τινὸς ἰσοχρόνως τῷ συνθέτῳ περιαγομένου. πολλοὶ γοῦν τῷ ζητουμένῳ τὸν νοῦν ἐπιστήσαντες, διαφόρους λύσεις ἐξεῦρον, συμφώνους τῇ ἑξῆς ῥηθησομένῃ.

Τοῦ Βάρους ἑκάστου τῶν Σωμάτων πολλαπλασιάσαντος τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ Διαστήματος αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Κέντρου τῆς Κινήσεως, καὶ τοῦ Ἀθροίσματος πάντων τῶν Γινομένων διαιρεθέντος εἰς τὸ Ἄθροισμα τῶν Γινομένων ἐκ τοῦ Βάρους ἑκάστου Σώματος, καὶ τοῦ ἑαυτοῦ Διαστήματος ἀπὸ τοῦ Κέντρου τῆς Κινήσεως, τὸ Πηλίκον δώσει τὸ Μῆκος τοῦ ζητουμένου ἁπλοῦ Ἐκκρεμοῦς. οἷον ἐὰν τὸ σύνθετον
Ἐκκρεμὲς ΓΑ, Κέντρον μὲν τῆς Κινήσεως ἔχῃ τὸ Γ, Πιν. ιε.
Βάρη δὲ τὰ Β καὶ Α, τὸ Μῆκος τοῦ ἁπλοῦ Ἐκκρε- Σχ. 6.
μοῦς τοῦ ἰσοχρόνως αὐτῷ περιαγομένου ἴσον ἔσται $\frac{Α.\overline{ΑΓ}^2 + Β.\overline{ΒΓ}^2}{Α.ΑΓ + Β.ΒΓ}$. τὴν δεῖξιν τοῦ τοιούτου ὡς μακροσκελῆ, καὶ ἐπίπονον κατελίπομεν· ὅρα δ' αὐτὴν ἐν τῇ τοῦ Οὐολφίου Μηχανικῇ. Σελ. 99. Θεωρ. 61.

ΚΕΦ. ΚΔ'.

Περὶ τῆς τῶν Ῥιπτομένων Σωμάτων Κινήσεως.

§. 378. Πᾶν Σῶμα παραλλήλως, ἢ λοξῶς εἰς τὸν Ὁρίζοντα ῥιπτόμενον, ὑπὸ δύω Δυνάμεων κινεῖται. ὧν ἡ μὲν ἐστὶν ἡ ἰδία αὐτοῦ Βαρύτης· ἡ δὲ, ἣν ἐκ τοῦ βάλλοντος ἔλαβε. καὶ ἡ μὲν Κάθετον,

ἡ δὲ