ΑΡΘΡΟΝ Β΄.

Περὶ Ποσότητος.

§. Α΄. Περὶ Ἰσότητος, Ἀνισότητος, Μεγέθους, Ποσότητος, καὶ Ἐπιτάσεως.

Ἂν ἴσως δύω πράγματα βάνωνται ἕνα ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο, ἢ ἐφαρμόζουν ἐντελῶς ἀπὸ κάθε μέρος, καὶ λέγονται ἴσα, ἢ ὑπερέχει τὸ ἕνα τοῦ ἄλλου, καὶ ὀνομάζονται ἄνισα· ἐκεῖνο, ὁποῦ ὑπερέχει λέγεται μεγαλήτερον, καὶ ἐκεῖνο, ὁποῦ ὑπερέχεται μικρότερον. Ἀπὸ

ταχύτητα, ἀλλὰ ἀναλόγως μὲ τὸ τετράγωνόν της. Οἱ ἄλλοι ἀπεκείνοντο, ὅτι αὐτὸ ἦτον ἀληθινὸν, ὅμως ἦτον παρομοίως ἀληθινὸν καὶ ὅτι ἂν τὸ σῶμα εἰς τὴν πρώτην πτῶσιν ἀναλίσκῃ 1 χρόνον, εἰς τὴν δευτέραν ἀναλίσκει 2, εἰς τρόπον ὁποῦ ἀνάγωντας μὲ τὴν γνωστὴν μέθοδον καὶ εἰς τὰ δύω σώματα τὴν βραδυνομένην κίνησιν εἰς ἰσοταχῆ, εἰς καιρὸν ὁποῦ τὸ πρῶτον σῶμα μὲ τὴν ταχύτητα ὡς 1, διέρχεται διάστημα 1, τὸ δεύτερον μὲ τὴν ταχύτητα 2, διέρχεται τὸ διάστημα 2, καὶ ἐπομένως αἱ δυνάμεις τῶν δύω σωμάτων εἰς χρόνους ἴσους εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὴν ἁπλῆν ταχύτητα, καὶ ὄχι μὲ τὸ τετράγωνόν της. Εἶναι ὅμως εὔκολον νὰ ἰδοῦμεν, καθὼς ἄριστα ἐπαρατήρησεν ὁ Δαλαμπέρτ εἰς τὸ Προοίμιον τῆς περὶ Δυναμικῆς Πραγματείας του, ὅτι τοῦτο τὸ μαγαλώτατον ζήτημα συνίστατο εἰς μάχας ψιλῶν ὀνομάτων. Ἐπειδὴ ὁμοφωνῶντας καὶ τὰ δύω μέρη εἰς τὸ πρᾶγμα, ἔμενε μόνον νὰ ἀποφασίσουν, ἂν ἡ δύναμις τῶν δύω σωμάτων πρέπῃ νὰ μετρηθῇ ἀπὸ τὸ ὁλικὸν ἀποτέλεσμα, ὀλιγωρῶντας τὸν καιρὸν, ἢ ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα εἰς τὸ γινόμενον τῆς κάθε στιγμῆς. Εἰς τὴν πρώτην πτῶσιν ἡ δύναμις αὐξάνει κατὰ λόγον τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος· εἰς τὴν δευτέραν κατὰ λόγον τῆς ταχύτητος μόνον. Ὅμως ποῖος δὲν βλέπει, ὅτι εἶναι εἰς τὸ θέλημα τοῦ καθ᾽ ἑνὸς νὰ μετρήσῃ τὴν δύναμιν κατὰ τὸν ἕνα ἢ κατὰ τὸν ἄλλον τρόπον, καὶ ὅτι μήτε ἀπαιτεῖται ἄλλο, παρὰ νὰ εἰπῇ εἰς ποῖον τρόπον τοῦ ἀρέσκει νὰ τὴν μετρήσῃ;

Ἀπὸ τοῦτο φαίνεται ὅτι ἡ ἰδέα τοῦ μεγέθους γίνεται προηγουμένως ἀπὸ τὴν ἔκτασιν· ὅμως μεταφέρεται ἔπειτα ἐν γένει εἰς ὅλα τὰ πράγματα, ὁποῦ ἐπιδέχονται αὔξησιν, ἢ μείωσιν, περιλαμβάνοντας ἀκόμη ϗ ἐκεῖνα, ὁποῦ δὲν ἔχουν ἔκτασιν, ὅ,τι λογῆς εἶναι οἱ χυμοί, αἱ ὀσμαί, τὸ ψυχρόν, τὸ θερμόν, ἡ αἴσθησις· ὅθεν λέγομεν κοινότερον ὅτι τὸ τάδε πρᾶγμα ἔχει μεγαλήτερον ἢ μικρότερον χυμόν, μεγαλητέραν ἢ μικροτέραν ὀσμὴν ἀπὸ τὸ τάδε, ϗ τοῦτο τὸ σῶμα εἶναι θερμότερον, ϗ ἐκεῖνο ψυχρότερον.

Κυρίως ὅμως ἐφ' ὅσον ἕνα πρᾶγμα θεωρεῖται ἀφῃρημένως ϗ γενικῶς ὡς ἐπιδεκτικὸν τοῦ μᾶλλον ϗ ἧττον, ἀντὶ μεγέθους ὀνομάζεται καλλίτερα ποσότης· ϗ ὁπόταν ὁ λόγος εἶναι περὶ αἰσθημάτων, ἡ μεγαλητέρα ἢ μικροτέρα δύναμίς τους ὡς πρὸς ἄλλο κανένα, λέγεται ἰδιαίτερον ἐπίτασις, ὅθεν τὸ θερμόν, τὸ ψυχρόν, ὁ ἦχος, ἡ ἡδονή, ἡ ἀλγηδών, λέγονται περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον ἐπιτεταμένα· καὶ ὡς πρὸς ἄλλα ὀνομάζεται σφοδρότης· ὅθεν ἕνας χυμός, καὶ μία ὀσμὴ λέγεται περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον σφοδρά.

Ἡ ἰδέα τοῦ μεγέθους δὲν εἶναι ἀπόλυτος, ἀλλὰ σχετική· ἐπειδὴ κανένα πρᾶγμα καθ' ἑαυτὸ ἀπολύτως δὲν λέγεται μικρὸν ἢ μεγάλον, ἀλλὰ παραβαλλόμενον πρὸς ἄλλο τοῦ ἰδίου εἴδους· ὥστε ἂν ἐφαίνετο ἕνας τράγος, ὁποῦ νὰ ἔχῃ μέγεθος βοδίου, ἤθελε λεχθῇ, τέρας ἀμέτρου μεγέθους· εἰδὲ ϗ ἐφαίνετο ἕνας ἐλέφας τοῦ αὐτοῦ μεγέθους (δηλ. ἴσια μὲ ἕνα βόδι) ἤθελε λεχθῇ μικρότατος.

Αἱ ἀναφοραὶ τῆς ποσότητος εἶναι τὸ ἰδιαίτερον ὑποκείμενον τῶν Μαθηματικῶν, οἱ ὁποῖοι διαστέλλουν δύω εἴδη ποσότητος, ἕνα ὁποῦ τὸ ὀνομάζουν ποσὸν συνεχές, ϗ ἄλλο, τὸ ὁποῖον τὸ λέγουν διακεκριμένον.

Ποσὸν συνεχὲς ἐννοοῦν τὴν ἔκτασιν, ὁποῦ εἰς καθε σῶμα θεωροῦν ὡς πρᾶγμα συνεχές, χωρὶς διακοπήν, ἢ χωρισμὸν μερῶν· ϗ διακεκριμένον, τοῦτ' ἔστι ξεχωρισμένον, ἐννοοῦν τοὺς ἀριθμούς, εἰς τοὺς ὁποίους

καθε

κάθε μονὰς συγκροτεῖ ἕνα πρᾶγμα καθ᾽ ἑαυτὴν, ϗ ξεχωρισμένη ἀπὸ κάθε ἄλλην. Τὸ συνεχὲς ποσὸν εἶναι τὸ ἰδιαίτερον ὑποκείμενον τῆς Γεωμετρίας, καὶ τὸ διακεκριμένον εἶναι τῆς Ἀριθμητικῆς.

§. Β΄. Περὶ τοῦ συνεχοῦς Ποσοῦ, ϗ ἑπομένως περὶ Στερεοῦ, Ἐπιφανείας, Γραμμῆς, Σημείου, Γωνιῶν, ϗ Σχημάτων.

Τρία εἴδη διαστάσεως θεωροῦν οἱ Γεωμέτραι εἰς κάθε σῶμα, μῆκος, πλάτος, ϗ ὕψος, ἢ βάθος, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὰ δύω τελευταῖα λαμβάνονται ἀδιαφόρως· ἐπειδὴ τὸ μέτρον ἑνὸς πράγματος εἶναι ἴσον ἢ ἀπὸ τὰ κάτω εἰς τὰ ἄνω λαμβάνεται, ἢ ἀπὸ τὰ ἄνω εἰς τὰ κάτω.

Κάθε πρᾶγμα ὁποῦ εἶναι μακρὸν, πλατὺ, ϗ βαθὺ, ὀνομάζεται στερεὸν, εἰς τὸν ὁποῖον ὅρον οἱ Γεωμέτραι δὲν περιλαμβάνουν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀδιαχωρήτου, ἐπειδὴ αὐτοὶ δὲν θεωροῦν, παρὰ τὴν ἔκτασιν μόνον.

Ἂν ἴσως εἰς ἕνα πρᾶγμα θεωρῆται μόνον ἡ ἐξωτερικὴ ὄψις, τοῦτ᾽ ἔστι μόνον τὸ μῆκος ϗ πλάτος, χωρὶς βάθος, τοῦτο ὀνομάζεται ἐπιφάνεια.

Ἂν ἴσως θεωρῆται μόνον τὸ μῆκος, χωρὶς πλάτος, ὀνομάζεται γραμμή.

Ἂν ἴσως τέλος πάντων μόνον τὸ πέρας μιᾶς γραμμῆς, χωρὶς νὰ στοχασθῇ τινὰς τὸ μῆκος, πλάτος, ϗ βάθος, τοῦτο λέγεται σημεῖον.

Ὅθεν οἱ Γεωμέτραι ὁρίζουν στερεὸν ἐκεῖνο, ὁποῦ ἔχει μῆκος, πλάτος, ϗ βάθος· ἐπιφάνειαν ἐκεῖνο, ὁποῦ ἔχει μῆκος ϗ πλάτος, χωρὶς βάθος· ϗ σημεῖον ἐκεῖνο, ὁποῦ δὲν ἔχει μήτε μῆκος, μήτε πλάτος, μήτε βάθος.

Τῶν στερεῶν, ϗ τῶν ἐπιφανειῶν ἔχομεν ἀληθινὰς ἰδέας· ἐπειδὴ μᾶς παρασταίνουν ἀληθινὰς εἰκόνας. Τῶν

γραμ-

γραμμῶν ὅμως καὶ τῶν σημείων, καθὼς τὰ ἐννοοῦν οἱ Γεωμέτραι, δὲν ἔχομεν, παρὰ ἁπλᾶς ἐννοίας· ἐπειδὴ δὲν ἠμποροῦμεν νὰ φανταθοῦμεν μίαν γραμμὴν, ὅσον λεπτὴν καὶ ἂν τὴν φανταθοῦμεν, ὅπου νὰ μὴν ἔχῃ κάποιον πλάτος· εἰς τὴν ὁποίαν περίςασιν θέλει εἶναι μία γραμμὴ φυσικὴ, τοῦτ' ἔςι μία ἀληθινὴ ἐπιφάνεια, ἀγκαλὰ καὶ ςενωτάτη, καὶ ὄχι πλέον μία γραμμὴ γεωμετρικὴ, καὶ πολλὰ ὀλιγώτερον ἕνα ἀληθινὸν σημεῖον γεωμετρικὸν, τὸ ὁποῖον ὡς ἐςερημένον μήκους, πλάτους, καὶ βάθους, ςερεῖται καὶ κάθε ἔκτασιν.

Εἶναι ἀληθινὸν ὅτι οἱ Γεωμέτραι θεωροῦν τὴν γραμμὴν ὡς γεννημένην ἀπὸ τὴν κίνησιν ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον ἀφίνει κατόπιν του ἴχνος· τὴν ἐπιφάνειαν ὡς γεννημένην ἀπὸ ἕνα παρόμοιον ἴχνος, ὅπου ἀφίνει μία γραμμὴ κινουμένη ἀπὸ τόπον εἰς τόπον· καὶ τὸ ςερεὸν παρομοίως παρηγμένον ἀπὸ τὴν κίνησιν μιᾶς ἐπιφανείας. Ἀνίσως ὅμως θέλουν νὰ σχηματίσουν καμμίαν εἰκόνα τούτων τῶν πραγμάτων, εἰς καιρὸν ὅπου μὲ τὰ λόγια λέγουν, ὅτι συλλαμβάνουν σημεῖον καὶ γραμμὴν γεωμετρικὴν, πραγματικῶς ὅμως δὲν συλλαμβάνουν παρὰ σημεῖον καὶ γραμμὴν φυσικήν· ἐπειδὴ μόνον τὰ φυσικὰ, τοῦτ' ἔςι τὰ πραγματικῶς ἐκτεταμένα πράγματα, ἠμποροῦν νὰ ἀφήσουν ὀπίσω τους ἀληθινὸν ἴχνος.

Κάθε ἔκτασις περικεκλεισμένη ἀπὸ κάθε μέρος καὶ περιωρισμένη ἀπὸ γραμμὰς ἢ εὐθείας, ἢ καμπύλας λέγεται σχῆμα.

Τῶν εὐθειῶν καὶ καμπύλων γραμμῶν οἱ παλαιοὶ Γεωμέτραι δὲν μᾶς ἔδωκαν, παρὰ ἀτελεῖς καὶ ἀσαφεῖς ὁρισμούς. Διὰ νὰ λάβουν μίαν ἔννοιαν (τῶν εὐθειῶν καὶ καμπύλων) φαντάζονται μὲ τὸν νοῦν τους πολλὰς γραμμὰς ἠγμένας ἀνάμεσα εἰς δύω δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β· ἀνάμεσα εἰς αὐτὰς θέλει εἶναι μία, ἡ ὁποία περιςρεφομένη περὶ τὰ πέρατά της, θέλει κρατῆ πάντοτε τὴν θέσιν της, καὶ θέλει περιδινεῖται πάντοτε περὶ ἑαυτὴν, καὶ θέλει ὀνομασθῆ εὐθεῖα. Ὅλαι αἱ ἄλλαι, ὁπȣ̃ περιςρεφόμεναι περὶ τὰ δύω πέρατα, λάβȣν μίαν θέσιν ἐναντίαν, θέλȣν ὀνομαθῆ καμπύλαι (1). Ἀπὸ αὐτὴν τὴν ἔννοιαν ἀποδείχνεται εὔκολα ὅτι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἡ ἐλαχίςη, ὁπȣ̃ ἠμπορεῖ νὰ σύρθῃ ἀνάμεσα εἰς δύω δοθέντα σημεῖα, καὶ ὅτι ἀνάμεσα εἰς δύω σημεῖα δὲν ἠμπορεῖ νὰ σύρθῃ παρὰ μία μόνη εὐθεῖα, καὶ ὅτι καμπύλαι ἠμπορȣ̃ν νὰ σύρθȣν ἄπειροι, κτ.

Ἀπὸ τȣ̃το λοιπὸν συμπεραίνεται, ὅτι διὰ νὰ περικλεισθῇ ἕνα διάςημα, καὶ ἑπομένως νὰ σχηματισθῇ ἕνα σχῆμα, δὲν φθάνει ἡ σύναψις δύω εὐθειῶν γραμμῶν τιθεμένων κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν, αἱ ὁποῖαι τότε δὲν σχηματίζȣν ἄλλο, εἰμὴ μίαν μόνην, μήτε δύω εὐθειῶν κεκλιμένων τῆς μιᾶς ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην, ὁπȣ̃ σχηματίζȣν γωνίαν, ἀλλὰ εἶναι ἀναγκαῖαι τȣ̃λάχιςον τρεῖς, αἱ ὁποῖαι σχηματίζȣν ἐκεῖνο τὸ σχῆμα, ὁπȣ̃ λέγεται τρίγωνον· ἐξ ἐναντίας μία καμπύλη ὁποιαδήποτε, τῆς ὁποίας τὸ ἕνα πέρας ἐπανέρχεται εἰς τὸ ἄλλο, εἶναι ἱκανὴ νὰ συγκροτήσῃ σχῆμα, καθὼς βλέπομεν εἰς τὸν κύκλον, εἰς τὴν ἔλλειψιν, κτ.

Τὰ τόξα τῶν κύκλων εἶναι τὸ μέτρον τῶν γωνιῶν· καὶ ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια κάθε κύκλȣ διαιρεῖται εἰς 360 μοίρας, αἱ γωνίαι, ὁπȣ̃ περιλαμβάνȣν ἕνα τόξον 90 μοιρῶν, λέγονται ὀρθαί· ἐκεῖναι, ὁπȣ̃ περιλαμβάνȣν μεγαλήτερον, λέγονται ἀμβλεῖαι, καὶ ἐκεῖναι, ὁπȣ̃ περιλαμβάνȣν μικρότερον (ἀπὸ 90 μοίρας), ὀνομάζονται ὀξεῖαι.

Τὰ σχήματα ὀνομάζονται εὐθύγραμμα, καμπυλόγραμμα, ἢ μικτόγραμμα, κατὰ τὴν ποιότητα τῶν γραμμῶν, ὁπȣ̃ τὰ περικλείȣν.

Ὀνο-

---

(1) Αὐτὴν τὴν ἁπλȣςάτην ἔννοιαν μᾶς τὴν ἐχορήγησεν ὁ Ἀββᾶ Βενίνης, εἰς τὰ Στοιχεῖα τῆς Μαθηματικῆς τȣ Τόμ. Β΄. Εἰσαγωγή.

Ὀνομάζονται προσέτι τρίγωνα, τετράγωνα, πεντάγωνα, ἑξάγωνα κτ. κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν γωνιῶν, καὶ τῶν πλευρῶν τους.

Λέγονται ἀκόμι καὶ κανονικὰ, ἢ ἀκόνιστα. Κανονικὰ λέγονται ἐκεῖνα, ὁποῦ κατασκευάζονται μὲ ἕνα κανόνα ὡρισμένον, καθὼς τὸ τετράγωνον, ὁ κύκλος κτ. Ἀκανόνιστα ἐκεῖνα, ὁποῦ δὲν ἔχουν κἀνένα κανόνα διωρισμένον.

Τὰ εἰδικὰ ὀνόματα τοῦ κάθε σχήματος, καθὼς καὶ ὅλων τῶν ἄλλων πραγμάτων, ὁποῦ ἀνήκουν εἰς τὸ συνεχὲς ποσὸν, ἀφίνομεν νὰ τὰ πραγματεύωνται οἱ Γεωμέτραι, ἀρκούμενοι νὰ σημειώσωμεν ἐδῶ μόνον τὰς γενικωτέρας ἰδέας καὶ ἐννοίας, ὁποῦ ἀνήκουν εἰς αὐτὸ (τὸ συνεχὲς ποσόν.)

§. Γ'. Περὶ τοῦ διακεκριμένου Ποσοῦ, καὶ ἑπομένως περὶ Μονάδος, καὶ Ἀριθμῶν, καὶ περὶ φύσεως τῶν ἀριθμητικῶν Πράξεων.

Τὸ διακεκριμένον ποσὸν ἀναφέρεται, καθὼς εἴπαμεν, εἰς τοὺς ἀριθμούς.

Κάθε ἀριθμὸς εἶναι τὸ ἄθροισμα δύω, ἢ περισσοτέρων μονάδων, καὶ κάθε μονὰς εἶναι ἕνα πρᾶγμα μόνον, ἢ θεωρούμενον ὡς τοιοῦτον.

Ὅθεν οἱ Σχολαστικοὶ διέστελλον δύω εἴδη μονάδος· ὅ ἐστι μονάδα ἁπλότητος, ἡ ὁποία τίθεται εἰς ἕνα πρᾶγμα πραγματικῶς μόνον καὶ ἁπλοῦν, καθὼς ἡ ψυχή· καὶ μονάδα συνθέσεως, ἡ ὁποία συγκροτεῖται ἀπὸ πολλὰ μέρη ἑνωμένα εἰς ἕνα μόνον ὅλον, καθὼς τὸ σῶμα.

Εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς μονάδος ὑπάγονται ἀκόμι καὶ ἄλλα πολλὰ πράγματα διακεκριμένα, καὶ χωριστὰ καθ' ἑαυτὰ, ὁπόταν θεωροῦνται ὡς συναθροισμένα ὁμοῦ,

καὶ

καὶ συγκροτοῦνται ἕνα μόνον ὅλον, καθὼς ποίμνη, δῆμος, στράτευμα.

Ἡ μονάδα καθ᾽ ἑαυτὴν ἀριθμὸν δὲν συγκροτεῖ, ἀλλὰ εἶναι ἀρχὴ κάθε ἀριθμοῦ.

Οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἢ ὁλοχερεῖς, ἢ κλασματικοί. Ὁλοχερεῖς ὀνομάζονται, ὁπόταν περιέχουν μονάδας ὁλοκλήρους, καθὼς 2, 3, 4, ἢ περισσότερα χρόσια. Κλασματικοὶ, ἢ κλάσματα, ὁπόταν δηλοῦν μέρη μιᾶς μονάδος, ἡ ὁποία ὑποτίθεται διῃρημένη εἰς μέρη ἴσα, καθὼς $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ ἑνὸς χροσίου.

Ἡ ἀριθμητικὴ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας πολλαὶ μονάδες, ἢ, πολλοὶ ἀριθμοὶ συναθροίζονται εἰς ἕνα μόνον, ὁ ὁποῖος λέγεται τὸ κεφάλαιόν τους, ὀνομάζεται πρόσθεσις, ἢ σύναψις· καθὼς τὸ κεφάλαιον τοῦ 9 σὺν 8 εἶναι 17.

Ἐκείνη, διὰ τῆς ὁποίας ἕνας ἀριθμὸς μικρότερος ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἕνα μεγαλήτερον, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον, ὀνομάζεται ἀφαίρεσις, ἢ ὑφειλμός· καθὼς ἀφαιρῶντας 4 ἀπὸ 12, τὸ λείψανον εἶναι 8.

Ἐκείνη, διὰ τῆς ὁποίας ἕνας ἀριθμὸς λαμβάνεται, ἢ προστίθεται πολλαῖς φοραῖς εἰς τὸν ἑαυτόν του, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενόν του, λέγεται πολλαπλασιασμός· καθὼς πολλαπλασιάζων 7 μὲ 4, ὅ ἐστι λαμβάνωντας τὸν 7 τετράκις, τὸ γινόμενον εἶναι 28.

Ἐκείνη τέλος πάντων, διὰ τῆς ὁποίας ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται εἰς πολλὰ μέρη ἴσα, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον, ἢ τὸ τίμημα τοῦ κάθε μέρους, λέγεται διαίρεσις· καθὼς τοῦ 28 διαιρῶντάς τον μὲ τὸν 7, ὅ ἐστι μοιράζωντάς τον εἰς ἑπτὰ μέρη ἴσα, τὸ πηλίκον εἶναι 4.

Ἀπὸ τούτην τὴν ἔννοιαν γίνεται ἀρκετὰ φανερὸν πρῶτον ὄχι μόνον ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς δὲν εἶναι ἄλλο, παρὰ μία σύναψις ἐπανειλημμένη πολλαῖς φοραῖς, ἀλλὰ ὅτι καὶ ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι κυρίως ἄλλο, παρὰ μία ἀφαίρεσις ἐπανειλημμένη πολλαῖς φοραῖς. Διὰ τί ἡ διαίρεσις τῶν 28 χροσίων εἰς ἑπτὰ

προπρόσωπα ἐκτελεῖται παρομοίως ἀνίσως ἀπὸ τὸν ὅλον ἀριθμὸν βγάλης ἑπτὰ γρόσια, διὰ νὰ δώσης ἀπὸ ἕνα εἰς καθε πρόσωπον, καὶ ἔπειτα, ἂν βγάλης ἄλλα ἑπτὰ, καὶ μετὰ ταῦτα ἄλλα ἑπτὰ ἕως νὰ τελειώσουν, διαιρῶντάς τα πάντοτε ἐπίσης.

Δεύτερον, ὅτι ἐπειδὴ ὅλαι αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις καὶ αἱ πλέον σύνθετοι δὲν εἶναι ἄλλο, παρὰ διάφοροι συζεύξεις τούτων τῶν κυριωτέρων τεσσάρων, εἶναι φανερὸν, ὅτι ὅλαι ἀναφέρονται ὡς εἰς πρώτην ἀρχὴν τὴν πρόθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν.

§. Δ΄. Περὶ Λόγων, καὶ Ἀναλογιῶν.

Η ἀναφορὰ τῆς ἰσότητος, ἢ ἀνισότητος, ὁποῦ ἔχουν ἀναμεταξύ τους δύω ποσὰ διακεκριμένα, ἢ συνεχῆ, ὀνομάζεται λόγος· ὅθεν τόσον εἶναι νὰ εἰπῇ τινὰς ὁ λόγος τοῦ 2 πρὸς τὰ 6, ὅσον καὶ ἡ ἀναφορὰ, ὁποῦ ἔχουν οὗτοι οἱ δύω ἀριθμοί.

Ὁ λόγος ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἢ ἀριθμητικὸς, ἢ γεωμετρικός. Ἀριθμητικὸς ὀνομάζεται, ὁπόταν θεωρῆται ἡ ἁπλῆ διαφορὰ, ὁποῦ εἶναι μεταξὺ εἰς τὰ δύω ποσά· καὶ Γεωμετρικὸς ὁπόταν θεωρῆται ποσάκις ἕνα ποσὸν περιέχει ἕνα ἄλλο, ἢ περιέχεται εἰς ἕνα ἄλλο. Καθὼς εἰς τὸ εἰλημμένον παράδειγμα ὁ ἀριθμητικὸς λόγος τοῦ 2 πρὸς τὰ 6 εἶναι 4, ἐπειδὴ αὐτὴ εἶναι ἡ διαφορά τους· καὶ ὁ γεωμετρικὸς εἶναι 3, ἐπειδὴ ὁ 2, περιέχεται τρεῖς φοραῖς εἰς τὸν 6.

Ἡ ἰσότης δύω λόγων ὀνομάζεται ἀναλογία, ὅθεν ἀνάλογα ὀνομάζονται τέσσαρα ποσὰ ὁπόταν τὰ δύω πρῶτα ἔχουν ἀναμεταξύ τους τὸν ἴδιον λόγον, ὁποῦ ἔχουν τὰ δύω δεύτερα.

Ὅθεν καὶ ἡ ἀναλογία ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἢ ἀριθμητικὴ, ἢ γεωμετρική. Ἀριθμητικὴ, ὁπόταν ἡ μεταξὺ τῶν δύω πρώτων διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ ἐκείνην τῶν δύω τελευταίων· καθὼς 2 πρὸς 6 εἶναι ὡς 4 πρὸς 8.

Γεω-

Γεωμετρική, ὁπόταν τὸ πρῶτον ποσὸν περιέχῃ τὸ δεύτερον, ἢ περιέχεται ἀπ' αὐτὸ τοσάκις, ὁσάκις τὸ τρίτον περιέχει τὸ τέταρτον, ἢ περιέχεται ἀπ' αὐτό. Παραδείγματος χάριν ὁ 2 πρὸς τὸν 6, εἶναι ὡς ὁ 4 πρὸς τὸν 12.

Ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία εἶναι ἡ βάσις τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἡ ὁποία λέγεται μέθοδος χρυσῆ κατ' ἐξοχὴν διὰ τὴν μεγαλωτάτην χρῆσιν της, ὁποῦ κάμνουν εἰς τὴν Γεωμετρίαν, καὶ μάλιστα εἰς τὴν Ἀριθμητικήν. Αὐτὴ ἡ μέθοδος συνίσταται εἰς τὸ νὰ εὕρῃ τινὰς ἕνα τέταρτον ἀριθμὸν ἀνάλογον μὲ τρεῖς δοθέντας· τὸ ὁποῖον γίνεται πολλαπλασιάζοντας τὸν δεύτερον μὲ τὸν τρίτον, καὶ διαιρῶντας τὸ γινόμενον μὲ τὸν πρῶτον, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ὁ ζητούμενος τέταρτος· καθὼς ἂν δοθοῦν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ 2, 6, 4, ὁ τέταρτος ἀνάλογος 12 εὑρίσκεται πολυπλασιάζοντας τὸν 6 μὲ τὸν 4, οἱ ὁποῖοι δίδουν 24, καὶ διαιρῶντας τοῦτον μὲ τὸν 2.

§. Ε΄. Περὶ τῆς Ἀλγέβρας.

Ἕνα νέον εἶδος Ἀριθμητικῆς, ἢ μᾶλλον εἰπεῖν μία νέα πρακτικὴ τῆς ἰδίας, ἄγνωστος εἰς τοὺς Παλαιοὺς, εἰσήχθη ἀπὸ τὸν Φραγγίσκον Βιέταν, εἰς τὸν ιγ΄. αἰῶνα· ἡ ὁποία ὠνομάσθη Ἀριθμητικὴ ὡραία, Ἀριθμητικὴ καθόλου, ἢ Ἄλγεβρα, ἢ Ἀνάλυσις. Αὐτὴ συνίσταται εἰς τὸ νὰ δηλοῖ τὰς ποσότητας μὲ τὰ γράμματα τοῦ Ἀλφαβήτου, καὶ νὰ κάμνῃ ἐπάνω εἰς αὐτὰ ὅλας τὰς ἀναγκαίας συζεύξεις, χωρὶς νὰ βάνῃ τοὺς ἀριθμοὺς, ἐν ὅσῳ δὲν εὕρῃ τὸ τελευταῖον γινόμενον· ἡ ὁποία ταχύνει καὶ εὐκολύνει θαυμασιώτατα ὅλας τὰς πράξεις. (1)

§. ς΄.

(1) Τῆς καθόλου Ἀριθμητικῆς, ἢ Ἀλγέβρας, ἡ ὁποία καθ' ἑαυτὴν κυρίως ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ μέθοδος τοῦ λογίζεσθαι

§. ϛ΄. Περὶ Ποσῶν ἀπείρων καὶ ἀπειροστῶν, καὶ περὶ Ἀπειρότητος, καὶ Ἀϊδιότητος.

Τὰ ποσά, μ' ὅλον ὁποῦ εἶναι ἄλλα μεγαλήτερα καὶ ἄλλα μικρότερα, ἐν ὅσῳ συλλαμβάνονται ὡς περιωρισμένα μέσα εἰς κάποια ὅρια, ὀνομάζονται ὅλα πεπερασμένα. Ὅμως ἠμποροῦν νὰ εἶναι καὶ ποσά, τὰ ὁποῖα ἢ νὰ μὴν ἔχουν κανένα ὅριον νὰ τὰ περιγράφῃ, καθὼς εἶναι τὰ προσόντα τοῦ Θεοῦ· ἢ νὰ εἶναι τέτοια, ὁποῦ ἡμεῖς νὰ μὴν διευρίσκωμεν εἰς αὐτὰ κανένα ὅριον, καθὼς εἶναι ἡ ἔκτασις τοῦ παντός. Τὰ τοιαῦτα ποσὰ ὀνομάζονται ἄπειρα.

Ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου, ἂν ἑνωθῇ μὲ ἐκείνην τοῦ διαστήματος, παράγει τὴν ἔννοιαν τῆς ἀπειρότητος, ὁποῦ θέλει νὰ εἰπῇ διάστημα χωρὶς πέρατα. Ἂν ἑνωθῇ μὲ τὴν ἔννοιαν τοῦ χρόνου, παράγει τὴν ἔννοιαν τῆς ἀϊδιότητος, ὁποῦ σημαίνει χρόνον ἄπειρον.

Τοῦ ἀπείρου ὅμως, καθὼς εἶναι φανερὸν καὶ ἀπὸ τὸ ὄνομα, ἔχομεν μίαν ἔννοιαν ἀποφατικήν, καὶ ὄχι θετικήν· διὰ τὶ τὸ ἄπειρον ὡς πρὸς ἡμᾶς ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἀνακα-

---

(λογαριάζειν) τὰς ὁριστικὰς καὶ ἀγνώστους ποσότητας, ὡς ἂν νὰ ἦτον γνωσταὶ καὶ ὡρισμέναι, αὐτῆς λέγω τῆς καθόλου λογιστικῆς εὑρῆκαν κάποιους κανόνας καὶ οἱ παλαιοὶ Ἕλληνες, καὶ μάλιστα ὁ Διόφαντος. Αὐτὸ τὸ εἶδος τῆς Ἀριθμητικῆς τὸ ἐκαλλιέργησαν καὶ οἱ Ἄραβες, οἱ ὁποῖοι τὴν ὠνόμασαν καὶ Ἄλγεβραν. Εἰς τὴν Ἰταλίαν πρῶτοι, ὁποῦ τὴν ἄρχισαν εἶναι Λεονάρδος ἀπὸ τὴν Πίζαν, καὶ Λουκᾶς Πατζίολος εἰς τὸν ιε΄. αἰῶνα· καὶ Σκηπίων Φερρέϊς, Νικόλαος Ταρταλίας, Ἱερώνυμος ὁ Καρδάνος, καὶ Πομπήλιος εἰς τὸν ιϛ΄. Πρῶτος ὅμως, ὁποῦ τὴν διεξάπλωσε περισσότερον, καὶ ἀντεισήγαγε τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν, ἐστάθη ὁ Βιέτας, καθὼς μετὰ ταῦτα ὁ Καρτέσιος ἐστάθη πρῶτος, ὁποῦ τὴν ἐφήρμοσεν εἰς τὴν Γεωμετρίαν, καὶ Φυσικήν.

καλύψωμεν τὰ ὅρια, ἢ τὰ πέρατα· καὶ ἤθελεν εἶναι μία ἀντίφασις, ἂν εἴχαμεν θετικὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου· ἐπειδὴ τοῦτο ἤθελε δείξῃ, ὅτι ἐφθάσαμεν νὰ ἀνακαλύψωμεν τὰ ὅρια ἐκείνου τοῦ ἰδίου, ὁποῦ λέγομεν ὅτι δὲν ἔχει ὅρια.

Εἰς τόσον καθὼς ἠμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν ἕνα ποσὸν ἀπειράκις μεγάλον, ἔτζι ἠμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν ἕνα καὶ ἀπειράκις μικρὸν, καὶ αὐτὸ τότε ὀνομάζεται ἀπειροστόν. Καθὼς ὅμως ἡ ἔννοια ἑνὸς ποσοῦ ἀπείρου πραγματικῶς ὡς πρὸς ἡμᾶς ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ ἔννοια ἑνὸς ποσοῦ μεγαλητέρου ἀπὸ ὁποιονδήποτε ἐγνωσμένον, οὕτω καὶ ἡ ἔννοια ἑνὸς ἀπειροστοῦ ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ ἑνὸς ποσοῦ μικροτέρου ἀπὸ ὁποιονδήποτε ἐγνωσμένον. Καὶ ἐπάνω εἰς τὰ ἄπειρα καὶ ἀπειροστὰ ποσὰ θεωρούμενα τοιούτης λογῆς, στρέφεται ὅλος ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ῥοῶν, ἢ ὑπολογισμὸς διαφορικὸς καὶ ὁλοχερικὸς ἢ ὁλοκληρικὸς, τῶν ὁποίων τὴν εὕρεσιν τὴν χρεωστοῦμεν εἰς τὸν Νεύτονα καὶ Λεϊβνίτιον, οἱ ὁποῖοι ἐχορήγησαν εἰς τοὺς Μαθηματικοὺς τὰς μεθόδους τοῦ νὰ λύουν τὰ πλέον δύσκολα προβλήματα, ὁποῦ πρότερον ἐνομίζοντο ἀδιάλυτα.